LibrosySolucionarios.NET



SIGUENOS EN:





LIBROS UNIVERISTARIOS Y SOLUCIONARIOS DE MUCHOS DE ESTOS LIBROS GRATIS EN DESCARGA DIRECTA

VISITANOS PARA DESARGALOS GRATIS.

Ing. Juan Goñi Galarza

NUEVA

FISICA GENERAL

• TEORIA • EJERCICIOS • PROBLEMAS



- SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS
- VECTORES
- MECANICA
- CENTRO DE GRAVEDAD
- TRABAJO - POTENCIA - ENERGIA
- MOVIMIENTO - GRAVITACION - HIDROSTATICA
- CALOR - TERMODINAMICA
- ELECTRICIDAD - MAGNETISMO
- OPTICA - FENOMENO ONDULATORIO



http://librosysolucionarios.net

NUEVA

FÍSICA GENERAL

CURSO COMPLETO DE TEORÍA, EJERCICIOS Y PROBLEMAS

9ª EDICION

Por el Ing.
JUAN GOÑI GALARZA
Ex Catedrático de la U.N.I.


EDITORIAL INGENIERIA E.I.R.L.
Av. Angamos Este 310 - 101 Miraflores
Telfax 446 9568 Telf. 445 6925
LIMA - PERU

http://librosysolucionarios.net

PRÓLOGO

9ª EDICIÓN

A mi madre:

La NUEVA FISICA GENERAL es la afirmación y la evolución natural de la Física General que tanta aceptación ha tenido en el mundo del estudiante de Física. La Nueva Física General ha sido escrita sobre la base sólida de la 8ª Edición de Física General. Se mantiene el estilo de escribir, el cual creo que es permanente y como tal es clásico en mi ,"lenguaje sencillo, con profundidad, actualidad y rigòr científicos".

En esta 9ª edición se han realizado varias precisiones en todos los capítulos, se han introducido algunos conceptos nuevos y actuales.

Se ha tenido cuidado especial en el Capítulo de Mecánica con sus correspondientes subcapítulos de Cinemática, Estática y Dinámica. Los capítulos de Electricidad, Magnetismo y Electromagnetismo han sido sustantivamente mejorados en su explicación y desarrollo. Las unidades que se han usado son del Sistema Internacional en un 95%, el 5% se ha dejado para algunas unidades de medida que la ciencia y la técnica todavía lo usan, o por conveniencia técnica o por conveniencia comercial.

Quiero expresar mi reconocimiento al profesor de Física Aldo Vega que antes como mi alumno fué excelente y ahora como colaborador en la reestructuración de este libro ha demostrado su capacidad profesional, que me alegra y compromete mi gratitud.

Esperamos que esta renovada edición cale más de lo que ha calado la anterior edición, tanto en estudiantes como en profesores, para asentar cada vez mejor las bases del conocimiento para futuros técnicos y científicos, quienes serán los que construirán la grandeza de nuestra patria.

EL AUTOR

http://librosysolucionarios.net

PEDIDOS:

A Editorial Ingeniería E.I.R.L.
Telf/Fax (01) 4469568
Telf.: 4456925

* Hechos los depósitos de Ley
* Impreso en el Perú

* Es propiedad de:
EDITORIAL INGENIERÍA E.I.R.L.
R. Nº 1507659 - D
D.S. Nº 276 - 71 - IT / DS

Impreso en los Talleres Gráficos de Editorial Ingeniería E.I.R.L.
Oficinas y Planta: Av. Angamos Este 310 - 101 - Miraflores
Telf.: 4456925 TeleFax: 4469568
Lima - Perú

http://librosysolucionarios.net

INDICE

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

http://librosysolucionarios.net

INTRODUCCIÓN

La Física es una ciencia de la investigación. de la observación, una ciencia natural cuyos problemas tienen soluciones matemáticas.

¿Y QUÉ ES LA CIENCIA?

Ciencia es la investigación metodológica de los fenómenos naturales, que sobre la base de una recopilación de un conjunto de experimentos y conocimientos ordenados y relacionados entre sí, conduce al planteamiento de leyes por determinación y sistematización de las causas. El científico en su trabajo de investigación realiza los siguientes pasos:

a) Observa,
b) Organiza sus datos,
c) Plantea su teoría y
d) Verifica y comprueba la ocurrencia.

En parte, es verdad que la Física estudia los fenómenos que no alteran la estructura de la molécula. La Química es la ciencia que estudia el cambio de la misma.
Sin embargo la diferencia entre Física y Química, en algunos aspectos, es imperceptible. Por ejemplo: la desintegración del átomo es Física y Química también.

Algunos de los científicos que más han aportado a sentar las bases científicas de la Física son: Galileo, Arquímedes, Coulomb, Joule, Faraday, Meyer, los esposos Curie, Einstein, Newton, Roentgen, etc.

Hay hechos extraordinariamente sencillos pero que han aportado fantásticos avances, dando origen a las leyes físicas, cuyo conocimiento pleno ha permitido al hombre aprovecharlo en su beneficio.

¿QUÉ ES UNA LEY?

*Ley, del latín **lex:** regla y norma constante e invariable de las causas, nacida de la causa primera o de sus propias cualidades y condiciones. Una ley plantea que un fenómeno va a ocurrir y ocurre, se quiera o no.*

Verdad o leyenda, para el caso no importa, se cuenta que Newton estaba apoyado al tronco de una planta de manzano cuando cayó una manzana del árbol, este hecho hizo pensar a Newton: ¿cuál era la razón que explicase la caída de la fruta?, esta reflexión le llevó a descubrir la "Ley de la gravedad".

Ordenado por el gobernante de turno de su tierra natal, Siracusa, para averiguar si la cantidad de oro que tenía la corona que había mandado hacer a un joyero, era lo que el joyero había recibido de manos del gobernante, con la amenaza de que si no encontraba la manera de comprobarlo perdería la vida, Arquimedes, descubrió, en el momento

http://librosysolucionarios.net

en que se bañaba en una tina, la célebre "Ley del empuje hidrostático", ley que le permitió calcular la cantidad de oro que tenía la corona en cuestión.

Mientras observaba como oscilaba la campana de una iglesia, Galileo se puso a pensar en la razón de la oscilación y descubrió la "Ley del péndulo".

Cuando Meyer practicaba una sangría a un paciente (sangría es la extracción de 250 a 500 g de sangre y aplicarla nuevamente al paciente con el fin de curarlo de algunas enfermedades como el edema pulmonar, usado mucho en el medioevo), descubrió una de as leyes pilares de la Física, la "Ley de la conservación de la energía". Meyer era médico, no físico.

Mientras realizaba experimentos de rutina, Roentgen descubre los rayos X, llamados así por que ni él mismo sabía lo que había descubierto, murió y no llegó a saber de qué provenía la energía que había encontrado.

En fin, en la historia científica se cuentan por cientos los casos y hechos fortuitos que condujeron a descubrir las leyes que gobiernan la naturaleza. Las leyes naturales se descubren casi siempre en forma casual, las leyes naturales no se inventan, se descubren.

LA MEDIDA

En Física lo fundamental es medir, todas las leyes descubiertas deben ser medidas; para ello se usan unidades de: pesos, longitudes, tiempos, masas y otras.

CANTIDAD

Es todo aquello que es capaz de aumento o disminución, y puede por consiguiente, medirse o contarse.
Se mide la longitud de una calle, se mide la masa de un trozo de metal, se mide la velocidad de un automóvil, la fuerza de un hombre, se cuenta el número de alumnos de un aula, etc.

¿QUÉ ES MEDIR?

Medir es comparar una cantidad cualquiera con otra de la misma especie tomada como unidad. Existen dos clases de cantidades para medir: escalares y vectoriales.

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 1

SISTEMA INTERNACIONAL DE MEDIDAS

Un resumen de la Guía para la enseñanza del Sistema Internacional de Unidades de Medidas SI, editado por el que fué ITINTEC del Perú (Instituto de Investigación Tecnológica Industrial y de Normas Técnicas) es lo que sigue a continuación y cuyo propósito es difundir para que el estudiante conozca lo que es el SISTEMA INTERNACIONAL, al que se le designa así "SI". El SI no es mas que el SISTEMA METRICO evolucionado y modernizado.

Es importante aclarar que el uso del SI en nada modifica los conceptos científicos, sólo orienta para que las medidas sean más simples y uniformes en todo el mundo, nada más y nada menos.

El Sistema Métrico, a través del tiempo ha evolucionado, se han añadido algunas nuevas unidades, nuevos nombres y también se han eliminado muchas medidas y muchos nombres.

La Conferencia General de Pesas y Medidas (CGPM) de 1 971, ha establecido 7 **unidades de base, 6 unidades derivadas y 2 unidades suplementarias** que constituyen el fundamento del SI.

En el Perú, en el año 1 982 por Ley Nº 23 560, llamada "Ley de Metrología", se han adoptado como unidades de medidas las del SISTEMA INTERNACIONAL SI y por consiguiente el uso de este sistema en el país es obligatorio. Las unidades del SI se clasifican en 3 grupos: Unidades de Base, Unidades Derivadas y Unidades Suplementarias.

UNIDADES DE BASE

MAGNITUD	SIMBOLO	NOMBRE	DIMENSION
Longitud	metro	m	L
Tiempo	segundo	s	T
Masa	kilogramo	kg	M
Intensidad de corriente eléctrica	ampere	A	I
Temperatura	kelvin	K	θ
Intensidad luminosa	candela	cd	J
Cantidad de sustancia	mol	mol	N

http://librosysolucionarios.net

UNIDADES DERIVADAS

MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
Area	metro cuadrado	m^2
Volumen	metro cúbico	m^3
Densidad	kilogramo por metro cúbico	kg/m^3
Velocidad	metro por segundo	m/s
Fuerza y peso	newton	N
Presión	pascal	Pa

UNIDADES SUPLEMENTARIAS

MAGNITUD	NOMBRE	SIMBOLO
Angulo plano	radián	rad
Angulo sólido	estereorradián	sr

NOTA: Para usar los nombres y los símbolos debe tenerse en cuenta que:

1. El nombre de la unidad admite plural, el símbolo en cambio, como denota unidad no **admite plural**.

Ejemplos:

De metro o metros el símbolo es "m", y no "mts" ni "ms".

De kilogramo o kilogramos el símbolo es "kg", y no "kgs".

2. Los símbolos de las unidades de medidas que tienen como nombre, el apellido de un científico, se escriben con mayúscula. Pero el nombre de la unidad con minúscula.

Ejemplos:

Ampere (apellido)
El símbolo de la unidad con mayúscula: "A"

El nombre de la unidad con minúscula: "ampere".

Coulomb (apellido)
El símbolo de la unidad con mayúscula: "C"

El nombre de la unidad con minúscula: "coulomb".

3. Cuando la unidad de medida está compuesta por dos o más unidades simples, se escriben los símbolos uno a continuación del otro separándolos con un punto, con el signo de la multiplicación o simplemente con un espacio, nunca con un guión, y se leen los símbolos uno a continuación del otro.

Ejemplos:

Pa.s = Pa x s = Pa s
Se lee: "pascal segundo"

C.V = C x V = C V
Se lee: "coulomb voltio"

N.m = N x m = N m
Se lee: "newton metro".

4. Cuando la unidad de medida está compuesta por un cociente, se pone bajo la forma de quebrado, con una raya horizontal u oblicua y se lee el símbolo del numerador, luego la palabra "por" y después se lee el símbolo del denominador.

http://librosysolucionarios.net

UNIDADES DERIVADAS DE NOMBRES PROPIOS (APELLIDOS)

Hay algunas magnitudes físicas que se definen en términos de dos o más unidades, esto complica su uso, por eso se reemplaza por su equivalente. Así 1 voltio es "metro cuadrado kilogramo por segundo al cubo amperio", es evidente que es mucho más fácil decir " voltio". Del mismo modo un newton es "kilogramo metro por segundo cuadrado", pero es mucho más fácil decir sólo "newton".

Así: $1\ V = \dfrac{m^2 .\ kg}{s^3 .\ A}$ $\qquad 1\ N = kg.\dfrac{m}{s^2}$

En el SI hay 13 unidades derivadas principales con nombre propio. Al cuadro se le añade 2 unidades: el "lumen"y el "lux", aparte de las cuales, todas las otras trece unidades mencionadas llevan el nombre de científicos notables.

NOTA: En estos casos, la regla indica que el símbolo es una letra mayúscula o, de estar constituídos por varias letras, solamente la primera letra es mayúscula. Por ser símbolo no lleva punto de abreviatura.

Cuando se escribe el nombre completo de las unidades, gramaticalmente se considera como sustantivo común y por consiguiente jamás se escribe con letra mayúscula salvo en el caso de comenzar la frase o después de un punto seguido.

MAGNITUD FÍSICA	NOMBRE DE LA UNIDAD	SIMBOLO SI	UNIDADES DE BASE
Frecuencia	hertz	Hz	1 Hz = s^{-1}
Fuerza	newton	N	1 N = $m . kg . s^{-2}$
Trabajo, Energía, Cantidad de calor	joule	J	1 J = $m^2 . kg . s^{-2}$
Presión y Tensión	pascal	Pa	1 Pa = $m^{-1} . kg . s^{-2}$
Potencia	watt	W	1 W = $m^2 . kg . s^{-3}$
Cantidad de electricidad	coulomb	C	1 C = A . s
Potencial eléctrico, Diferencia de potencial, Fuerza electromotriz	volt .	V	1 V = $m^2 . kg . s^{-3} . A^{-1}$
Capacidad eléctrica	farad	F	1 F = $m^{-2} . kg^{-1} . s^4 . A^2$
Resistencia eléctrica	ohm	Ω	1 Ω = $m^2 . kg . s^{-3} . A^{-2}$
Conductancia eléctrica	siemens	S	1 S = $m^{-2} . kg^{-1} . s^3 . A^2$
Flujo de inducción magnética, Flujo magnético	weber	Wb	1 Wb = $m^2 . kg . s^{-2} . A^{-1}$
Densidad de flujo magnético, Inducción magnética	teslas	T	1 T = $kg . s^{-2} . A^{-1}$

http://librosysolucionarios.net

Inductancia	henry	H	1 H = $m^2 . kg . s^{-2} . A^{-2}$
Flujo luminoso	lumen	l m	1 l m = cd . sr
Iluminación	lux	l x	1 l x = m^{-2} . cd . sr

PREFIJOS NUMÉRICOS Y SUS SÍMBOLOS

Todas las unidades de medidas que forman el SI tienen múltiplos y submúltiplos y para señalar estos se les antepone el símbolo numérico de un prefijo. Este es una letra que indica un número que es múltiplo o submúltiplo de 10. En el SI hay múltiplos y submúltiplos preferidos y estos son los que cambian por los factores 10^3 ó 10^{-3} respectivamente.

PREFIJOS PREFERIDOS MÚLTIPLOSY SUBMÚLTIPLOS

	NOMBRE DEL PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	EQUIVALENCIA
MÚLTIPLOS DE 10	exa	E	10^{18}	1 000 000 000 000 000 000
	peta	P	10^{15}	1 000 000 000 000 000
	tera	T	10^{12}	1 000 000 000 000
	giga	G	10^9	1 000 000 000
	mega	M	10^6	1 000 000
	kilo *	k	10^3	1 000
SUBMÚLTIPLOS DE 10	mili *	m	10^{-3}	0,001
	micro	μ	10^{-6}	0,000 001
	nano	n	10^{-9}	0,000 000 001
	pico	p	10^{-12}	0,000 000 000 001
	femto	f	10^{-15}	0,000 000 000 000 001
	atto	a	10^{-18}	0,000 000 000 000 000 001

NOTA: Los marcados con * son los más usados.Además hay prefijos "no preferidos" que no aparecen en las tablas sin embargo el SI los admite y son muy usados.

PREFIJOS NO PREFERIDOS MÚLTIPLOSY SUBMULTIPLOS

	NOMBRE DEL PREFIJO	SÍMBOLO	FACTOR	EQUIVALENCIA
MÚLTIPLOS DE 10	hecto	h	10^2	100
	deca	da	10	10
SUBMÚLTIPLOS DE 10	deci	d	10^{-1}	0,1
	centi	c	10^{-2}	0,01

http://librosysolucionarios.net

¿CÓMO SE USAN LOS PREFIJOS?

El símbolo del prefijo numérico se antepone al símbolo de la unidad de medida para formar múltiplos o submúltiplos de la unidad de medida. El símbolo de la unidad de medida puede ser de unidades de base, derivadas o suplementarias, pudiendo estar la unidad de media con nombre simple o con nombre compuesto.

Ejemplos:

km = kilómetro = 1 000 m

Mm = megámetro = 1 000 000 m

Gm = gigámetro = 1 000 000 000 m

¿CUÁNDO SE USAN LOS PREFIJOS?

En algunas oportunidades, en las operaciones o en los resultados, no con-viene usar las unidades principales, o por muy grandes o por muy pequeñas, enton-ces se aconseja usar un prefijo numérico.

Ejemplos:

1 000 000 W = 1 M W = 1 megawattio

0,000 01 m = 0,01 mm
= 0,01 milímetro

0,001 A = 1 m A = 1 miliamperio

9 46 000 000 000 000 m =
= 946 Tm = 9 46 terámetros

0,000 000 000 000 002 = 2 fm
= 2 femtómetros.

Otros ejemplos:

1 mm = 1 milímetro = 0,001 m

1 μm = 1 micrómetro = 0,000 001m

1 kcd = 1 kilocandela = 1 000 cd

1 μA = 1 microamperio = 0,000 001 A

NOTAS :

- El prefijo se escribe siempre pegado al símbolo, sin dejar espacio ni poner coma ni punto - Al juntar un prefijo con el símbolo se forma el símbolo de una nueva unidad (múltiplo o submúltiplo de la unidad originaria).

Ejemplos:

0,000 000 001 J = nanojoule = nJ

0,000 001 N = micronewton = μN

0,001 Pa = milipascal = mPa

1 000 lx = kilolux = klx

- No se debe escribir doble prefijo.
- En el SI al igual que en el Sistema Métrico existen múltiplos y submúltiplos que varían de 10 en 10, sin embargo, en el SI se eligen los múltiplos de 1 000 en 1 000, en otras palabras los múltiplos varían con el factor 10^3 y los submúltiplos con el factor 10^{-3}.
- Para escribir un número se separa con espacio cada tres cifras, sin utilizar ninguna clase de signo; la coma sólo se emplea para separar los enteros de los decimales. Las cifras de 3 en 3 se separan de la coma a la izquierda cuando son enteros y de la coma a la derecha cuando son decimales. Así:

34 654 385, 876 89   0,726 563 8

3 987 694 110,7   0,009 906 3

UNIDADES QUE PUEDEN SER USADAS CON LAS UNIDADES DEL SI

MAGNITUD	UNIDAD	SIMB.	COMENTARIO
Intervalo de tiempo	minuto	min	Como se viene usando
Intervalo de tiempo	hora	h	Como se viene usando

http://librosysolucionarios.net

UNIDADES QUE PUEDEN SER USADAS CON LAS UNIDADES DEL SI

MAGNITUD	UNIDAD	SIMB.	COMENTARIO
Intervalo de tiempo	dia	d	Como se viene usando
Ángulo plano	grado	°	Como se viene usando
Ángulo plano	minuto	'	Como se viene usando
Ángulo plano	segundo	"	Como se viene usando
Masa	tonelada (métrica)	t	en comercio, reemplaza al Mg
Energía	electronvoltio	e V	Sólo en Física nuclear
Masa	unidad de masa atómica (unificada)	u	Sólo en Física
Longitud	Unidad astronómica	U A	Sólo en Astronomía
Longitud	parsec	p c	Sólo en Astronomía
Longitud	milla (náutica)	M	Sólo en naveg. marítm. y aérea
Velocidad	kilómetro por hora	km/h	Sólo para tráfico carretero
Velocidad	nudo	milla/h	Sólo en naveg. aérea y marítm.
Superficie	hectárea	ha	Sólo en terrenos
Temperatura	grados celsius	°C	Sólo si el kelvin no es impresc.
Frecuencia de otación	revolución por minuto	r/min	rpm

ALGUNAS UNIDADES DE OTROS SISTEMAS Y SUS EQUIVALENTES EN EL SI

MAGNITUD	UNIDAD Y SÍMBOLO QUE NO DEBE USARSE	UNIDAD SI CORRECTA	SÍMBOLO SI	EQUIVALENCIA
Viscosidad dinámica	poise P	pascal segundo	Pa.s	1 P = 100 m Pa.s = 0,1Pa.s
Viscosidad cinemática	stokes ST	metro cuadrado por segundo	m^2/s	1 St = 100 mm^2/sm = 10^{-4} m^2/s
Energía	kilogramo fuerza metro kgf.m	joule	J	1 kgf.m = 9,8 J
Energía	erg erg	joule	J	1 erg = 100 nJ = 10^{-7}J
Energía	caloría cal	joule	J	1 cal = 4,186 8 J

http://librosysolucionarios.net

MAGNITUD	UNIDAD Y SÍMBOLO QUE NO DEBE USARSE	UNIDAD SI CORRECTA	SÍMBOLO SI	EQUIVALENCIA
Energía	litro atmósfera l.atm	joule	J	1 l.atm = 101,328 J
Fuerza	kilogramo fuerza kgf	newton	N	1 kgf = 9,81 N
Fuerza	dina din	newton	N	1 din = 10 μN = 10^{-5} N
Frecuencia	ciclos por segundo c/s	hertz	Hz	1 c/s = 1Hz
Iluminación	phot ph	lux	l x	1 ph = 10 klx = 10^4 lx
Longitud	fermi f	metro	m	1 fermi = 1 fm = 10^{-15} m
Longitud	micrón μ	metro	m	1 μ = 1 μm = 10^{-6} M
Longitud	unidad X	metro	m	1 unidad X = 100,2 fm
Luminancia	stilb sb	candela por metro cuadrado	cd/m^2	1 sb = 10 kcd/m^2 =10^4 cd/m^2
Inducción y Flujo magnéticos	gauss G	tesla	T	1 G ~ 100 μT = 10^{-4} T
Inducción y flujo magnéticos	gama g	tesla	T	1 g = 1nT = 10^{-9} T
Intensidad de campo magnético	oersted Oe	ampere por metro	A/m	1 Oe ~ 1 000/4π . A/m
Flujo magnético	maxwell Mx	weber	Wb	1 Mx ~ 10 nWb = = 10^{-8} Wb
Momento	metro kilogramo fuerza m kgf	newton metro	N.m	1 m kgf = 9,81 N.m
Potencia	caballo de fuerza HP	watt	W	1 HP = 745,499 W

ALGUNAS UNIDADES DE OTROS SISTEMAS Y SUS EQUIVALENTES EN EL SI

MAGNITUD	UNIDAD Y SÍMBOLO QUE NO DEBE USARSE	UNIDAD SI CORRECTA	SÍMBOLO SI	EQUIVALENCIA
Presión o Tensión	kilogramo fuerza por centímetro cuadrado kgf/cm^2	pascal	Pa	1 kgf/cm^2 = 98,1 kPa = 9,806 65 x 10^4 Pa ~ 1 00k Pa
Presión	torricelli Torr	pascal	Pa	1 Torr = 133,322 4 Pa
Presión	milímetro de mm Hg	pascal	Pa	1 mm Hg = 133,322 4 Pa

http://librosysolucionarios.net

MAGNITUD	UNIDAD Y SÍMBOLO QUE NO DEBE USARSE	UNIDAD SI CORRECTA	SÍMBOLO SI	EQUIVALENCIA
Presión o Tensión	kilogramo fuerza por centímetro cuadrado kgf/cm^2	pascal	Pa	1 kgf/cm^2 = 98,1 kPa = 9,806 65 x 10^4 Pa ~ 1 00k Pa
Presión	torricelli Torr	pascal	Pa	1 Torr = 133,322 4 Pa
Presión	milímetro de mercurio mm Hg	pascal	Pa	1 mm Hg = 133,322 4 Pa
Presión	atmósfera atm	pascal	Pa	1 atm = 101,325 kPa = 101 325 Pa
Presión	baría	pascal	Pa	1 baría = 10^{-1} Pa
Torque	metro kilogramo fuerza m kgf	newton metro	Nm	1 mkgf = 9,81 N.m ~ 10 N.m

NOTAS:

- Al kilogramo fuerza generalmente se le ha nombrado incorrectamente kilogramo, lo que ha contribuído a la confusión de los conceptos peso y masa.

- Si son permitibles los errores del orden del 2% (y casi todos los instrumentos de medición industrial lo son), se pueden efectuar las siguientes equivalencias.

  1 kg ≅ 10 N
  1 kgf/cm^2 ≅ 100 kPa
  1 m.kgf ≅ 10 N.m = 10 J

- Como la respuesta para un problema en el SI siempre tiene una sola unidad (según la especie que se busca), no siempre es necesario arrastrar unidades en el proceso de operaciones para hallar la unidad que se busca; eso sí, las unidades que se usan como datos y las que se usan en el proceso del problema, todas deben ser estrictamente del SI.
  En caso contrario, cuando los datos del problema son dados en otro sistema de unidades, previamente deben hacerse las respectivas conversiones al SI.

VOCACIÓN: "Inspiración con que predestina la Providencia para una actividad determinada".

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 2

ECUACIONES DIMENSIONALES

UNIDADES FUNDAMENTALES

Toda la ciencia y toda la técnica para su desarrollo realiza medidas, es decir mide, porque sobre la base de las medidas se hacen las investigaciones científicas. Se consideran dos sistemas de u-nidades fundamentales: El sistema absoluto y el técnico, gravitacional o práctico.

Las unidades fundamentales se representan con la letra inicial de su nombre.

a) Sistema absoluto:

Unidad de Masa	M
Unidad de Longitud	L
Unidad de Tiempo	T

b) Sistema técnico o gravitacional:

Unidad de Fuerza	F
Unidad de Longitud	L
Unidad de Tiempo	T

ECUACIONES DIMENSIONALES

Son expresiones del tipo algebraico, que valiéndose de las unidades fundamentales son representadas por las letras M, L y T.

Fines de las ecuaciones dimensionales:

a) Para probar si una fórmula dimen-sionalmente es correcta.
b) Para probar equivalencias dimensionalmente iguales.
c) Para dar unidades o dimensión a la respuesta de un problema.

RECOMENDACIONES BÁSICAS:

a) La suma o resta de las mismas unidades origina la misma unidad, así:

$$T + T - T + T = T$$

$$-ML^{-1} + ML^{-1} = ML^{-1}$$

b) Cualquiera que sea el coeficiente numérico, y cualquiera que sean las constantes, siempre se reemplazan por 1, así:

$$2L + 8L = L$$

$$\pi + 62{,}4\,t = 1 + T = T$$

c) Se escriben en forma de entero, y si es quebrado se hacen entero con exponentes negativos, así:

$$\frac{LT}{M} = LTM^{-1} \quad ; \quad \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$$

d) El signo | | significa "ecuación dimensional de".

Ejemplo: Si "e" expresa longitud entonces $|e| = L$

e) La dimensión de un ángulo o de una función trigonométrica es un número, como tal dimensionalmente es 1

$$|30^\circ| = 1 \ ;$$

$$\left|\sqrt{2}/3\right| = 1 \ ;$$

$$|\operatorname{tg} 28^\circ| = 1 \ ;$$

$$|\operatorname{sen} 15^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ| = 1$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar las ecuaciones dimensionales de: la Fuerza, Velocidad, Aceleración y Densidad

RESOLUCIÓN:

a) $|F| = ma = m\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$

b) $|v| = \frac{d}{t} = LT^{-1}$

c) $|a| = \frac{d}{t^2} = \frac{L}{T^2} = LT^{-2}$

d) $|D| = \frac{m}{v} = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$

PROBLEMA 2. Hallar las dimensiones del peso específico.

RESOLUCIÓN :

$$|P.e.| = \frac{F}{V} = \frac{m.a}{V} = \frac{m}{V}\times\frac{d}{t^2} = \frac{ML}{L^3T^2}$$

Rpta.: $|P.e| = ML^{-2}T^{-2}$

PROBLEMA 3. La potencia de una hélice impulsora de unbarco es: $P = K w^x r^y D^z$

siendo w = velocidad angular; r = radio de la hélice; D = densidad del agua de mar. Hallar x, y, z.

RESOLUCIÓN : Se calculan las ecuaciones dimensionales de cada uno de los elementos de la ecuación:

$$|P| = \frac{\text{trabajo}}{\text{tiempo}} = \frac{F.d}{T} = \frac{m.a.d}{T}$$

$$= \frac{M(L/T^2)L}{T} = ML^2T^{-3}$$

$|K| = 1$

$$|w| = \frac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}} = \frac{1}{T} = T^{-1}$$

$|r| = L$ $\qquad |D| = \frac{M}{L^3} = ML^{-3}$

Sustituyendo en la ecuación propuesta:

$$ML^2T^{-3} = 1(T^{-1})^x.(L)^y.(ML^{-3})^z$$

O sea: $ML^2T^{-3} = M^zL^{y-3z}T^{-x}$

Identificando exponentes de las dimensiones siguientes:

$M = M^z$, luego $z = 1$

$T^{-3} = T^{-x}$, luego $x = 3$

$L^2 = L^{y-3z}$, luego $y-3z = 2$

Pero $z = 1$; luego $y-3 = 2$;
$y = 5$

PROBLEMA 4. La ley de la atracción universal de las masas establece que: $F = K\frac{m_1 m_2}{d^2}$

Hallar la ecuación dimensional de K.

RESOLUCIÓN : Despejando K:

$$K = \frac{F.d^2}{m_1.m_2} \qquad (1)$$

$$|F| = ma = M\frac{L}{T^2} = MLT^{-2}$$

$|d^2| = L^2$; $|m_1| = M$; $|m_2| = M$

En (1): $|K| = \frac{MLT^{-2}.L^2}{M.M} = L^3M^{-1}T^{-2}$

Rpta.: $|K| = L^3M^{-1}T^{-2}$

PROBLEMA 5. Hallar las dimensiones de Q.

$$Q = Wv\left[\pi - (\log K)^3\right]^2$$

Siendo: W = trabajo o energía;
v = velocidad;
π = 3,1416;
K = constante (K > 0)

RESOLUCIÓN :

$$|W| = F.d = m.a.d = M.\frac{L}{T^2}.L = ML^2T^{-2}$$

$$|v| = \frac{d}{T} = \frac{L}{T} = LT^{-1}$$

http://librosysolucionarios.net

Ecuación dimensional del corchete = 1
Sustituyendo en la expresión dada:

$$|Q| = M L^2 T^{-2} . L T^{-1} \;;$$

Rpta.: $|Q| = M L^3 T^{-3}$

PROBLEMA 6. Si la fórmula del perío-do de un péndulo está dada por: $T = 2\pi L^x g^y$

Donde: T = período (tiempo),
L = longitud del péndulo,
g = aceleración de la gravedad.

Calcular: x é y

RESOLUCIÓN: Por datos:

$$|T| = T \;;\; |2\pi| = 1 \;;\; |L| = L$$

$$|g| = 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = \frac{L}{T^2} = L T^{-2}$$

Sustituyendo en la expresión propuesta:

$$T = L^x (L T^{-2})^y \;;\; T = L^{x+y} T^{-2y}$$

Completando la ecuación para el primer miembro: $L^0 T = L^{x+y} T^{-2y}$

Identificando los términos de la ecuación:

a) $L^0 = L^{x+y} \Rightarrow x+y = 0$ (1)
b) $T = T^{-2y} \Rightarrow -2y = 1$ (2)

De (1) y (2):

Rpta.: $y = -1/2$; $x = 1/2$

PROBLEMA 7. Si la expresión:

$$P = 2x \log \pi . t^2 + y D + z F$$

es dimensionalmente correcta, donde:

P = presión, t = tiempo,
D = densidad, F = fuerza.

Calcular x, y, z

RESOLUCIÓN:

$$|P| = \frac{F}{A} = \frac{m a}{A} = \frac{M.(L/T^2)}{L^2} = M L^{-1} T^{-2}$$

$$|\log \pi| = 1 \;;\; |t| = t$$

$$|D| = \frac{m}{V} = \frac{M}{L^3} = M L^{-3}$$

$$|F| = m a = m\frac{e}{t^2} = M\frac{L}{T^2} = M L T^{-2}$$

Sustituyendo en la expresión dada:

$$M L^{-1} T^{-2} = x T^2 = y M L^{-3} - z M L T^{-2}$$

Si la expresión es dimensionalmente correcta, todos los sumandos deben ser de la forma $M L^{-1} T^{-2}$ es decir:

1) $x T^2 = M L^{-1} T^{-2} \therefore$ Rpta.: $x = M L^{-1} T^{-4}$
2) $y M L^{-3} = M L^{-1} T^{-2} \therefore$ Rpta.: $y = L^2 T^{-2}$
3) $z M L T^{-2} = M L^{-1} T^{-2} \therefore$ Rpta.: $z = L^{-2}$

PROBLEMA 8. El valor de la cons-tante universal de los gases es:

$$R = 0{,}082\,\frac{atm . L}{mol . K}$$

¿Cuál es su ecuación dimensional en el SI?

RESOLUCIÓN : $|0{,}082| = 1$

$$|0{,}082| = 1$$

$$|atm| = \text{presión} = \frac{F}{A} = M L^{-1} T^{-2}$$

$$|L| = \text{volumen} = L^3 \;;$$

$$|mol| = N \;;\; |K| = K$$

Sustituyendo en la expresión dada:

$$|R| = \frac{M L^{-1} T^{-2} L^3}{N K}$$

Rpta.: $|R| = M L^2 T^{-2} N K$

PROBLEMA 9. Para que la ecuación siguiente sea dimen sionalmente correcta, hallar **x**.

$$x t_1 = (x t_2 + K.e.\cos \alpha°)(1-K)^{-1/2}$$

Donde t_1 y t_2 son tiempos

e = distancia ; K = constante (K > 1)

RESOLUCIÓN:

$|t_1| = T$; $|t_2| = T$; $|t_1| = T$;
$|t_2| = T$; $|K| = 1$; $|e| = L$;
$|\cos\alpha°| = 1$; $|(1-K)^{-1/2}| = 1$

Reemplazando todo en la ecuación dada se tendrá: $xT = xT + L$

Para que sea dimensionalmente correcta debe cumplirse que:

$L = xT \quad \therefore \quad$ Rpta.: $x = LT^{-1}$

PROBLEMA 10. Hallar la ecuación dimensional de:

$$E = \frac{S \cdot v \cdot F \cdot \alpha}{D \cdot w} \quad \text{donde:}$$

S = área, F = fuerza,
v = velocidad lineal, D = densidad,
α = aceleración angular, w = trabajo.

RESOLUCIÓN : $|S| = L^2$; $|\alpha| = T^{-2}$
$|v| = LT^{-1}$; $|D| = ML^{-3}$

Sustituyendo en la expresión dada:

$$|E| = \frac{L^2 . LT^{-1} . MLT^{-2} . T^{-2}}{ML^{-3} . ML^2T^{-2}}$$

Rpta.: $|E| = L^5T^{-3}M^{-1}$

PROBLEMA 11. Si la fórmula:

$$T^{-3}Px = a^yR^z$$

es dimensionalmente correcta,
T = tiempo, a = aceleración,
P = potencia, R = fuerza.
x = distancia ó espacio,

Hallar el valor de z, sabiendo que:
T = tiempo

RESOLUCIÓN : $|T| = T$

$$|P| = \frac{w}{t} = \frac{F.e}{t} = \frac{m.a.e}{t}$$

$$|P| = \frac{M(L/T^2)L}{T} = ML^2T^{-3}$$

$|x| = L$; $|a| = LT^{-2}$
$|R| = MLT^{-2}$

Sustituyendo en la expresión propuesta:

$$T^{-3}ML^2T^{-3}L = (LT^{-2})^y(MLT^{-2})^z$$
$$T^{-6}ML^3 = L^yT^{-2y}M^zL^zT^{-2z}$$
$$T^{-6}ML^3 = L^{y+z}T^{-(2y+2z)}M^z$$

Identificando dimensiones:

$M = M^z \quad \therefore \quad$ Rpta. : $z = 1$

PROBLEMA 12. Si la fórmula dimensionalmente es correcta.
¿Cuál es la ecuación dimen-sional de x, de P y de Q, si K/A tiene dimensiones de masa

$$\frac{2}{5}A\sqrt{2gh - x^2} + P\,\text{sen}\,\alpha = QK$$

A = área ; g = gravedad ; h = altura

RESOLUCIÓN :

a) Cálculo de la dimensión de x. Dimensionalmente, en la raiz, minuendo y sustraendo deben ser iguales:

$$|x^2| = |2gh| \Rightarrow |x^2| = \frac{L}{T^2}L$$

$$|x^2| = L^2T^{-2} \text{ , de donde:}$$

Rpta.: $|x| = LT^{-1}$

b) Dimensionalmente los sumandos del primer miembro deben ser iguales.

$$\left|\frac{2A}{5}\sqrt{2gh - x^2}\right| = |P\,\text{sen}\,\alpha|$$

$L^2(L^2T^{-2})^{1/2} = |P|$; de donde:

Rpta.: $|P| = L^3T^{-1}$

c) Si dimensionalmente los sumandos del primer miembro son iguales, basta comparar dimensionalmente un sumando del primer miembro con el segundo miembro:

de donde: $|Q| = \left|\frac{A}{K}\sqrt{2gh - x^2}\right|$;

http://librosysolucionarios.net

de acuerdo al dato $A/K = 1/M$

$$\left|\frac{2}{5}A\sqrt{2gh - x^2}\right| = |QK|$$

Además la raíz es: $(L^2 T^{-2})^{1/2}$;

luego: $|Q| = \frac{1}{M} L T^{-1}$

Rpta.: $|Q| = M^{-1} L T^{-1}$

PROBLEMA 13. Si la expresión siguien-te es dimensionalmente correcta hallar las dimensiones de α

$$\alpha \, . \, csc \, 45° + 5p\sqrt{ae} \, tg \, 45° = w$$

Donde: a = constante e = distancia
w = trabajo

RESOLUCIÓN : Si la ecuación es dimensionalmente correcta, los sumandos tienen igual dimensión, e igual dimensión al segun-do miembro, es decir:

$$|\alpha \csc 45°| = |w|$$

donde: $|\alpha \csc 45°| = |\alpha|$

y: $|w| = |Fd| = |m a d|$

$|w| = M L^2 T^{-2}$

∴ Rpta.: $|\alpha| = M L^2 T^{-2}$

PROBLEMA 14. ¿Cuál debe ser el valor de "p" para que la expresión siguiente sea dimen-sionalmente correcta?

$$(\sum_{i=1}^{n} D_i).c.e = \frac{e^{-p}.v.t}{D_o} \; ; \quad t = M^2 T$$

v = velocidad lineal
D_o, D_i = densidades
c, e = longitudes

RESOLUCIÓN :

$$\sum_{i=1}^{n} D_i = D_1 + D_2 + D_3 + ... + D_n$$

Esto significa que, dimensionalmente se representará sólo por:

$$|D| = \frac{M}{V} = M L^{-3} \quad \text{(Densidad)}$$

Reemplazando las dimensiones en la expresión original:

$$M L^{-3}.L.L = \frac{L^{-p}.L T^{-1}.M^2 T}{M L^{-3}}$$

$$M^2 L^{-5} = M^2 L^{-p} \Rightarrow L^{-5} = L^{-p}$$

Identificando exponentes: Rpta.: p = 5

PROBLEMA 15. Si la ecuación dada es dimensionalmente correcta hallar las dimensiones de S.

$$\log K + \left(\ln \frac{V_2}{V_1}\right)^{1/2} = \frac{S R H t^2}{V^{4 \, sen \, 30°}}$$

log , ln = logaritmos
K = número (K>0)
V , V_1 , V_2 = velocidades
R = radio ; H = altura ; t = tiempo

RESOLUCIÓN : Por ser el miembro de la izquierda una cantidad adimensional, es decir, por ser numérico su valor, y por ser la igualdad dimensionalmente correcta, se tiene:

$$1 = \frac{|S| L . L T^2}{(L T^{-1})^{4(1/2)}} \quad \therefore \quad |S| = \frac{L^2 T^{-2}}{L^2 T^2}$$

Rpta.: $|S| = T^{-4}$

PROBLEMA 16. En la expresión dimensionalmente correcta, hallar una relación entre las dimensiones de m y n.

$$R^2 h = \left[\left(m V h^{-1} + R n V'\right)^5\right]^{1/2}$$

Siendo : R , h = distancias
V , V' = velocidades

RESOLUCIÓN : Por ser la expresión dimensionalmente co-

http://librosysolucionarios.net

rrecta, la parte interna del radical, será también dimensionalmente correcta, tal que debe cumplirse: $\left|m V h^{-1}\right| = |R n V'|$

como: $|V| = |V'| \Rightarrow |m| L^{-1} = L|n|$

$$\frac{|m|}{|n|} = \frac{L}{L^{-1}} = L \cdot L \qquad \text{Rpta.:} \quad \frac{|m|}{|n|} = L^2$$

PROBLEMA 17. En la siguiente expre-sión dimensionalmente correcta. Hallar las dimensiones de K.

$$A^2 = \frac{2Kb}{m}\left(\sqrt{b^2 + x^2} - x\right)^2$$

Siendo: A = área b , x = longitudes

m = masa

RESOLUCIÓN : $A^2 = \frac{2Kb}{m}\left(\sqrt{b^2 + x^2} - x\right)^2$

Dimensionalmente se tiene:

$$\left(L^2\right)^2 = \frac{|K|L}{M}\left(\sqrt{L^2 + L^2} - L\right)^2$$

$$L^4 = \frac{|K|L}{M}\left(\sqrt{L^2} - L\right)^2$$

$$L^4 = \frac{|K|L}{M}(L - L)^2$$

$$L^4 = \frac{|K|L}{M} L^2 \text{ , despejando } |K| :$$

Rpta.: $|K| = ML$

EN EL SISTEMA TÉCNICO O GRAVITACIONAL LAS UNIDADES PUEDEN EXPRESARSE ASÍ:

$\lvert m\rvert = FL^{-1}T^2$ (Masa) ;	$\lvert D\rvert = FL^{-4}T^2$ (Densidad) ;	$\lvert Pe\rvert = FL^{-3}$ (Pes
$\lvert w\rvert = FL$ (Trabajo);	$\lvert P\rvert = FLT^{-1}$ (Potencia) ;	$\lvert p\rvert = FLT^{-2}$ (Pres.
$\lvert I\rvert = FT$ (Impulso);	$\lvert C\rvert = FT$ (Cantidad de mov.) ;	$\lvert M\rvert = FL$ (Mom
$\lvert Ec\rvert = FL$ (Energía Cinética) ;	$\lvert Ep\rvert = FL$ (Energía Potencial)	

EJEMPLO: Hallar las dimensiones de x en el Sistema Técnico

$$M = \sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\infty}}}}}}} \qquad M = \text{masa}$$

RESOLUCIÓN : Elevando al cuadrado y considerando la ecuación dato:

$$M^2 = \frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\frac{x}{\sqrt{\infty}}}}}}}} \qquad \text{Entonces: } M^2 = \frac{x}{M}$$

de donde

$$x = M^3 \ ; \ M = \frac{F}{a} \qquad \therefore |x| = \left(FL^{-1}T^2\right)^3$$

Rpta.: $|x| = F^3 L^{-3} T^6$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La fuerza centrípeta depende de la masa, la velocidad y del radio de giro del cuerpo en rotación. Hallar la fórmula concreta para la fuerza centrípeta.

Rpta.: $F_c = \frac{mv^2}{R}$

2. La fórmula de Bernoulli para medir la energía de un líquido que discurre es:

$$E = \left(h + \frac{P}{P.e.} + \frac{v^2}{2g}\right) \cdot w$$

Donde: h = altura, P = presión, P.e. = peso específico, v = velocidad, g = gravedad y w = peso. Hallar su ecua-ción dimensional

Rpta.: $|E| = ML^2T^{-2}$

3. La fórmula de la energía cinética,es:

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2 ,$$

hallar su ecuación dimencional.

Rpta.: $|E_c| = M L^2 T^{-2}$

4. La fórmula de la energía potencial es:

$$E_p = p.h ,$$

hallar su ecuación dimensional

Rpta.: $|E_p| = M L^2 T^{-2}$

5. La ecuación: $Ax + \frac{1}{3} By =$

$$= \left(\frac{1}{5}\right)^{1/3} D F x + \frac{3}{2} D B \cos 2\theta$$

Es la expresión de un proceso físico concreto. Hallar la ecuación dimen-sional de D y de "y".

Donde: A = aceleración, B = velocidad, F = fuerza, q = ángulo

Rpta.: $|D| = M^{-1}$

$|y| = |D| = M^{-1}$

6. La energía de un choque es:

$$E = \left(1 - K^2\right) \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} \cdot \frac{\left(V_1 - V_2\right)^2}{2}$$

Donde: $K = \frac{V_2' - V_1'}{V_1 - V_2}$

Calcular su ecuación dimensional.

Rpta.: $|E| = M L^2 T^{-2}$

7. Hallar la ecuación dimensional de la constante general de los gases en el SI.

Rpta.: $|R| = M L^2 T^{-2} \theta^{-1} N^{-1}$

8. Hallar las dimensiones de x para que la expresión sea dimensionalmente correcta:

$$x^2 \alpha_1 = \text{sen}\, 30° \left(\alpha + \alpha_2\right) \omega$$

$\alpha, \alpha_1, \alpha_2$ = aceleración angular

ω = velocidad angular

Rpta.: $|x| = T^{-3/2}$

9. Determinar x . y . z, si la expresión dada es dimensionalmente correcta:

$$\omega \,\text{sen}\, \theta = \frac{x}{2t^2} + \frac{d + y}{z} \quad \text{donde:}$$

ω = velocidad angular t = tiempo
δ = longitud θ = ángulo

Rpta.: $|x . y . z| = L^2 T^2$

10. Hallar las dimensiones de "x" en el sistema técnico, en la siguiente ecuación mostrada:

$$\sec^2(\alpha + \theta) \frac{m E}{C} = \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{x \sqrt{\ldots\ldots\infty}}}}$$

α y θ = ángulos ; m = masa
C = cantidad de movimiento
E = presión

Rpta.: $|x| = F L^{-3} T$

11. Sabemos que para un fluido se cumple que la relación del esfuerzo tangencial (T en kg/m²) al gradiente de velocidad:

$$\frac{du}{dy}, \text{ en m/s/m es: } \mu = \frac{T}{du/dy}$$

Si llamamos viscosidad cinemática a la relación: $V = \mu / p$ donde p es la densidad del fluido. ¿Cuáles son las dimensiones de V?

Rpta.: $|V| = L^2 T^{-1}$

12. Un cuerpo se mueve, y su trayectoria está definida por:

$$x = \frac{V^2}{2 A (\text{sen}\alpha + \mu_k \cos \alpha)}$$

Donde: x = distancia; V = velocidad; μ_k = adimensional; α = ángulo.

Hallar las dimensiones de A

Rpta.: $|A| = L T^{-2}$

CAPÍTULO 3

VECTORES

Sólo estudiaremos los vectores coplanares, es decir a aquellos ubicados en un mismo plano.

¿QUÉ ES UN VECTOR?

Etimológicamente, "vector" es un elemento "que conduce".

CANTIDAD

En la introducción se definió la cantidad, ahora por su importancia se recalca: "cantidad es todo aquello que es capaz de aumento o disminución, y puede, por consiguiente, medirse o contarse".

¿QUÉ ES MEDIR?

Es comparar una cantidad cualquiera con otra de la misma especie, tomada como unidad de comparación.

Hay dos clases de cantidades: Escalares y Vectoriales.

CANTIDADES ESCALARES

Son aquellas cantidades que están plenamente determinadas por su MAGNITUD, es decir, por un número que expresa su "cantidad" y por una especie o unidad que expresa su "calidad". La cantidad escalar también se le llama MÓDULO.

Ejemplos: 40 m (longitud); 35 kg (masa); 12 min (tiempo).

Las cantidades escalares se manejan con las reglas usuales del álgebra.

CANTIDADES VECTORIALES

Son aquellas cantidades que además de tener "número y especie" (módulo), tienen dirección, sentido y punto de aplicación.

Ejemplos: 16 N hacia la derecha (fuerza); 9,8 m/s^2 en dirección vertical (gravedad); 60 km/h hacia el norte (velocidad).

Las cantidades vectoriales no siempre se pueden manejar con las reglas usuales del álgebra.

Notación: Una cantidad vectorial se representa con una letra y una flechita o segmento colocado sobre la letra o símbolo.

Ejemplos:

$\vec{F}$, $\vec{g}$, $\vec{v}$, $\vec{E}$, etc. o $\bar{F}$, $\bar{g}$, $\bar{v}$, $\bar{E}$, etc.

NOTA: La notación $\vec{F}$ indica el valor vectorial que expresa la magnitud (o módulo), la dirección y el sentido de la fuerza.

La forma $|\vec{F}|$ o F expresa solamente la magnitud o el módulo de la fuerza.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UN VECTOR

Un vector se representa gráficamente por un "**segmento de recta orientado**" Se

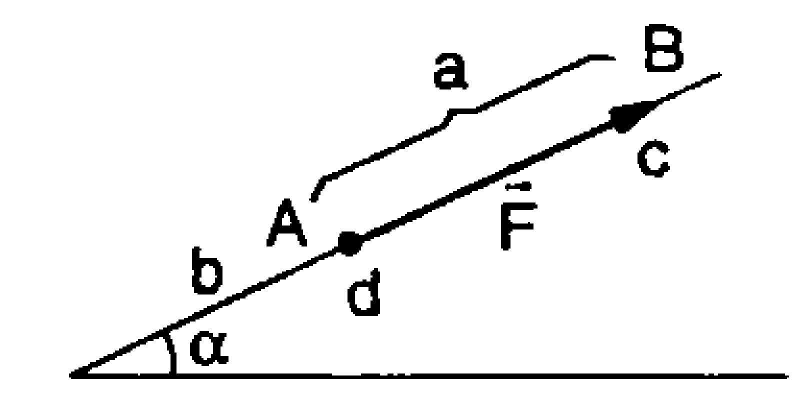
http://librosysolucionarios.net

llama segmento de recta orientado a un segmento con una flecha en uno de sus extremos. A ese extremo se llama "punta", y al otro "orígen".

Así: orígen $\vec{A}$ punta o saeta

ELEMENTOS DE UN VECTOR

Sea un vector $\vec{F}$ al cual vamos a representarlo gráficamente, sus elementos son: magnitud, dirección, sentido y punto de aplicación.



a) Magnitud: Es el valor absoluto o módulo del vector. Se representa así: $|\vec{F}|$ ó F

b) Dirección: Es la recta a lo largo de la cual se desplaza el vector. Está definida por el ángulo medido en sentido antihorario desde el semieje positivo horizontal hasta la posición del vector "α".

c) Sentido: Es la orientación que lleva el vector y está indicada por una flecha. Arbitrariamente se le asigna el signo "+" o el signo "-".

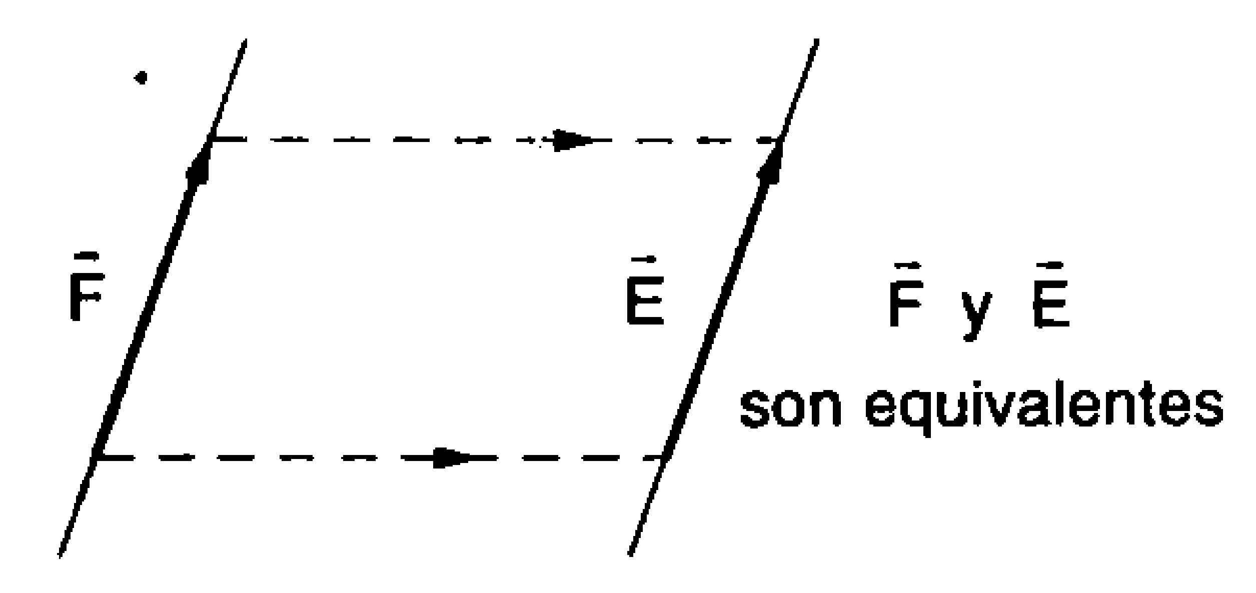
d) Punto de aplicación: Es variable en es el punto sobre el cual se supone actúa el vector "A".

* El vector $\vec{F}$ podría ser un vector fuerza cuya magnitud sea 60 **N**, con sentido positivo, con una dirección que hace un ángulo "α" con la horizontal.

* A veces a un vector se le llama con dos letras, por ejemplo el vector $\overrightarrow{AB}$, donde A es el punto de aplicación y B es la punta.

VECTORES EQUIVALENTES

Dos o más vectores son equivalentes cuando al desplazarse paralelamente, uno coincide con el otro. Así los vectores $\vec{F}$ y $\vec{E}$.



Los vectores se pueden trasladar paralelamente a su dirección original. Esta es una propiedad importante.

Si al trasladar el vector $\vec{F}$ paralelamente a su dirección hasta superponerse al vector $\vec{E}$, estos coinciden en magnitud, entonces son equivalentes: $\vec{F} \equiv \vec{E}$

VECTORES COLINEALES O UNIDIRECCIONALES

Se llaman así a los vectores cuya dirección está en una misma recta, pero sus sentidos y magnitudes pueden ser iguales o diferentes. Ejemplos:

a) $+\vec{M}$ $\vec{N}$ -

b) $+\vec{A}$ $\vec{B}$ -

c) $+\vec{R}$ $+\vec{Q}$

d) $\vec{F}$ - $+\vec{E}$

a) Desiguales de sentido contrario
b) Iguales de sentido contrario
c) Desiguales del mismo sentido
d) Desiguales de sentido contrario

"Buscas el éxito, ¡estudia!" *J. Goñi Galarza.*

http://librosysolucionarios.net

ÁLGEBRA DE VECTORES

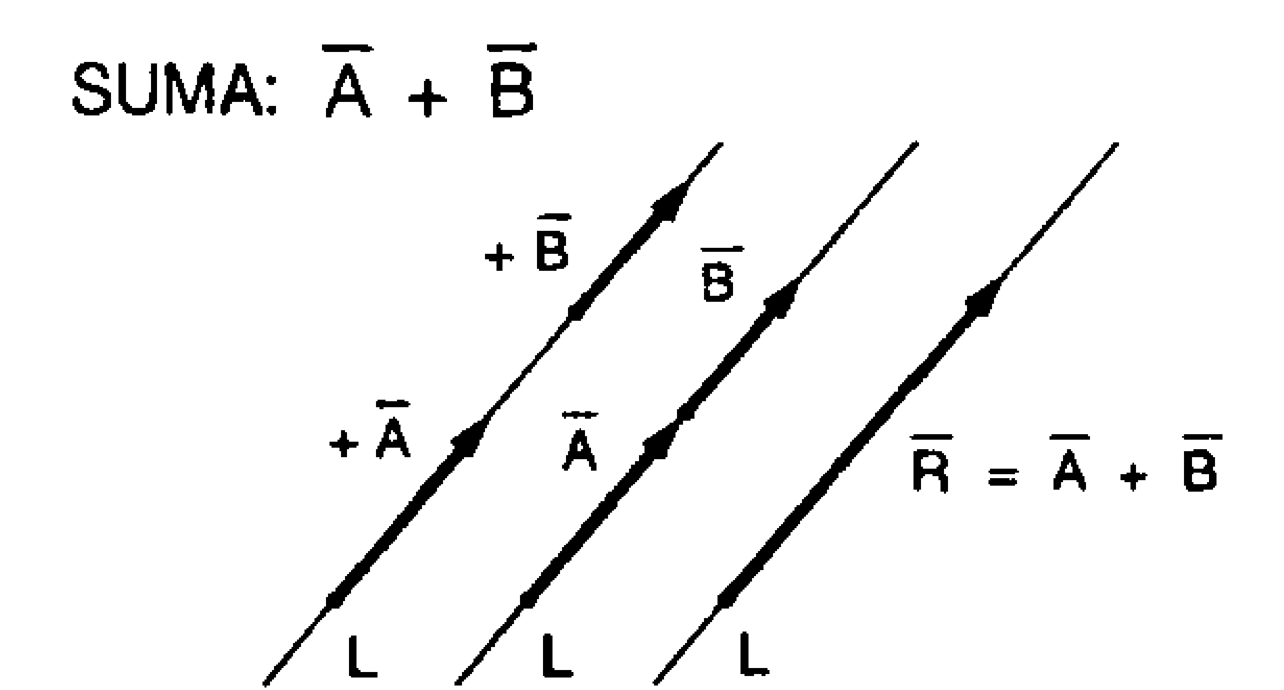
CÁLCULO DE LA RESULTANTE

SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES COLINEALES

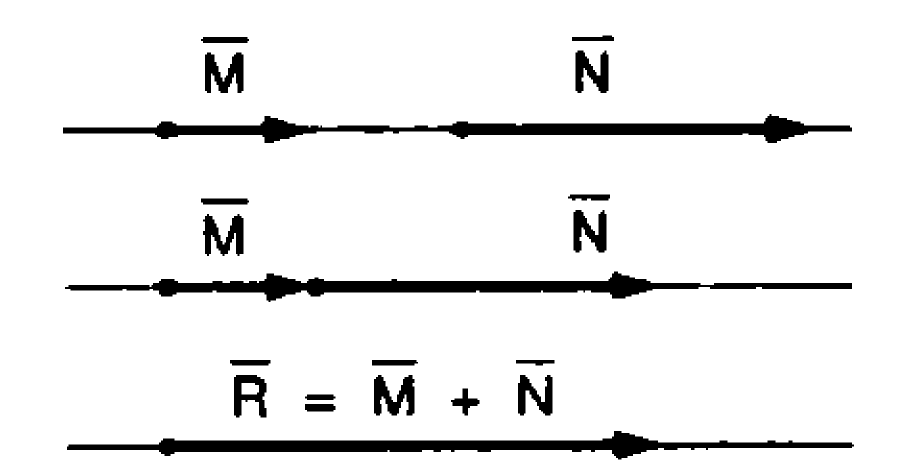
La resultante de la suma o de la diferencia de vectores colineales se obtiene haciendo coincidir el origen de uno con la punta del otro. Ahora, si los dos tienen el mismo sentido, la magnitud del vector suma tiene la magnitud de la suma de los vectores.

Cuando los vectores son de sentido contrario, la magnitud del vector suma es la diferencia de las magnitudes de los vectores.

SUMA: $\overline{A} + \overline{B}$



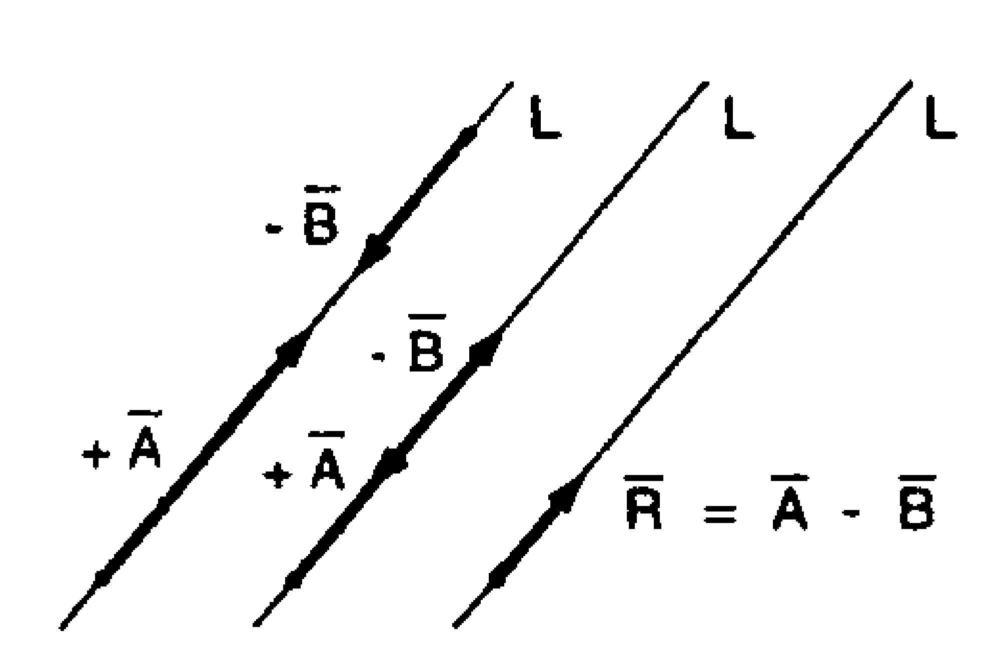
SUMA: Efectuar $\overline{M} + \overline{N}$



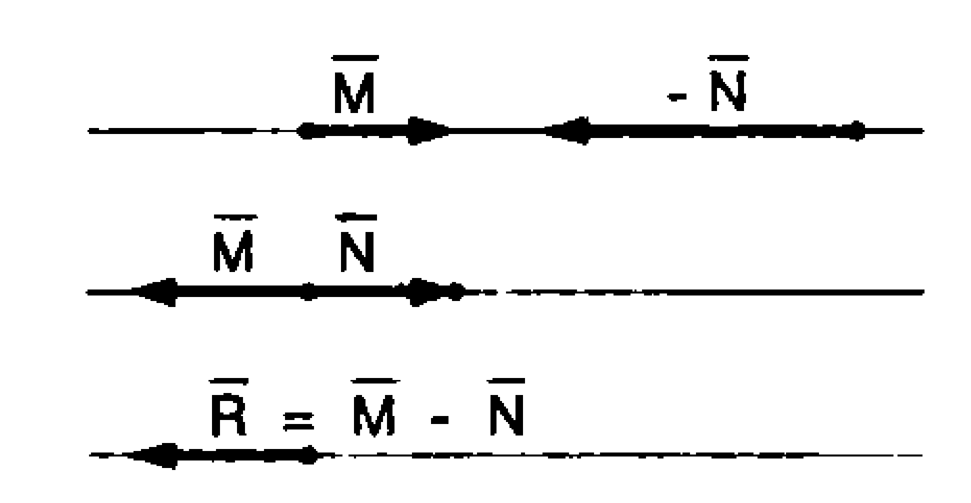
Aplicación:

$M = 4$ y $N = 12{,}5 \therefore R = 4 + 12{,}5 = 16{,}5$

DIFERENCIA: $\overline{A} - \overline{B}$



DIFERENCIA: Efectuar $\overline{M} + (-\overline{N})$

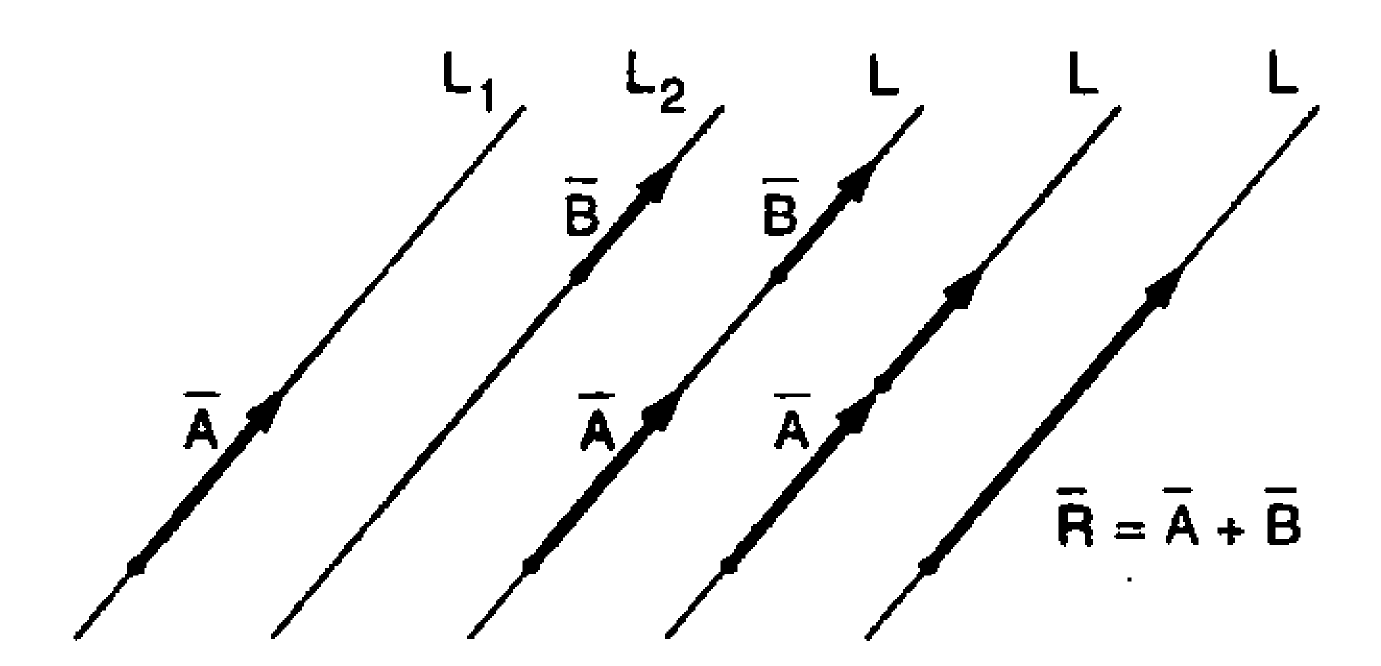


Aplicación:

$M = 5$ y $N = 15 \Rightarrow R = 5 - 15 = -10$

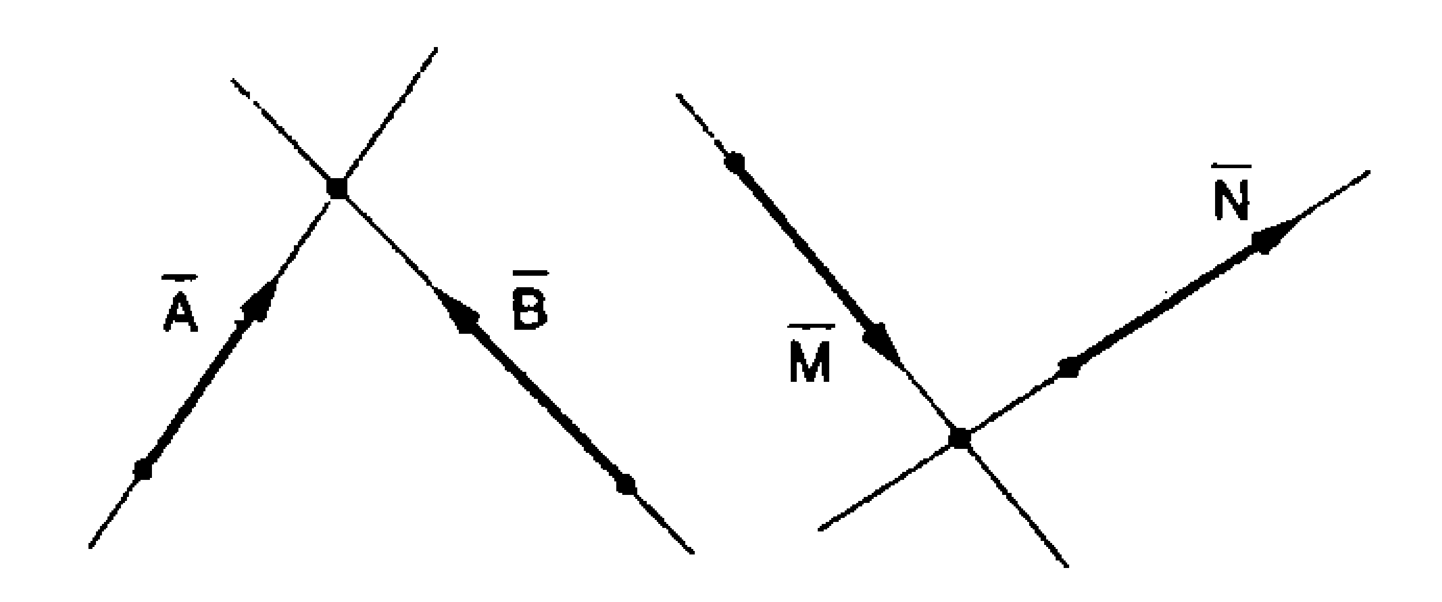
SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES PARALELOS

Cuando las direcciones son paralelas ambos vectores se trasladan a una sola paralela y se convierten en vectores colineales, aplicándose la suma o resta de vectores colineales. Así:



VECTORES NO PARALELOS Y NO COLINEALES

Son aquellos vectores cuyas direcciones se intersectan. Ejemplos

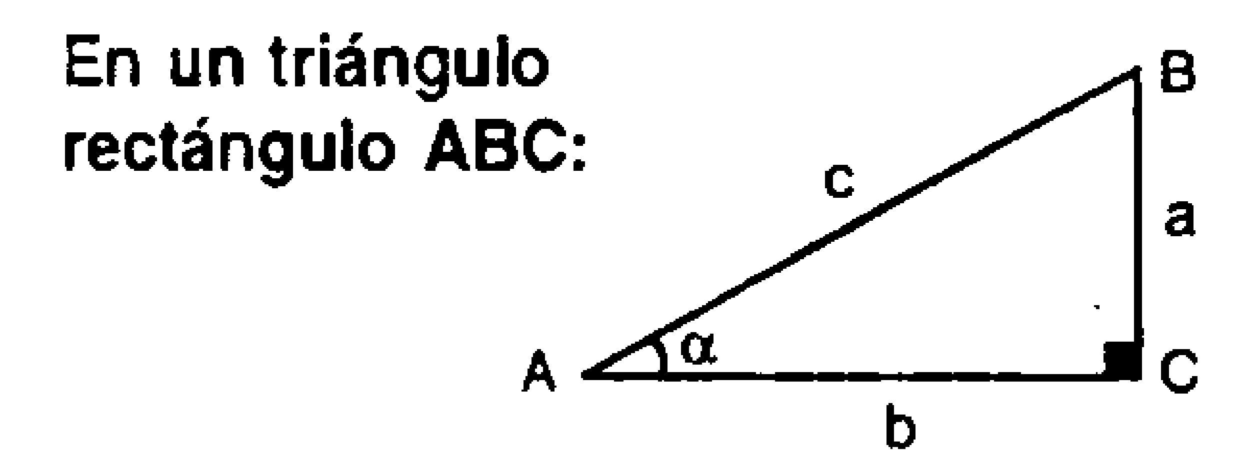


FORMULAS TRIGONOMÉTRICAS

Recordemos algunas fórmulas trigonométricas sencillas. A lo largo del curso nos veremos precisados a usarlas.

http://librosysolucionarios.net

En un triángulo rectángulo ABC:



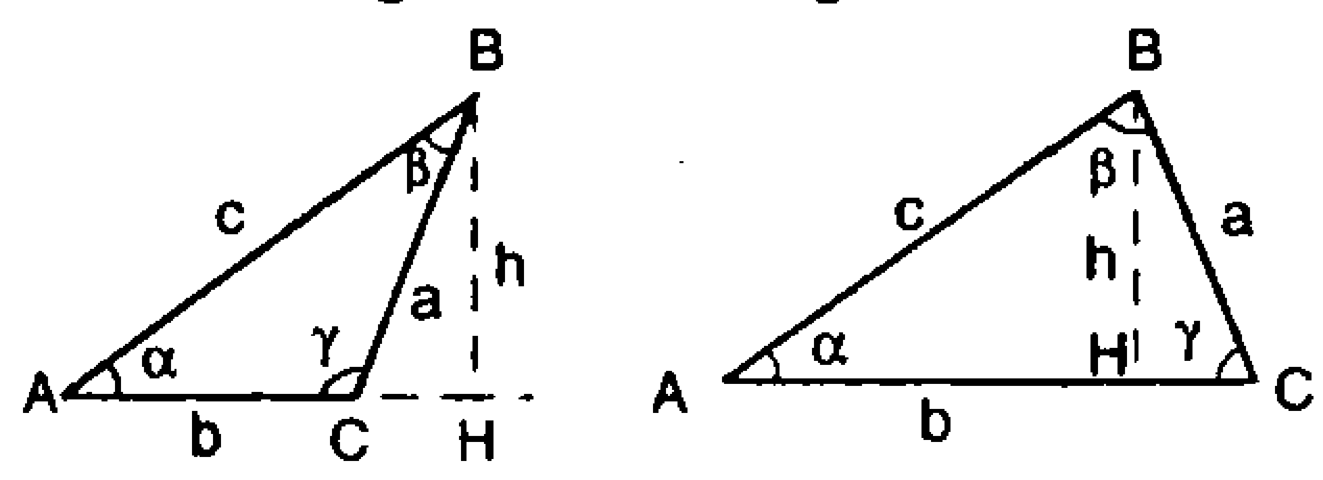
Sea: a un ángulo agudo; a y b los catetos y c la hipotenusa

$\text{sen}\,\alpha = a/c \Rightarrow a = c\,\text{sen}\,\alpha$

$\cos\alpha = b/c \Rightarrow b = c\cos\alpha$

$\text{tg}\,\alpha = a/b$ ó $\text{tg}\,\alpha = \text{sen}\,\alpha/\cos\alpha$

En un triángulo oblicuángulo ABC:



Ley de senos: Regularmente esta ley se usa para calcular el ángulo que forma la resultante con uno de los vectores, es decir la dirección de la resultante.

$$\frac{a}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{b}{\text{sen}\,\beta} = \frac{c}{\text{sen}\,\gamma}$$

Ley de cosenos: Para cualquier triángulo

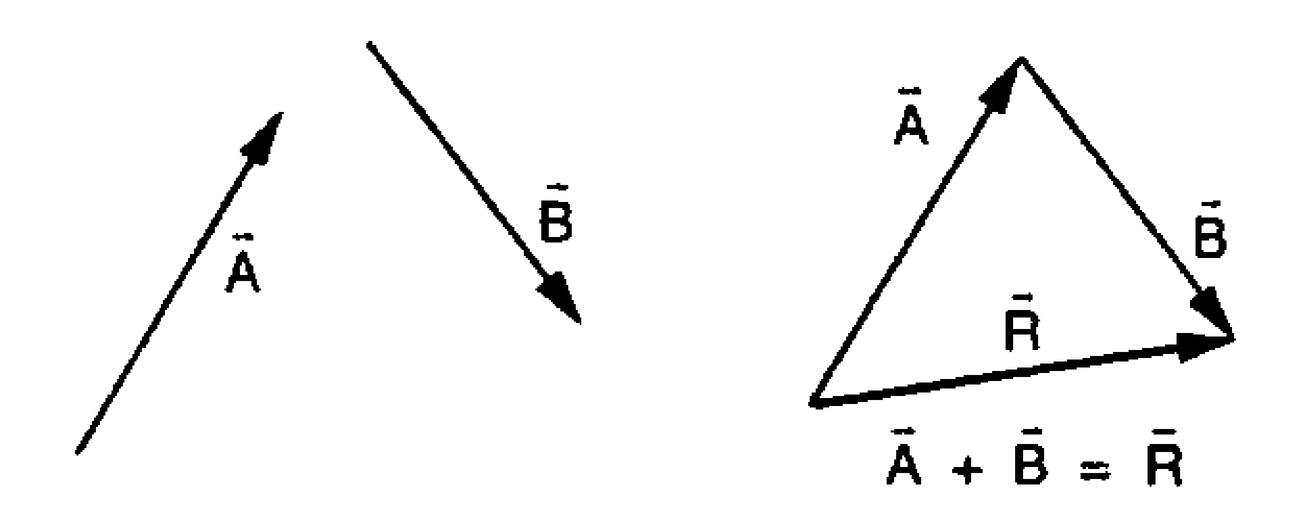
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc\cos\alpha$$

SUMA Y DIFERENCIA DE VECTORES NO PARALELOS Y NO COLINEALES. CÁLCULO DE LA RESULTANTE

MÉTODOS GRÁFICOS

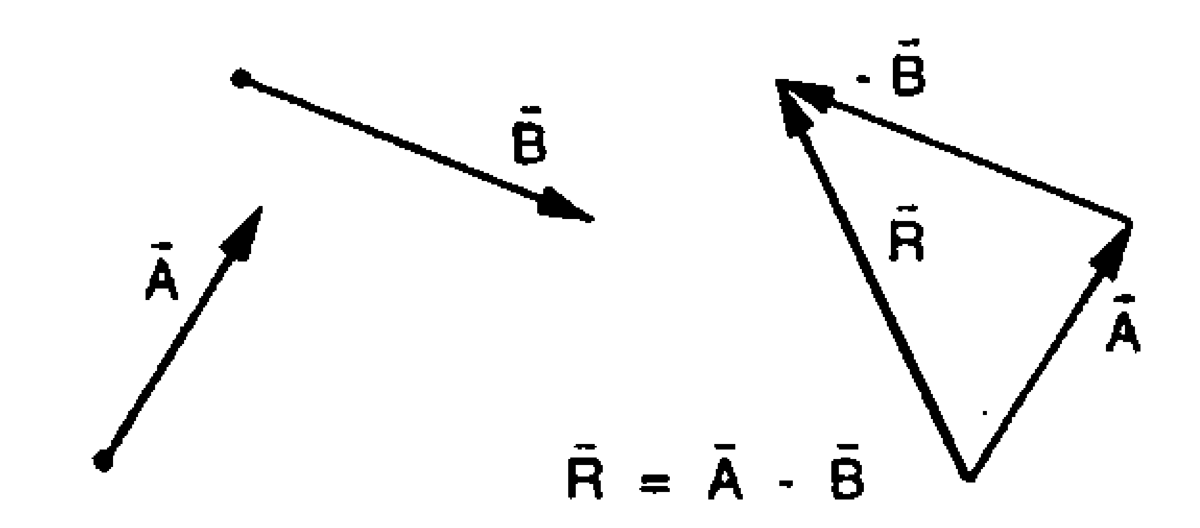
A. MÉTODO DEL TRIÁNGULO

SUMA: Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para sumar se traza el primer vector a escala, con su dirección, magnitud y sentido; desde la punta de éste se traza el segundo vector cuidando que también mantenga su magnitud, dirección y sentido. Se une el origen del primero con la punta del segundo, esta recta orientada, así trazada, es el vector resultante. Así: por ejemplo sumar $\vec{A}$ y $\vec{B}$



NOTA: La resultante es el vector que cierra el triángulo.

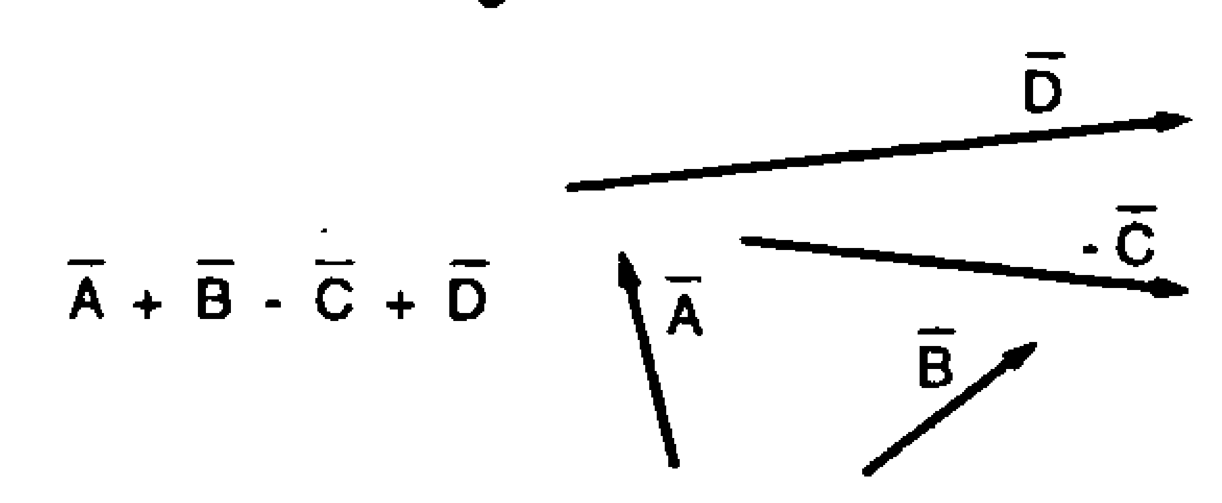
DIFERENCIA: Sean los vectores $\vec{A}$ y $\vec{B}$. Para restar, se traza el traza el vector minuendo, manteniendo su magnitud, dirección y sentido; de la punta de este vector se traza el vector sustraendo manteniendo su dirección pero **con sentido contrario**; se une el origen del primero con la punta del segundo, esta recta, así trazada es la resultante. Así por ejemplo, restar $\vec{A}$ y $\vec{B}$



Obsérvese que: $\vec{A} - \vec{B} = \vec{A} + (-\vec{B})$

NOTA: La resultante es la que cierra el triángulo.

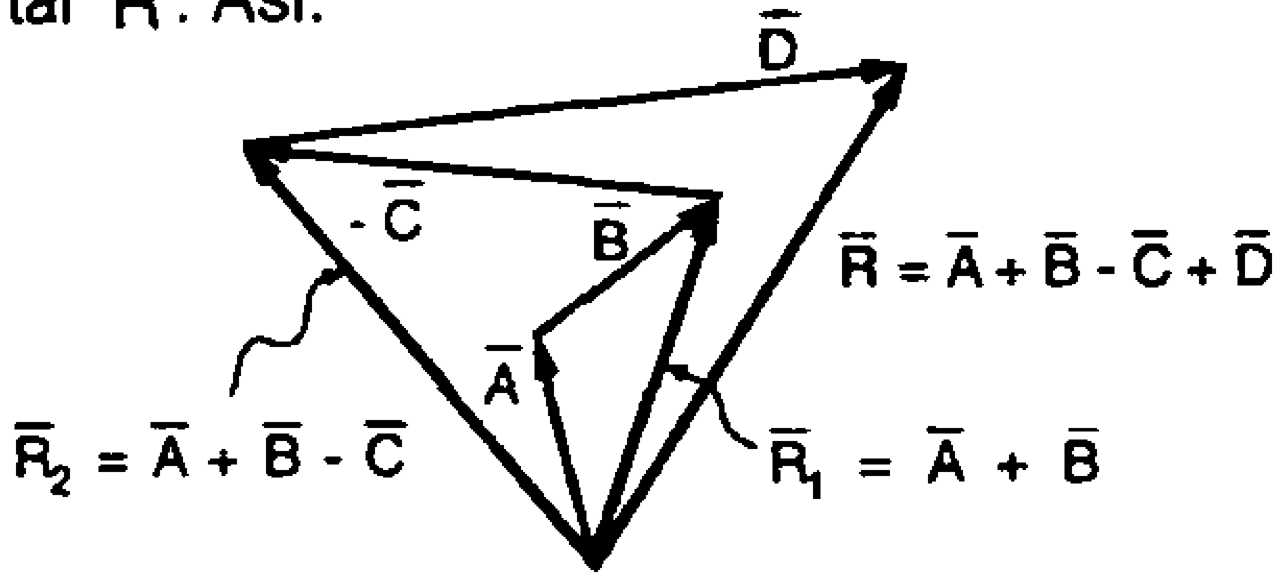
Ejemplo: Hallar la resultante geométrica del siguiente sistema.



Se traza el vector $\vec{A}$, a continuación, y de la punta de éste, se traza el vector $\vec{B}$, se une el origen de $\vec{A}$ con la punta de $\vec{B}$ y se obtiene la resultante parcial $\vec{R}_1$, de la punta de este vector $\vec{R}_1$, se traza el vector $\vec{C}$ pero con sen-

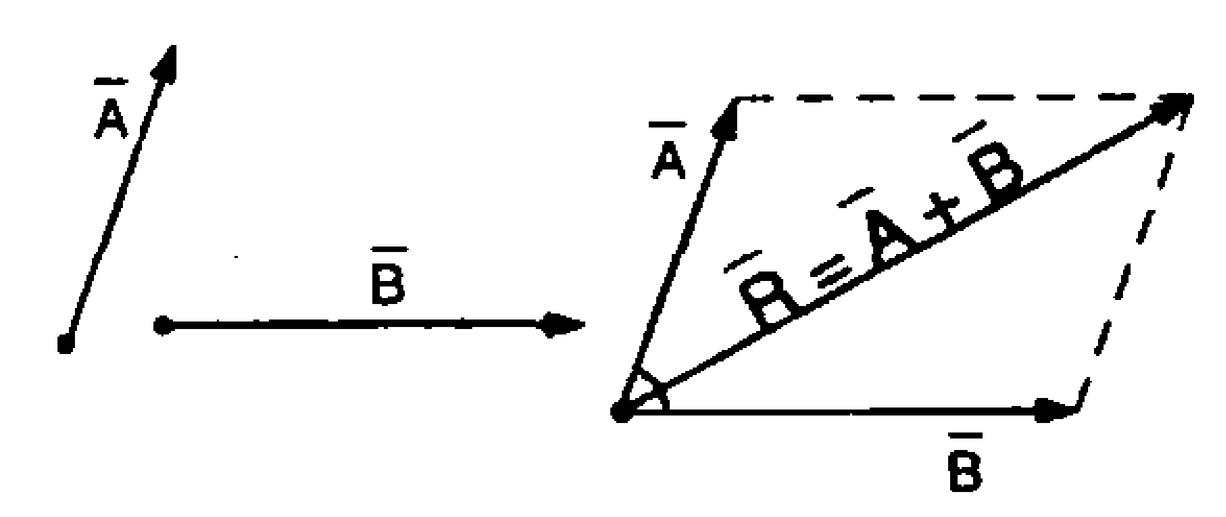
http://librosysolucionarios.net

tido contrario $(-\bar{C})$, se une el origen de $\bar{R}_1$ con la punta de $\bar{C}$ y se obtiene la segunda resultante parcial $\bar{R}_2$. Desde la punta de este vector $\bar{R}_2$ se traza el último vector $\bar{D}$ y se obtiene finalmente el vector resultante total $\bar{R}$. Así:



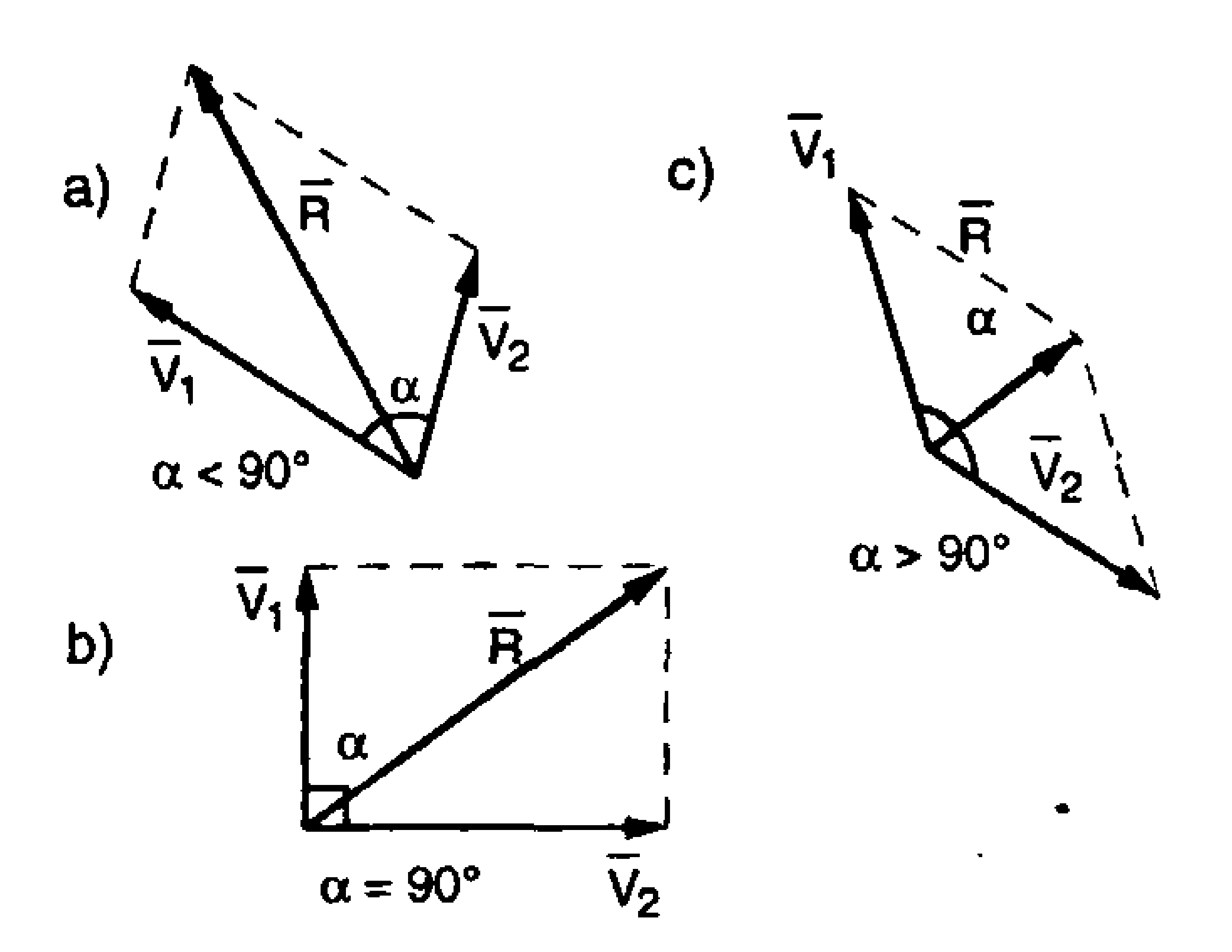
B. MÉTODO DEL PARALELOGRAMO

SUMA: Desde un mismo punto, haciendo coincidir los orígenes, se trazan los vectores que se van a sumar con sus magnitudes, direcciones y sentidos; luego, desde las puntas de cada uno se trazan paralelas al otro, conformándose un paralelogramo; la diagonal que une el origen de los vectores con la intersección de las paralelas es el vector resultante. Así por ejemplo: graficar $\bar{A} + \bar{B}$



A continuación:

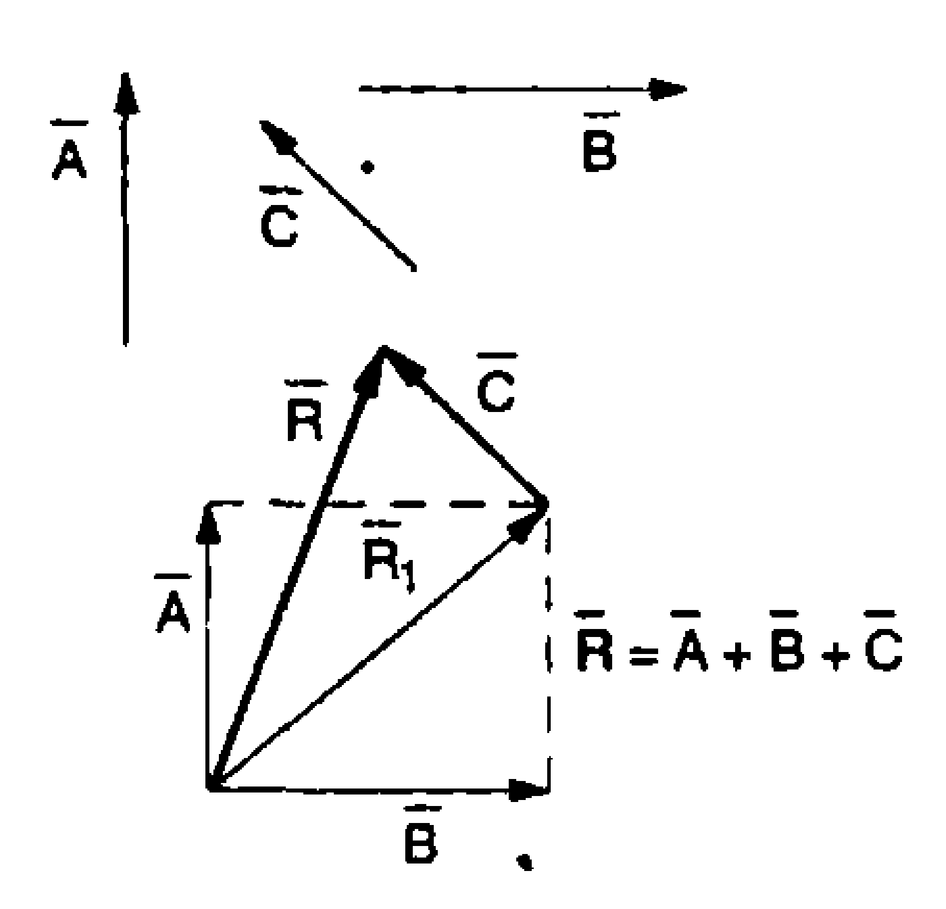
Casos de resultantes por el método del paralelogramo. Se dibuja el paralelo-garmo y luego se traza la diagonal.



Cuando son más de dos vectores:

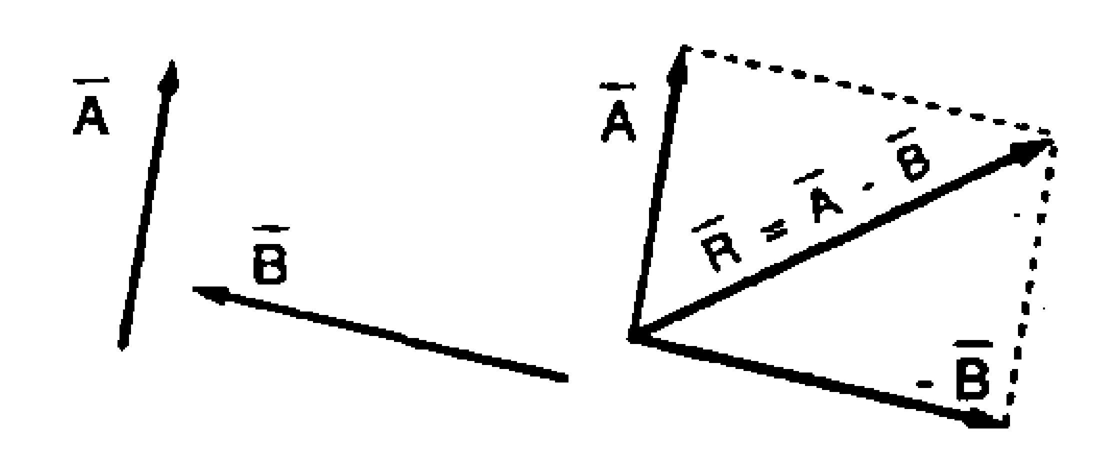
Ejemplo: Efectuar $\bar{A} + \bar{B} + \bar{C}$

Primero se suma $\bar{A}$ con $\bar{B}$ por el método del paralelogramo y se obtiene $\bar{R}_1$, luego se suma $\bar{R}_1$ con $\bar{C}$ por el método del triángulo o si se quiere por el método del paralelogramo y el resultado es la resultante final $\bar{R}$. Así:



RESTA: Consiste en trazar desde un mismo punto el minuendo y sustraendo, pero el sustraendo en sentido contrario. De las puntas se trazan paralelas al otro vector formándose el paralelogramo; se une el origen de los vectores con la intersección de las paralelas y se obtiene la resultante. Así:

Efectuar: $\bar{A} + (-\bar{B})$

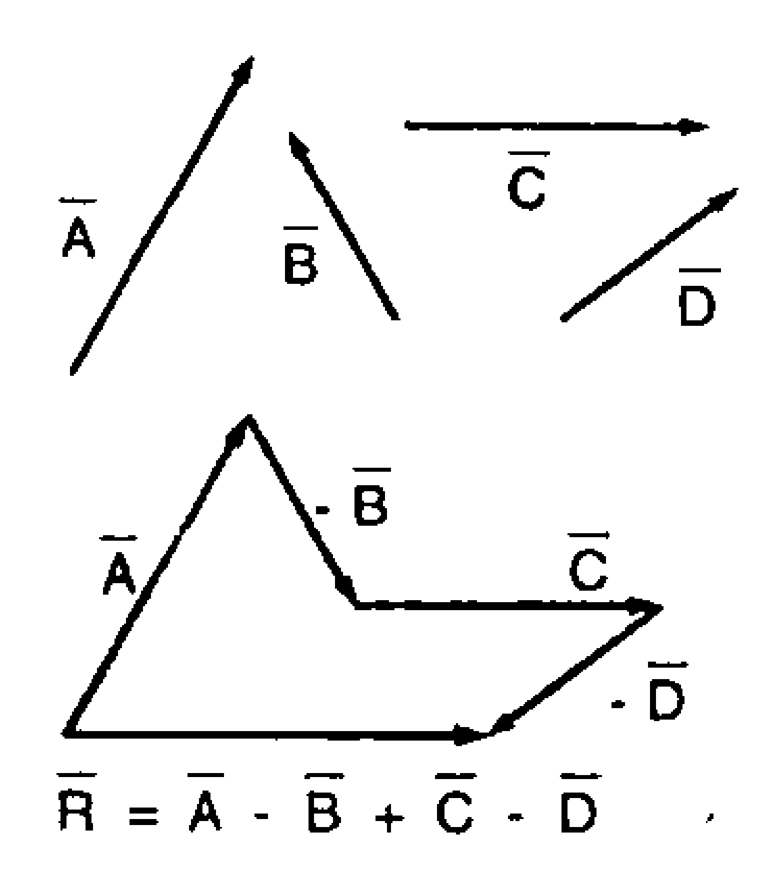


C. MÉTODO DEL POLÍGONO

Consiste en trazar los vectores uno a continuación del otro conservando sus magnitudes, direcciones y sentidos (conservando el sentido de los positivos pero invirtiendo el de los negativos); luego se une el origen del primero con la punta del último, el vector así trazado, es el vector resultante. Ejemplo, efectuar:

$$\bar{A} - \bar{B} + \bar{C} - \bar{D}$$

http://librosysolucionarios.net

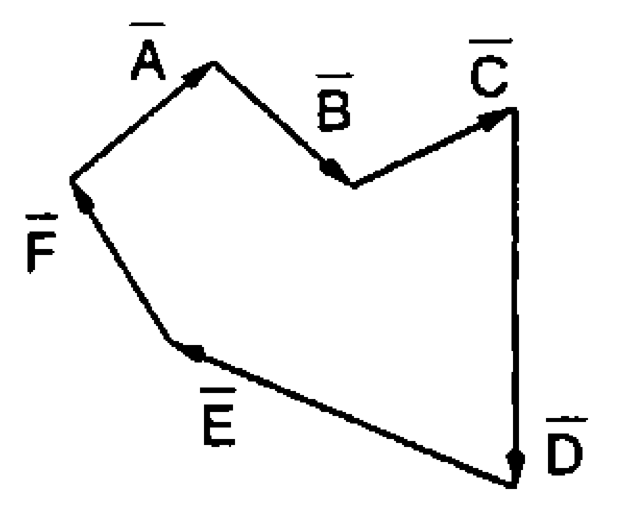


$\overline{R} = \overline{A} - \overline{B} + \overline{C} - \overline{D}$

NOTA: La resultante es la que cierra el polígono.

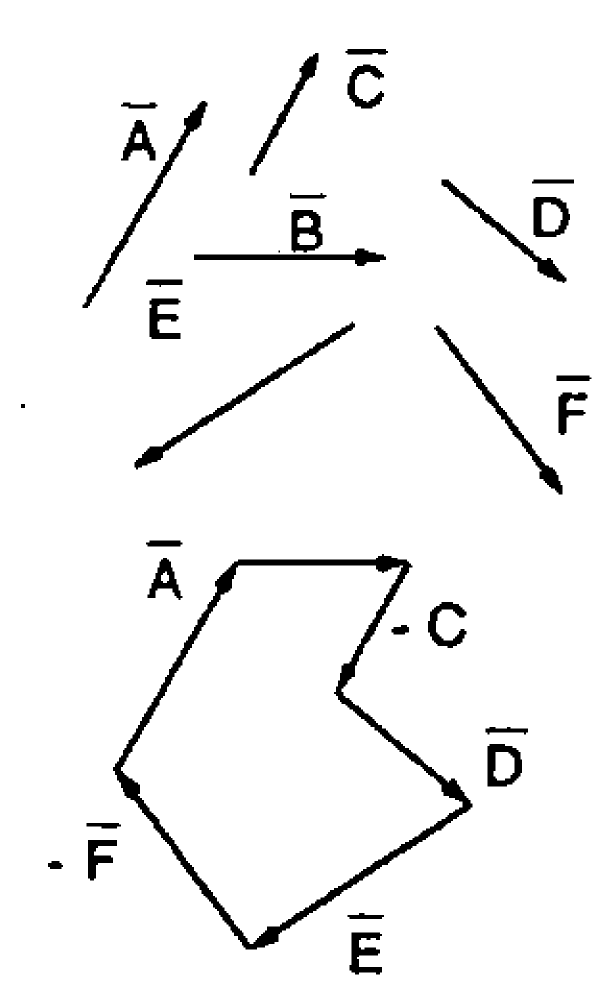
Si el polígono se cierra con el último sumando, la resultante es cero.

Por ejemplo:



$$\overline{A} + \overline{B} + \overline{C} + \overline{D} + \overline{E} + \overline{F} = 0$$

Otro ejemplo: $\overline{A} + \overline{B} - \overline{C} + \overline{D} + \overline{E} - \overline{F} = 0$



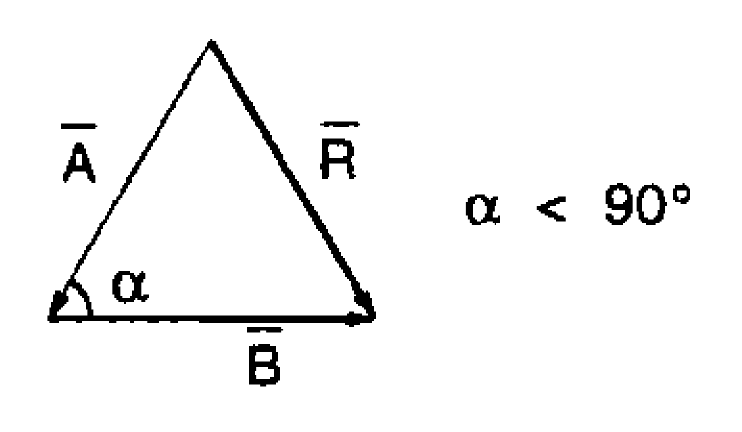
MÉTODOS ANALÍTICOS

Estos métodos se basan en la aplicación de fórmulas algebraicas, trigonométricas, geométricas, etc. sobre la base de la solución gráfica previamente realizada.

CÁLCULO DE LA SUMA:

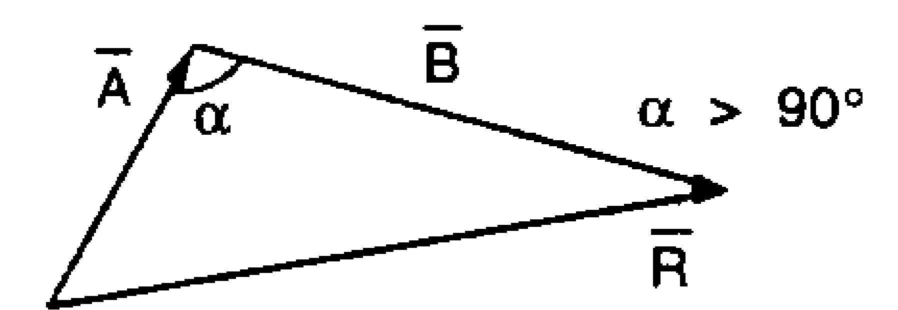
Por ejemplo, calcular la suma de los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$, sabiendo que forman un ángulo a. Ahora el ángulo que forman puede ser agudo u obtuso.

1) Por el método del triángulo:

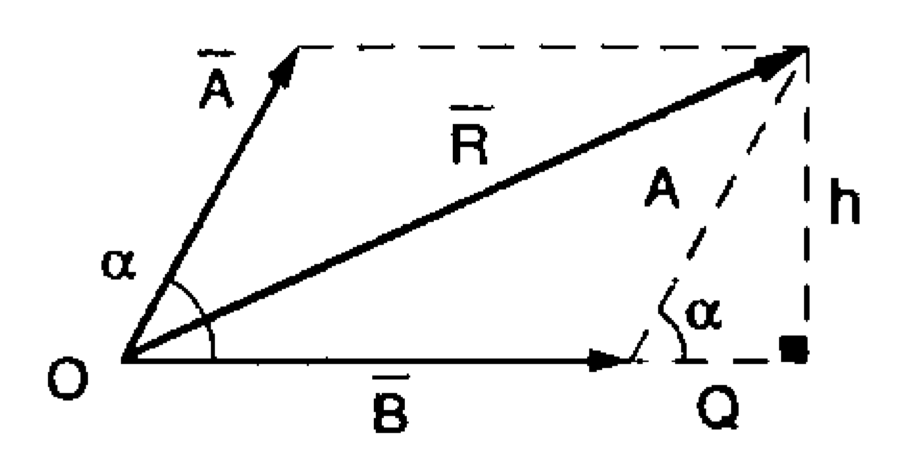


$$R = \sqrt{A^2 + B^2 - 2AB\cos\alpha}$$

Si $\alpha > 90°$ se tendrá que $\cos\alpha$: (-) enton-ces, en la fórmula, el signo (-) se hace (+)



2) Por el método del paralelogramo:



$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha}$$

Demostración : mirando el gráfico

$R^2 = (B + Q)^2 + h^2$

$R^2 = (B + A\cos\alpha)^2 + (A\,\text{sen}\,\alpha)^2$

$R^2 = B^2 + A^2\cos^2\alpha +$

$+ 2\,AB\cos\alpha + A^2\,\text{sen}^2\alpha$

$R^2 = B^2 + A^2(\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha) +$

$+ 2\,AB\cos\alpha$

Pero: $\cos^2\alpha + \text{sen}^2\alpha = 1$; luego:

$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$

$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha}$ l.q.q.d.

CÁLCULO DE LA DIFERENCIA:

La resultante de la diferencia se calcula en forma similar a la suma, sólo debe cuidarse que al construir la solución gráfica, el sus-

traendo debe grafi-carse en sentido contrario.

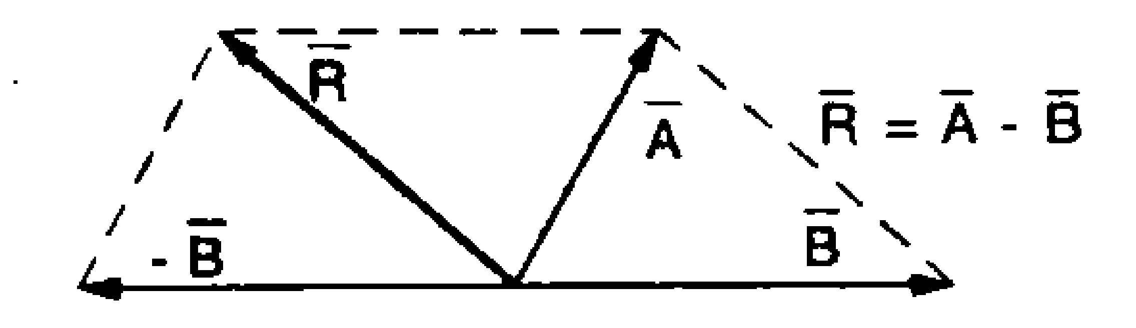
NOTA: El estudiante como prueba puede obtener que:

$$\left|\vec{R}\right| = \left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left|\vec{B} - \vec{A}\right|$$
$$= \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\alpha}$$

Se hace notar que:

$\bar{B} - \bar{A} = -(\bar{A} - \bar{B})$ ó $\bar{A} - \bar{B} = -(\bar{B} - \bar{A})$

Son vectores opuestos:
El gráfico facilitará su demostración:



RESULTANTE MÁXIMA Y MÍNIMA DE DOS VECTORES

Resultante Máxima:

La resultante es máxima cuando los vectores son paralelos o colineales y tienen el mismo sentido, es decir cuando $\alpha = 0°$.



Se sabe que:

$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$; cuando $\alpha = 0°$

$R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos 0$; pero $\cos 0 = 1$

$\therefore R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB$

$R^2 = (A + B)^2$

$\therefore R = |A + B|$

Resultante Mínima:

La resultante es mínima cuando los vectores son paralelos o colineales y tienen sentidos contrarios, es decir cuando $\alpha = 180°$.

180°
$\bar{B}$ $\bar{A}$

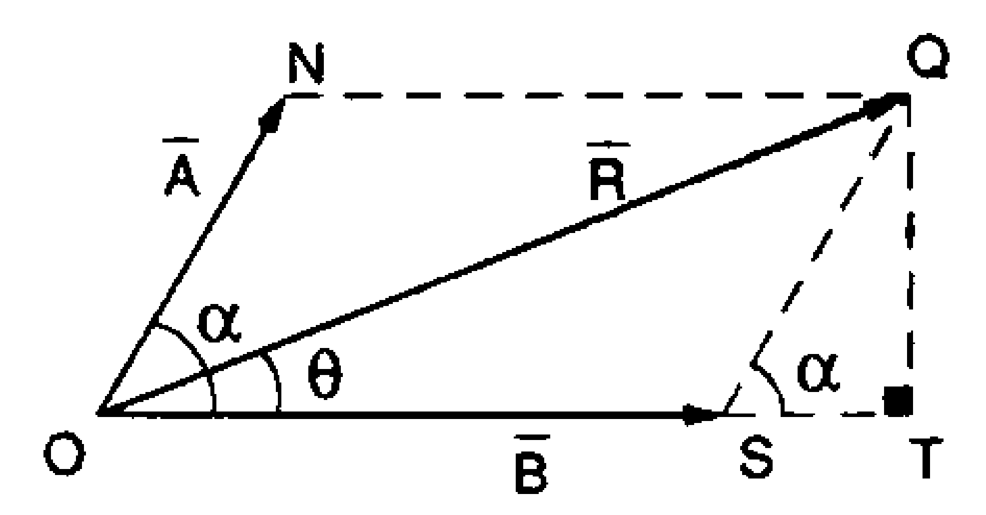
Se sabe: $R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$

como $\cos\alpha = \cos 180° = -1$

$R^2 = (A - B)^2 \quad \therefore \quad R = |A - B|$

DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE

La dirección de la resultante de dos vectores está dada por el ángulo "θ" que forma la resultante con uno de los vectores; y su valor depende del módulo de los dos vectores y del ángulo "α" que forman.
Sean los vectores A y B y sea "q" el ángulo que forma la resultante con el vector $\bar{B}$:



I) Se puede calcular la dirección "θ" de la resultante a partir de la función seno:

En el triángulo rectángulo OTQ:

$$\text{sen}\,\theta = \frac{QT}{R} \qquad (A)$$

En el triángulo rectángulo STQ:

$$QT = A\,\text{sen}\,\alpha \qquad (a)$$

Además se sabe que:

$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha} \qquad (b)$$

$$\therefore \boxed{\text{sen}\,\theta = \frac{A\,\text{sen}\,\alpha}{\sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha}}}$$

II) También se puede calcular la dirección "θ" de la resultante a partir de la función tangente.

Así, en el triángulo rectángulo OTQ:

$$\text{tg}\,\theta = \frac{QT}{\bar{B} + ST} \qquad (B)$$

En el triángulo rectángulo STQ:

$QT = A\,\text{sen}\,\alpha$ y $ST = A\cos\alpha$

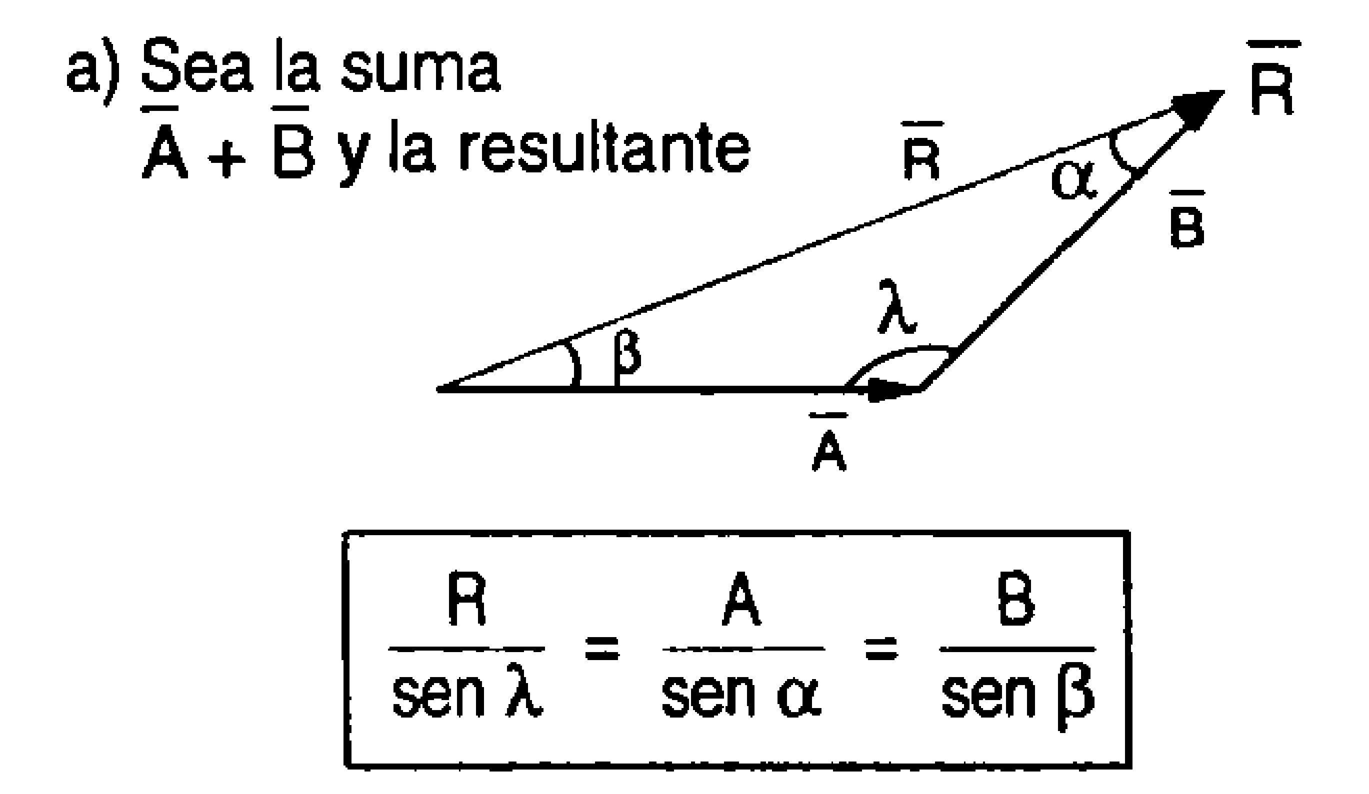
$$\therefore \boxed{\text{tg}\,\theta = \frac{A\,\text{sen}\,\alpha}{\bar{B} + A\cos\alpha}}$$

http://librosysolucionarios.net

CÁLCULO DE LA RESULTANTE POR LEY DE SENOS

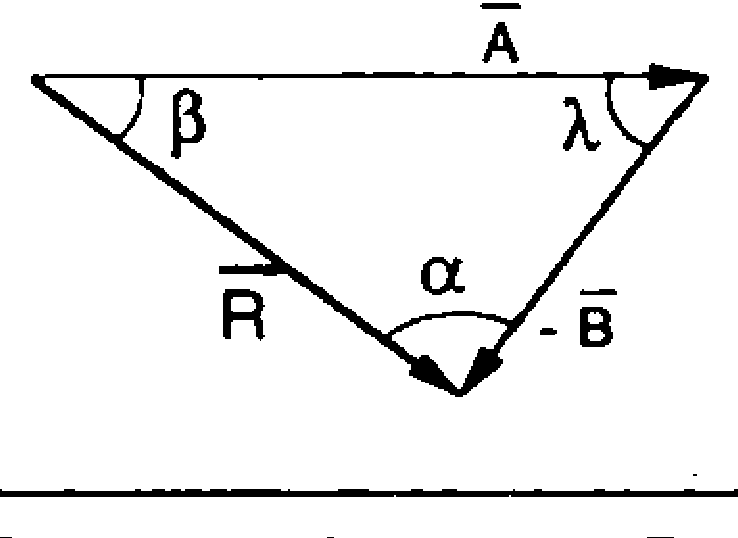
Hallada la resultante de una suma o diferencia de vectores por el método gráfico del triángulo, puede aplicarse la ley de senos para hallar analíticamente el valor de la resultante. Así:

a) Sea la suma $\overline{A} + \overline{B}$ y la resultante $\overline{R}$



$$\frac{R}{\text{sen}\,\lambda} = \frac{A}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta}$$

b) Sea la diferencia y la resultante $\overline{R}$



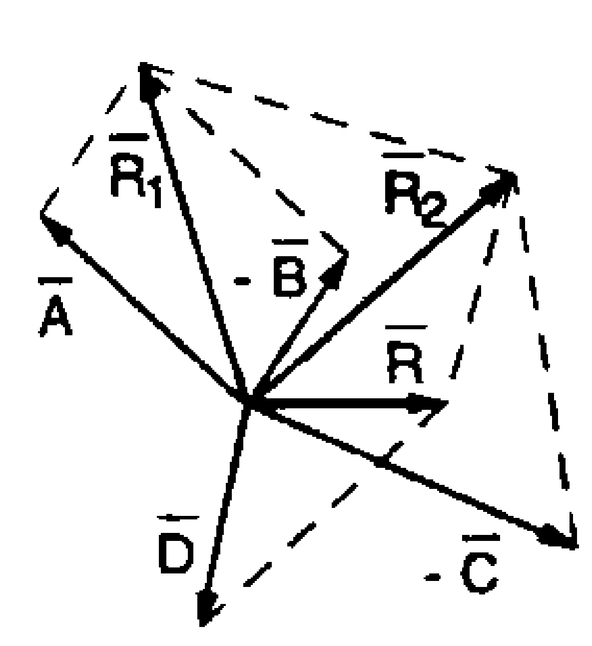
$$\frac{R}{\text{sen}\,\lambda} = \frac{A}{\text{sen}\,\alpha} = \frac{B}{\text{sen}\,\beta}$$

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR

COMPONENTES DE UN VECTOR

Las componentes de un vector son todos los vectores que sumados o restados dan como resultado el vector indicado (ese vector se llama RESULTANTE).

* Un vector puede tener infinitos componentes



$\overline{R}_1 = \overline{R}_2 + \overline{D}$ (I)

Pero: $\overline{R}_2 = \overline{R}_1 - \overline{C}$ (1)

Pero: $\overline{R}_1 = \overline{A} - \overline{B}$ (2)

Sustituyendo (1) y (2) en (I)

$$\overline{R} = \overline{A} - \overline{B} - \overline{C} + \overline{D}$$

En el ejemplo los vectores A, B, C y **D** son componentes del vector R.

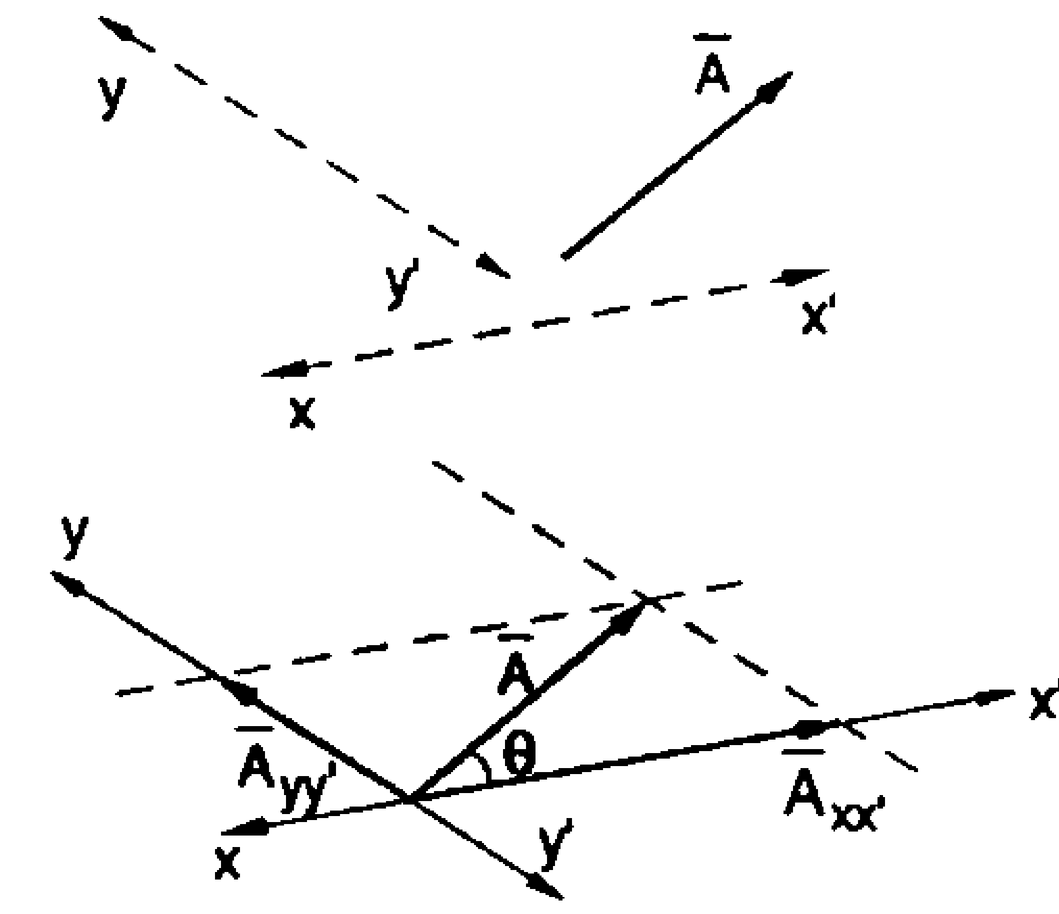
DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN DOS DIRECCIONES

Todo vector se puede descomponer en dos direcciones dadas, así:

Por el origen del vector dado, se trazan paralelas a las direcciones dadas.

Del mismo modo por la punta del vector dado se trazan rectas discontinuas, tam-bién paralelas a las direcciones dadas, la intersección de éstas con las rectas anterior-mente trazadas desde el origen, darán la posición y magnitud de las componentes.

Así: descomponer $\overline{A}$ en las direcciones yy', xx'.



Las componentes de $\overline{A}$ en las direcciones dadas son: $\overline{A}_{yy'}$ y $\overline{A}_{xx'}$

Así como estas direcciones dadas (donde se ubican las componentes de la fuerza) forman entre sí un ángulo cualquiera, así mismo pueden formar un ángulo de 90°, entonces las componentes ubicadas en estas direcciones se llaman "componentes rectangulares".

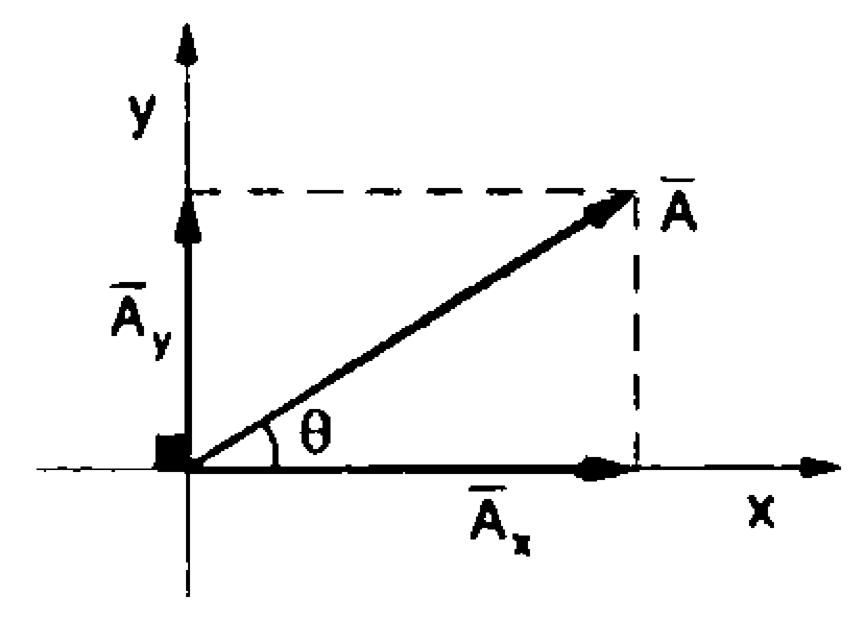
http://librosysolucionarios.net

DESCOMPOSICIÓN DE UN VECTOR EN SUS COMPONENTES RECTANGULARES

Por el origen del vector dado, se trazan dos rectas perpendiculares entre sí, formando 90° a este par de rectas se le denomina "sistema de ejes rectangulares x y", generalmente el eje "x" es horizontal y el eje "y" es vertical, sin embargo pueden tener cualquier posición, la única condición es que entre ellos formen un ángulo de 90°.

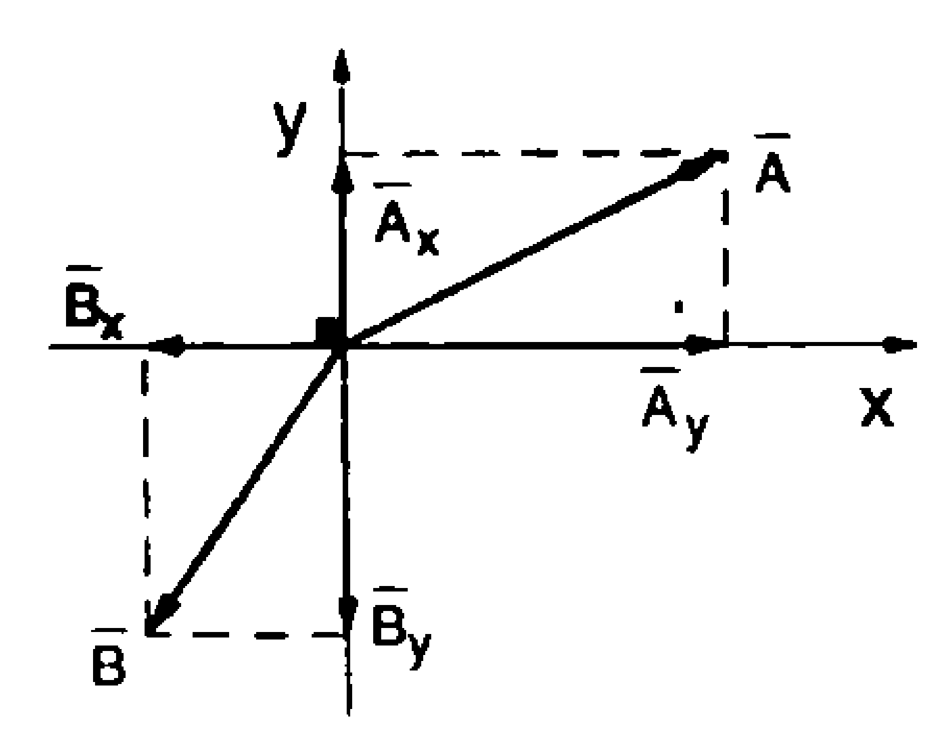
Sobre estos ejes se proyecta el vector dado y como resultado se tendrá dos componentes, un componente sobre el eje "x" y el otro sobre el eje "y", los cuales hacen un ángulo de 90°.

Ejemplo: Descomponer el vector $\overline{A}$ en sus componentes rectangulares.



Los componentes $\overline{A}_x$ y $\overline{A}_y$ son las componentes rectangulares del vector $\overline{A}$

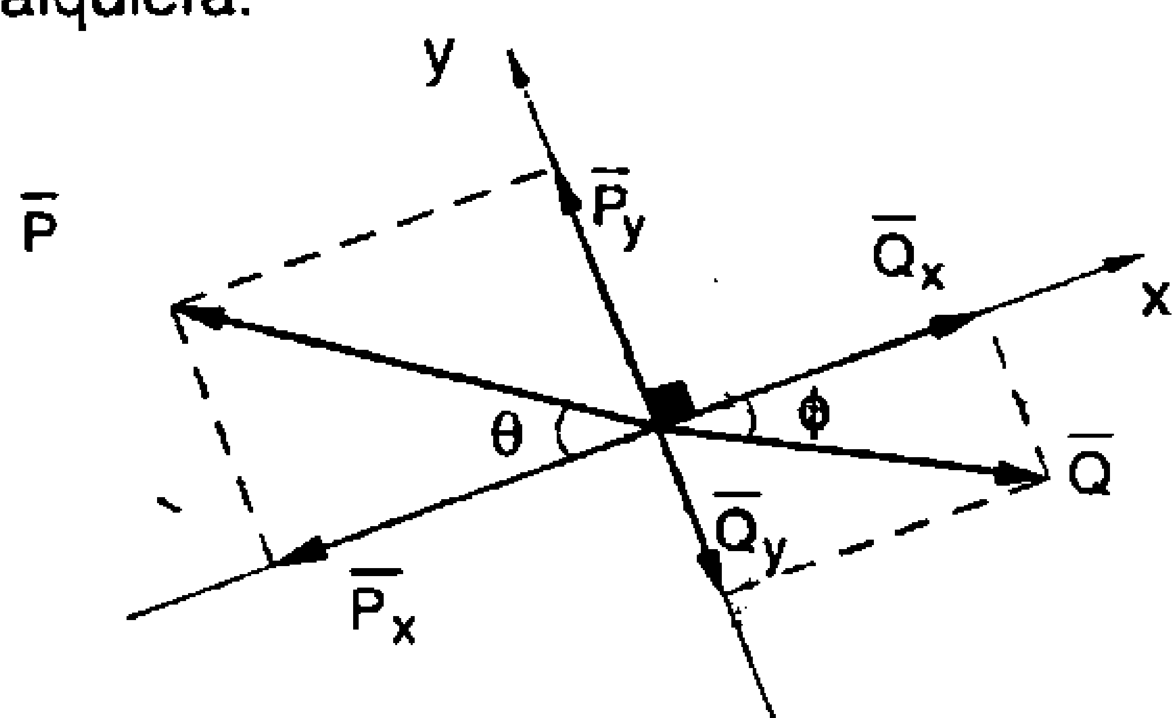
Otro ejemplo: Descomponer los vectores $\overline{A}$ y $\overline{B}$ en un mismo sistema rectangular.



Las componentes $\overline{A}_x$ y $\overline{A}_y$ son de $\overline{A}$

Las componentes $\overline{B}_x$ y $\overline{B}_y$ son de $\overline{B}$

Otro ejemplo: Descomponer los vectores $\overline{P}$ y $\overline{Q}$ en un sistema rectangular inclinado en un ángulo cualquiera.



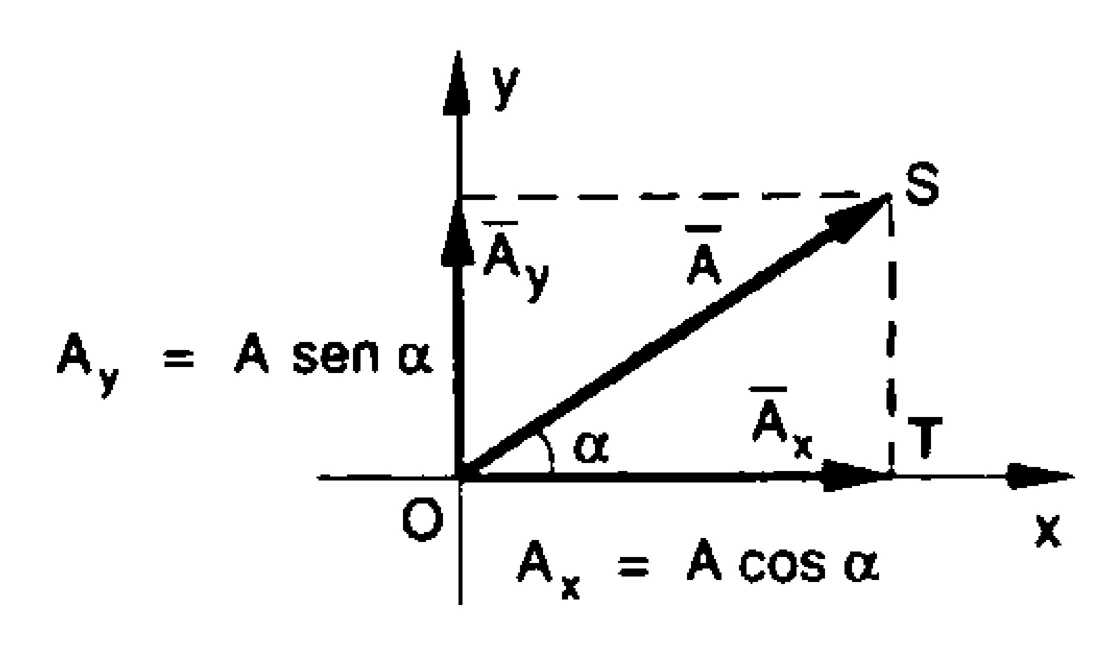
Como se dijo, la única condición para descomponer un vector en sus componentes rectangulares es que los ejes sobre los cuales se proyecta el vector formen entre sí, ángulo de 90°.

En todos los casos el valor del vector proyectado está dado por el valor de sus componentes según la siguiente fórmula pitagórica:

$$R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

CÁLCULO DE LAS COMPONENTES RECTANGULARES

Se sabe que todo vector se puede descomponer en sus componentes rectangulares. Analíticamente se calcula mediante expresiones trigonométricas.



Donde: A_x y A_y son componentes rectangulares de A.

En el triángulo rectángulo OTS:
$A_x = OT = A \cos \alpha$

$$\therefore \quad \boxed{A_x = A \cos \alpha}$$

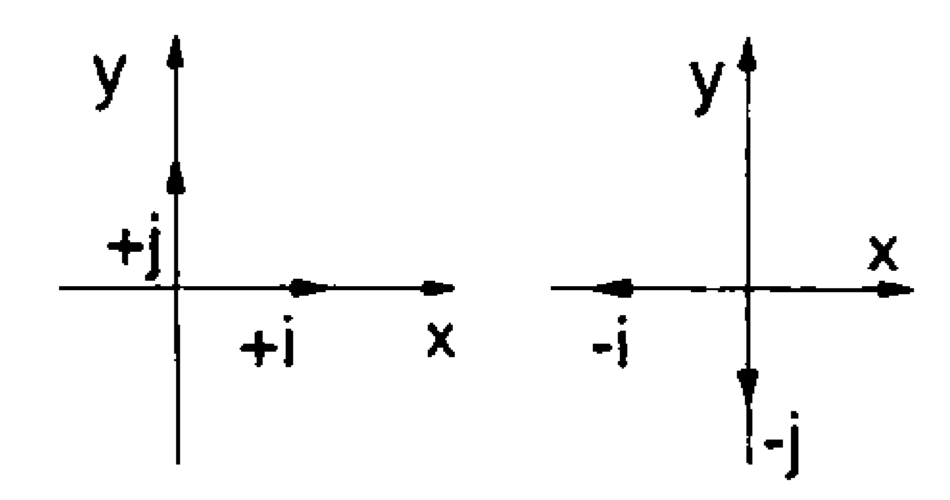
$A_y = ST = A \text{ sen } \alpha$

$$\therefore \quad \boxed{A_y = A \text{ sen } \alpha}$$

VECTOR UNITARIO O VERSOR

Es aquel vector cuyo módulo es la unidad y cuya función es indicar la dirección y sentido de un vector.

Los vectores unitarios o versores en los ejes rectangulares tienen los siguientes valores relativos (signos):



NOTA: Las proyecciones o componentes rectangulares de un vector toman el signo de sus versores.

CÁLCULO DE LA RESULTANTE DE VARIOS VECTORES POR DESCOMPOSICIÓN RECTANGULAR

1. Todos los vectores se trazan desde el origen del sistema de ejes rectangulares.
2. Se descomponen en sus componentes rectangulares.
3. Se halla la suma algebraica de todas las componentes sobre el eje x (ΣVx) y la suma algebraica de todas las componentes del eje y (SVy).
4. El vector resultante está dada por la fórmula pitagórica:

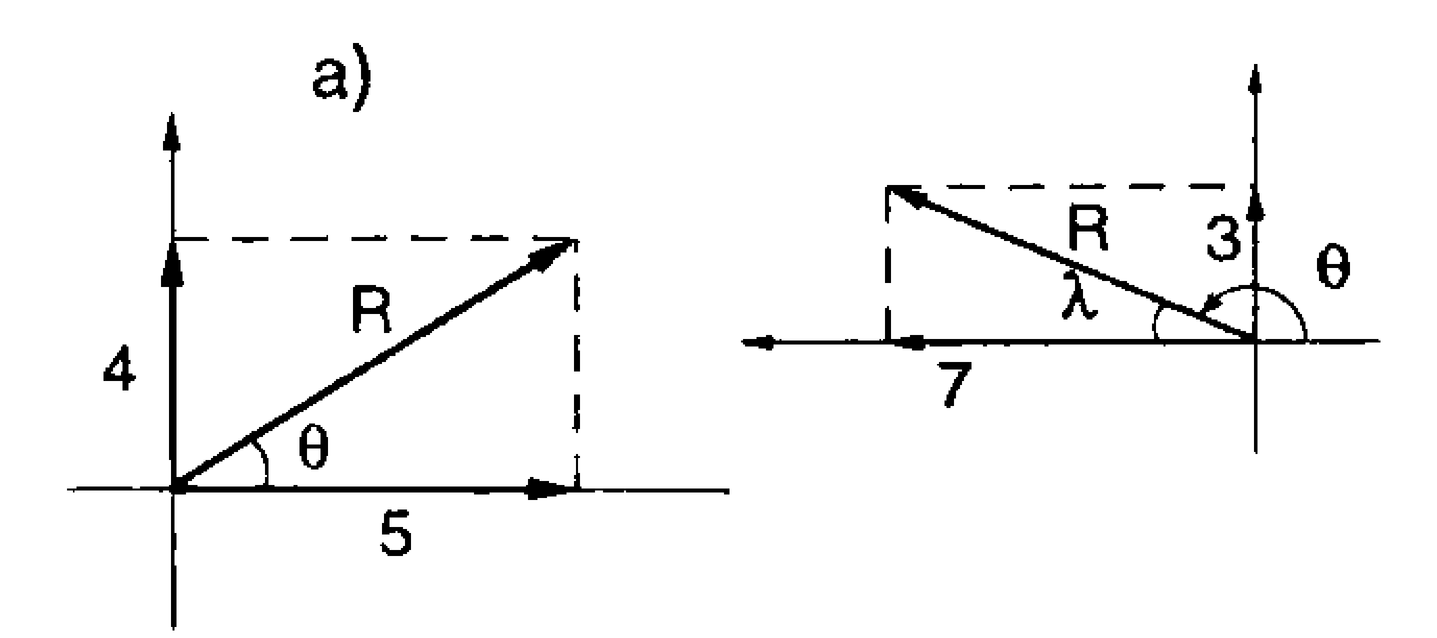
$$\boxed{V_R = \sqrt{(\Sigma V_x)^2 + (\Sigma V_y)^2}}$$

DIRECCIÓN DE LA RESULTANTE DE VARIOS VECTORES

Está dada por la tangente del ángulo "θ", medido en sentido antihorario, que forma la resultante con el lado positivo del eje "x".

$$\boxed{\text{tg } \theta = \frac{\Sigma V_y}{\Sigma V_x}}$$

Ejemplo: Hallar la dirección de la resultante de las figuras mostradas.



RESOLUCIÓN :

a) $\text{tg } \theta = \dfrac{V_y}{V_x} = \dfrac{4}{5} = 0{,}8$

$\therefore \ \theta = \text{ángulo tg } 0{,}8 \quad \theta = 38° \ 39' \ 35''$

b) Para calcular θ, primero calcular "λ"

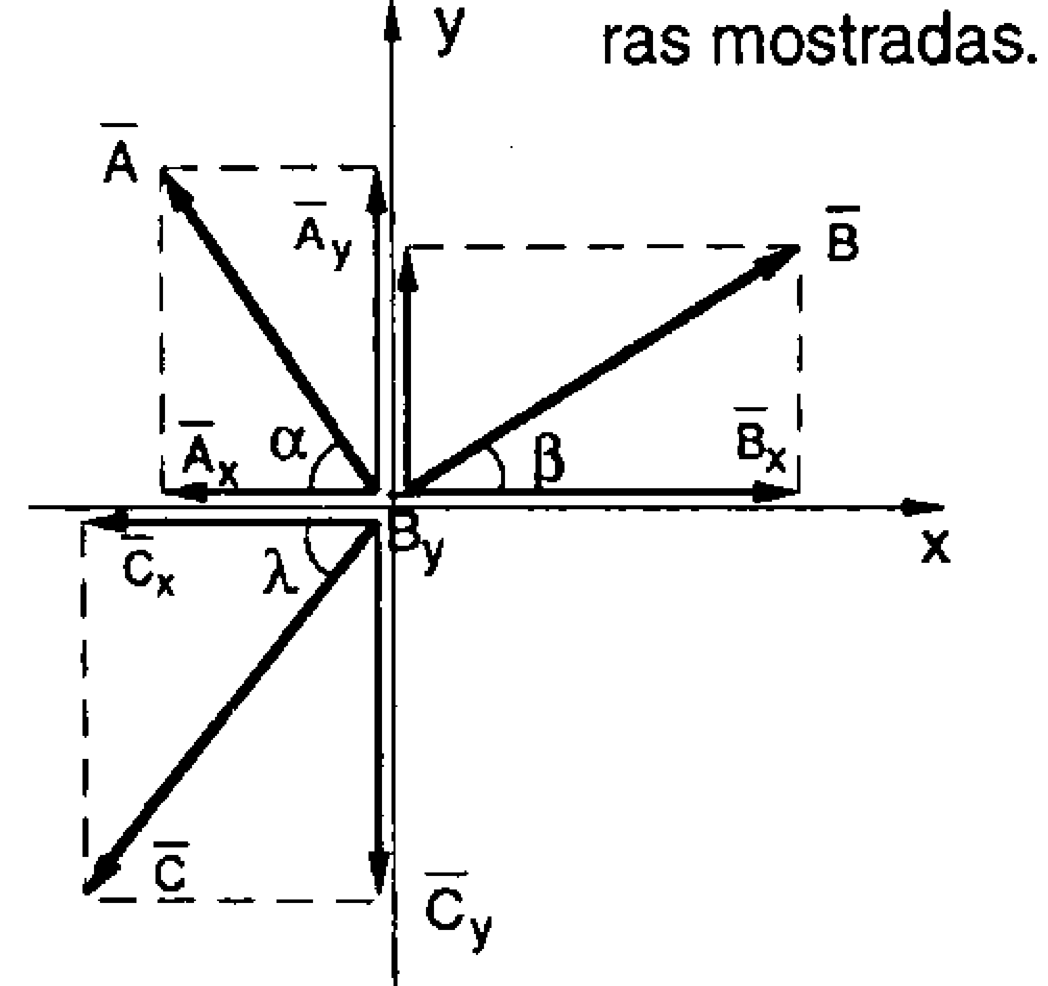
$$\text{tg } \lambda = \frac{V_y}{V_x} = \frac{3}{7} = 0{,}43$$

$\therefore \ \lambda = \text{ángulo tg } 0{,}43 = 23° \ 16' \ 04''$

Ahora: $\theta = 180° - \lambda = 180° - 23° \ 16' \ 04''$

finalmente $\theta = 156° \ 43' \ 56''$

Ejemplo: Sean los vectores A, B y C hallar la dirección de la resultante de las figuras mostradas.



Donde por un lado: $A_x = -A\cos\alpha$

$B_x = B\cos\beta \quad C_x = C\cos\lambda$

$\Sigma\overline{V}_x = \overline{A}_x + \overline{B}_x + \overline{C}_x$; es decir:

$\Sigma V_x = -A\cos\alpha + B\,\text{sen}\,\beta - C\cos\lambda$ (1)

Por otro lado: $A_y = A\,\text{sen}\,\alpha$

$B_y = B\,\text{sen}\,\beta \quad C_y = C\,\text{sen}\,\lambda$

$\Sigma\overline{V}_y = \overline{A}_y + \overline{B}_y + \overline{C}_y$; es decir:

$\Sigma V_y = A\,\text{sen}\,\alpha + B\,\text{sen}\,\beta - C\,\text{sen}\,\lambda$ (2)

Aplicación numérica:

Sean: $A = 2$, $B = 4$, $C = 5$
$\alpha = 53°$, $\beta = 30°$, $C = 60°$

* Reemplazando en (1)

$\Sigma V_x = -2\cos 53° + 4\cos 30° - 5\cos 60°$

$\Sigma V_x = -2(4/5) + 4(\sqrt{3}/2) - 5(1/2)$

$\Sigma V_x = -0{,}64$

* Reemplazando en (2)

$\Sigma V_y = -2\,\text{sen}\,53° + 4\,\text{sen}\,30° - 5\,\text{sen}\,60°$

$\Sigma V_y = -2(3/5) + 4(1/2) - 5(\sqrt{3}/2)$

$\Sigma V_y = -3{,}53$

* Reemplazando en la fórmula

$$V_R = \sqrt{(\Sigma V_x)^2 + (\Sigma V_y)^2}$$

$$V_R = \sqrt{(-0{,}64)^2 + (-3{,}53)^2}$$

$$V_R = 3{,}58$$

Es decir el módulo del vector resultante de los tres vectores dados es 3,58.

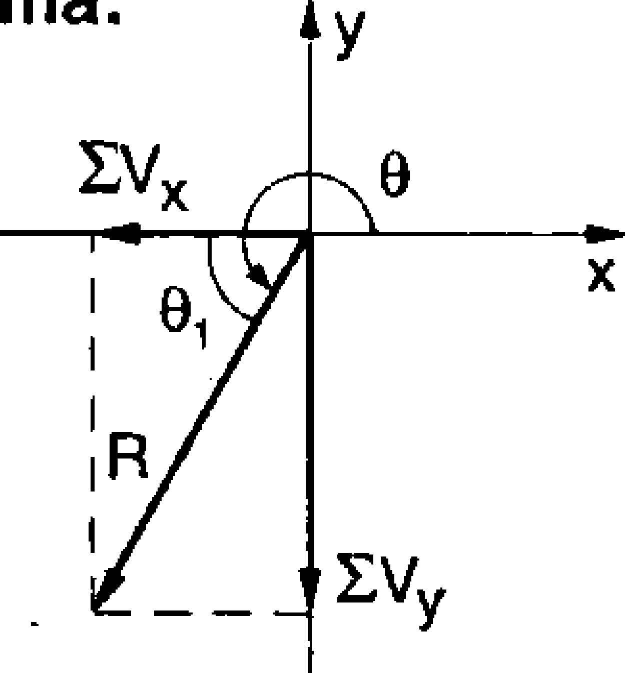
* Cálculos de su dirección. Por fórmula

$$\text{tg}\,\theta_1 = \frac{\Sigma V_y}{\Sigma V_x} = \frac{-3{,}53}{-0{,}64} = 5{,}52$$

$$\therefore \theta_1 = \text{ángulo tg } 5{,}52 = 79°43'54"$$

Análisis del problema:

En un sistema rectangular se trazan los valores hallados de ΣV_x y ΣV_y y gráficamente se halla la resultante, así:



El valor del módulo de la resultante no deja duda. ¿Pero la dirección?

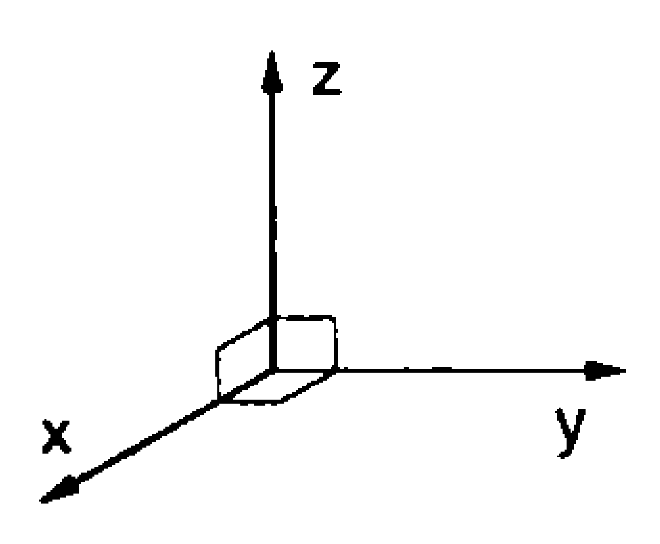
La resultante está en el primer cuadrante. La dirección de la resultante es el ángulo que forma está resultante con la dirección positiva del eje "x", medido en sentido antihorario, es decir $\theta_1 + 180°$. Por consiguiente, la dirección de la resultante será:

$$\theta = \theta_1 + 180° = 79°\,43'\,54" + 180°$$

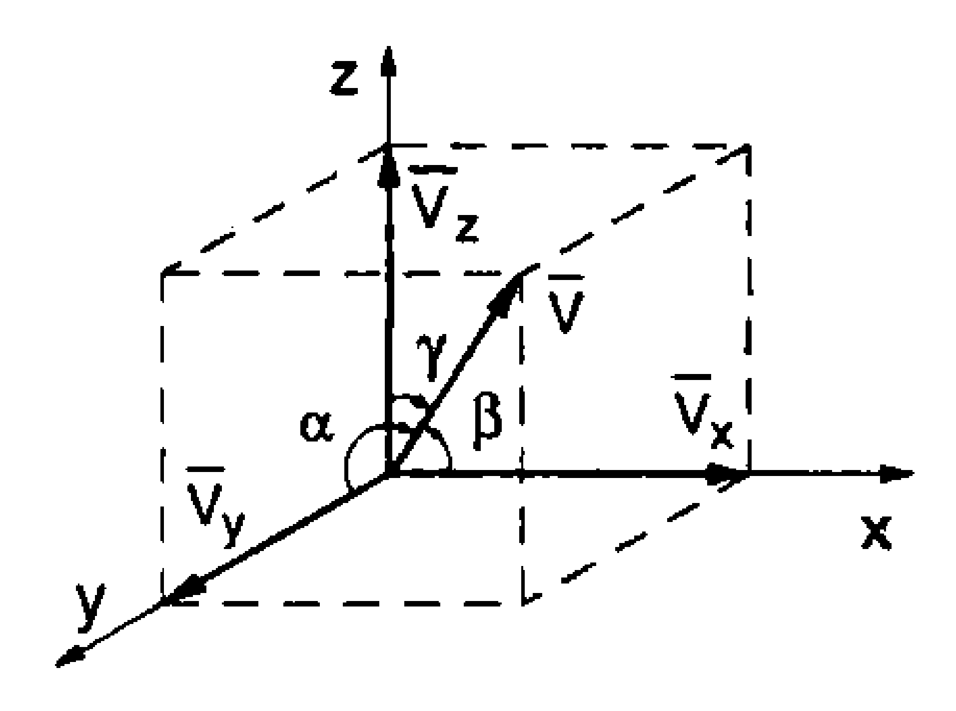
$$\theta = 259°\,43'\,53"$$

VECTORES EN EL ESPACIO

En primer lugar debemos conocer el sistema rectangular de tres dimensiones.



Los ejes x, y están en el plano horizontal, el eje z es perpendicular a los ejes en el punto de intersección de los tres



Por métodos geométricos muy sencillos se halla la resultante en función de sus 3 componentes.

$$\boxed{V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}}$$

ÁNGULOS Y COSENO DIRECTORES

* Ángulos directores son los formados por los vectores y cada uno de los ejes rectangulares positivos.

α : el vector V con el eje x
β : el vector V con el eje y
γ : el vector V con el eje z

* Cosenos directores son los cosenos de los ángulos directores.

$$\cos\alpha \quad ; \quad \cos\beta \quad ; \quad \cos\gamma$$

Ahora:

$$\cos\alpha = \frac{V_x}{V} \; ; \cos\beta = \frac{V_y}{V} \; ; \cos\gamma = \frac{V_z}{V}$$

RELACIÓN ENTRE COSENOS DIRECTORES

Se puede escribir:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

$$\left(\frac{V_x}{V}\right)^2 + \left(\frac{V_y}{V}\right)^2 + \left(\frac{V_z}{V}\right)^2 = 1$$

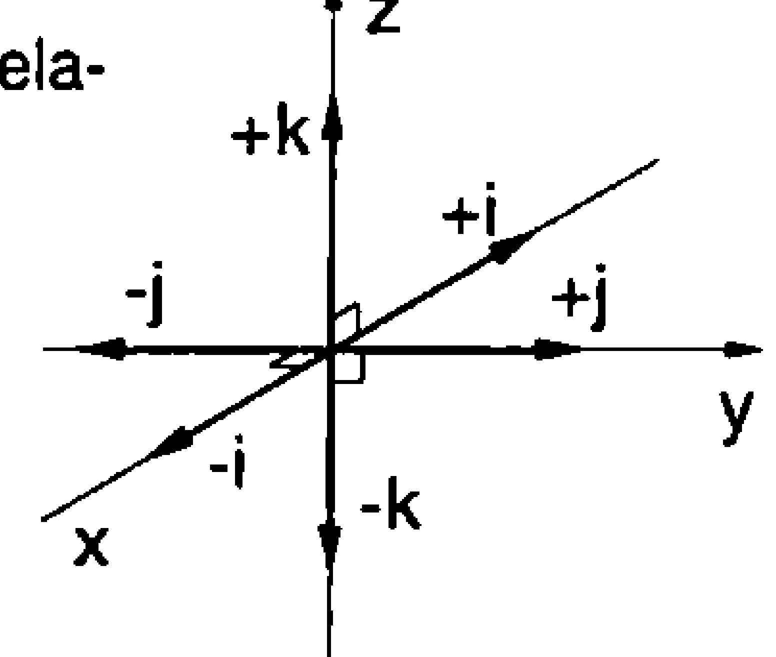
$$\frac{V_x^2 + V_y^2 + V_z^2}{V} = \frac{V^2}{V^2} = 1$$

$$\therefore \quad \boxed{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1}$$

VECTORES UNITARIOS

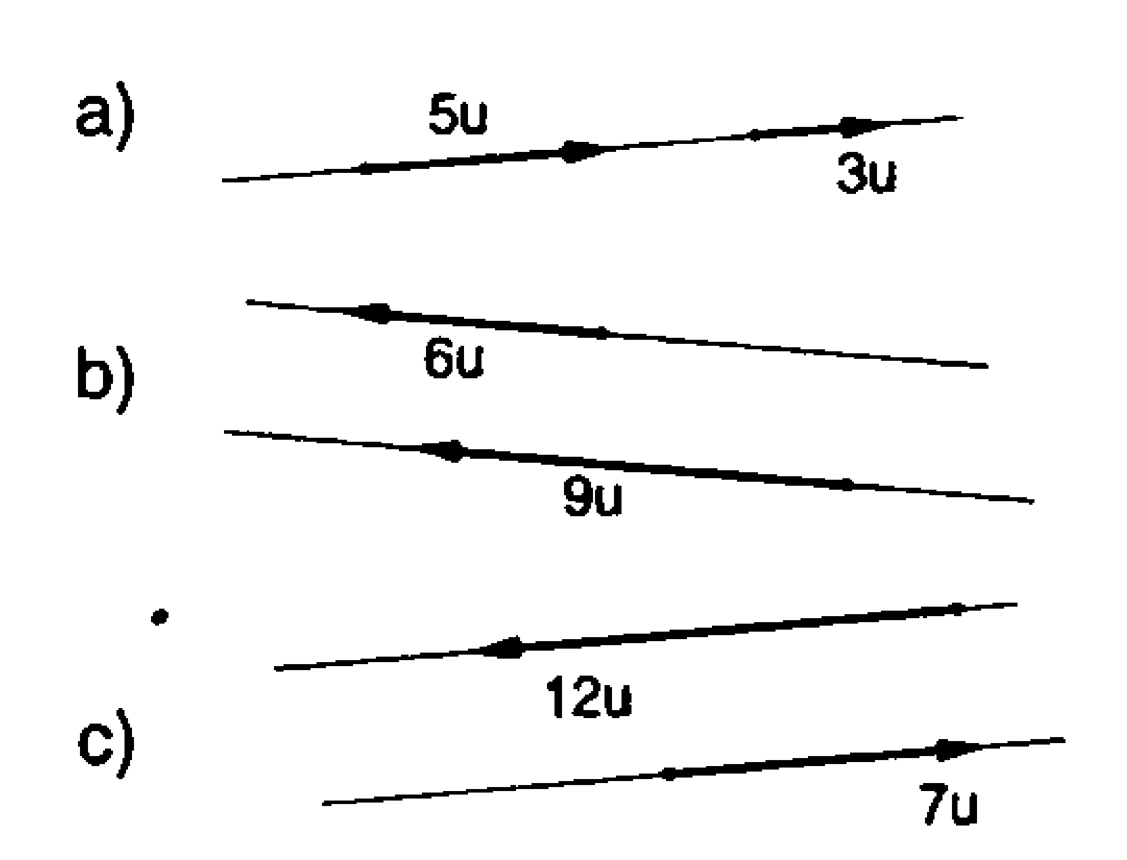
Como en el caso de vectores unitarios de dos dimensiones, se llaman vectores unitarios aquellos cuyos módulos son la unidad y cuya función es indicar la dirección y sentido de un vector.

Sus valores relativos (signo) son:



PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la resultante de los vectores mostrados, donde la unidad de medida es "u".



RESOLUCIÓN :

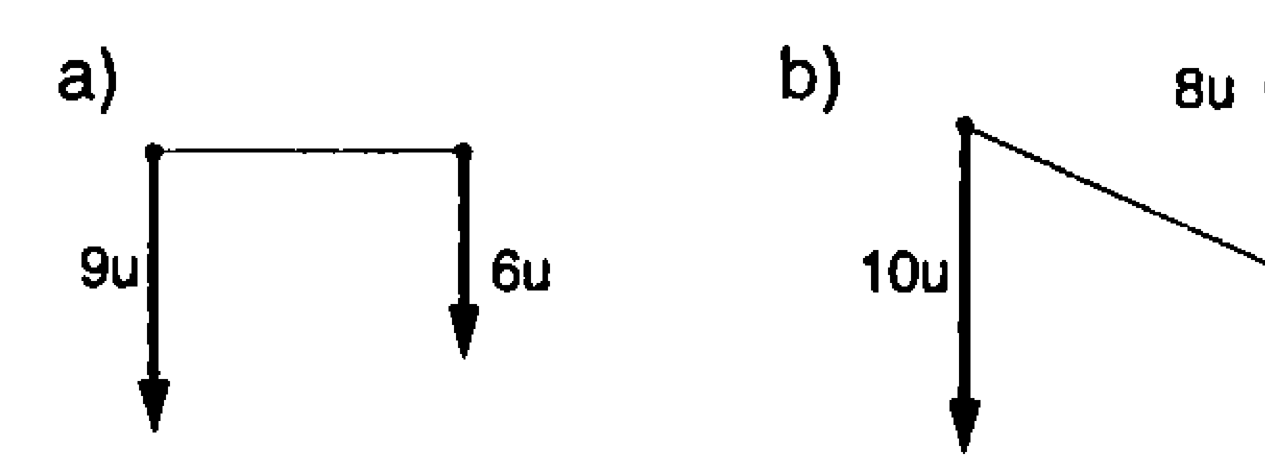
a) Como son colineales y del mismo sentido, sólo se suman, luego se tiene que R = 8u.

b) Como son paralelas y del mismo sentido, sólo se suman, luego se tiene que: R = 15u

c) Como son paralelas y de sentido contrario, se suman algebraicamente. A uno se le asigna sentido positivo (por ejemplo hacia arriba) y al otro se le asigna el signo contrario, negativo (por ejemplo hacia abajo), luego:

$$R = 7 + (-12) = -5u$$

PROBLEMA 2. Hallar la resultante de los vectores



http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN:

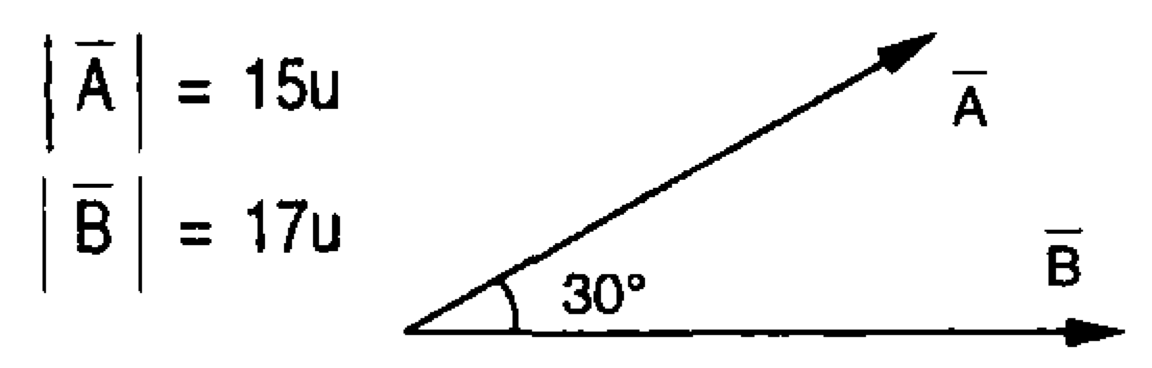
a) Como son paralelos y del mismo sentido, se suman: R = 15u.

b) Como son paralelas y de sentidos contrarios, se suman algebraicamente afectándose de signos contra-rios:
R = -10 + 8 = -2u.

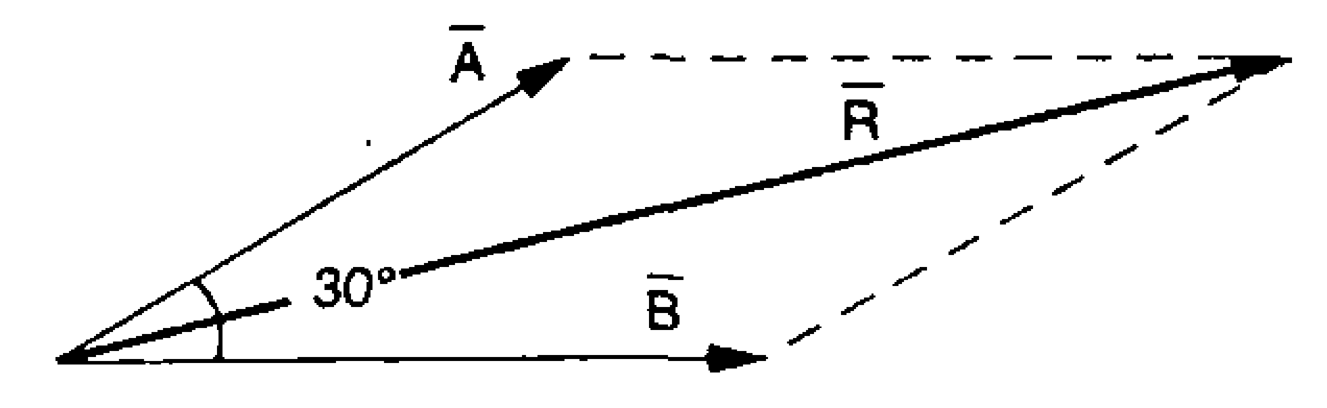
PROBLEMA 3. Hallar el módulo de la resultante

$|\bar{A}| = 15u$

$|\bar{B}| = 17u$



RESOLUCIÓN : Se traza la diagonal del paralelogramo que se forma



Aplicando la fórmula:

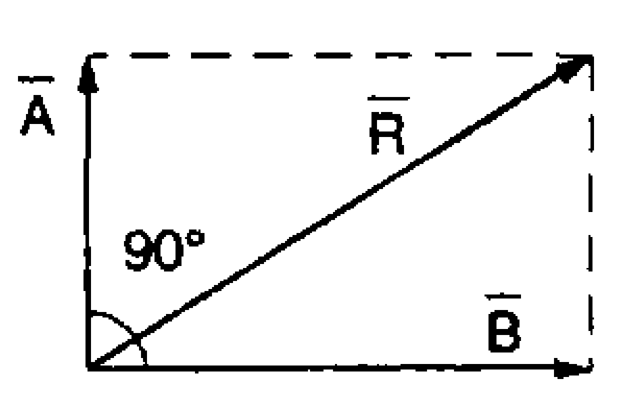
$$R = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos 30°}$$

$$R = \sqrt{15^2 + 17^2 + 2\,(15)(17)(\sqrt{3}/2)}$$

$$R = 30{,}91\ u$$

PROBLEMA 4. Hallar $|\bar{A} + \bar{B}| \times |\bar{A} - \bar{B}|$ Donde A y B forman $\alpha = 90°$

RESOLUCIÓN:



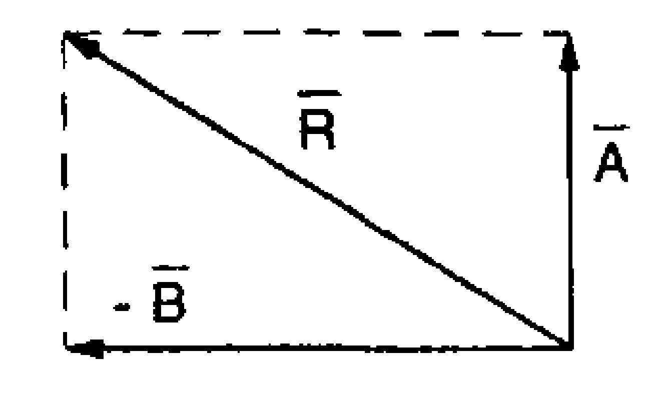
$|\bar{A} + \bar{B}|$ Significa módulo de la suma y $|\bar{A} - \bar{B}|$ significa módulo de la diferencia. Los valores de ambos módulos se hallan por medio del paralelogramo.

1) $|\bar{A} + \bar{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha}$.

Como: $\cos\alpha = \cos 90° = 0$

$$|\bar{A} + \bar{B}| = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (1)$$

2) $|\bar{A} - \bar{B}|$ quiere decir que el vector B está en sentido contrario.



$$|\bar{A} - \bar{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos 90°}$$

Como cos 90° = 0

$$|\bar{A} - \bar{B}| = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (2)$$

Multiplicando (1) con (2) :

$$|\bar{A} + \bar{B}|\,|\bar{A} - \bar{B}| = \sqrt{(A^2 + B^2)(A^2 + B^2)}$$

$$|\bar{A} + \bar{B}|\,|\bar{A} - \bar{B}| = (A^2 + B^2)$$

PROBLEMA 5. Hallar: $\dfrac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|}$

Si $\alpha = 90°$ (α, ángulo que forman A y B)

RESOLUCIÓN: Calculando numerador y denominador por el método del paralelogarmo.

$$|\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha}$$

Pero cos 90° = 0

$$\therefore\ |\vec{A} + \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2} \qquad (1)$$

$$|\vec{A} - \vec{B}| = \sqrt{A^2 + B^2 - 2\,AB\cos 90°}$$

Pero cos 90° = 0

$$\therefore\ |\vec{A} - \vec{B}| = A^2 + B^2 \qquad (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2)

Rpta.: $$\frac{|\vec{A} + \vec{B}|}{|\vec{A} - \vec{B}|} = \frac{\sqrt{A^2 + B^2}}{\sqrt{A^2 + B^2}} = 1$$

PROBLEMA 6. Demostrar que si dos vectores tienen la misma magnitud V y forman entre ellos un ángulo θ, su suma tiene una magnitud de 2V cos (θ/2) y su diferencia 2V sen (θ/2).

RESOLUCIÓN . Demostración: Tener la misma magnitud es tener el mismo módulo

I) $\left|\vec{A}\right| = \left|\vec{B}\right| = V$

Por el método del paralelogramo:

$$\left|\vec{A} + \vec{B}\right| = \left|\vec{S}\right| = \sqrt{V^2 + V^2 + 2V\cos\theta}$$

$$S = \sqrt{2V^2 + 2V^2\cos\theta}$$

$$S = \sqrt{2V^2(1 + \cos\theta)}$$

Como: $1 + \cos\theta = 2\cos^2(\theta/2)$

$\therefore \quad S = 2V\cos(\theta/2) \qquad$ l.q.q.d.

S : módulo de $\left|\vec{A} + \vec{B}\right|$

Por otro lado:

II) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| = \left|\vec{D}\right| =$

$$= \sqrt{V^2 + V^2 - 2V^2\cos\theta}$$

$$D = \sqrt{2V^2(1 - \cos\theta)}$$

Como: $1 - \cos\theta = 2\,\text{sen}^2(\theta/2)$

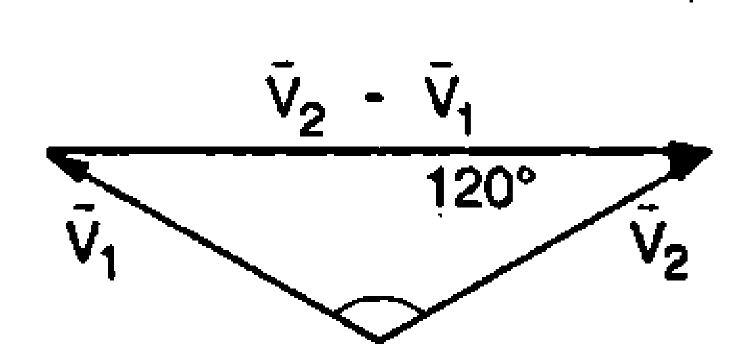
$\therefore \quad D = 2V\,\text{sen}(\theta/2) \qquad$ l.q.q.d.

PROBLEMA 7. Determinar $\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right|$ de de la siguiente figura mostrada sabiendo que:

$\left|\vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right| = V$

RESOLUCIÓN :

$\vec{D} = \vec{A} - \vec{B}$



$\left|\vec{V}_2\right| = \left|\vec{V}_1\right| = V$

$$\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = \sqrt{V^2 + V^2 - 2\,V.V\cos 120°}$$

Como $\cos 120° = -\cos 60° = -1/2$

$$\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = \sqrt{V^2 + V^2 + V^2}$$

Rpta.: $\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = V\sqrt{3}$.

PROBLEMA 8. Hallar: $\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right|$ Si se sabe que:

$\left|\vec{V}_1\right| = \left|\vec{V}_2\right| = V$

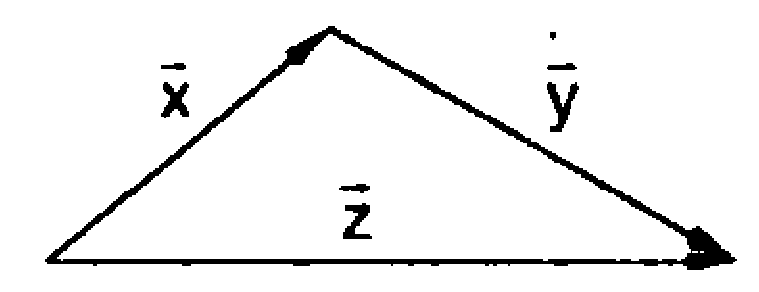
RESOLUCIÓN : Del problema 6, donde θ = 180°

$$\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = 2V\,\text{sen}(\theta/2) = 2V\,\text{sen}(180°/2)$$

$$\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = 2V\,\text{sen}\,90° = 2V(1)$$

Rpta.: $\left|\vec{V}_2 - \vec{V}_1\right| = 2V$

PROBLEMA 9. Hallar la resultante en el siguiente sistema de vectores:



RESOLUCIÓN : De la figura:

$$\vec{R} = \vec{x} + \vec{y} + \vec{z} \qquad (1)$$

Pero: $\vec{x} + \vec{y} = \vec{z} \qquad (2)$

Reemplazando (2) en (1)

Rpta.: $\vec{R} = 2\vec{z}$

PROBLEMA 10. Si A y B son dos vectores dados. Demostrar que:

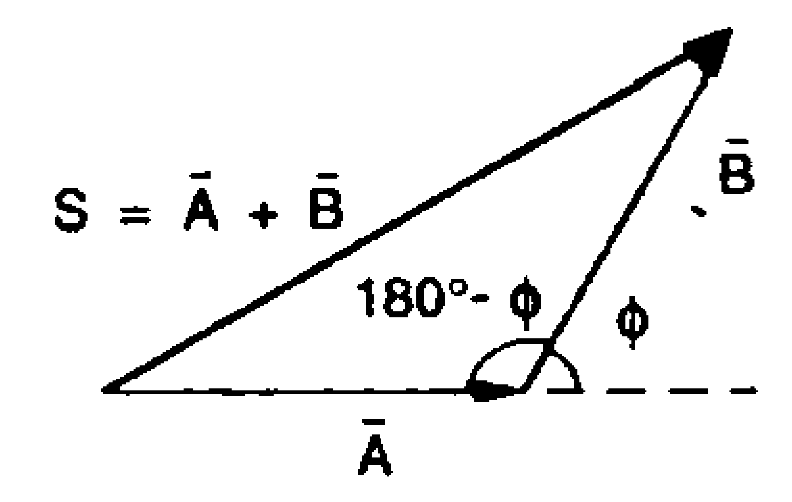
a) $\left|\vec{A} + \vec{B}\right| \leq \left|\vec{A}\right| + \left|\vec{B}\right|$

b) $\left|\vec{A} - \vec{B}\right| \geq \left|\vec{A}\right| - \left|\vec{B}\right|$

RESOLUCIÓN : Demostración:

http://librosysolucionarios.net

a) Llamando: $S = \left|\vec{A} + \vec{B}\right|$, por trigonometría en el triángulo mostrado se sabe que: $S^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\phi$



También: $-1 \leq \cos\phi \leq 1$

Por lo tanto, si reemplazamos $\cos\phi = 1$

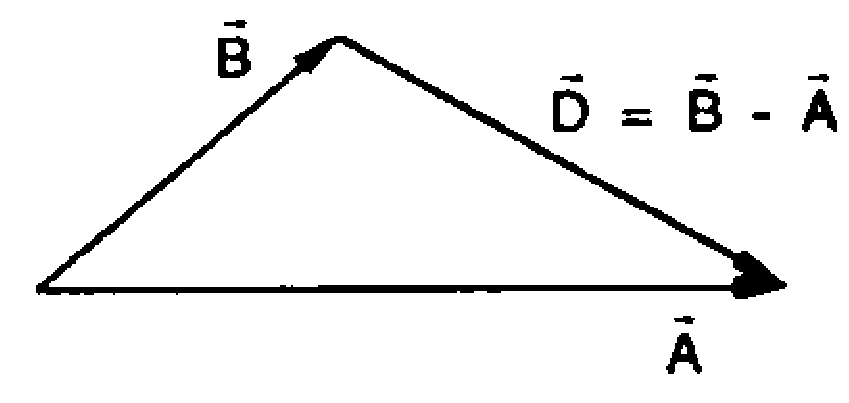
$A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\phi \leq A^2 + B^2 + 2\,AB$

Esto es: $S^2 \leq (A + B)^2$

$S \leq A + B$

$\therefore\ |\vec{A} + \vec{B}| \leq |\vec{A}| + |\vec{B}|$ l.q.q.d.

b) Por otro lado, llamando $D = \left|\vec{A} - \vec{B}\right|$



$D^2 = A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\phi$

$-1 \leq \cos\phi \leq 1$

Luego, si reemplazamos $\cos\phi$ por -1

$A^2 + B^2 - 2\,AB\cos\phi \geq A^2 + B^2 - 2\,AB$

esto es: $D^2 \geq (A - B)^2$

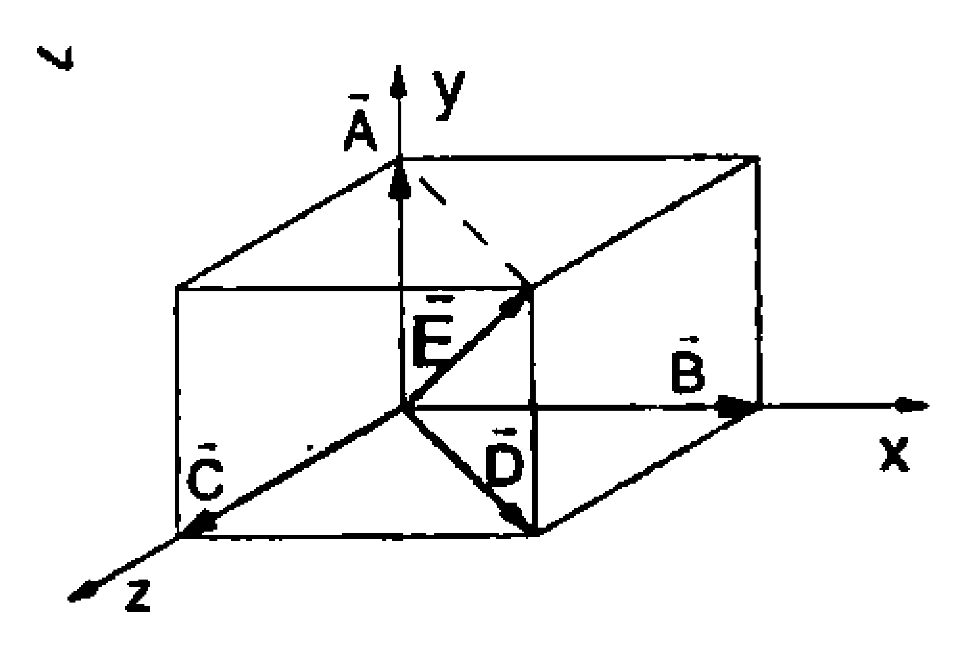
$D \geq A - B$

$\therefore\ |\vec{A} + \vec{B}| \geq |\vec{A}| - |\vec{B}|$ l.q.q.d.

PROBLEMA 11. En el siguiente sistema de vectores, determinar:

$$\left|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right|$$

$\vec{A}$, $\vec{B}$ y $\vec{C}$ (Trirrectangulares)



RESOLUCIÓN: Mirando la figura, se observa que $\vec{B}$ y $\vec{C}$ forman 90°

a) $\vec{B} + \vec{C} = \vec{D}$ (ϕ)

$\therefore\ B^2 + C^2 = D^2$ (1)

b) Se observa que también que: A y B forman 90°

$\vec{A} + \vec{D} = \vec{E}$ (β)

$\therefore\ A^2 + D^2 = E^2$ (2)

Reemplazando (1) en (2)

$$A^2 + B^2 + C^2 = E^2$$

$$\therefore\ E = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} \quad (3)$$

Reemplazando (ϕ) y (β)

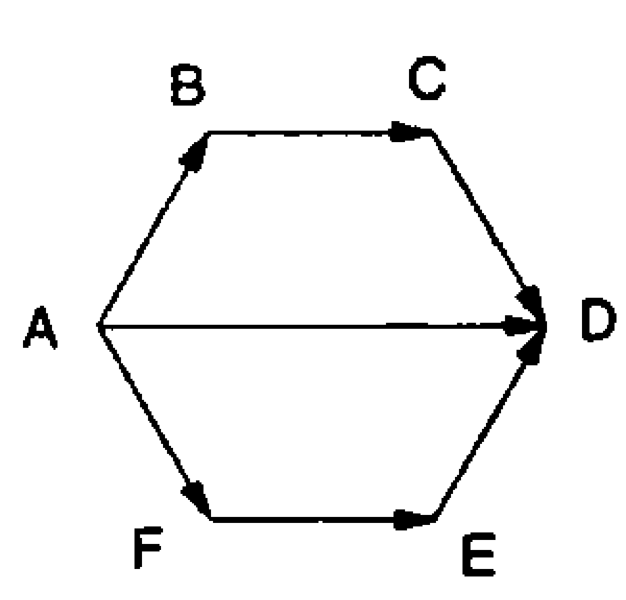
$$\vec{E} = \vec{A} + \vec{B} + \vec{C}$$

$$\left|\vec{E}\right| = E = \left|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right| \quad (4)$$

Igualando (3) y (4)

Rpta.: $\left|\vec{A} + \vec{B} + \vec{C}\right| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$

PROBLEMA 12. Hallar la resultante total del siguiente sistema: (A B C D E F es un hexágono regular)



RESOLUCIÓN: Observando la figura:

$\vec{R}_T = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$

Pero: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$

También: $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{ED}$

Reemplazando $\vec{R}_T = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AD}$

$\therefore$ Rpta.: $\vec{R}_T = 3\,\overrightarrow{AD}$

PROBLEMA 13. Hallar el coseno del ángulo que deben formar

dos vectores de igual módulo para que su resultante sea la mitad del valor de uno de ellos.

RESOLUCIÓN : Sean $\vec{A}$ y $\vec{B}$ los vectores y $\vec{R}$ el vector resultante. Sean ahora:

$$|\vec{A}| = |\vec{B}| = x \quad y \quad |\vec{R}| = \frac{x}{2}$$

Por otro lado: $R^2 = A^2 + B^2 + 2\,AB\cos\alpha$

$$(x/2)^2 = x^2 + x^2 + 2\,x^2\cos\alpha$$

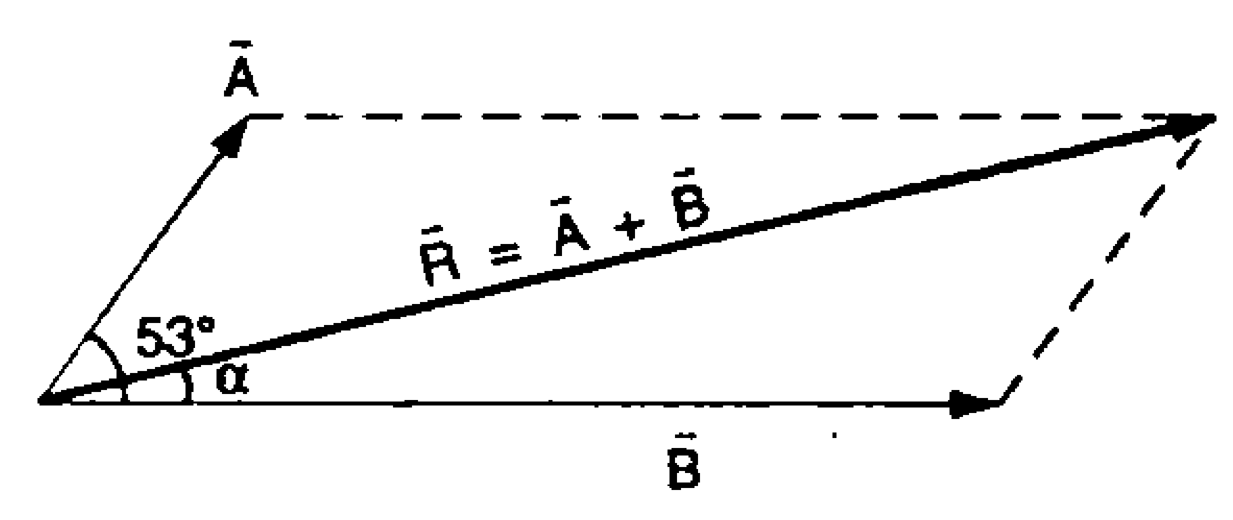
$$(x^2/4) = 2\,x^2 + 2x^2\cos\alpha$$

$$2x^2\cos\alpha = (x^2/4) - 2x^2$$

Simplificando y efectuando:

Rpta.: $\cos\alpha = -7/8$

PROBLEMA 14. Dos vectores forman entre sí un ángulo de 53°. Uno de ellos es 75 u y su resultante 300 u. Hallar el valor de sen α.



$$\left|\vec{A}\right| = A = 75\text{ u}$$

$$\left|\vec{R}\right| = R = 300\text{ u}$$

$$\theta = 53° \Rightarrow \text{sen}\,53° = 4/5$$

RESOLUCIÓN : Por fórmula:

$$\frac{\text{sen}\,\alpha}{A} = \frac{\text{sen}\,\theta}{|A + B|}$$

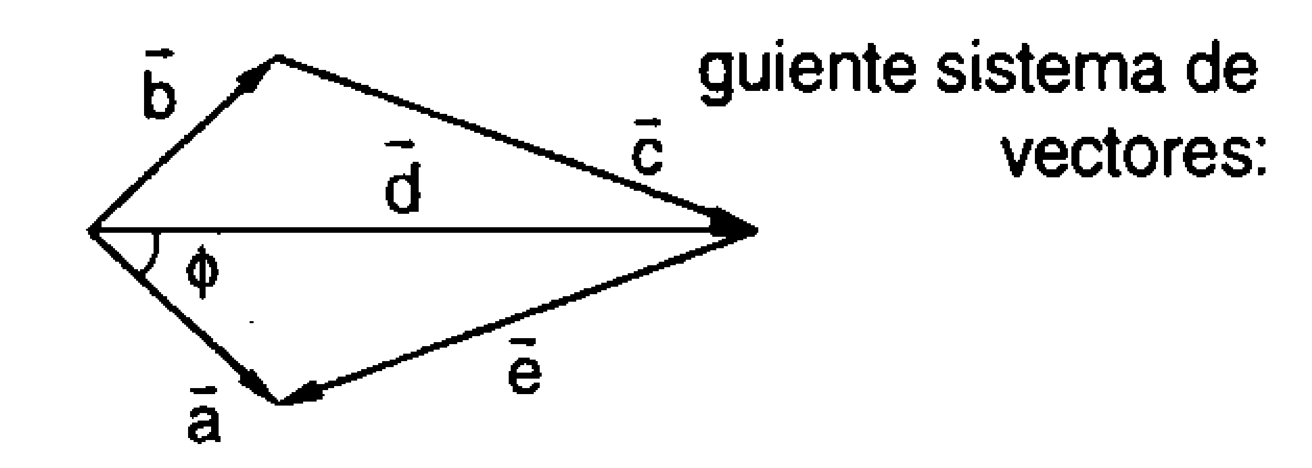
$$\therefore \text{sen}\,\alpha = \frac{A\,\text{sen}\,\theta}{|A + B|} = \frac{A\,\text{sen}\,\theta}{R}$$

Reemplazando datos:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{75\,(4/5)}{300} = \frac{1}{5} = 0{,}2$$

Rpta.: $\text{sen}\,\alpha = 0{,}2$

PROBLEMA 15. Hallar el módulo de la resultante total del siguiente sistema de vectores:



RESOLUCIÓN :

$$\vec{R} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e} \qquad (1)$$

Pero $\vec{a} = \vec{b} + \vec{c} + \vec{e}$ (2)

Reemplazando (2) en (1)

$$\vec{R} = 2\,\vec{a} + \vec{d} \qquad (3)$$

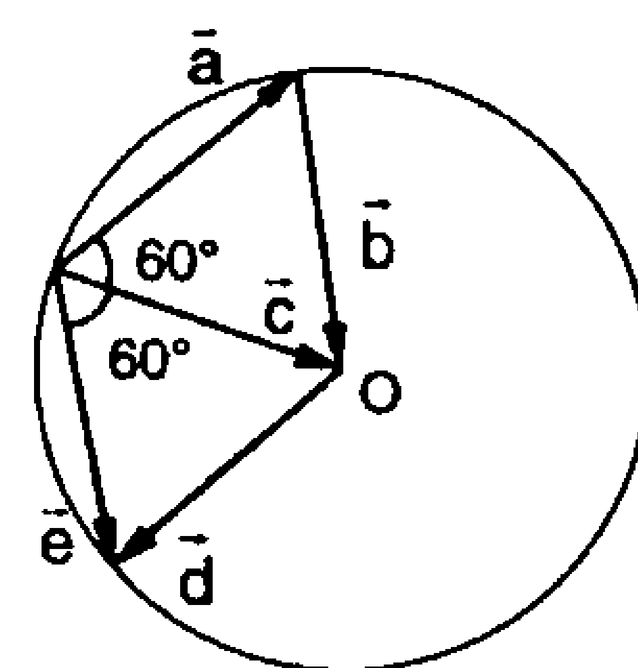
Como los vectores $2\,\vec{a}$ y $\vec{d}$ son concu-rrentes y forman un ángulo f, entonces:

$$|\vec{R}_T| = |2\vec{a} + \vec{d}|$$

$$R_T = \sqrt{(2a)^2 + (d)^2 + 2\,(2a)\,(d)\cos\phi}$$

$$\therefore R_T = \sqrt{4a^2 + d^2 + 4\,ad\cos\phi}$$

PROBLEMA 16. En el sistema de vectores, "O" es el centro de la circunferencia. Hallar el módulo de la resultante en función del radio "R".



RESOLUCION :

$$\vec{R}_T = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} + \vec{e}$$

$$\vec{e} = \vec{a} + \vec{b} + \vec{d} \quad \text{(vectores iguales)}$$

$$\vec{R}_T = 2\,\vec{e} + \vec{c}$$

Los vectores $2\,\vec{e}$ y $\vec{c}$ forman un ángulo de 60°, tal que:

$$\left|\vec{R}_T\right| = \left|2\vec{e} + \vec{c}\right|$$

$$R_T = \sqrt{(2e)^2 + (c)^2 + 4\,e\,c\,.\cos 60°}$$

$$R_T = \sqrt{4e^2 + c^2 + 2\,e\,c} \qquad (1)$$

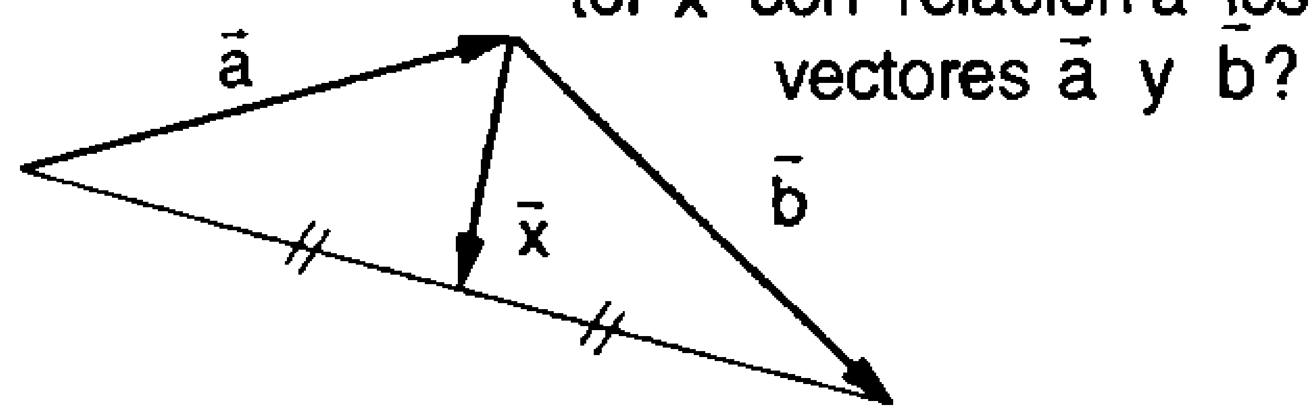
De la figura: $\left|\vec{e}\right| = \left|\vec{d}\right| = \left|\vec{c}\right| = R$ (2)

Reemplazando (2) en (1)

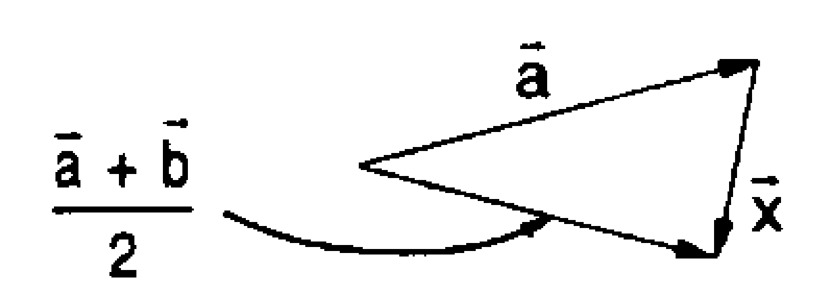
$R_T = \sqrt{4R^2 + R^2 + 2R^2}$

$\therefore$ Rpta.: $R_T = R\sqrt{7}$

PROBLEMA 17. ¿Qué representa el vector $\vec{x}$ con relación a los vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$?



RESOLUCIÓN : De la figura principal se obtiene:



$\vec{a} + \vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2}$ de donde:

$\vec{x} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b}}{2} - \vec{a} = \dfrac{\vec{a} + \vec{b} - 2\vec{a}}{2}$

$\therefore$ Rpta.: $\vec{x} = \dfrac{\vec{b} - \vec{a}}{2}$

PROBLEMA 18. Hallar:

$|\vec{a} - \vec{b}|$, si $|\vec{a}| = 13$

$|\vec{b}| = 19$ y $|\vec{a} + \vec{b}| = 24$

RESOLUCIÓN :

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 + 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\alpha$

Sumando:

$|\vec{a} + \vec{b}|^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2)$

Reemplazando valores

$(24)^2 + |\vec{a} - \vec{b}|^2 = 2(13^2 + 19^2)$

Despejando: $|\vec{a} - \vec{b}|^2 = 484$

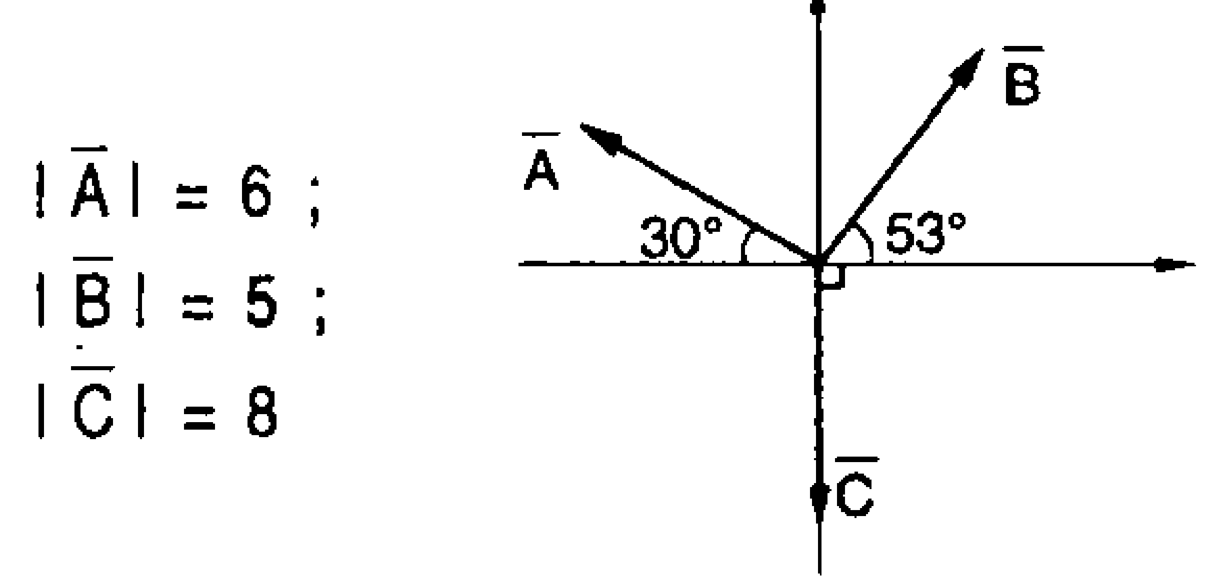
$\therefore$ Rpta.: $|\vec{a} - \vec{b}| = 22$

PROBLEMA 19. Hallar el módulo de la resultante del sistema:

$|\bar{A}| = 6$;

$|\bar{B}| = 5$;

$|\bar{C}| = 8$



RESOLUCIÓN: Se descomponen los vectores $\bar{A}$ y $\bar{B}$ en sus componentes rectangulares, C se mantiene en su sitio.

Se suman algebraicamente los módulos de las componentes horizontales y las componentes verticales

1) $\Sigma x = |\bar{B}_x| - |\bar{A}_x|$, donde :

$|\bar{B}_x| = B\cos 53°$

$\Rightarrow B_x = B(3/5) = 5(3/5) = 3$

$|\bar{A}_x| = A\cos 30°$

$\Rightarrow A_x = A(\sqrt{3}/2) = 6(\sqrt{3}/2) = 5{,}19$

$\therefore \Sigma_x = 3 - 5{,}19 = -2{,}19$

De igual manera:

2) $\Sigma y = |\bar{A}_y| + |\bar{B}_y| - |\bar{C}_y|$, donde :

$|\bar{A}_y| = A \operatorname{sen} 30°$

$\Rightarrow A_y = 6(1/2) = 3$

$|\bar{B}_y| = B \operatorname{sen} 53°$

$\Rightarrow B_y = 5(4/5) = 4$

$|\bar{C}| = 8$

$\therefore \Sigma_y = 3 + 4 - 8 = -1$

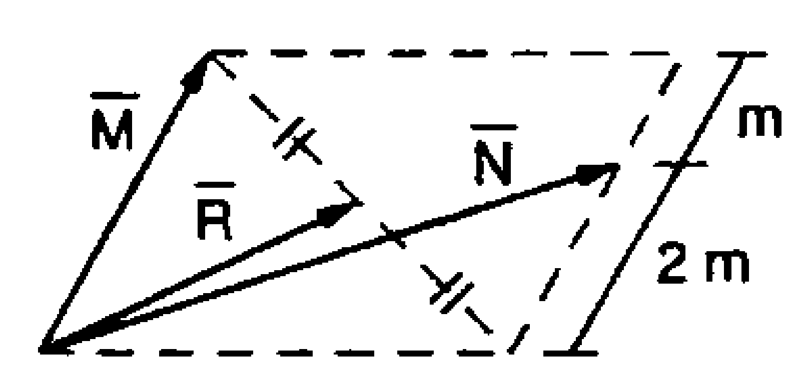
Por fórmula, la resultante será:

$R = \sqrt{(\Sigma_x)^2 + (\Sigma_y)^2} = \sqrt{(-2{,}19)^2 + (-1)^2}$

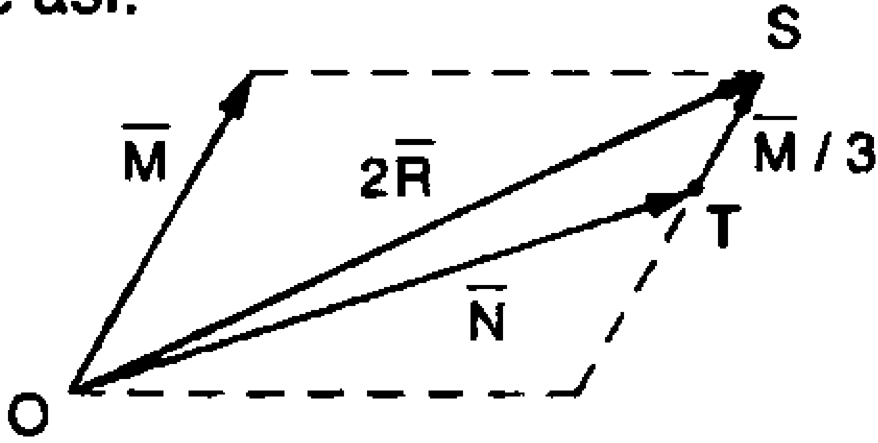
Rpta.: $R = 2{,}41$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 20. Calcular $\overline{R}$ en función de $\overline{M}$ y $\overline{N}$ en el paralelogramo mostrado:



RESOLUCIÓN : De acuerdo a los datos de la figura, ésta puede trazarse así:

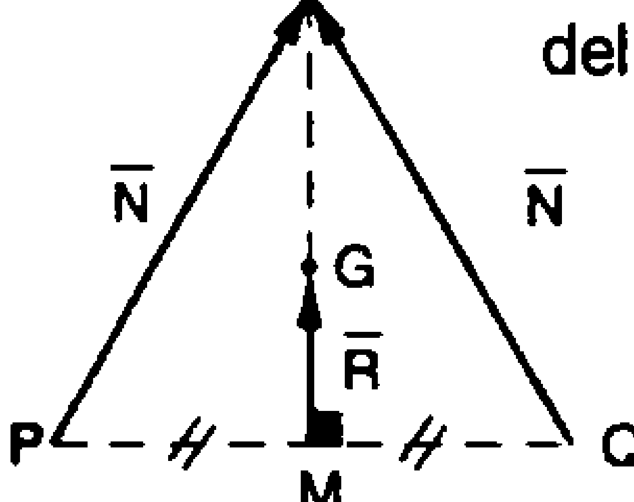


En el triángulo vectorial OTS :

$$2\overline{R} = \overline{N} + \frac{\overline{M}}{3} \text{ , de donde:}$$

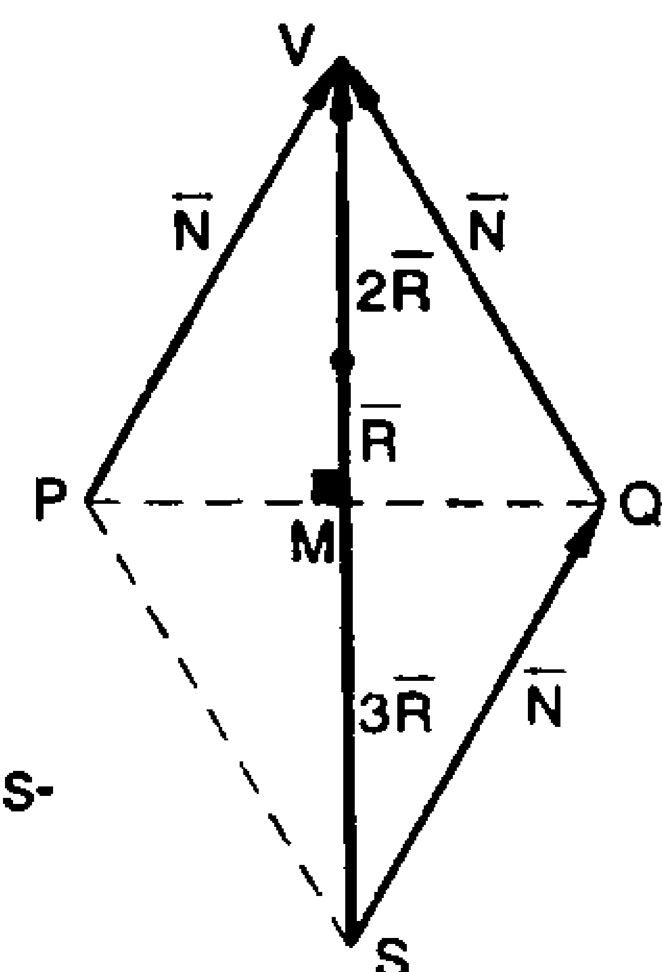
Rpta.: $\overline{R} = \dfrac{3\overline{N} + \overline{M}}{6}$

PROBLEMA 21. Hallar $\overline{R}$ en función de $\overline{N}$ si G es baricentro del triángulo.



RESOLUCIÓN : La figura, de acuerdo a los datos se puede trazar así:





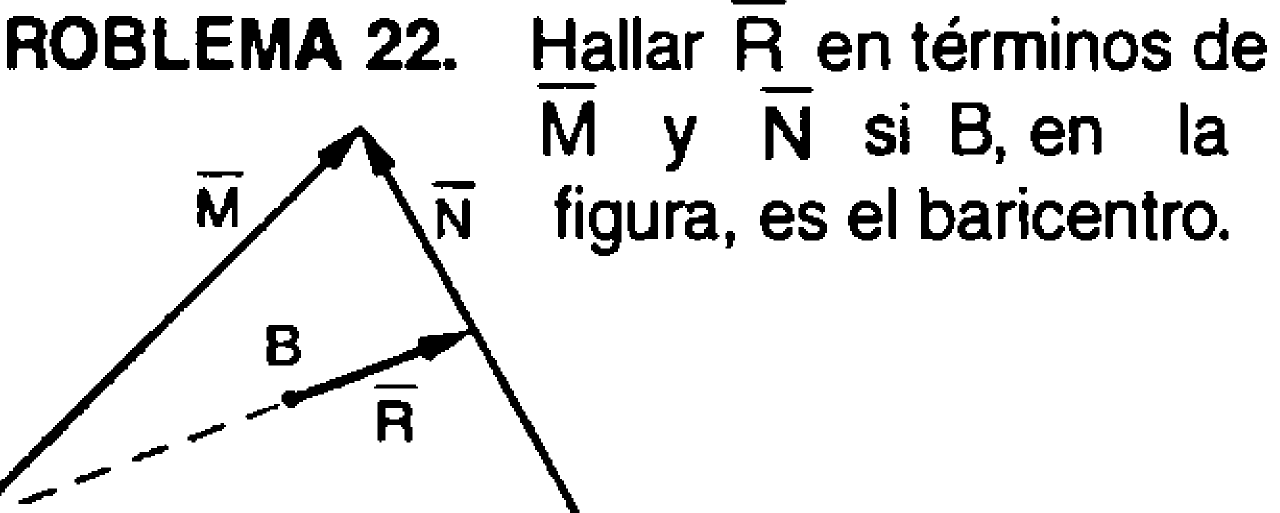
Se traslada el vector PV, paralelamente así mismo hasta la posición SQ.

Ahora en el triángulo funicular SQV.

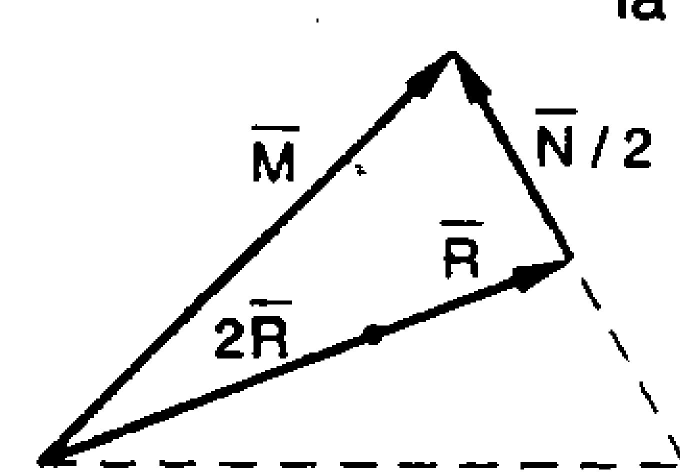
$6\overline{R} = \overline{N} + \overline{N}$, de donde :

Rpta.: $\overline{R} = \overline{N}/3$

PROBLEMA 22. Hallar $\overline{R}$ en términos de $\overline{M}$ y $\overline{N}$ si B, en la figura, es el baricentro.



RESOLUCIÓN : El baricentro está a 1/3 de la base y a 2/3 del vértice de un triángulo, entonces se puede dibujar:



En el triángulo de fuerzas mostrado:

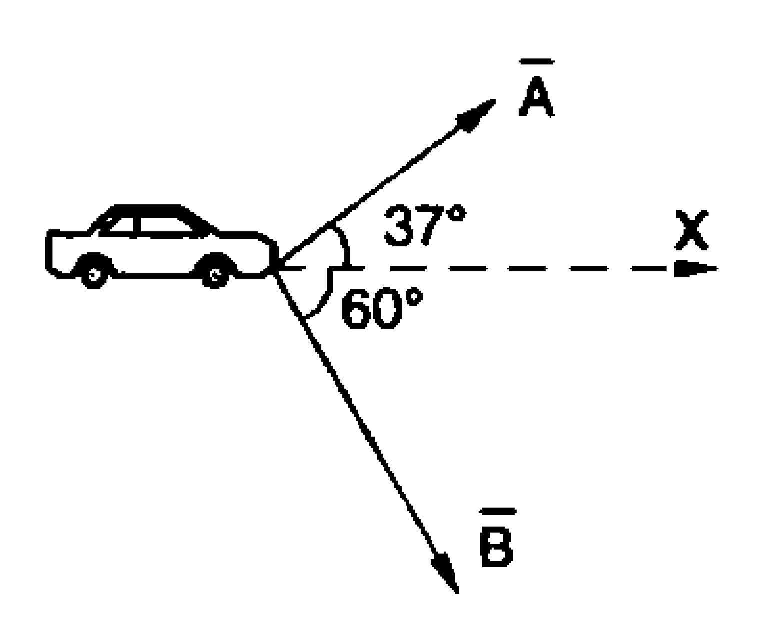
$\overline{M} = 3\overline{R} + \overline{N}/2$

$3\overline{R} = \overline{M} - \overline{N}/2$, de donde:

Rpta.: $\overline{R} = (2\overline{M} - \overline{N})/6$

PROBLEMA 23. Dos hombres jalan un carro con las fuerzas y en las direcciones indicadas. ¿Cuál será la fuerza mínima que deb ejercer un tercer hombre para que el carro se desplace en la dirección x.

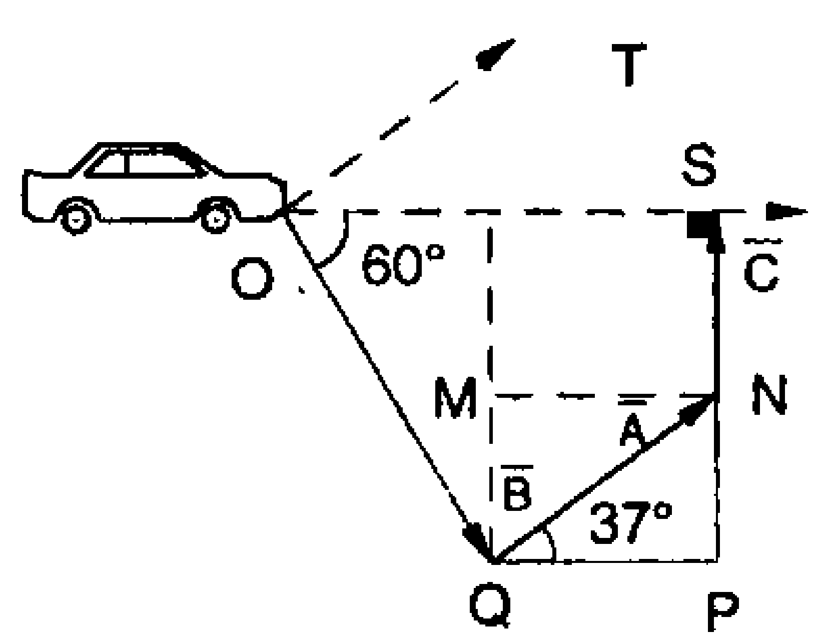
$$|\overline{A}| = 60\,N \text{ y } |\overline{B}| \, 80\,N$$



RESOLUCIÓN : La tercera fuerza, ejercida por el tercer hombre, siendo mínima, debe hacer que la resultante de las 3 fuerzas tenga la dirección de x. Por el método del polígono se tendrá.

http://librosysolucionarios.net

Se observa que: en el polígono OQNS; los vectores $\overline{B}$, $\overline{A}$ y $\overline{C}$ forman una cadena vectorial, la resultante es OS, el valor mínimo de la tercera fuerza $\overline{C}$ es la perpendicular NS, cualquier otra fuerza que siga otra dirección no será la mínima. Su cálculo : en la figura: QT = PN + NS

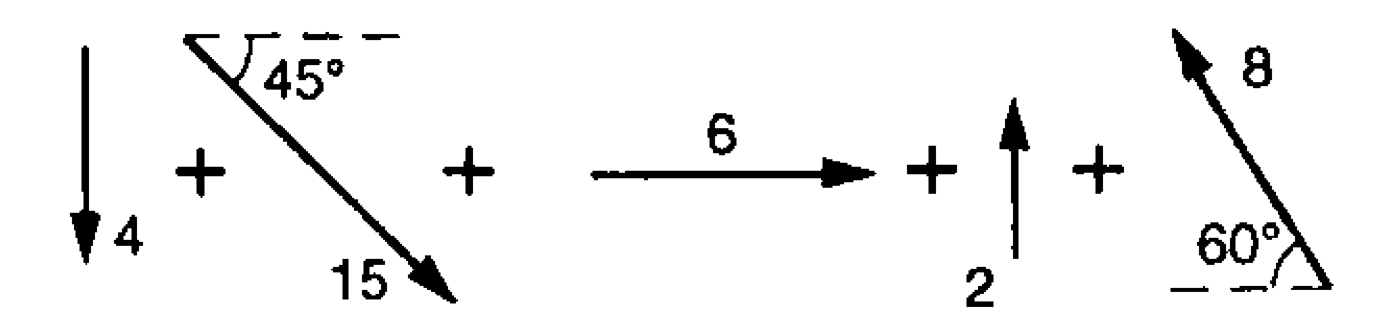


$$|\overline{B}| . \text{sen } 60° = |\overline{A}| . \text{sen } 37° + NS$$

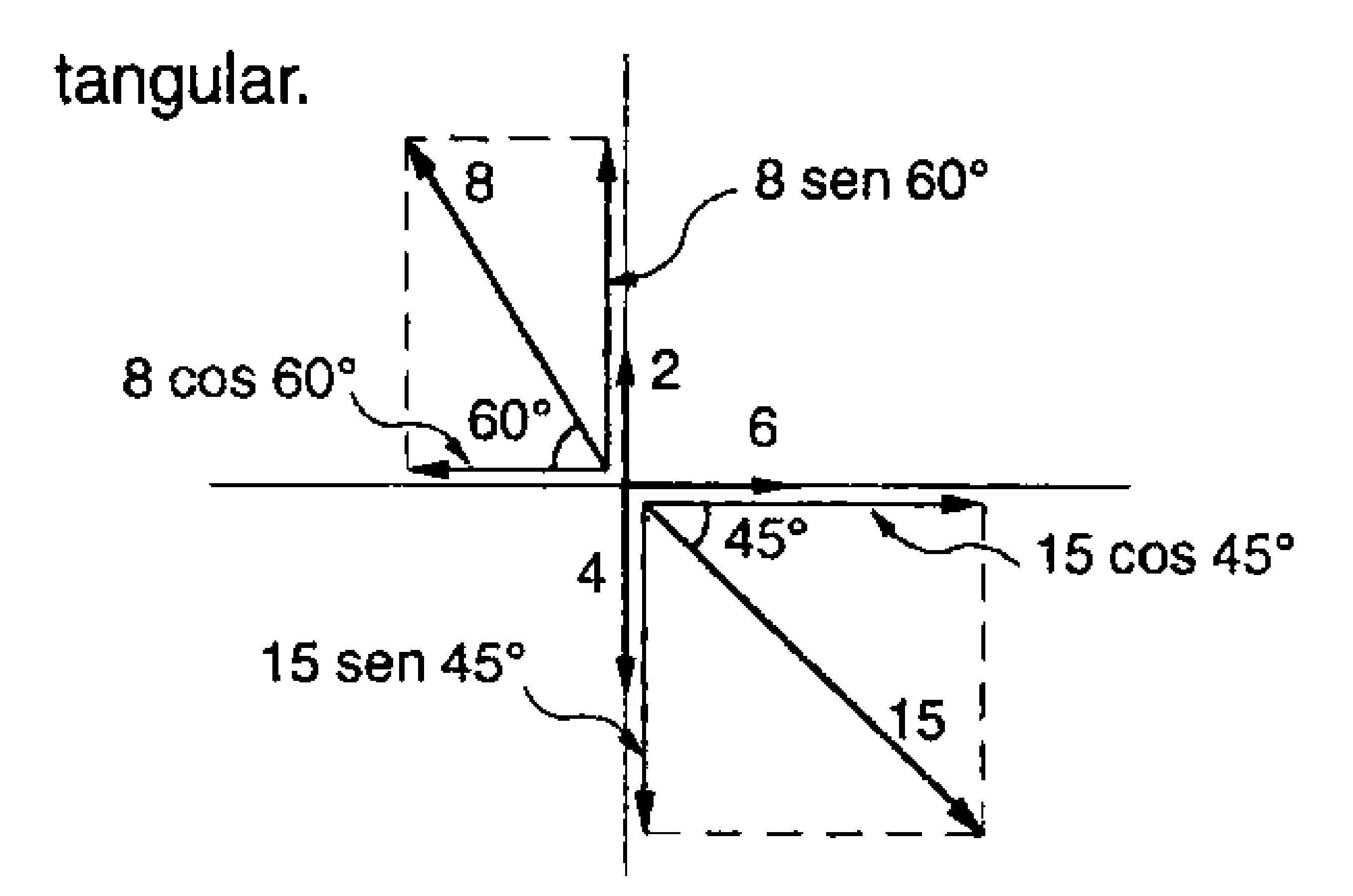
$$80 . \frac{\sqrt{3}}{2} = 60 . \frac{3}{5} + |\overline{C}| \text{ ; de donde:}$$

Rpta.: $|\overline{C}| = 33{,}28 \text{ N}$

PROBLEMA 24. Hallar el módulo de la resultante de la suma.



RESOLUCIÓN : Todas la fuerzas se trasladan a un sistema rectangular.



Se descomponen en sus componentes rectangulares las fuerzas inclinadas. Las horizontales y verticales se ubican sobre los ejes correspondientes. Ahora:

Horizontalmente:

1) $\Sigma V_x = 6 + 15 \cos 45° - 8 \text{ sen } 60°$

$\Sigma V_x = 9{,}68$

Verticalmente:

2) $\Sigma V_y = 2 + 8 \text{ sen } 60° - 4 - 15 \text{ sen } 45°$

$\Sigma V_y = -5{,}68$

Finalmente: $R = \sqrt{(\Sigma V_x)^2 + (\Sigma V_y)^2}$

$R = \sqrt{(9{,}68)^2 + (-5{,}68)^2}$

$R = 11{,}22$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La resultante entre dos vectores de 10 y 15 unidades es 20 unidades. Calcular el otro vector y el ángulo que forman entre ellos.

Rpta.: $\alpha = 75°30'$

2. Un vector de 20 unidades hace un ángulo de 30° con la resultante cuyo valor es de 24 unidades. Calcular el otro vector y el ángulo que forman entre ellos.

Rpta.: $V_2 = 12$
$\alpha = 88°$

3. La resultante de dos vectores tiene un valor de 30 unidades y hace ángulos de 45° y 30° con ellos. Calcular el valor de los vectores.

Rpta.: $V_1 = 30\left(\sqrt{3} - 1\right)$
$V_2 = 30\left(\sqrt{3} - 1\right)/\sqrt{2}$

4. La resultante de dos vectores es 40 unidades y hace ángulos de 30° y 45° con ellos. Calcular el valor de los vectores.

Rpta.: $V_x = 29{,}70$
$V_y = 20{,}95$

5. Dos vectores de 20 y 18 unidades hacen un ángulo de 60° y 120°. Hallar la magnitud de la diferencia.

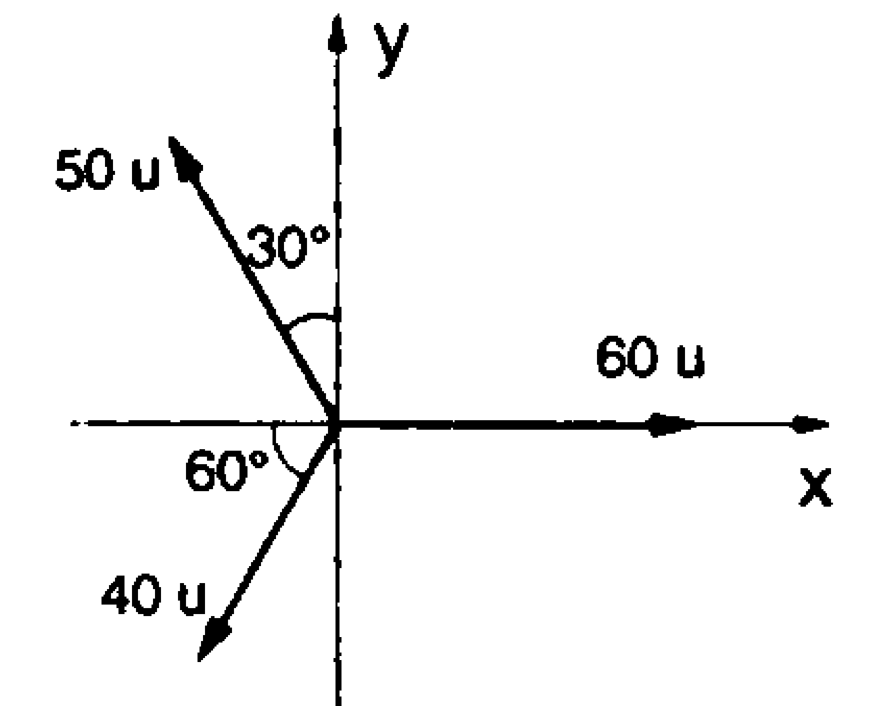
http://librosysolucionarios.net

Rpta.: D = 19,07 unidades
D' = 32,92 unidades

6. Tres vectores situados en un plano tienen 4 ; 5 y 6 unidades de magnitud. El primero y el segundo forman un ángulo de 30°, el segundo y el tercero otro de 90°. Hallar la resultante y su dirección con respecto al vector mayor.

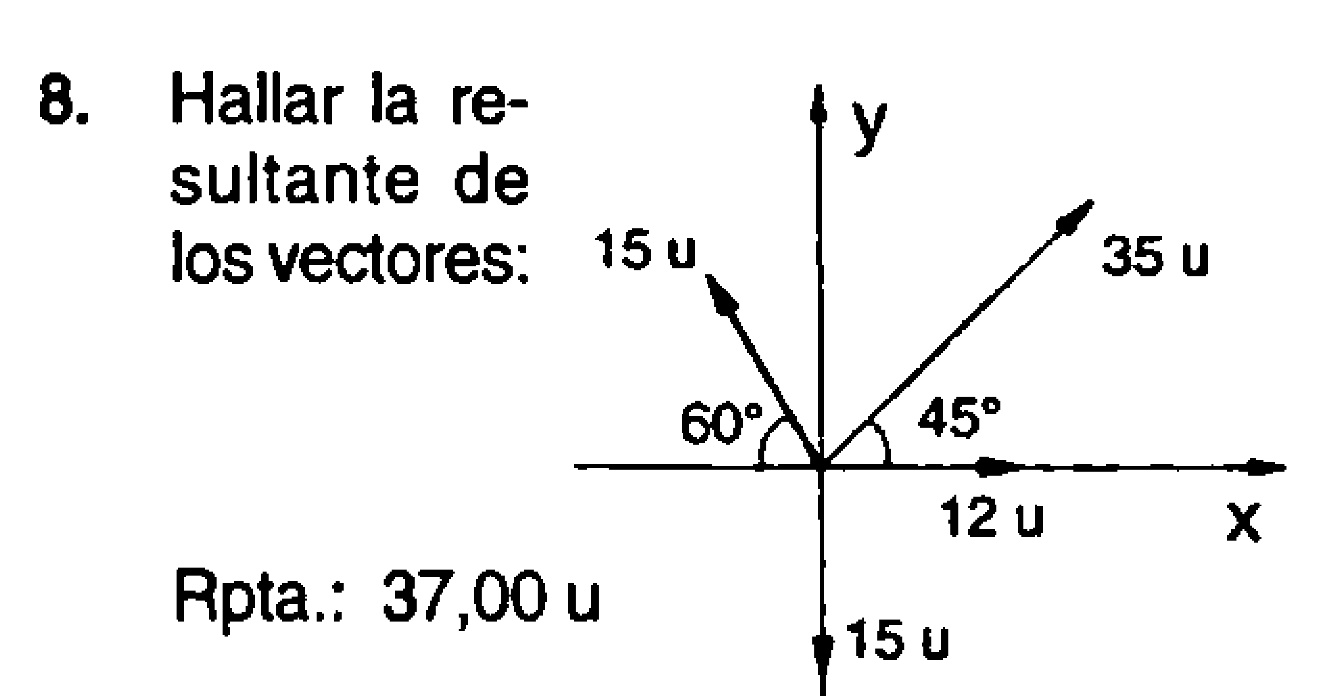
Rpta.: R = 9,36 unidades ; α = 64°41'

7. Calcular la resultante del sistema de vectores:



Rpta.: 17,32 u

8. Hallar la resultante de los vectores:



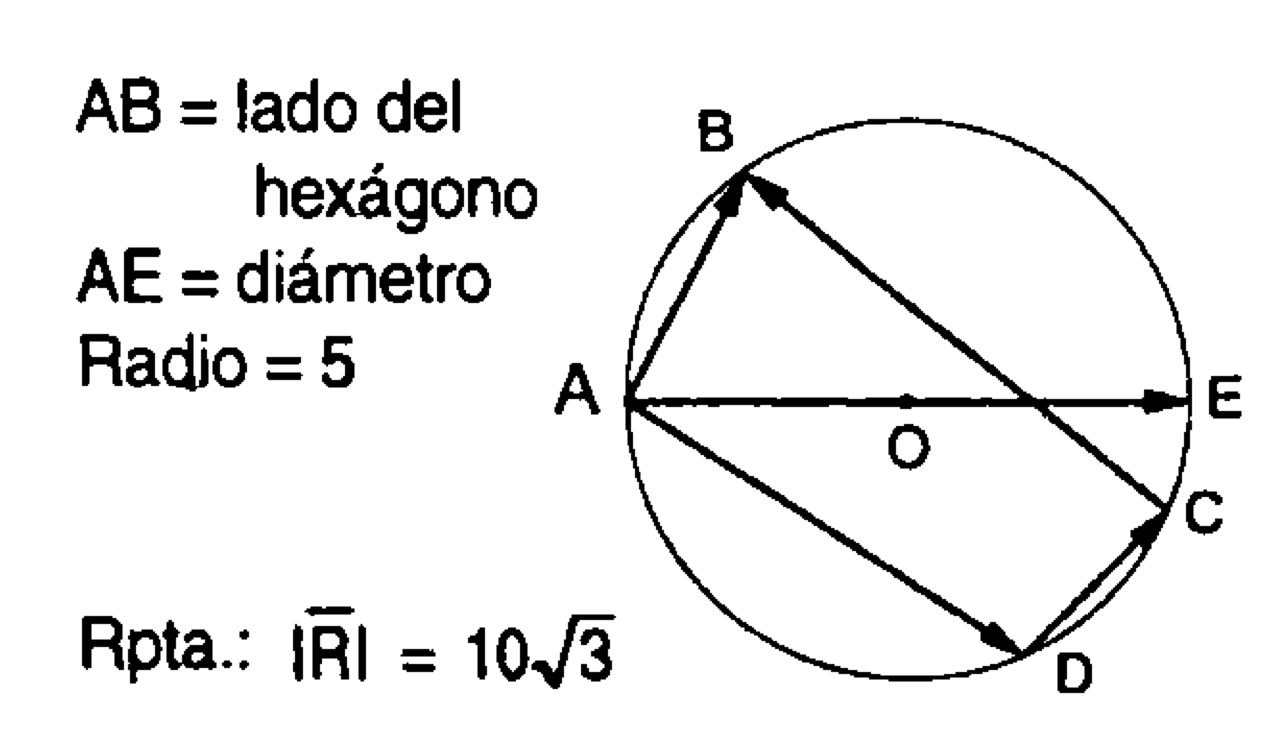
Rpta.: 37,00 u

9. Un barco navega hacia el este, con una velocidad de 15 nudos. El humo que sale de la chimenea hace un ángulo de 15° con la estela del barco. El viento sopla de sur a norte. ¿Cuál es la velocidad del viento?

Rpta.: V = 4,82 nudos

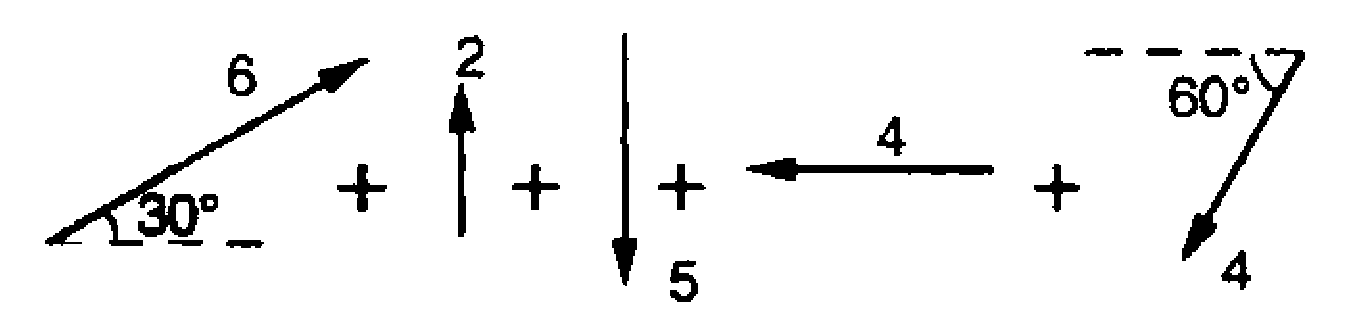
10. Hallar el valor modular de la resultante del siguiente sistema donde:

AB = lado del hexágono
AE = diámetro
Radio = 5



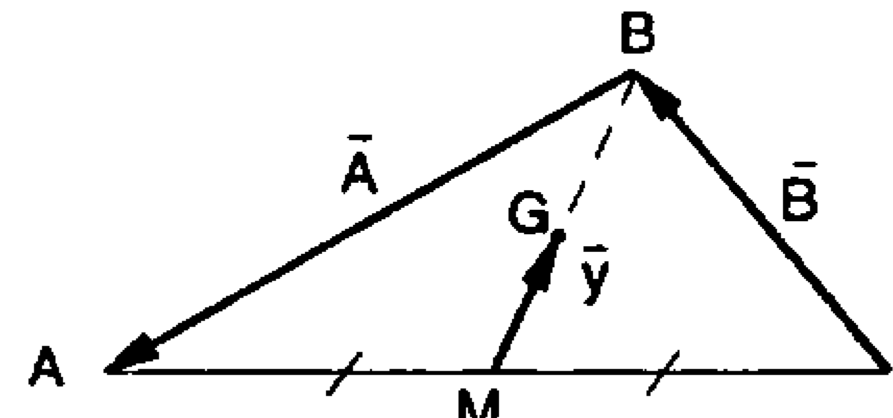
Rpta.: $|\bar{R}| = 10\sqrt{3}$

11. Hallar el valor de la resultante de la suma de los siguientes vectores:



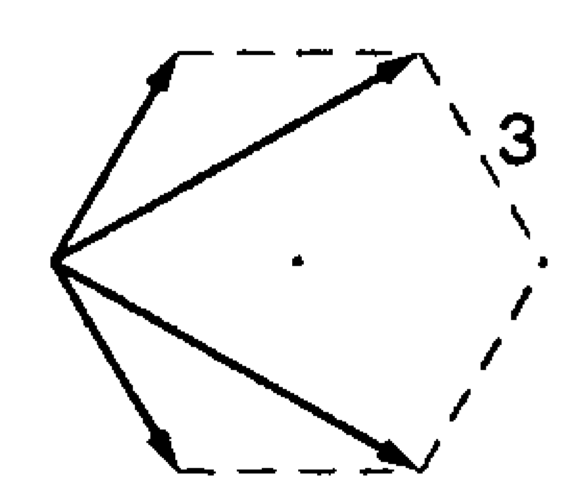
Rpta.: 4,62

12. En la figura, si G es el baricentro, hallar el módulo de y . M punto medio de AB



Rpta.: $|\bar{y}| = |\bar{A} - \bar{B}| / 6$

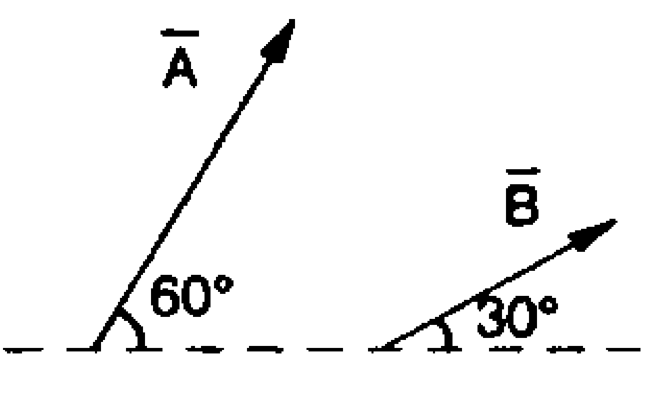
13. Hallar la resultante de las fuerzas mostradas, donde el polígono es un hexágono cuyo lado es 3 u



Rpta.: 12 u

14. En la figura mostrada a continuación calcular:

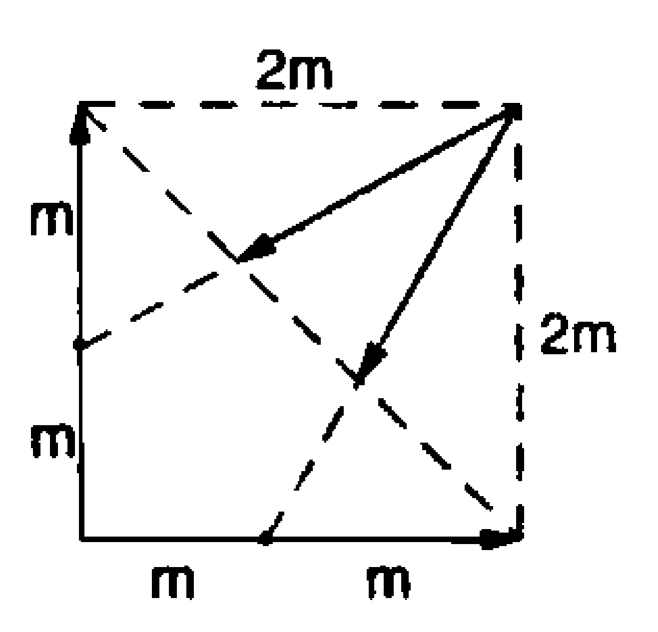
$|\bar{A} - \bar{B}|$



Donde: $|\bar{A}| = 6$ u
$|\bar{B}| = 3$ u

Rpta.: 7,32 u

15. Calcular el módulo de la resultante de los vectores mostrados, según la figura.



Rpta.: 0

http://librosysolucionarios.net

MECÁNICA

Es la parte más importante de la física, ya que de alguna manera todos los capítulos que estudiaremos están relacionados con la mecánica.

Estudia a los cuerpos en equilibrio (reposo o movimiento). Considerando las causas que producen dichos estados, la Mecánica se divide en: CINEMÁTICA, ESTÁTICA y DINÁMICA.

Los conceptos de REPOSO o MOVIMIENTO son relativos, dependiendo con qué y cómo se considera o compara. Por ejemplo, una persona que está viajando en un tren, está en "reposo" con respecto al tren, pero está en movimiento con respecto a un árbol que está en el camino.

Por otro lado, es frecuente, en muchos problemas, considerar a los cuerpos reducidos a un punto. Por ejemplo cuando se quiere averiguar la velocidad de un automóvil, hay que considerarlo como un punto que se mueve.

En mecánica debe distinguirse un cuerpo "rígido" o no. Un cuerpo se considera que es rígido cuando es "indeformable", este concepto también es relativo porque en la práctica no hay cuerpos rígidos, pero sí hay muchos cuerpos difícilmente deformables como una roca o un trozo de metal.

La mecánica que estudia los cuerpos grandes se llama MACRO MECÁNCA y tiene sus leyes, sin embargo estas leyes no siempre se cumplen en la MICRO MECÁNICA o MECÁNICA CUÁNTICA que estudia los cuerpos muy pequeños como moléculas, átomos y los elementos que lo conforman como electrones, protones, etc. La mecánica cuántica tiene sus propias leyes que se verán muy ligeramente al final del curso.

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 4

CINEMÁTICA

"Dame un punto de apoyo y te moveré el mundo"
Arquímedes

DEFINICIÓN:

Es el estudio del movimiento relativo de un cuerpo, independiente de las causas que lo originan.

Como se dijo antes, los cuerpos que se estudian se pueden considerar reducidos a un punto y así lo haremos en lo sucesivo. A cualquier móvil se le considerará un punto.

MOVIMIENTO:

Movimiento relativo de un punto es el **cambio de posición** de éste, a medida que pasa el tiempo, con respecto a otro punto de referencia considerado fijo.

Por ejemplo cuando un ciclista se desplaza con respecto a una casa en el camino. O cuando la Luna se mueve con respecto a la tierra.

TRAYECTORIA:

Trayectoria es la línea originada por las distintas posiciones que va ocupando un punto que se mueve, a medida que transcurre el tiempo.

La trayectoria puede ser:

A. Rectilínea, entonces el movimiento es rectilíneo.
B. Curvilínea, entonces el movimiento es curvilíneo.
C. Circunferencial, entonces el movimiento es por una circunferencia.
D. Parabólica, entonces el movimiento es parabólico.

NOTA: Como la trayectoria puede ser rectilínea, curvilínea, circunferencial o parabólica, la longitud de la trayectoria se llama recorrido (**e**); sin embargo si la trayectoria es rectilínea y la dirección del movimiento no cambia, en este caso y sólo en este caso se le puede llamar distancia (**d**).

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORME MRU

El movimiento es uniforme, cuando un móvil, EN TIEMPOS IGUALES recorre ESPACIOS IGUALES.

VELOCIDAD O RAPIDEZ

Es el ESPACIO o también la DISTANCIA que recorre un móvil en UNA UNIDAD DE TIEMPO.

$$v = \frac{e}{t} \quad ó \quad v = \frac{d}{t}$$

UNIDAD DE LA VELOCIDAD:

En el SI la unidad de la velocidad es el "metro por segundo" m/s

http://librosysolucionarios.net

LA VELOCIDAD ES UNA MAGNITUD VECTORIAL

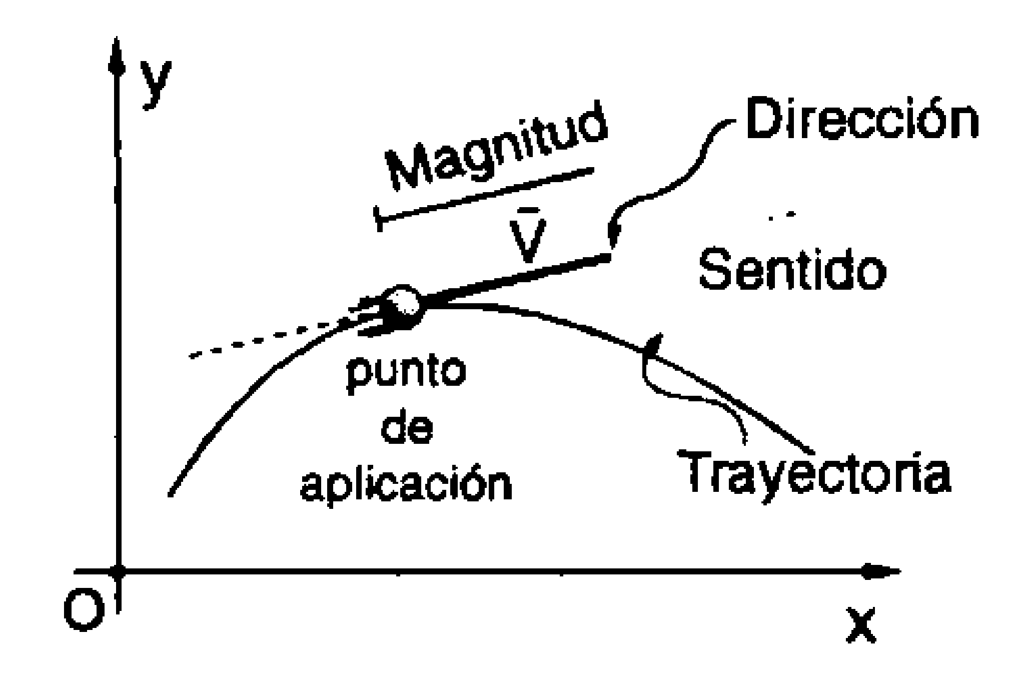
La velocidad es una magnitud vectorial, porque tiene las siguientes características:

a) Magnitud: Es el valor que tiene en un instante cualquiera. También se le llama rapidez.

b) Dirección: Es la tangente a la trayectoria en cualquier punto de ésta.

c) Sentido: Es el que sigue el movimiento, el cual puede ser adelante o atrás; positivo o negativo, arriba o abajo, etc.

d) Punto de aplicación: La velocidad dad también tiene punto de aplicación, es el que ocupa el móvil en un instante de su trayectoria.



COMPOSICIÓN DE VELOCIDADES

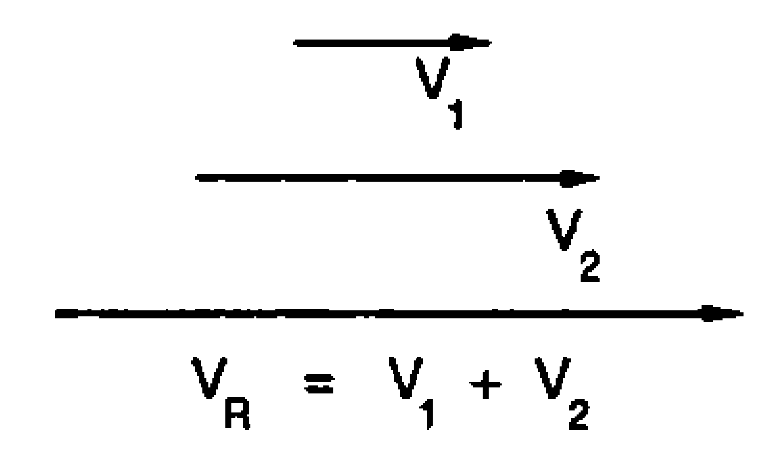
Componer las velocidades de un cuerpo que está dotado simultánea-mente de varios movimientos, es hallar la velocidad total o velocidad resultante.

Para hallar la velocidad resultante debe tenerse presente que:

a) Los movimientos son indepen-dientes entre sí.
b) La velocidad es una magnitud vectorial.
c) Respecto a qué sistema de referen-cia se calcula la resultante.

I. VELOCIDAD CON LA MISMA DIRECCIÓN Y EL MISMO SENTIDO

La velocidad resultante V_R es la suma de velocidades

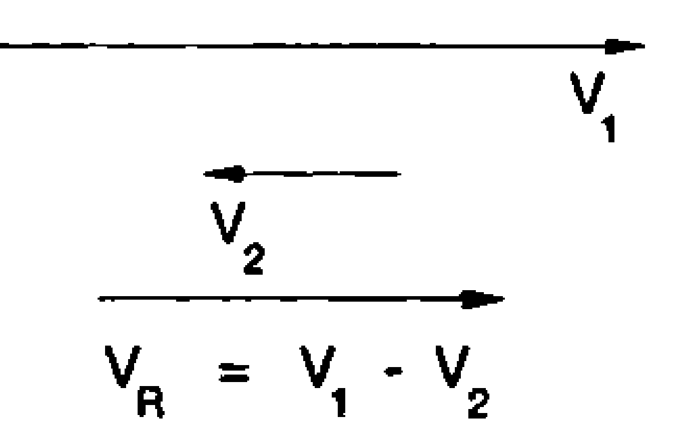


Ejemplo: Un bote navega a 3 m/s a fa- vor de la corriente de agua que va a 1 m/s, la velocidad del bote será:

$$V_R = 3\,m/s + 1\,m/s = 4\,m/s \quad (\rightarrow)$$

II. VELOCIDAD CON LA MISMA DIRECCIÓN PERO SENTIDO CONTRARIO

La velocidad resultante V_R será la diferencia de las velocidades



Ejemplo: La velocidad del bote del problema anterior cuando navega en sentido contrario al de la corriente del agua del río:

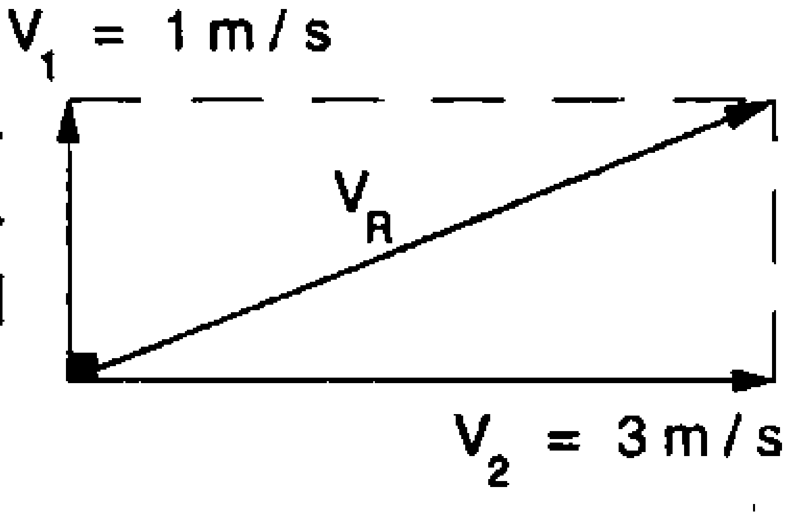
$$V_R = 3\,m/s - 1\,m/s = 2\,m/s \quad (\rightarrow)$$

III. VELOCIDAD CON DIRECCIONES DISTINTAS

La velocidad resultante será la resultante de los vectores que las representan.

Ejemplo:

Un nadador quiere cruzar perpendicularmente el río de los ejemplos anteriores, el nadador lleva una velocidad de 1 m/s ¿Cuál es su velocidad resultante?



$$V_R = \sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

$$V_R = \sqrt{(1\,m/s)^2 + (3\,m/s)^2}$$

$$V_R = 3{,}16\,m/s$$

Ejemplo 1: ¿Cuál es la rapidez de un móvil que en 13 minutos recorre 4 km ?

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : $t = 13\,\text{min}$ $v = ?$

$e = 4\,\text{km}$

Al módulo de la velocidad le llamaremos rapidez: $v = \frac{e}{t}$

$$v = \frac{4\,\text{km}}{13\,\text{min}} = \frac{4\,000\,\text{m}}{13 \times 60\,\text{s}}$$

Rpta.: $v = 5{,}13\,\text{m/s}$

NOTAS :

- En navegación la rapidez se da en nudos y significa la rapidez en millas marinas por hora, así:

$$v = 8 \text{ nudos} = 8 \text{ millas / h}$$

- La mayor rapidez que se conoce es la rapidez de la luz en el vacío:

$$v \cong 300\,000\,\text{km/s}$$

CARACTERÍSTICAS DEL M.R.U.V.

a) El espacio recorrido por un móvil es directamente proporcional al tiempo que emplea:

$$\frac{e_1}{t_1} = \frac{e_2}{t_2} = \frac{e_3}{t_3} = \ldots\ldots \text{cte.} = v$$

Esta constante se llama velocidad, de donde:

$$\boxed{e = v \cdot t}$$

b) En el movimiento rectilíneo uniforme la velocidad es constante.

Ejemplo 2: Un automóvil tiene una rapidez de 90 km / h. ¿Cuál es el espacio recorrido en 8 minutos?

RESOLUCIÓN : $v = 90\,\text{km/h}$

$t = 8\,\text{min}$

$e = ?$

Sabiendo que: $v = e/t \Rightarrow e = v \times t$

$$e = 90\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times 8\,\text{min}$$

$$e = 90 \times \frac{1\,000\,\text{m}}{60\,\text{min}} \times 8\,\text{min}$$

Rpta.: $e = 12\,000\,\text{m}$

Ejemplo 3: Un móvil recorre 200 m en 1 min 50 s. ¿Cuál es su rapidez?

RESOLUCIÓN : $e = 200\,\text{m}$

$t = 1\,\text{min}\ 50\,\text{s}$

$v = ?$

$$v = \frac{e}{t} = \frac{200\,\text{m}}{60\,\text{s} + 50\,\text{s}} = \frac{200\,\text{m}}{110\,\text{s}}$$

Rpta.: $v = 1{,}82\ \text{m/s}$

Ejemplo 4. Calcular el tiempo que empleará la luz en llegar del Sol a la Tierra si la distancia que lossepara es de 150×10^6 km.

RESOLUCIÓN : $e = 150 \times 10^6\ \text{km}$

$v = 300\,00\ \text{km/s}$

$t = ?$

Se sabe que: $v = \frac{d}{t} \Rightarrow t = \frac{d}{v}$

$$t = \frac{150 \times 10^6\ \text{km}}{300\,000\,\text{km/s}} = 500\,\text{s}$$

Rpta.: $t = 8\ \text{min}\ 20\ \text{s}$

Ejemplo 5. Un motociclista viaja de A a B con una rapidez uniforme de 55 km / h. A las 7 de la mañana está en B que dista 220 km de A. Calcular:

a) A qué hora partió de A
b) A qué distancia de B estará a las 12 del medio día si prosigue el viaje.

RESOLUCIÓN: $e = 220\,\text{km}$

$t = ?$ $v = 55\,\text{km/h}$

a) $v = \frac{e}{t}$ de donde:

$$t = \frac{e}{v} = \frac{220\,\text{km}}{55\,\text{km/h}} = 4\,\text{h}$$

Quiere decir que el motociclista demoró 4 horas en recorrer de A hasta B. Como a B llegó a las 7 de la mañana entonces partió 4 horas antes, es decir:

$$7\ \text{a.m.} - 4\ \text{h} = 3\ \text{a.m.}$$

Rpta.: Partió de A a las **3** a. m.

http://librosysolucionarios.net

b) Desde las 7 a.m. hasta las 12 m. hay 5 horas, luego , se tendrá que calcular el espacio que recorre en 5 horas, a 55 km/h.

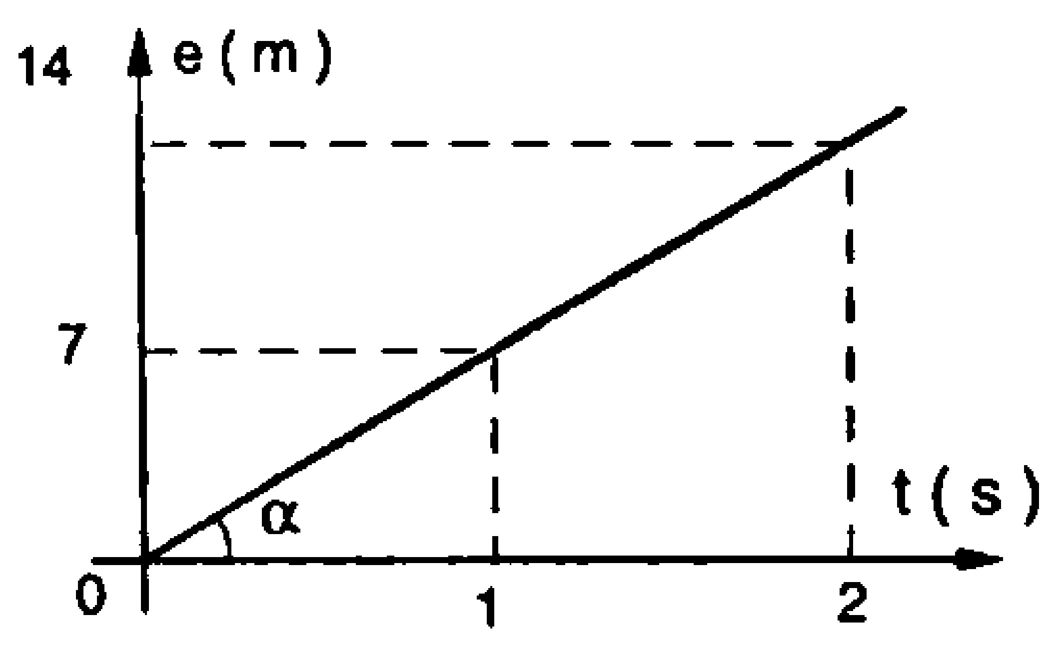
$$e = vt = 55\,km/h \times 5\,h = 275\,km$$

Rpta.: Estará a 275 km de B.

SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA VELOCIDAD: (espacio - tiempo)

En un gráfico la velocidad de un móvil es el valor de la tangente de un ángulo.

Ejemplo: Sea un móvil con velocidad de 7 m/s en un sistema de ejes rectangulares, el espacio recorrido se indica sobre el eje Y y el tiempo sobre el eje X , así:



Esto significa que el móvil en 1 s ha recorrido 7 m

Del gráfico (e - t) se tiene que:

$$\tan\alpha = \frac{7\,m}{1\,s} = \frac{14\,m}{2\,s} = 7\,m/s$$

$$\therefore \quad \boxed{V = tg\,\alpha}$$

Ejemplo: Sean dos móviles cuyas velocidades son respectivamente:

$V_1 = 5\,km/h$
$V_2 = 20\,km/h$

La velocidad está dada por la tangente del ángulo que forma la recta representativa (e - t) con el eje de los tiempos

$$(1) \quad tg\,\alpha_1 = \frac{Q_1N}{ON} \;;\; \text{o sea: } V_1 = \frac{e_1}{t_1}$$

$$(2) \quad tg\,\alpha_2 = \frac{Q_2N}{ON} \;;\; \text{o sea: } V_2 = \frac{e_2}{t_2}$$

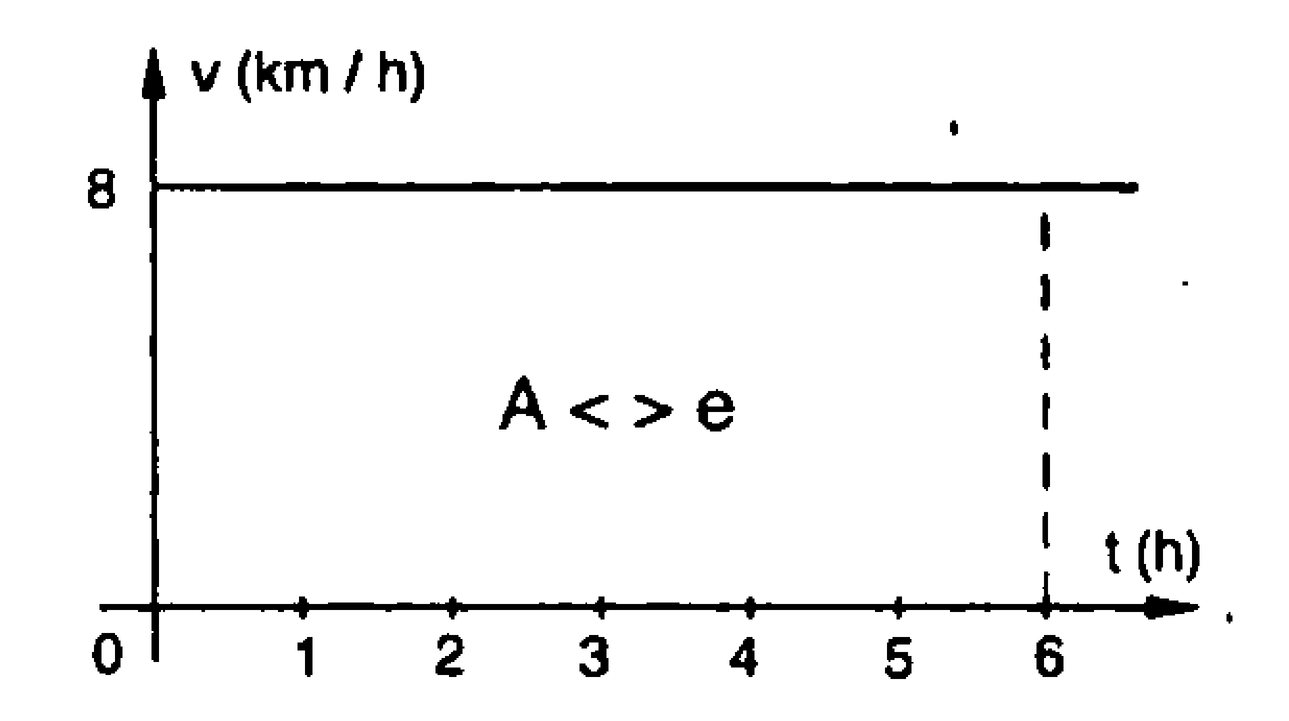
La velocidad del móvil (2) es mayor que la del móvil (1), esta cualidad está graficada y expresada en el valor de los ángulos de inclinación de las rectas representativas de la velocidad.

Donde: $\alpha_2 > \alpha_1$
luego: $tg\,\alpha_2 > tg\,\alpha_1$
Efectivamente: $V_2 > V_1$

SOLUCIÓN GRÁFICA DE LA DISTANCIA: (velocidad - tiempo)

Sea un móvil con una velocidad de 8 km/h y se desplaza durante 6 horas.

$$e = 8\,km/h \times 6\,h = 48\,km = 48\,000\,m$$



La distancia o espacio recorrido por el móvil está representado por el área "tramada" que es un rectángulo cuya área geométricamente se calcula multiplicando la "base" por "altura", donde la base es el tiempo recorrido y la altura es la velocidad constante que lleva el móvil.

$$\boxed{e = v\,.\,t}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. A una persona la llaman por teléfono a su casa desde la Universidad a las 9 de la mañana y le dicen que debe presen tarse a las 10 h 30 min. Si la persona sale inmediatamente de su casa, que dista 14 km de la Universidad, calcula la rapidez con la que debe desplazarse para llegar a la hora de la cita.

RESOLUCIÓN :

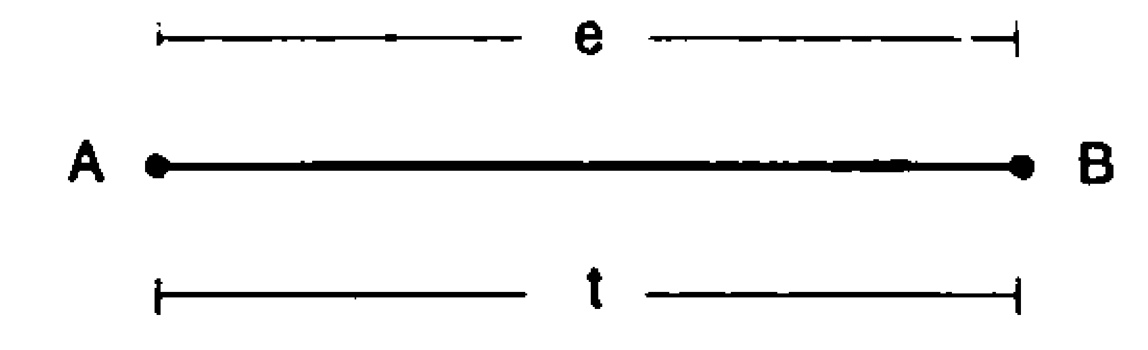
e = 14 Km = 14 000 m
t = 1 h 30 min. = 90 min = 5 400 s
v = ?

Se sabe que: $v = \frac{e}{t}$; luego

Rpta.: $v = \frac{14\,000}{5\,400} \approx 5{,}59\ \frac{m}{s}$

PROBLEMA 2. Se le cita a un estudiante a las 10 de la mañana a la Universidad. Si parte de su casa a 2 km / h, llega 2 horas más tarde, pero si va a 4 km / h llega 3 horas antes. ¿Con qué rapidez o velocidad debe caminar para llegar a la hora exácta?

RESOLUCIÓN :



Recordemos que $e = vt$, luego:

Si va a 2 km / h: $e = 2(t+2)$ (1)

Si va a 4 km / h: $e = 4(t-3)$ (2)

Igualando espacios:

$$2(t+2) = 4(t-3)\ ;\ \text{de donde}\ t = 8\ h$$

Quiere decir que caminará durante 8 h.
Reemplazando en (1) :

$$e = 2(8+3) = 22\ km$$

Quiere decir que la distancia que tiene que recorrer es de 22 km.

Ahora: $v = \frac{e}{t} = \frac{22}{8}$ Rpta.:

PROBLEMA 3. Un peatón camina a razón de 4 km/h los 3/5 de la distancia que une dos ciudades separadas en 10 km. Si el resto lo camina a 3 km/h, ¿cuánto tiempo demoró en todo el recorrido?

RESOLUCIÓN : Sea el gráfico

$\frac{3}{5}L$ — $\frac{2}{5}L$

A — B

4 km/h — 3 km/h

Sabiendo que : $t = e / v$

1º parte: $t_1 = \frac{\frac{3}{5}L}{4} = \frac{3L}{20}$

2º parte: $t_2 = \frac{\frac{2}{5}L}{3} = \frac{2L}{15}$

Sumando miembro a miembro:

$$t_1 + t_2 = \frac{3L}{20} + \frac{2L}{15}$$

pero $t_1 + t_2 = t$ y $L = 10$; luego

$$t = \frac{65}{30} = 2{,}1\widehat{6}\ h$$

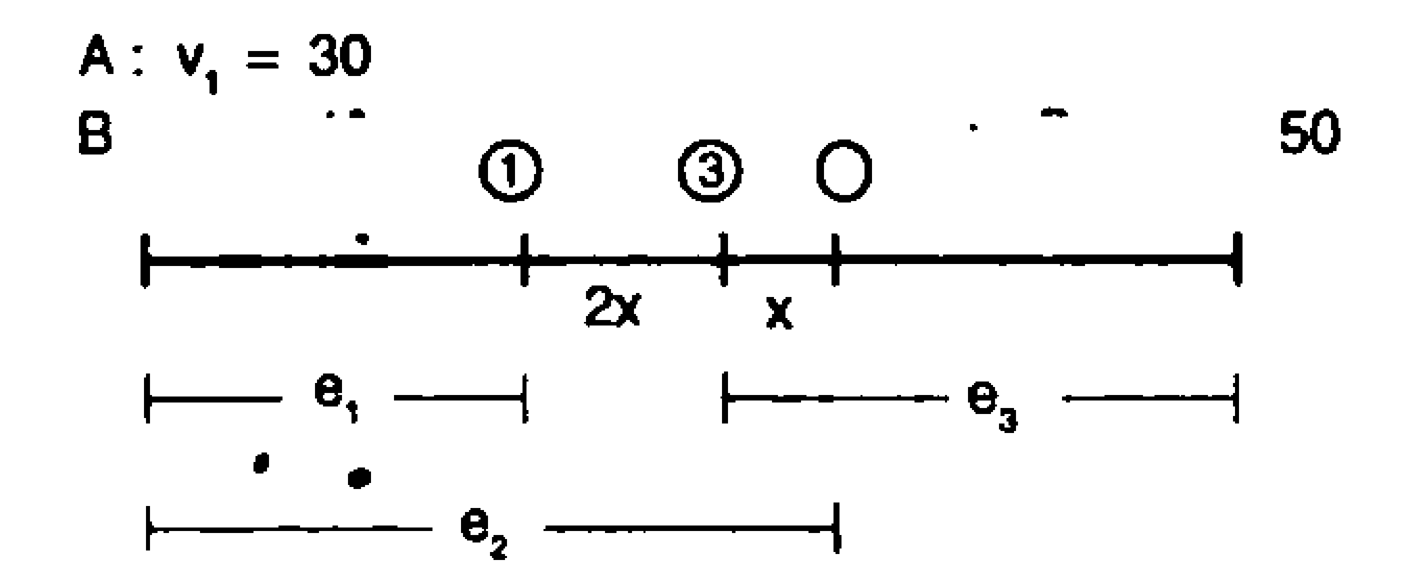
Rpta.: $t = 2\ h\ 10\ min$

PROBLEMA 4. De una ciudad A parten dos ciclistas al mismo tiempo con rapideces constantes $v_1 = 30$ km/h y $v_2 = 40$ km/h, respectivamente. Otro ciclista que está a 20 km en una ciudad B parte al mismo tiempo, en sentido contrario con una rapidez o velocidad de 50 km/h. ¿Cuánto tiempo pasará para que el tercer ciclista se encuentre entre los otros dos, a una distancia doble del primero con repecto al segundo. Las ciuda-

http://librosysolucionarios.net

des están a 100 km de distancia.

RESOLUCIÓN : Haciendo un gráfico



Para que ocurra lo que el problema indica debe tenerse que:

$$e_1 = v_1 t = 30t$$
$$2x = 2x$$
$$e_3 = 50t$$

Sabiendo estos valores:

$$e_1 + 2x + e_3 = 100$$

$\therefore$ $30t + 2x + 50t = 100$; de donde:

$$x = 50 - 40t \qquad (1)$$

Por otro lado en el gráfico se observa:

$$e_2 = e_1 + 3x$$

$\therefore$ $40t = 30t + 3x$; de donde

$$x = \frac{10}{3}t \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) :

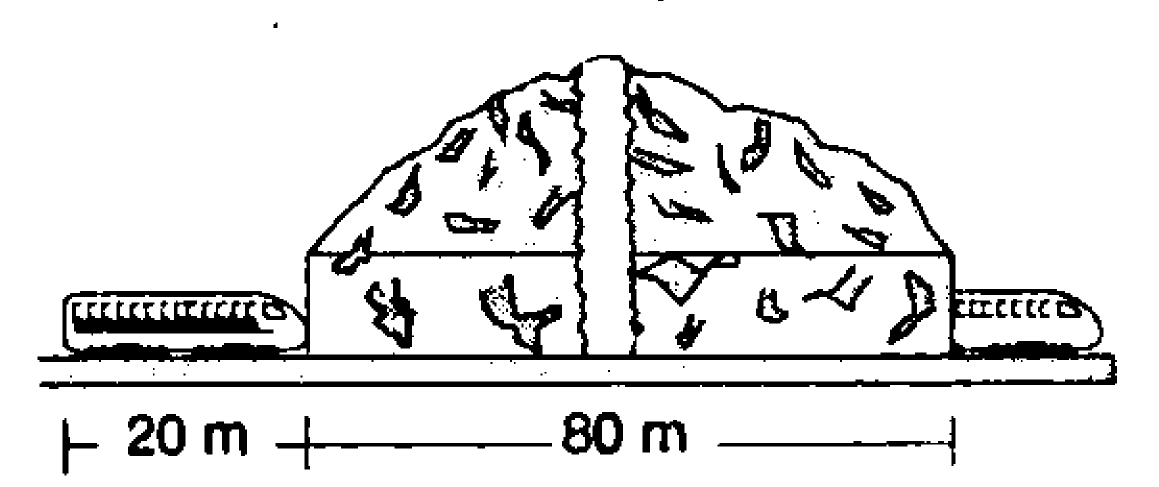
$$50 - 40t = \frac{10}{3}t \text{ , de donde:}$$

$$t = \frac{15}{13}\text{ h , luego:}$$

Rpta.: t = 1 h 09 min 14 s

PROBLEMA 5. ¿Cuánto tiempo demora en pasar todo el tren de 20 m de largo, un túnel de 80 m de largo si lleva una rapidez de 5 m/s?

RESOLUCIÓN : Sea el gráfico

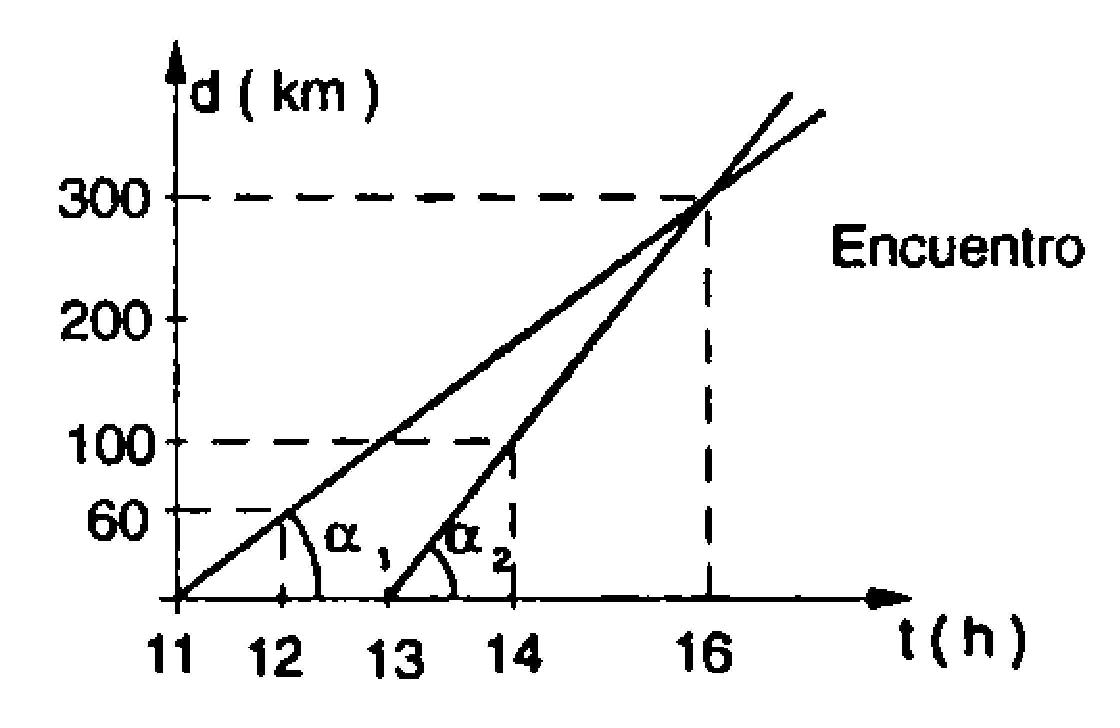


Para que pase todo el tren tiene que recorrer 100 m. Entonces:

$$\text{Rpta.: } t = \frac{e}{v} = \frac{20 + 80}{5} = 20\text{ s}$$

PROBLEMA 6. A las 11 a.m. parte de un punto A, un automóvil con velocidad uniforme de 60 km/h; a las 13 horas, parte otro automóvil del mismo punto a la velocidad de 100 km/h siguiendo la misma dirección del primero. ¿Calcular a qué hora y a qué distan cia de A el 2º alcanza al 1º?

RESOLUCIÓN : Dibujamos el gráfico distancia - tiempo que representa el desplazamiento de los automóviles. La solución gráfica se lee fácilmente: a las 16 horas y a 300 km



RESOLUCIÓN ALGEBRAICA:

Cuando se encuentran tienen que haber recorrido la misma distancia desde el punto de partida. Sea "e" la distancia.

Para el primero: $e = v_1 t \qquad (1)$

Para el segundo: $e = v_2 (t - 2h) \qquad (2)$

Igualando (1) con (2) :

$$v_1 t = v_2 (t - 2h)$$
$$v_2 t = v_1 t - v_2 \times 2h$$

Ordenando: $v_1 t - v_2 t = v_2 \times 2h$

$$t = \frac{v_2 \times 2h}{v_2 - v_1} \qquad (1)$$

Sustituyendo valores:

$$t = \frac{100\text{ km/h} \times 2\text{ h}}{100\text{ km/h} - 60\text{ km/h}} = 5\text{ h} \qquad (3)$$

http://librosysolucionarios.net

Lo que quiere decir que 5 horas después de haber partido el primer automóvil se encuentran, esto es:

Rpta.: 11 h + 5 h = 16 h

En otras palabras: 4 p.m.

Sustituyendo (3) en (1):

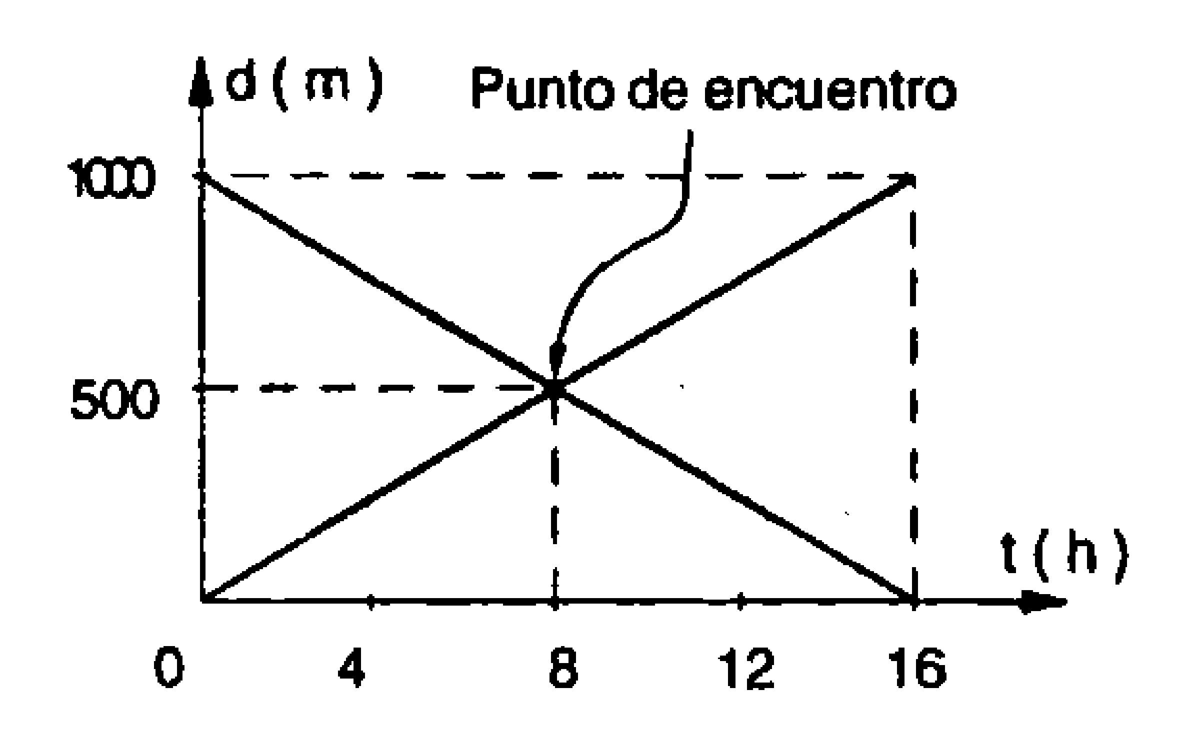
$$d = 60\ km/h \times 5\ h$$

Rpta.: $d = 300\ km$

Quiere decir que el 2º alcanza al 1º a 300 km del punto A.

PROBLEMA 7. A las 7 de la mañana parten 2 automóviles, uno de A a B y otro de B a A, están a una distancia de 1 000 km. Recorren los 1 000 km en 16 horas. ¿Calcular a qué hora y a qué distancia se encuentran?

RESOLUCIÓN: En un sistema rectangular se tiene :



Como llevan la misma velocidad, al encontrarse han recorrido la misma distancia:

$$d_1 = v\,t \qquad (1)$$
$$d_2 = v\,t \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$d_1 + d_2 = 2\,v\,t$$

pero :

$$d_1 + d_2 = 1\,000\ km$$

luego: $1\,000\ km = 2\,v\,t$

Además como ambos cruzan la distancia AB en 16 h, la velocidad de cada uno es 1 000 km / 16h.

$$\therefore\ 1\,000\ km = 2 \times \frac{1\,000\ km}{16\ h} \times t$$

de donde: $t = 8\ h$

sustituyendo en (1) $d_1 = \dfrac{1\,000\ km}{16\ h} \times 8\ h$

Rpta.: $d_1 = 500\ km$

Se encuentra a 500 km de A, que resulta el punto medio.

PROBLEMA 8. Dos móviles están en A y B a 720 km de distantancia. El primero parte de A a las 7 a.m. hacia B, a 60 km/h. ¿A qué hora y a qué distancia se encuentran?

RESOLUCIÓN : $AB = 720\ km$

$$V_A = V_B = 60\ km/h$$

$Hora_A$: 7 a.m. ; $Hora_B$: 12 m.

a) A —— d_A ——|—— d_B —— B

Encuentro

$$d_A = V_A\ t \qquad (1)$$

$$d_B = V_B\ (t - 5\ h) \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$d_A + d_B = V_A t + V_B (t - 5\ h)$$

pero: $d_A + d_B = 720\ m$

Además: $V_A = V_B = V$

sustituyendo estos valores:

$$720\ km = V\,(2\,t - 5\ h)$$

pero: $V = 60\ km/h$

$$\therefore\ 720\ km = 60\ km/h \times (2\,t - 5\ h)$$

$$12\ h = 2\,t - 5\ h$$

de donde: $t = 8\ h\ \ 30\ min$

Quiere decir que se encuentran 8 h 30 min después que partió A, o sea:

http://librosysolucionarios.net

7 h + 8 h 30 min = 15 h 30 min.

Entonces se encuentran a las 3 horas y 30 minutos de la tarde.

b) Sustituyendo en (1):

$d_A = 60 \text{ km/h} \times 8{,}5 \text{ h}$

Rpta.: $d_A = 510 \text{ km}$.

PROBLEMA 9. Del origen de coordenadas rectangulares, parte un móvil siguiendo el eje "Y" a una velocidad de 6 m/s y simultáneamente otro siguiendo la dirección del eje "X" a una velocidad de 8 m/s. Al cabo de 10 s los móviles dan vuelta y marchan hacia el origen de las coordenadas pero ahora la velocidad del primero es la que tenía el segundo y la velocidad del segundo es la que tenía el primero. ¿Cuántas veces y en qué instante estarán separados 35 m?

RESOLUCIÓN:

$V_y' = 6 \text{ m/s}$
$V_x' = 8 \text{ m/s}$
$V_y'' = 8 \text{ m/s}$
$V_x'' = 6 \text{ m/s}$
$d = ?$
$t = 10 \text{ s}$

Supongamos que "x" e "y" son las distancias de los móviles al origen, desde los puntos que están separados en 35 m.

$$x^2 + y^2 = d^2 \qquad (1)$$

pero: $x = V_x' t \quad ; \quad y = V_y' t$

Sustituyendo en (1):

$$(V_x' t)^2 + (V_y' t)^2 = d^2$$
$$V_x'^2 t^2 + V_y'^2 t^2 = d^2$$

de donde: $t = \dfrac{d}{\sqrt{V_x^2 + V_y^2}}$

Sustituyendo valores:

$$t = \frac{35}{\sqrt{(6)^2 + (8)^2}} = \frac{35}{10} = 3{,}5$$

$$t = 3{,}5 \text{ s}$$

Esta es la primera vez que están separados a 35 m.

Para calcular el tiempo que tardarán en encontrarse a 35 m, por segunda vez, se procederá así:

Como ya recorrieron 10 s y empiezan a regresar:

El que recorre sobre el eje "Y" estará a $(60 - V_y'' t_1)$ del origen, y el que recorre sobre el eje "X" estará a $(80 - V_x'' t_1)$ del origen, luego:

$$(80 - V_x'' t_1)^2 + (60 - V_y'' t_1)^2 = (35)^2$$

Efectuando operaciones, previa sustitución de valores:

$$V_x'' = 6 \qquad y \qquad V_y'' = 8$$

Se tiene: $t_1 = 7{,}50 \text{ s}$

A esto se le añade los 10 s que demoró la ida para obtener finalmente:

Rpta.: $t_T = 17{,}50 \text{ s}$ (segunda vez)

PROBLEMA 10. Dos automóviles están separados entre sí 50 km y marchan en sentido contrario a 40 y 50 km/h. ¿Cuánto tiempo tardarán en cruzarse?

RESOLUCIÓN: $d = 50 \text{ km}$
$V_A = 50 \text{ km/h}$
$V_B = 50 \text{ km/h}$

Como los dos móviles parten simultáneamente pero con distintas velocidades, quiere decir que al encontrarse han recorrido distancias d_A y d_B, pero ambos en el mismo tiempo t.

http://librosysolucionarios.net

Recordando que: $v = \frac{d}{t}$

de donde: $d = v\,t$

Para A: $d_A = 40\,t$ (1)

Para B: $d_B = 50\,t$ (2)

Sumando (1) y (2):

$$d_A + d_B = 40\,t + 50\,t$$

pero: $d_A + d_B = 50$

Luego $50 = 90\,t$

de donde: $t = 0{,}55$ h en minutos:

Rpta.: $t = 33{,}33$ min.

PROBLEMA 11. Dos estaciones de tren están separadas entre sí 100 km; de la estación A sale un tren que tardará 2 horas en llegar a B; de B sale otro tren hacia A, a donde llegará en 1 hora y media. Calcular a qué distancia de A se cruzan y qué tiempo después de la partida, la cual fue simultánea.

RESOLUCIÓN: $d = 100$ km $d_A = ?$

$t_A = 2$ h

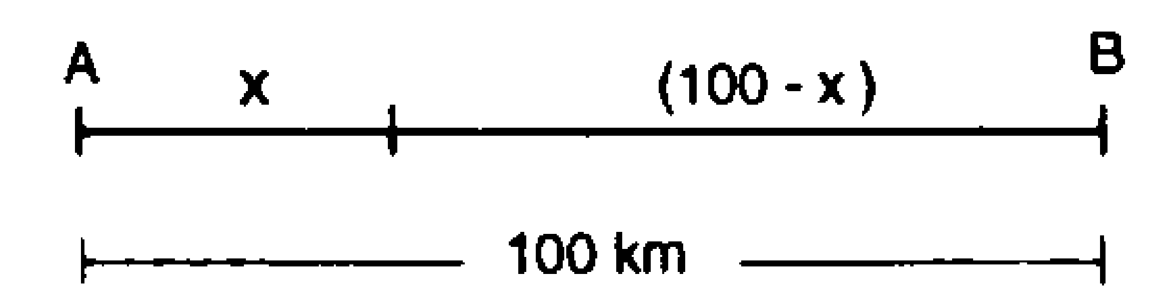
$t_B = 1{,}50$ h

Se calcula la velocidad de cada tren:

$$V_A = \frac{100\text{ km}}{2\text{ h}} = 50\text{ km/h}$$

$$V_B = \frac{100\text{ km}}{1{,}5\text{ h}} = 66{,}67\text{ km/h}$$

Sea "x" la distancia en que se cruzan contando desde A; luego "100 -x" será la distancia de cruce desde B.



Cálculo de las distancias recorridas por cada tren para cruzarse.

Para A: $x = 50$ km/h . t (1)

Para B: 100 km $- x = 66{,}67$ km/h . t (2)

Sumando (1) y (2): 100 km $= 116{,}67$ km/h . t

de donde: $t = 0{,}857$ h

convirtiendo: $t = 51$ min $25{,}2$ s

Sustituyendo en (1):

$$x = 50\,\frac{\text{km}}{\text{h}} \times 0{,}857\text{ h}$$

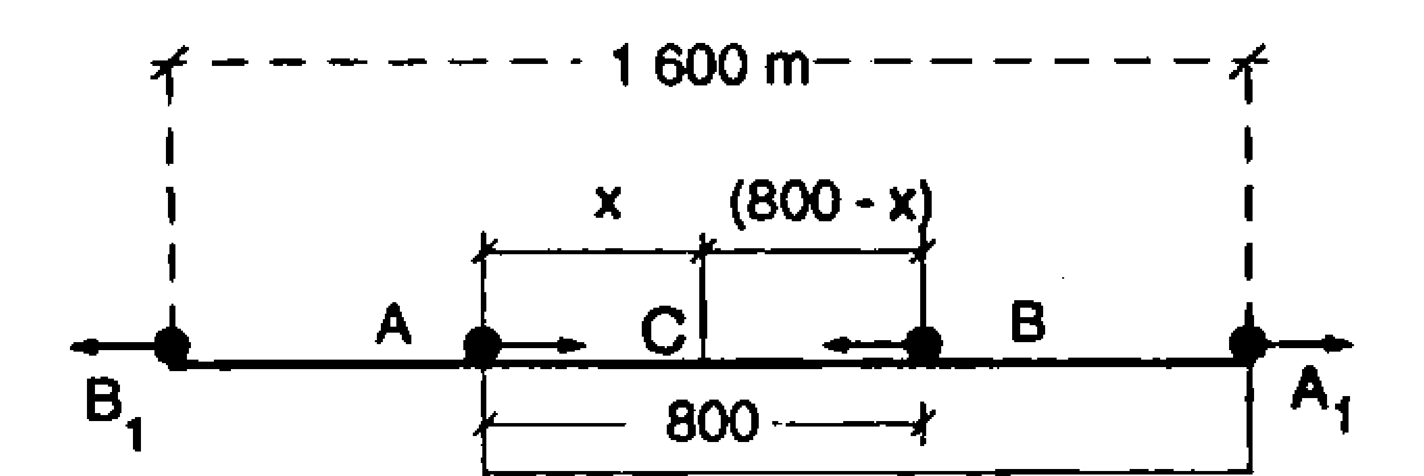
$$x = 42{,}85\text{ km}$$

Rpta.: Se encuentra a 42,85 km de A

PROBLEMA 12. Dos móviles están separados en 800 m y avanzan en línea recta uno al encuentro del otro con velocidades de 25 m/s y 15 m/s. Los móviles se cruzan y se alejan. Al cabo de cuánto tiempo estarán separados 1 600 m.

RESOLUCIÓN: $V_A = 25$ m/s

AB = 800 m $V_B = 15$ m/s



Sea "x" la distancia que recorre A, y sea "800 - x", la que recorre B para cruzarse con A en el punto C.

1) $x = V_A\,t = 25\,t$

2) $800 - x = V_B\,t = 15\,t$

Sumando: $800 = 40\,t$

$$t = 20\text{ s}$$

A los 20 s de la partida simultanea se cruzan; a partir de este momento deben alejarse 1 600 m.

$$d_A = V_A\,t_1$$

$$d_B = V_B\,t_1$$

http://librosysolucionarios.net

Sumando: $d_A + d_B = t_1(V_A + V_B)$

de donde: $t_1 = \dfrac{d_A + d_B}{V_A + V_B}$

Sustituyendo datos:

$$t_1 = \frac{1\,600\text{ m}}{40\text{ m/s}} \Rightarrow t_1 = 40\text{ s}$$

El tiempo total desde el momento de la partida será:

$$t_T = 20\text{ s} + 40\text{ s}$$

Rpta.: $t_T = 60\text{ s} = 1\text{ min}$

PROBLEMA 13. Una persona dispone de 6 horas para darse un paseo. ¿Hasta qué distancia podrá hacerse conducir por un automóvil que va a 12 km / h, sabiendo que tiene que regresar a pie y a 4 km/h?

RESOLUCIÓN : $t = 6\text{ h}$

$V' = 12\text{ km/h}$

$V'' = 4\text{ km/h}$

Sea t_1 el tiempo que viaja en el automóvil; como la rapidez con que regresa es la tercera parte de la que fue con el auto, el tiempo que demorará en regresar será el triple o sea $3t_1$, luego:

$$t_1 + 3t_1 = 6\text{ h}$$

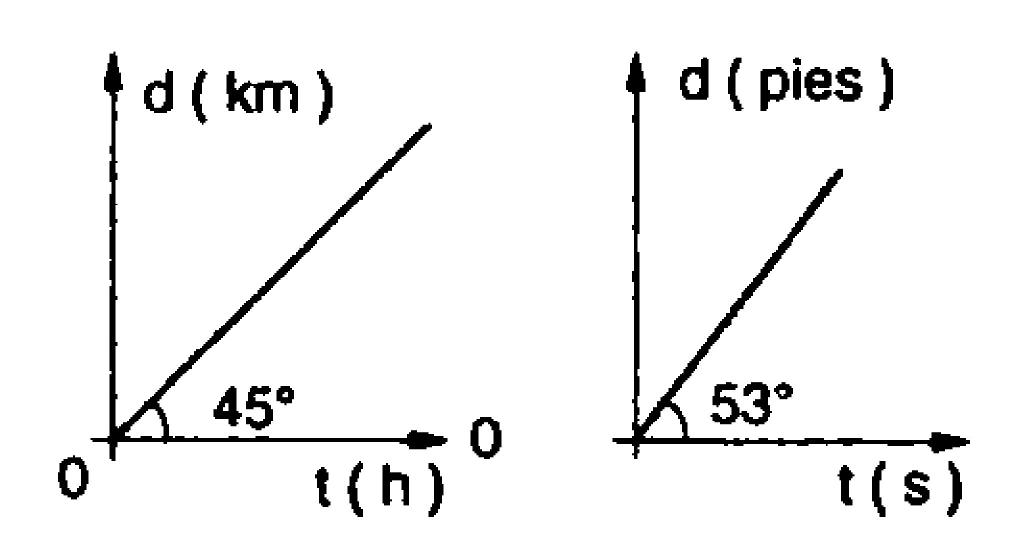
$$t_1 = \frac{3}{2}\text{ h}$$

Cálculo de la distancia que conduce el auto al peatón.

$$e = Vt_1 = \frac{12\text{ km}}{\text{h}} \times \frac{3}{2}\text{ h}$$

Rpta.: d = 18 km

PROBLEMA 14. En los gráficos siguientes están indicadas las velocidades de 2 móviles. Decir cuál es la diferencia de velocidades en m/s



RESOLUCIÓN: La velocidad de un móvil en sistema rectangular está dada por la tangente del ángulo que forma el gráfico (d - t) con la horizontal. Entonces:

a) $V_A = tg\,45° = 1$; luego:

$V_A = 1\text{ km/h} = \dfrac{1\,000\text{ m}}{3\,600\text{ s}}$

$\therefore V_A = 0{,}278\text{ m/s}$

b) $V_B = tg\,53° = 4/5 = 1{,}33$

$V_B = 1{,}33\text{ pies/s}$

$V_B = 1{,}33 \times 0{,}305\text{ m/s}$

$\therefore V_B = 0{,}405\text{ m/s}$

Finalmente la diferencia que se pedía será:

Rpta.: $V = V_B - V_A = 0{,}127\text{ m/s}$

PROBLEMA 15. Dos hermanos salen al mismo tiempo de su casa con rapideces de 4 m / s y 5 m / s, con dirección a la Universidad. Uno llega un cuarto de hora antes que el otro. Hallar la distancia entre la casa y la Universidad.

RESOLUCIÓN : Sea "e" la distancia entre la casa y la Universidad.

Recordando que: $t = \dfrac{e}{v}$

Ahora, la diferencia de tiempo que emplearon en llegar es de 15 minutos, es decir:

$$\frac{e}{V_1} - \frac{e}{V_2} = 15\text{ min} \quad , \text{ ó sea:}$$

a) $V_A = tg\,45° = 1$; luego:

$$V_A = 1\ km/h = \frac{1\,000\ m}{3\,600\ s}$$

$\therefore\ V_A = 0{,}278\ m/s$

b) $V_B = tg\ 53° = 4/5 = 1{,}33$

$V_B = 1,33\ pies/s$

$V_B = 1,33 \times 0{,}305\ m/s$

$\therefore\ V_B = 0{,}405\ m/s$

Finalmente la diferencia que se pedía será:

Rpta.: $V = V_B - V_A = 0{,}127\ m/s$

PROBLEMA 15. Dos hermanos salen al mismo tiempo de su casa con rapideces de 4 m / s y 5 m / s, con dirección a la Universidad. Uno llega un cuarto de hora antes que el otro. Hallar la distancia entre la casa y la Universidad.

RESOLUCIÓN :

Sea "e" la distancia entre la casa y la Universidad.

Recordando que: $t = \frac{e}{v}$

Ahora, la diferencia de tiempo que emplearon en llegar es de 15 minutos, es decir:

$$\frac{e}{V_1} - \frac{e}{V_2} = 15\ min \quad , \text{ ó sea:}$$

$$\frac{e}{4\ m/s} - \frac{e}{5\ m/s} = 15 \times 60\ s$$

$$\frac{5\ e.s - 4\ e.s}{20\ m} = 900\ s$$

Rpta.: $e = 18\,000\ m$ ó $e = 18\ km.$

PROBLEMA 16. Dos móviles parten del mismo punto, al mismo tiempo y en el mismo sentido, con velocidades rectilíneas uniformes de 8 m/s y otro a 10 m/s. ¿Qué distancia estarán separados al cabo de 10 s?

RESOLUCIÓN : $V_1 = 8\ m/s$

$V_2 = 10\ m/s$

$e = ?\quad t = 10\ s$

A ——— e_1 ——— A_1 ——— $(e_2 - e_1)$ ———

B ——————— e_2 ——————— B_1

1) Cálculo de la distancia recorrida por el primer móvil:

$$e_1 = V_1 t = 8\ \frac{m}{s} \times 10\ s$$

$$e_1 = 80\ m$$

2) Cálculo de la distancia recorrida por el segundo móvil:

$$e_2 = V_2 t = 10\ \frac{m}{s} \times 10\ s$$

$$e_2 = 100\ m$$

Distancia que los separa: $e = e_2 - e_1$

Rpta.: $e_A = 100 - 80 = 20\ m$

PROBLEMA 17. Con un bote que lleva una velocidad de 20 m/s se quiere cruzar un río de 150 m de ancho. La velocidad de la corriente es 2 m/s. Calcular:

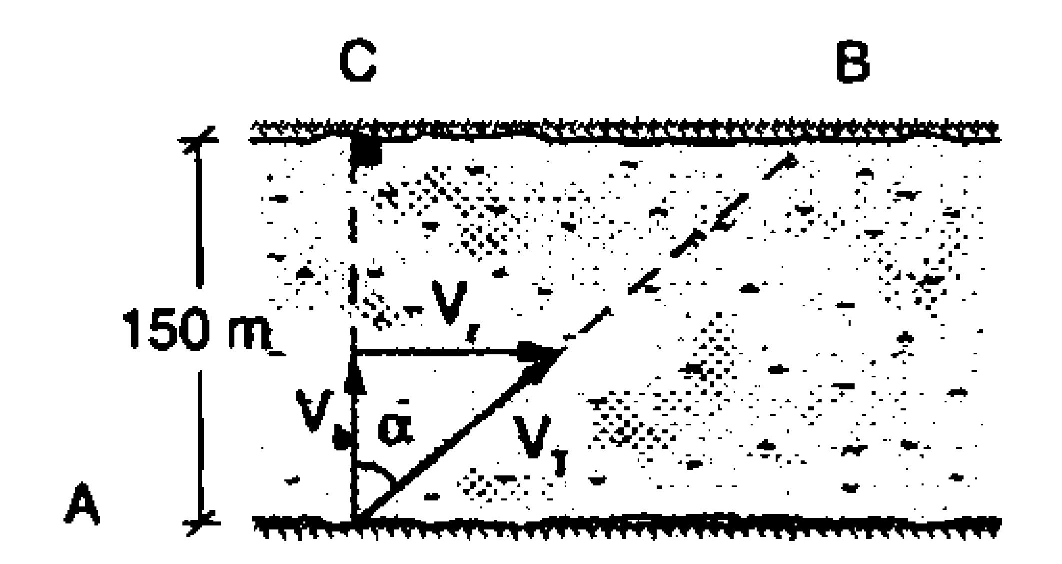
a) La desviación que experimenta el bote por efecto de la corriente.
b) La velocidad total.
c) A qué distancia, río abajo, tocará la otra orilla.

RESOLUCIÓN :

$V_b = 20\ m/s \quad d = 150\ m$

$V_r = 2\ m/s$

a) El bote parte de A y llega a B



La desviación es por efecto de la corriente, sea "a" el ángulo que se desvía el bote.

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{V_r}{V_b} = \frac{2}{20} = 0{,}1$$

Rpta.: $\alpha = 5°42'$ (en tablas)

b) El vector V_T está sobre AB. Luego, por Pitágoras en el triángulo r ectángulo ABC se tiene:

$$V_T = \sqrt{(20)^2 + (2)^2}$$

$$V_T = 20{,}1 \text{ m/s}$$

c) En el triángulo rectángulo ABC, se tiene:

AC = 150 m y a = 5° 42', luego:

$$BC = AC \operatorname{tg} a = 150 \times \operatorname{tg} 5° 42'$$

$$BC = 150 \times 0{,}1$$

Rpta.: BC = 15 m.

PROBLEMA 18. Dos móviles parten simultáneamente de un punto A en un mismo sentido, y se desplazan en forma rectilínea. A los 40 segundos de la partida, equidistan de un punto B, uno antes y otro después del punto B. Calcular la distancia AB, si los dos móviles se desplazan con rapideces constantes de 23 y 27 m/s.

RESOLUCIÓN: $V_1 = 23$ m/s

$V_2 = 27$ m/s t = 40 s

V_1 →
V_2 →

A ———————— B ————

|— x —|— x —|

Si equidistan, el móvil 1 avanzará:

$$AB - x = V_1 t \qquad (I)$$

y el móvil 2 : $AB + x = V_2 t \qquad (II)$

Sumando (I) y (II) :

$$2(AB) = (V_1 + V_2)t = (23 + 27)40$$

$$2(AB) = (50)40$$

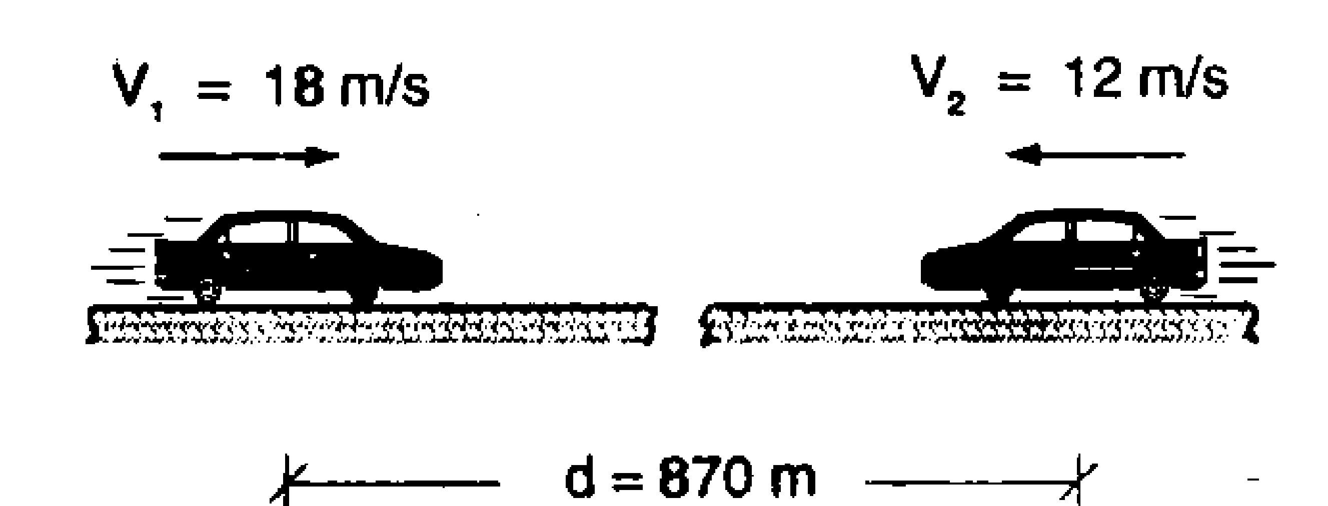
Rpta.: AB = 1000 m

PROBLEMA 19. Dos móviles están separados inicialmente 870 m, si se acercan en sentidos contrarios y con rapideces constantes de 18 m / s y 12 m / s ¿Qué tiempo demorarán en cruzarse?

RESOLUCIÓN: $V_1 = 18$ m / s

$V_2 = 12$ m / s

t = ?



Al encontrarse habrán recorrido:

$$d = V_1 t + V_2 t = 870$$

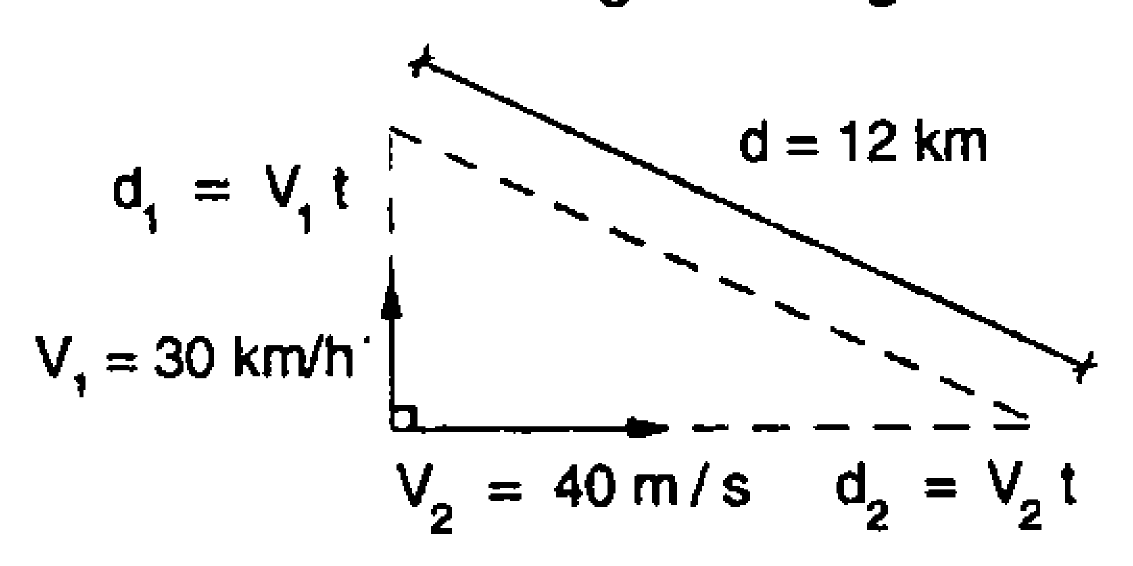
$$(V_1 + V_2)t = 870$$

$$(18 + 12)t = 870$$

Rpta.: t = 29 s

PROBLEMA 20. Dos móviles parten de un punto "O" en direcciones perpendiculares entre sí; se desplazan con rapideces constantes de 30 y 40 m/s. ¿Al cabo de qué tiempo estarán separados 12 km?

RESOLUCIÓN: Observando los datos en el gráfico siguiente:



En el triángulo rectángulo:

http://librosysolucionarios.net

$$d^2 = (V_1 t)^2 + (V_2 t)^2$$
$$d^2 = t^2 (V_1^2 + V_2^2)$$
$$d = t\sqrt{V_1^2 + V_2^2}$$

Reeplazando valores:

$$12\,000 = t\sqrt{30^2 + 40^2}$$
$$t = \frac{12\,000}{\sqrt{2\,500}} = \frac{12\,000}{50}$$

Rpta.: $t = 240\ s = 4\ min$

PROBLEMA 21. ¿Qué sucede con el tiempo si en el problema anterior se duplican las velocidades?

RESOLUCIÓN : $V_1' = 2V_1 = 60\ m/s$

$V_2' = 2V_2 = 80\ m/s$

Sabiendo que: $t' = \dfrac{d}{V'}$

$$t' = \frac{12\,000}{\sqrt{(V_1') + (V_2')}} = \frac{12\,000}{\sqrt{60^2 + 80^2}}$$

$$t' = \frac{12\,000}{\sqrt{10\,000}} = \frac{12\,000}{100} = 120$$

Rpta.: $t' = 2\ min$ (el tiempo se reduce a la mitad)

PROBLEMA 22. Un automóvil va de una ciudad A a otra B, con una velocidad constante de 10 m/s y regresa, también con una velocidad constante, de la ciudad B a la ciudad A. Si la velocidad media para el móvil (ida y vuelta) es de 16 m/s ¿Cuál es la velocidad de regreso del móvil?

RESOLUCIÓN:

$V_1 = 10\ m/s$
$V_2 = ?$
$V_m = 16\ m/s$

$V_1 = 10\ m/s$ →
d
A ———————— B
$V_2 = ?$ ←

Se sabe que: $V_m = 16\ m/s$

Pero: $V_m = \dfrac{d_t}{T_{total}}$ (1)

$d_t = 2d$; $T_{total} = t_1 + t_2$

$$T_{total} = \frac{d_t}{V_1} + \frac{d_t}{V_2} = d_t\left(\frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}\right)$$

Sustituyendo este valor en (1)

$$V_m = \frac{2V_1V_2}{(V_1+V_2)}$$

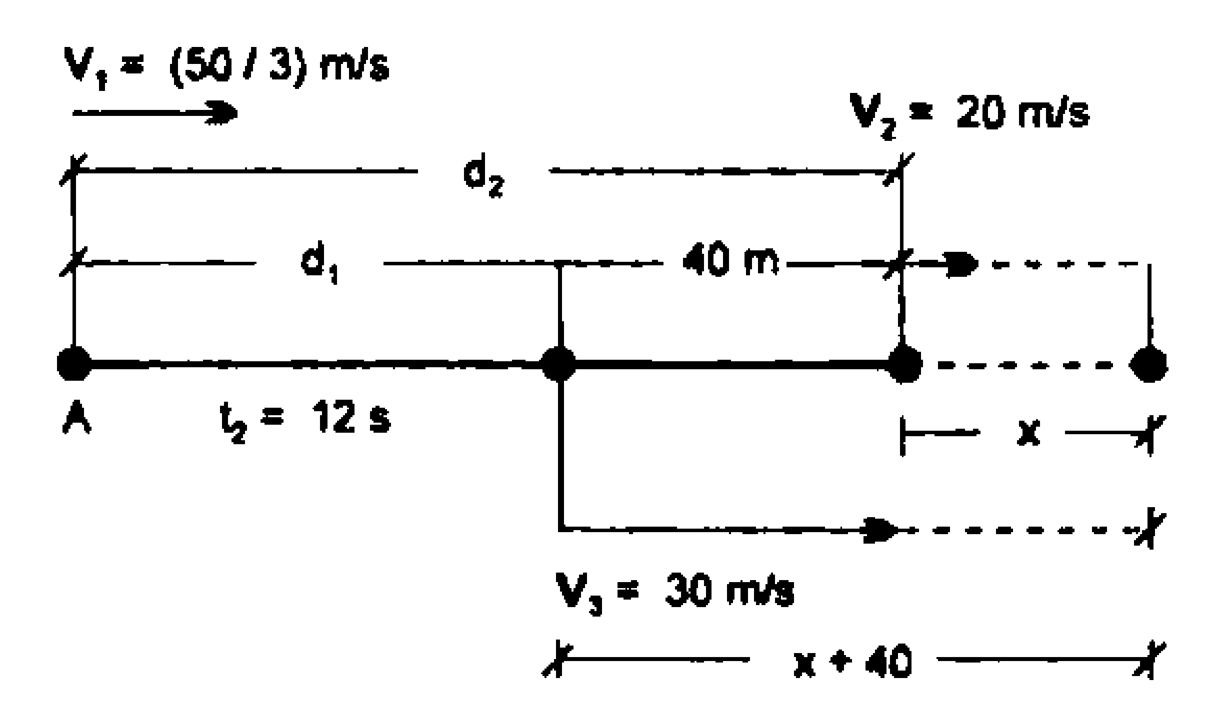
Sustituyendo los datos numéricos:

$$16 = \frac{2(10)V_2}{10+V_2} \ ; \ 4V_2 = 160$$

Rpta.: $V_2 = 40\ m/s$

PROBLEMA 23. Dos móviles están en movimiento en las mismas direcciones y sentidos, con velocidades de 60 y 72 km/h. Cuando pasan 12 s, del móvil de menor velocidad se dispara hacia el otro móvil un proyectil a 108 km/h. (debe suponerse que el proyectil avanza en línea recta). ¿Qué distancia están separados los dos móviles cuando alcance el proyectil al móvil de mayor velocidad? La velocidad del proyectil está dada con respecto a tierra.

RESOLUCION : Para aclarar el problema se grafican las trayectorias:



V_1 = 60 km/h = (50/3) m/s
V_2 = 72 km/h = 20 m/s
V_3 = 108 km/h = 30 km/h
d_1 = (50/3) 12 = 200 m
d_2 = 20 . 12 = 240 m

O sea que a los 12 s los móviles están separados: $d_2 - d_1 = 40$ m

Cuando el proyectil alcance al móvil de mayor velocidad se cumplirá:

$$t = \frac{d}{V} = \frac{x}{20} = \frac{x+40}{30} \quad \text{(ver gráfica)}$$

Igualando las dos últimas:

$$30\,x = 20\,x + 800 \Rightarrow x = 80 \text{ m}$$

$$t_1 = \frac{x}{20 \text{ m/s}} = \frac{80 \text{ m}}{20 \text{ m/s}} = 4 \text{ s}$$

O sea que el tiempo total desde el momento de la partida de ambos móviles hasta el momento en que el proyectil alcanza al móvil más veloz será:

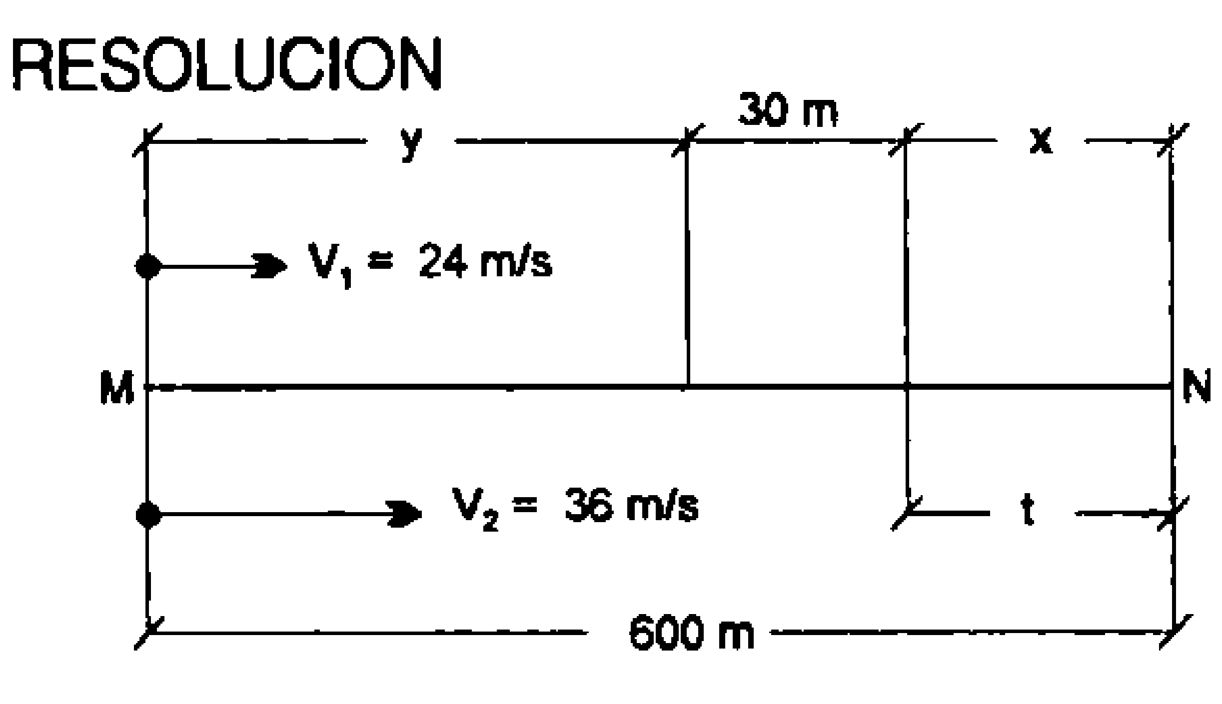
$$T = t_0 + t_1 = 12 \text{ s} + 4 \text{ s} = 16 \text{ s}$$

Ahora los móviles estarán separados:

$d = d_2 - d_1 = V_2T - V_1T$
$d = (V_2 - V_1)T$
Rpta. : d = (20 - 50/3) 16 = 53,33 m

PROBLEMA 24. Dos móviles recorren una trayectoria rectilínea M N de 600 m de distancia de ida y vuelta. Si parten del reposo simultáneamente y con rapideces de 24 y 36 m/s. ¿Qué tiempo transcurrirá para que estén separados 30?

RESOLUCION



En el gráfico: y + 30 + x = 600

Luego: y = 570 - x (I)

La primera vez que están separados 30 m es cuando los dos avanzan. La segunda vez cuando el de mayor velocidad regresa. Como el tiempo que ha transcurrido es el mismo se tiene:

Para (1): $t_1 = \dfrac{y}{24}$

Para (2): que ya está de regreso:

$$t = \frac{\overbrace{(y+30+x)}^{600}+x}{36} = \frac{600+x}{36}$$

Igualando los tiempos:

$$\frac{y}{24} = \frac{600+x}{36} \quad ; \text{ de donde:}$$

36y = 14 400 + 24x
3y = 1 200 + 2x (II)

Reemplazando (I) en (II) :

3 (570 - x) = 1 200 + 2 x
1 710 - 3 x = 1 200 + 2 x
x = 102 m

pero: $t = \dfrac{600+x}{36} = \dfrac{600+102}{36}$

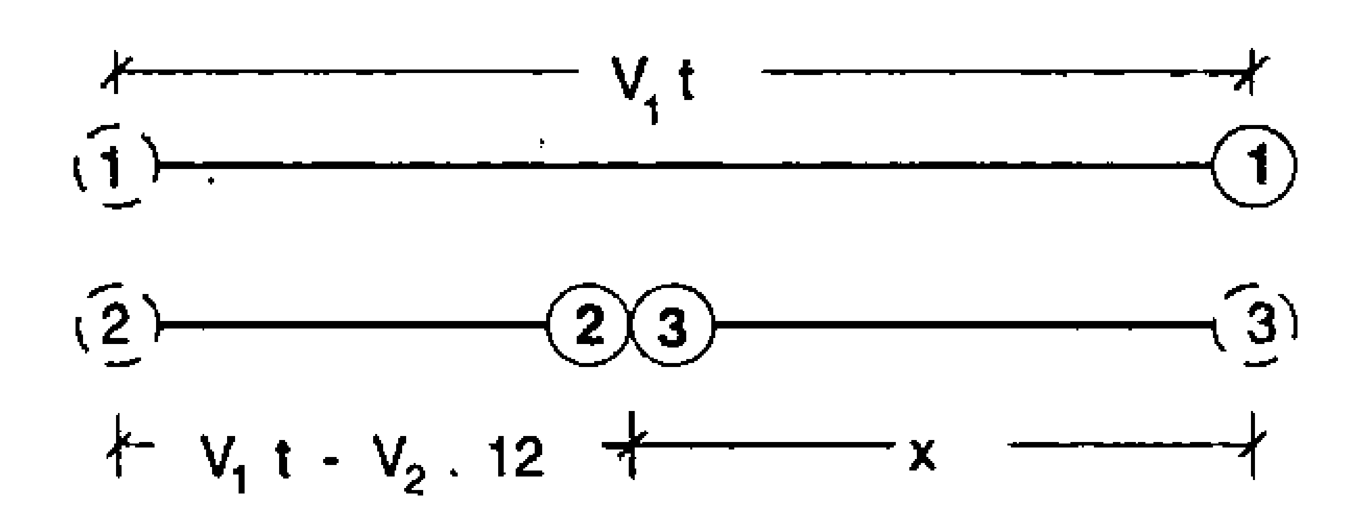
Rpta. : t = 19,5 s

La primera vez sucede a los 2,5 s

PROBLEMA 25. Del puente Javier Prado, en la pista de la Vía Expresa, parte un ciclista hacia Lima con una rapidez de 10 m/s. 12 s después, parte otro ciclista , en el mismo sentido y con la misma rapidez. Un tercer ciclista que viene de Lima se cruza con el ciclista , 3 segundos después de cruzarse con el primer ciclista. ¿Cuál es la velocidad o rapidez del tercero?

RESOLUCION : V_1 = 10 m / s t_2 = 12 s
V_2 = 10 m / s t_3 = 3 s
V_3 = ?

http://librosysolucionarios.net



Los ciclistas ② y ③ se están acercando con una rapidez igual a la suma de sus rapideces: $V_3 + V_2$

$$\therefore \quad x = (V_3 + V_2)t_3$$

$$x = (V_3 + 10)3 \qquad (1)$$

Por otra parte: el espacio x es igual al recorrido por el ciclista ① menos lo recorrido por el ciclista ② en el tiempo t:

$$x = V_1 t - (V_1 t - V_2 \times 12)$$

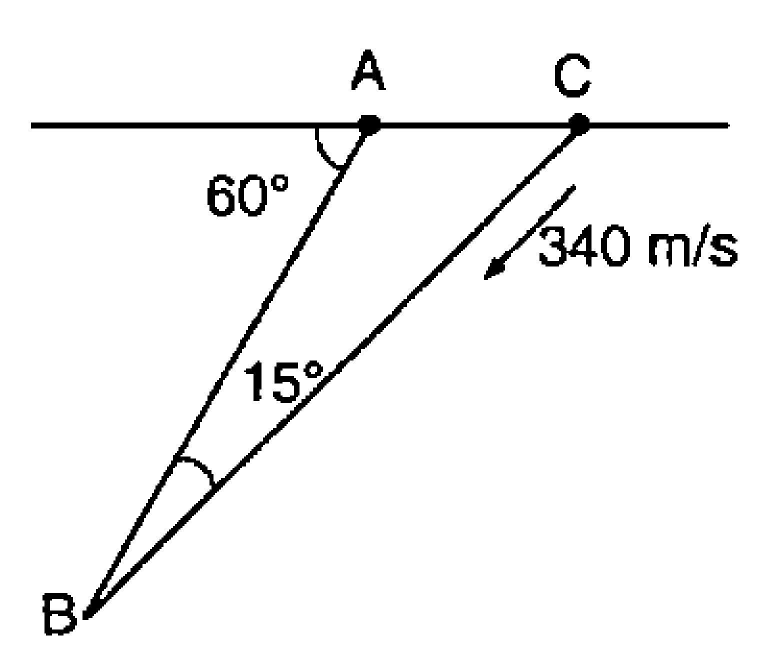
$$x = V_2 \times 12 = 10 \times 12 = 120$$

Sustituyendo en (1) :

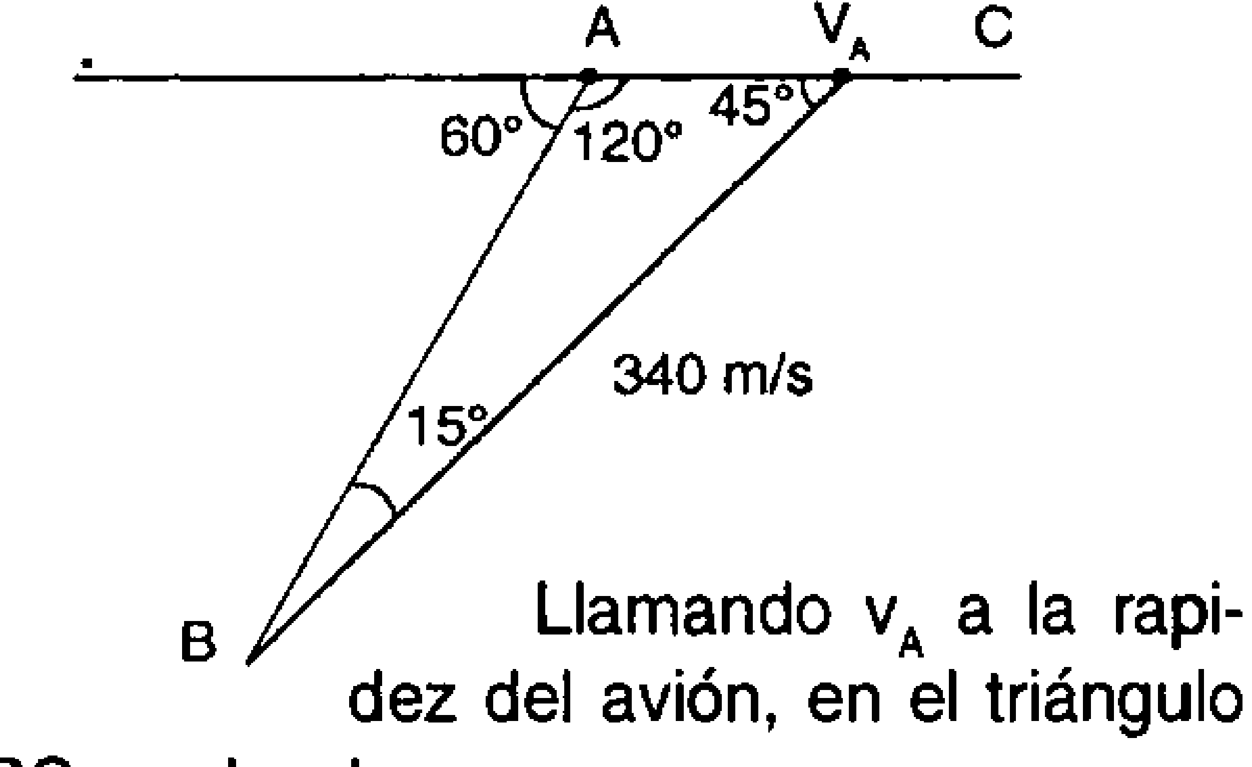
$$120 = (V_3 + 10)3 \quad , \text{ de donde:}$$

Rpta.: $V_3 = 30 \text{ m/s}$

PROBLEMA 26. Un avión cuando está en un punto A es visto por un observador en tierra en el punto B, pero el ruido es percibido cuando el avión llega a C. Si la rapidez del sonido es 340 m/s, calcular la rapidez del avión. (según la figura)



RESOLUCIÓN : Calculando los ángulos del triángulo formado.



Llamando v_A a la rapidez del avión, en el triángulo ABC, por ley de senos:

$$\frac{v_A}{\text{sen } 15°} = \frac{340}{\text{sen } 120°}$$

$$\frac{v_A}{\text{sen } 15°} = \frac{340}{\text{sen } 60°}$$

$$v_A = \frac{340 \text{ sen } 15°}{\text{sen } 60°} = \frac{340 \times 0{,}26}{0{,}87}$$

Rpta.: $V_A = 101{,}6 \text{ m/s}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos lugares A y B están separados por 100 km. De A sale una motocicleta hacia B y demora 4 horas en llegar. De B sale otra motocicleta hacia A y demora 5 horas en llegar. Calcular:

a) ¿A qué distancia de A se cruzan?
b) ¿Cuánto tiempo después que partieron?

Rpta.: a) 55,2 km
b) 2,22 h

2. Dos personas van una al encuentro de la otra por una misma vía recta, con la velocidad de 4 km/h. Una de ellas suelta un perro que corre al encuentro de la otra a la velocidad de 10 km/h. La distancia que los separaba en el momento de partir era de 30 km. ¿Cuál será la distancia que los separa cuando el perro encuentra a la otra persona?

Rpta.: 12,86 km

3. Dos ciclistas parten de un mismo punto en sentido contrario, uno a 40 km/h y el otro a 50 km/h. Al cabo de 5 horas, ¿qué distancia los separará?

Rpta.: 450 km

4. Dos móviles avanzan por vías paralelas y en sentidos opuestos. Si la dis-

http://librosysolucionarios.net

tancia entre ellos inicialmente es "a" y las velocidades son "x" e "y" m/s, respectivamente ¿Cuál será la distancia que los separa al cabo de "t" segundos?

Rpta.: $t = \pm\left[a - (x + y)t\right]$

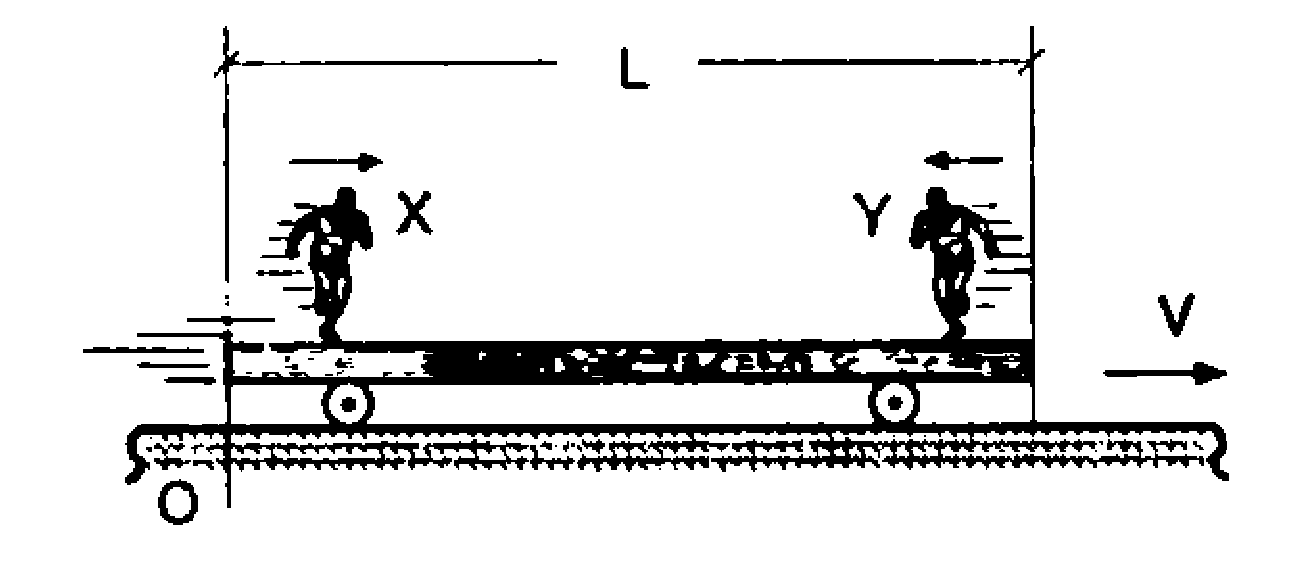
5. La distancia Tierra-Sol es aproximadamente $15 . 10^{10}$ m. Estando alineados Sol-Tierra-Luna, un aparato de radar envía una señal a la Luna y a los 2 s se oye el eco. La velocidad de la señal es de $3 . 10^{9}$ m/s. Calcular la distancia Luna-Sol.

Rpta.: $15{,}3 . 10^{10}$ m

6. Un hombre escuchó una explosión en el mar dos veces, con una diferencia de 15 s, ya que el sonido producido por la explosión se propaga por el aire y por el agua. ¿A qué distancia del punto de explosión estaba el hombre sabiendo que la velocidad del sonido en el aire es de 340 m/s y en el agua 1 400 m/s ?

Rpta.: d = 6 676,36 m

7. Una plataforma de longitud "L" parte de "0" (inicialmente el extremo izquierdo coincide con "0") con una velocidad "V", en ese mismo instante parten de ambos extremos dos hombres con velocidades constantes de "X" e "Y", respectivamente. Hallar a qué distancia de "0" se producirá el encuentro de ambos hombres.



X e Y son velocidades con respecto a la plataforma.

V es la velocidad de la plataforma con respecto a la tierra.

Rpta.: $d = \dfrac{L(V + X)}{X + Y}$

8. Un alumno de la Universidad de Li-ma está de vacaciones en Jauja. Cierto día, en determinado instante, ve una centella (luz en el cielo) y 5 segundos después escucha el sonido (trueno). Calcular la distancia que había entre el alumno y el lugar donde se produjo la centella, si el sonido tiene una velocidad de 340 m/s.

Rpta.: 1 700 m.

9. Un motociclista controla que pasa 2 postes cada 5 s, los postes están separados en 50 metros. ¿Cuál es la velocidad del motociclista?

Rpta.: d = 72 km / h

10. Un hombre rana es impulsado por un motor que le da una velocidad de 5 m/s en dirección perpendicular a la corriente del agua de un río de 40 m de ancho, las aguas del río van a 1 m/s. ¿Cuál es la velocidad resultante del hombre rana; cuál es el tiempo que demora en cruzar el río y cuál la distancia que se desvía con la normal del río?

Rpta.: 5,1 m/s ; 8 s ; 8 m

11. Dos móviles parten de "A" y "B" que en línea recta están a una distancia "d". La velocidad de A es los 2/3 de la velocidad de B. ¿Cuál es el tiempo que demoran en encontrarse, en función de "d" y V_B

Rpta.: $t = \dfrac{(3/5)\,d}{V_B}$

MOVIMIENTO VARIADO

Cualquiera que sea la trayectoria del móvil (rectilínea, curvilínea, circunfe-rencial, parabólica, etc.), en el movimiento variado siempre debe distinguirse el "movimiento variado M.V." y el "movimiento uniformemente variado M.U.V."

http://librosysolucionarios.net

MOVIMIENTO VARIADO (M.V.)

Es aquel movimiento que no es uniforme. Su velocidad varía desordenadamente cuando transcurre el tiempo.

VELOCIDAD MEDIA

Es la velocidad constante que debería tener un móvil para recorrer el mismo espacio recorrido con velocidad variable, en el mismo tiempo.

$$V_m = \frac{d_T}{t_T} \quad ó \quad V_m = \frac{d_1 + d_2 + \ldots}{t_1 + t_2 + \ldots}$$

Ejemplo 1: Un auto viaja de Lima a Trujillo en 6 horas. Si la distancia es de 600 km. ¿Cuál será la velocidad media?

RESOLUCIÓN : $V_m = \frac{500\ km}{6\ h}$

Rpta.: $V_m = 83{,}33$ km/h

La velocidad es media porque tiene que comprenderse que:

1. El auto partió del reposo, es decir, de velocidad igual a 0.
2. En el trayecto hay rectas, subidas y bajadas; habrá momentos en que la velocidad es muy inferior a 83,33 km/h y habrá momentos en que la velocidad será muy superior a 83,33 km/h; el caso es que en promedio la velocidad que desarrolla el auto es 83,33 km/h.

Ejemplo 2. Un móvil recorrió la primera mitad del camino a 25 km/h y la segunda mitad a 50 km/h. ¿Cuál es su velocidad media?

RESOLUCIÓN : $V_m = \frac{d_T}{t_T}$;

pero: $d_T = d_1 + d_2$

$d_T = V_1 t_1 + V_2 t_2$

Si la primera mitad la recorre en el tiempo "2 t", la segunda mitad en el tiempo "t"

$$d_T = 25\ km/h \times 2\ t + 50\ km/h \times t$$

y : $t_T = t_1 + t_2$ esto es:

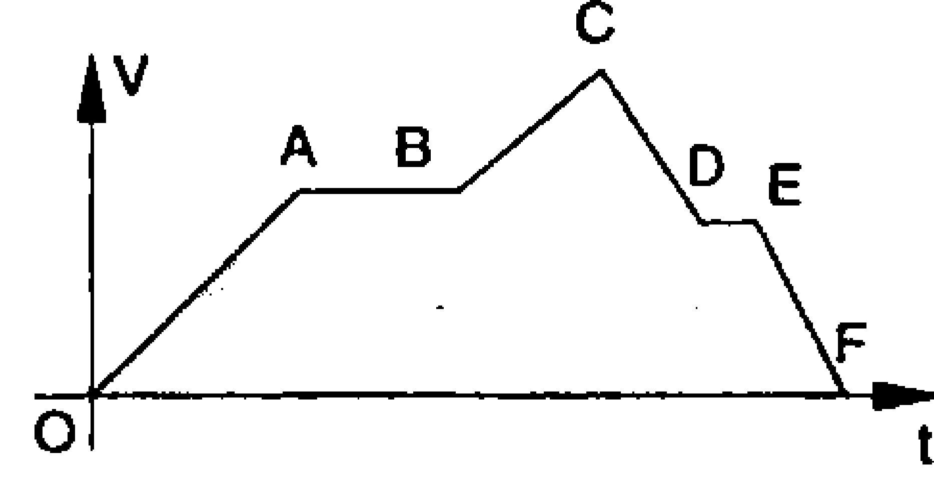
$$t_T = 2t + t = 3t$$

$$V_m = \frac{25\ km/h \times 2\ t + 50\ km/h \times t}{3\ t}$$

$$V_m = \frac{100\ km/h \times t}{3\ t}$$

Rpta.: $V_m = 33{,}33$ km / h

Solución gráfica del espacio recorrido por un móvil con velocidad variada (Velocidad-Tiempo).



La gráfica indica que el móvil varía constantemente su velocidad. Por ejemplo, partiendo de O, los tramos OA y BC representan que el móvil aumenta su velocidad, los tramos AB y DE representan que el móvil tiene una velocidad pareja o constante, y los tramos CD y EF que el móvil disminuye su velocidad hasta pasar en F.

MOVIMIENTO RECTILÍNEO UNIFORMEMENTE VARIADO M.R.U.V.

Es aquel movimiento que experimenta un móvil en linea recta y se ca-racteriza por que la velocidad cambia o experimenta variaciones iguales en in-tervalos de tiempos iguales.
Sea por ejemplo un móvil que se desplaza así:

- Arrancando del reposo: $V_i = 0$
- Al final del 1er. segundo: $V_1 = 2$ m / s
- Al final del 2do. segundo: $V_2 = 4$ m / s
- Al final del 3er. segundo: $V_3 = 6$ m / s
- Al final del 4to. segundo: $V_4 = 8$ m / s

http://librosysolucionarios.net

Como se ve, va aumentando su velocidad 2 metros por segundo en cada segundo. El móvil puede ir aumentando o disminuyendo su velocidad en cada segundo que pasa.

ACELERACION $\vec{a}$: Es una medida del movimiento. Es una una cantidad vectorial que mide el cambio o variación de la velocidad por intervalo de tiempo.
En forma matemática se calcula median te la siguiente fórmula:

$$a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V_f - V_i}{f}$$

Donde ΔV es el cambio o variación de la velocidad.

$$\Delta V = V_f - V_i$$

Ejemplo: ¿Qué nos expresa un valor de aceleración $a = 2\ m/s^2$?

Nos indica que la velocidad del móvil cambia en 2 m/s por cada segundo.
"En todo M.R.U.V. la aceleración se mantiene constante"

VELOCIDAD FINAL CON VELOCIDAD INICIAL

De la última fórmula de la aceleración se despeja la V_f y se tiene:

$$V_f = V_i + a\,t$$

Si el móvil aumenta su velocidad su aceleración es positiva (+ a), pero si el móvil disminuye su velocidad la aceleración es negativa (- a) por eso la fórmula se generaliza así:

$$V_f = V_i \pm a\,t$$

UNIDADES

Las unidades en el SI son:

V : m/s ; t : s ; a : m/s^2

Pero tambien puede usarse:

V : km/h ; t : h ; a : km/h^2

LA ACELERACION ES UNA MAGNITUD VECTORIAL

La aceleración es un vector que tiene la dirección del vector cambio de velocidad ΔV. El sentido puede ser positivo, si provoca un aumento de la velocidad; negativo, si provoca una disminución de la velocidad. Su magnitud es el cociente entre la variación de la velocidad y el tiempo. La aceleración $\vec{a}$ es codirigida con la variación de velocidad $\Delta \vec{V}$ (a ΔV)

$$\vec{a} = \frac{\Delta \vec{V}}{t}$$

Ejemplo 1. A las 8 h 30 min 45 s, la rapidez de un automóvil es de 50 km/h. A las 8 h 30 min 51 s es de 70 km/h Calcular la aceleración. El móvil tiene movimiento rectilíneo uniformemente variado M.R.U.V.

RESOLUCIÓN : $t = t_f - t_i$

$$t = 8\,h\ 30\,min\ 51\,s - 8\,h\ 30\,min\ 45\,s$$

$$t = 6\,s$$

$$\Delta V = V_f - V_i = 70\,km/h - 60\,km/h$$

$$\Delta V = 10\,km/h = 2{,}78\,m/s$$

Sabiendo que: $a = \frac{\Delta V}{t}$

Sustituyendo los datos se tiene el valor escalar:

Rpta.: $a = \frac{2{,}78\,m/s}{6\,s} = 0{,}47\,m/s^2$

Ejemplo 2. Un auto va a una rapidez de 8 m/s y 4 s después, a 12 m/s. ¿Cuál es la aceleracion? El móvil tiene M.R.U.V.

RESOLUCIÓN : $V_1 = 8\,m/s$; $t = 4\,s$
$V_2 = 12\,m/s$; $a = ?$

$$a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V_2 - V_1}{t}$$

$$a = \frac{12 - 8}{4} = \frac{4}{4}$$

Rpta.: $a = 1\ m/s^2$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 3. Un móvil entra en una pendiente a una velocidad de 36 km/h, y como consecuencia de la pendiente se acelera con 0,5 m/s². La bajada tarda 8 s. ¿Cuál es su velocidad al final de la pendiente? El móvil tiene M.R.U.V.

RESOLUCIÓN : $a = \frac{V_f - V_i}{t}$

de donde: $V_f = V_i + a\,t$

sustituyendo datos:

$$V_f = 36\,km/h + 0{,}5\,m/s^2 \times 8\,s$$

$$V_i = \frac{36\,000\,m}{3\,600\,s} + 4\,m/s$$

$$V_f = 10\,m/s + 4\,m/s$$

Rpta.: $V_f = 14\,m/s$

Ejemplo 4. Un auto parte del reposo y tiene un M.R.U.V. cuya aceleración es de **3** m/s². ¿Cuál será su velocidad 15 s después de la partida?

RESOLUCIÓN : $a = 3\,m/s^2$

$t = 15\,s$ $\quad V_i = 0$ $\quad V_f = ?$

Sabiendo: $V_f = V_i + a\,t$

pero: $V_i = 0$; luego: $V_f = a\,t$

Sustituyendo datos:

$$V_f = 3\,m/s^2 \,.\, 15\,s = 45\,m/s$$

Rpta.: $V_f = 45\,m/s$

Ejemplo 5. ¿Cuánto tiempo demora un móvil que parte del reposo y se mueve con M.R.U.V., con una aceleración de 9,8 m/s², en alcanzar una rapidez de 100 km/h?

RESOLUCION : $a = 9{,}8\,m/s^2$

$t = ?$ $\quad V_f = 100\,km/h$

Sabiendo que: $V_f = V_i + a\,t$

pero: $V_i = 0 \quad \therefore \quad V_f = a\,t$

de donde: $t = \frac{V_f}{a}$

Sustituyendo datos: $t = \frac{100\,km/h}{9{,}8\,m/s^2}$

$$t = \frac{100 \times 1\,000\,m/3\,600\,s}{9{,}8\,m/s^2}$$

Rpta.: $t = 2{,}83\,s$

Ejemplo 6. Un móvil pasa por un punto con M.R.U.V. En un momento su velocidad es de 30 m/s y 45 después es de 10 m/s . Calcular su aceleración.

RESOLUCIÓN : $V_i = 30\,m/s$,

$V_i = 30\,m/s$, $\quad a = ?$ $\quad t = 45\,s$

$V_f = 10\,m/s$

Sabiendo : $a = \frac{V_f - V_i}{\Delta t}$

$$a = \frac{10\,m/s - 30\,m/s}{45\,s} = \frac{-20}{45} \times \frac{m}{s^2}$$

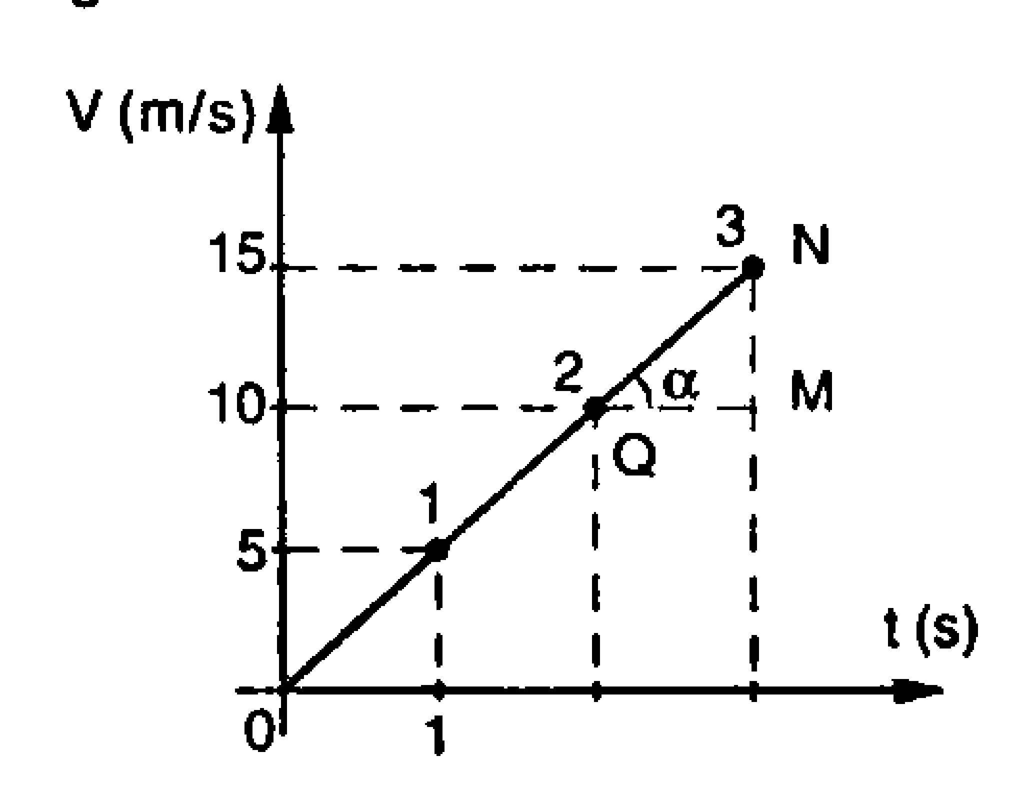
Rpta.: $a = -0{,}44\,m/s^2$

quiere decir que el móvil está frenando.

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL M.R.U.A.

Sea: $a = 5\,m/s^2$

La aceleración indica que el móvil está aumentando de velocidad, en este caso 5 m/s en cada segundo.



http://librosysolucionarios.net

$V = 5 m/s$, $t = 1 s$ } punto 1

$V = 10 m/s$, $t = 2 s$ } punto 2

$V = 10 m/s$, $t = 2 s$ } punto 2

El valor de la aceleración es igual a la tangente del ángulo de inclinación de la recta (v - t) con el eje donde está el tiempo.

$$tg\,\alpha = \frac{MN}{QM} \Rightarrow tg\,\alpha = \frac{\Delta V}{\Delta t} \qquad (1)$$

pero sabemos que: $a = \frac{\Delta V}{\Delta t}$ (2)

Igualando (1) y (2) : $\boxed{a = tg\,\alpha}$

ESPACIO "e" RECORRIDO CON VELOCIDAD INICIAL Y ACELERACIÓN:

DEDUCCIÓN MATEMÁTICA

Cuando un móvil recorre un espacio con velocidad variada, tiene una velocidad inicial y una velocidad final. Se ha dicho que: "la variación de la velocidad que experimenta un móvil en la unidad de tiempo se llama aceleración"; luego, para calcular el espacio recorrido por un móvil, cuando ese espacio es medido desde un punto en que el móvil lleva una velocidad inicial, bastará multiplicar la velocidad media por el tiempo, así:

$$e = V_m t \qquad (I)$$

pero: $V_m = \frac{V_i + V_f}{2}$

y : $V_f = V_i \pm a t$; luego:

$$V_m = \frac{V_i + V_i \pm at}{2}$$

esto es: $V_m = V_i \pm \frac{1}{2} a t$

sustituyendo en (I) :

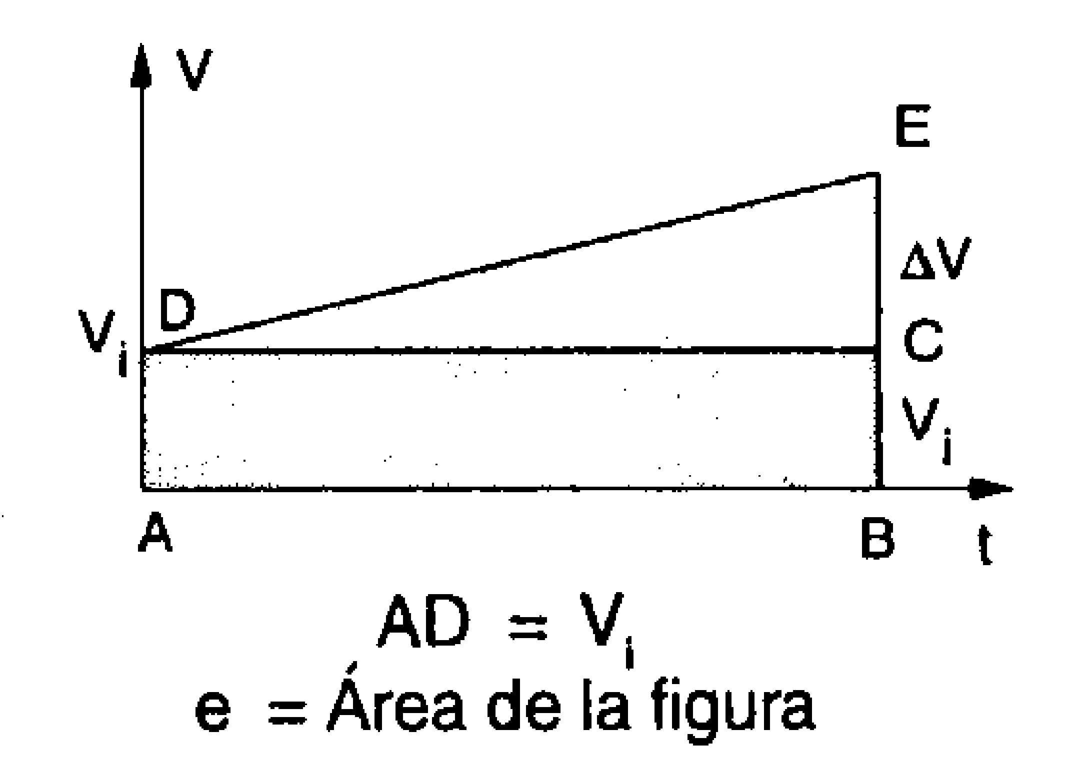
$$e = \left(V_i \pm \frac{1}{2} a t\right) t$$

$$\boxed{e = V_i t \pm \frac{1}{2} a t^2}$$

El signo (+) se usa cuando la aceleración es positiva; el signo (-) se usa cuando la aceleración es negativa o retar-dataria.

Deducción Gráfica:

Ya se ha visto que el espacio recorrido por un móvil con movimiento variado, es un área. Del mismo modo es un área cuando el M.R.U.V. es con velocidad inicial.



$AD = V_i$

e = Área de la figura

es decir:

$$e = \text{Área}\,\square_{ABCD} + \text{Área}\,\triangle_{DCE}$$

$$\therefore\ e = DA \times AB + \frac{1}{2} CE \times DC \qquad (1)$$

Pero: $DA = V_i$; $AB = t$;

$CE = \Delta V = a t$; $DC = t$

Sustituyendo en (1) :

$$\boxed{e = V_i t \pm \frac{1}{2} a t^2}$$

Pero cuando $V_i = 0$

$$\boxed{e = \frac{1}{2} a t^2}$$

Ejemplo 1. Un móvil se mueve con velocidad uniforme a 23 m/s. Entra a una bajada la cual le imprime un M.R.U.V. con una aceleración de 0,25 m/s² y la recorre en 33 s. Calcular la longitud de la bajada.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN :

$V_1 = 23\ m/s$

$t = 33\ s$

$= 0{,}25\ m/s^2$

$_ = ?$

A B C

Sea "L" la longitud de la bajada:

$$L = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

Sustituyendo los datos:

$$L = 23 \times 33 + \frac{1}{2} \times 0{,}25\,(33)^2$$

Rpta.: L = 895,125 m

Ejemplo 2. Al resbalarse por un tobogán con una aceleración de 0,9 m/s², se demora 3,8 s. ¿Qué longitud tiene el tobogán?

RESOLUCIÓN : $a = 0{,}9\ m/s^2$

$t = 3{,}8\ s$

$L = ?$

Se sabe que: $L = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$

pero: $V_i = 0$; luego: $L = \frac{1}{2} a t^2$

Sustituyendo valores: $L = \frac{1}{2} \times 0{,}9 \times 3{,}8$

Rpta.: L = 6,498 m.

Ejemplo 3. Dos autos están separados en 90 m uno delante del otro. Parten del reposo, en el mismo sentido y en el mismo instante, el primero con una aceleración de 5 m/s² y el segundo con una aceleración de 7 m/s².

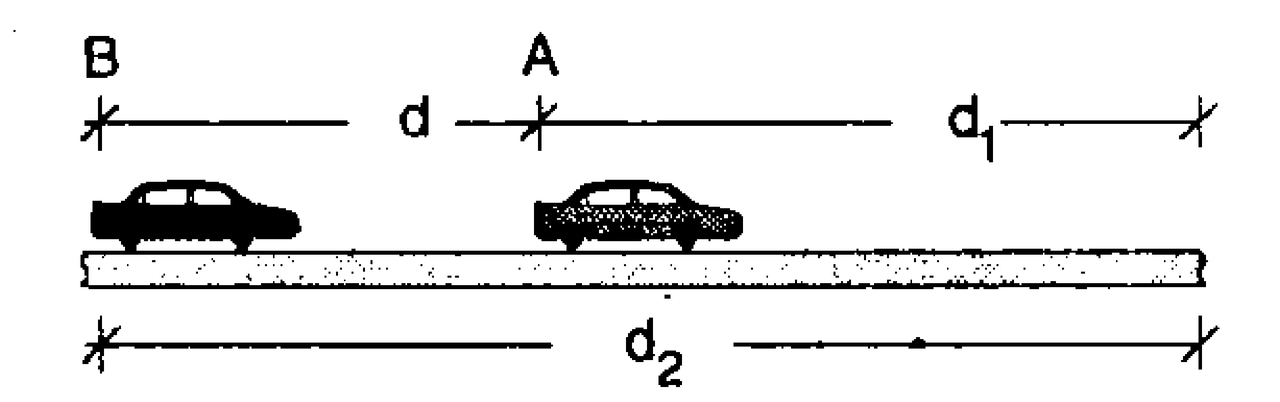
¿Al cabo de cuánto tiempo el segundo alcanza al primero? (Se pone paralelo).

RESOLUCIÓN :

$e = 90\ m \qquad t = ?$

$a_1 = 5\ m/s^2 \qquad a_2 = 7\ m/s^2$

e_1 espacio recorrido por el primero
e_2 espacio recorrido por el segundo



Como para ambos la velocidad inicial es cero:

$$e_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \qquad (1)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \qquad (2)$$

Restando (2) - (1) :

$$e_2 - e_1 = \frac{1}{2} t^2 (a_2 - a_1)$$

pero: $e_2 - e_1 = e$

$$\therefore \quad e = \frac{1}{2} t^2 (a_2 - a_1)$$

de donde: $t = \sqrt{\dfrac{2e}{a_2 - a_1}}$

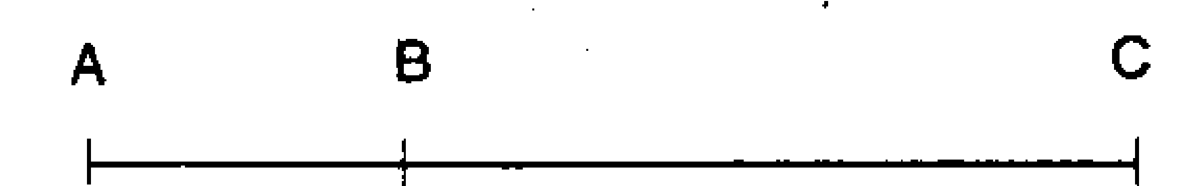
za con una velocidad uniforme de 80 km/h. Al aplicar los frenos desacelera a razón de 5 m/s². ¿A qué distancia del punto en que el chofer vió a la persona se detendrá el coche?

RESOLUCIÓN :

$$V = 80\ km/h = 22{,}22\ m/s$$

$a = -5\ m/s^2 \qquad e = ?$

$t_r = 0{,}60\ s$



Mientras reacciona y durante los 0,60 segundos el auto sigue la marcha a 80 km/h.

Cálculo del espacio que recorre en ese tiempo y a esta velocidad.

$$e_{AB} = V \times t = 22{,}\widehat{2}\ m/s \times 0{,}60\ s$$

http://librosysolucionarios.net

$$e_{AB} = 13{,}32\ m$$

En este instante recién el móvil empieza a frenarse y su velocidad es retardada. En este instante la velocidad de $22{,}\hat{2}$ m / s viene a ser la velocidad inicial (V_i)

$$V_f^2 = V_i^2 - 2\,a\,e_{AB}$$

Como el móvil se detiene: $V_f = 0$

Luego: $0 = V_i^2 - 2\,a\,e_{BC}$

de donde: $e_{AB} = \dfrac{V_i^2}{2a}$, con los datos:

$$e_{AB} = \frac{(22{,}\hat{2})^2}{2 \times 5} \Rightarrow e_{AB} = 49{,}38\ m.$$

Se detendrá a:

$$e_{AB} + e_{AB} = 13{,}33\ m + 49{,}38\ m$$

Rpta.: $e = 62{,}71$ m

RESUMEN DE FÓRMULAS DEL M.R.U.V.

$$Vm = \frac{e}{t} \qquad Vm = \frac{V_1 + V_2}{2}$$

$$a = \frac{V_f - V_i}{t} \qquad V_f = V_i \pm a\,t$$

$$e = V_i\,t \pm \frac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad V_f^2 = V_i^2 \pm 2ae$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un auto de carrera parte del r eposo y alcanza su máxima velocidad después de recorrer 300 m en 3,5 s. ¿Qué espacio reco-rrió durante los últimos 1,5 segundos?

RESOLUCIÓN :

$e_1 = 300\ m \qquad e_2 = ?$

$t_1 = 3{,}5\ s$

$t_2 = 1{,}5\ s$

Espacio recorrido durante los 2 primeros segundos:

$$e = V_i\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

pero: $V_i = 0 \ \therefore\ e = \dfrac{1}{2}\,a\,t^2 \qquad (I)$

- Cálculo de la aceleración "a" :

Se calcula primero la velocidad final al cubrir los 300 m

$$e_1 = \frac{V_f + V_i}{2} \times t$$

$$300\ m = \frac{V_f + 0}{2} \times 3{,}5\ s$$

de donde: $V_f = 171{,}43\ m/s$

Por otro lado: $V_f = a\,t$

Luego: $a = \dfrac{V_f}{t}$

$$a = \frac{171{,}43\ m/s}{3{,}5\ s} = 48{,}98\ m/s^2$$

Sustituyendo valores en (I) para calcular lo recorrido en los dos primeros segundos:

$$e = \frac{1}{2}\,.\ 48{,}98\ m/s^2\,(2\ s)^2$$

$$e = 97{,}96\ m$$

Luego el espacio recorrido en los 1,5 segundos finales será la diferencia:

$$\Delta e = 300\ m - 97{,}96\ m$$

Rpta.: $\Delta e = 202{,}04$ m

PROBLEMA 2. Un auto parte del reposo y recorre 50 m en 3 segundos con aceleración uniforme. ¿En qué tiempo recorrerá 100 m ?

RESOLUCIÓN :

$e_1 = 50\ m \qquad t_2 = ?$

$e_2 = 100\,m \qquad t_1 = 3\,s$

- Cálculo de aceleración:

De la expresión: $e = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$

Pero $V_i = 0$, luego: $e = \frac{1}{2} a t^2$

de donde: $a = \frac{2e}{t^2}$

$$a = \frac{2 \times 50\,m}{(3\,s)^2} = 11{,}11\,m/s^2$$

Por otro lado: $e = \frac{1}{2} a t^2$

de donde: $t = \sqrt{\frac{2e}{a}}$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 100\,m}{11{,}11\,m/s^2}} = 4{,}24\,s$$

PROBLEMA 3. Un móvil de laboratorio tiene una rapidez inicial de 10 cm/s recorriendo 35 cm durante el 3er. segundo. En 10 segundos adicionales, ¿qué espacio habrá recorrido?

RESOLUCIÓN : $V = 10\,cm/s$

$e = 35\,cm$

$e' = ? \qquad t = 10\,s$

Se calculan las velocidades finales terminando el 2do y el 3er segundos de recorrido, según la siguiente expresión:

$$V_f = V_i + a\,t$$

Al final del 2do. segundo:

$$V_2 = 10\,cm/s + a \times 2\,s \qquad (1)$$

Al final del 3er. segundo:

$$V_3 = 10\,cm/s + a \times 3\,s \qquad (2)$$

sumando (1) y (2) :

$$V_2 + V_3 = 20\,cm/s + 5a.s \qquad (I)$$

Según el problema durante el 3er. segundo recorrió 35 m , esto es con velocidad media, así:

$$\frac{V_2 + V_3}{2} \times t = e$$

$$\frac{V_2 + V_3}{2} \times 1\,s = 35\,cm$$

de donde: $V_2 + V_3 = 70\,cm/s$

Sustituyendo en (1) :

$$70\,cm/s = 20\,cm/s + 5a\,s$$

de donde: $a = 10\,cm/s^2$

- Cálculo de la velocidad en 1 s al terminar el 3er. segundo, tomando la velocidad inicial el que tenía al terminar el 2do. segundo.

$$V_3 = V_1 + a\,t$$

$$V_3 = 10\,\frac{cm}{s} + 10\,\frac{cm}{s^2} \times 3\,s$$

$$V_3 = 40\,cm/s$$

- Cálculo del espacio recorrido en los 10 segundos siguientes, tomando como velocidad inicial la que tenía al terminar el 3er. segundo, es decir:

$$e = V_3 t + \frac{1}{2} a t^2$$

al terminar el 3er. segundo, es decir:

$$e = V_3 t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$e = 40\,\frac{cm}{s}\,(10\,s) + \frac{1}{2} \times 10\,\frac{cm}{s^2}\,(10\,s)^2$$

Rpta.: $e = 900\,cm$

PROBLEMA 4. Un móvil inicia su movimiento con una velocidad de 50 pie / s. Los 10 primeros se- gundos se le da una aceleración negativa de 5 pie / s²; los 7 segundos siguientes, una aceleración negativa de 3 pie / s². Calcular qué espacio, en pies, se alejó el móvil de su punto de partida.

RESOLUCIÓN :

$V_1 = 50\,pies/s \qquad t_1 = 10\,s$

http://librosysolucionarios.net

$a_1 = -5\,m/s \qquad t_2 = 7\,s$

$a_2 = 3\,m/s \qquad e = ?$

Espacio recorrido en el primer tramo:

$$e = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$e_1 = 50\,\frac{pie}{s}(10\,s) + \frac{1}{2}\left(-5\,\frac{pie}{s^2}\right)(10\,s)^2$$

efectuando: $e_1 = 250$ pies (A)

Cálculo de la velocidad al finalizar los 10 primeros segundos:

$$V_f = V_i + a t$$

$$V_f = 50\,\frac{pie}{s} + \left(-5\,\frac{pie}{s^2}\right)(10\,s)$$

efectuando: $V_f = 0$

Lo que quiere decir que a partir de este momento para el segundo tramo, el móvil empieza a regresar:

$$e_2 = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

pero aquí la $V_i = 0$ y la aceleración a es negativa, luego:

$$e_2 = \frac{1}{2}\left(-3\,\frac{pie}{s^2}\right)(7\,s)^2 = -73{,}5 \text{ pies}$$

El signo (-) indica que el móvil ha regresado Luego el espacio al punto de partida será :

$$e = e_1 + e_2 = 250 \text{ pie} + (-73{,}5 \text{ pie})$$

Rpta.: $e = 176{,}5$ pie

PROBLEMA 5. Un auto lleva una velocidad de 10 m/s, se aplican los frenos y empieza una desaceleración de 3 m/s². Calcular:

a) Tiempo que demora en detenerse.
b) Espacio que recorre hasta pararse.

RESOLUCIÓN :

$V_i = 10\,m/s \qquad t = ?$

$a = -3\,m/s \qquad e = ?$

$V_f = 0$

a) Sabiendo que: $V_f = V_i + a t$

pero: $V_f = 0$

luego: $0 = V_i + a t$

de donde: $t = \dfrac{-V_i}{a}$

sustituyendo datos: $t = \dfrac{-10\,m/s}{-3\,m/s^2}$

Rpta.: $t = 3{,}33$ s

b) Conociendo el tiempo que recorre hasta detenerse:

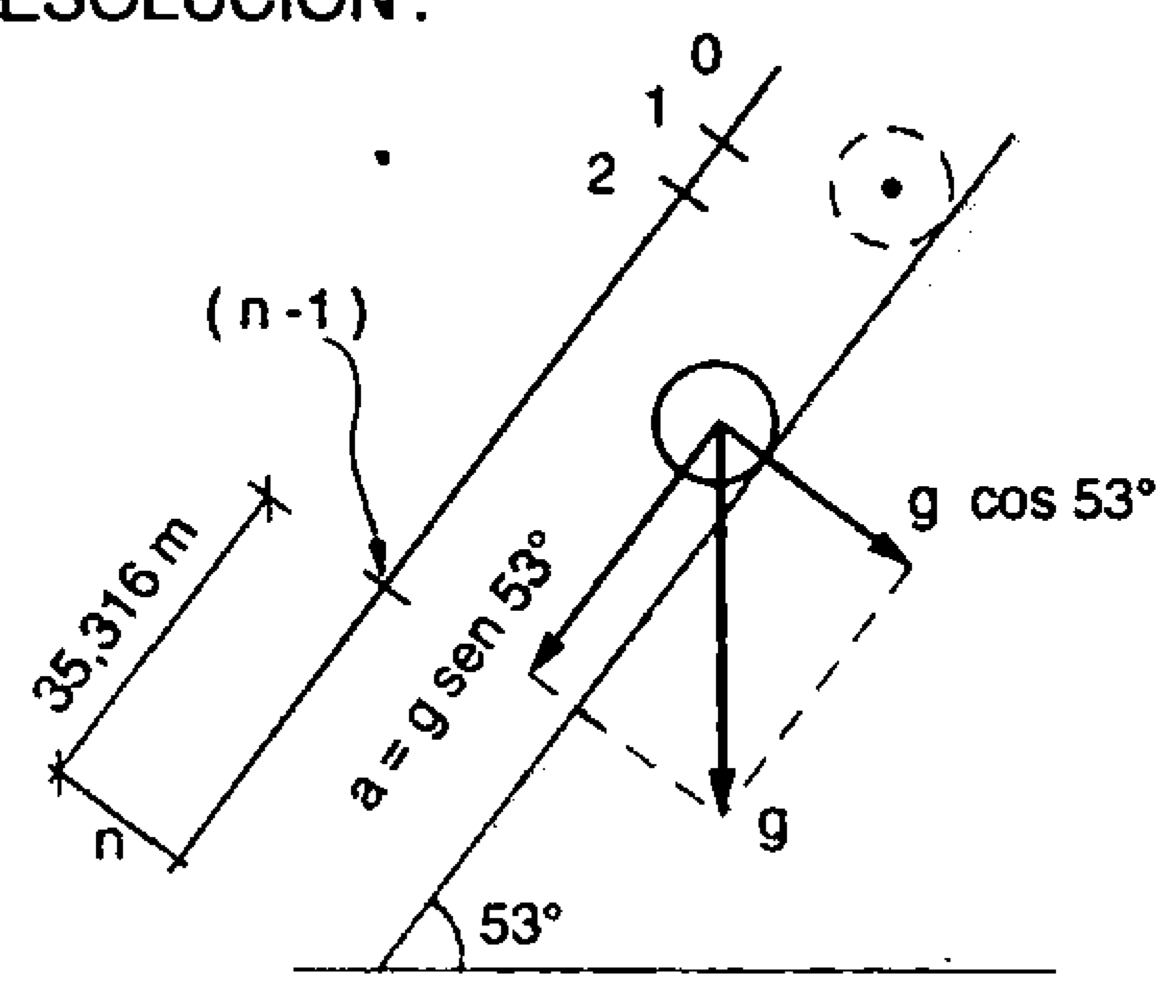
$$e = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

$$e = 10\,\frac{m}{s}(3{,}33\,s) + \frac{1}{2}\left(-3\,\frac{m}{s^2}\right)(3{,}33\,s)^2$$

Rpta.: $e = 16{,}67$ m

PROBLEMA 6. Un cuerpo recorre en el "n" segundo, un espacio de 35,316 m. Hallar "n", si el cuerpo desciende por un plano inclinado que hace un ángulo de 53° con la horizontal. Hallar el "n" segundo quiere decir hallar si el hecho se produce en el 1ro., 2do., 3er. etc., segundo.

RESOLUCIÓN :



En el "n" segundo recorre:

$$e_n - e_{n-1} = 35{,}326 \text{ m} \qquad (I)$$

Por otro lado:

$$e_n - e_{n-1} = \frac{1}{2}a(n)^2 - \frac{1}{2}a(n-1)^2$$

$$e_n - e_{n-1} = \frac{1}{2}a(n^2 - n^2 + 2n - 1)$$

$$e_n - e_{n-1} = \frac{1}{2}(g\,\text{sen}\,53°)(2n - 1)$$

como: $e_n - e_{n-1} = 35{,}316$ m , se tiene:

$$35{,}316 = \frac{1}{2}\times\frac{4}{5}(9{,}81)(2n - 1)$$

$$35{,}316 = 3{,}924(2n - 1)$$

$$(2n - 1) = \frac{35{,}316}{3{,}924}$$

$$2n - 1 = 9$$

Rpta.: $n = 5$ s

Esto quiere decir que durante el 5º segundo el cuerpo se desplaza 35,316 m

PROBLEMA 7. Si dos móviles parten de un mismo punto en direcciones perpendicu lares entre sí, con aceleraciones de 6 y 8 m/s², ¿qué tiempo pasará para que estén separados 1 600 m?

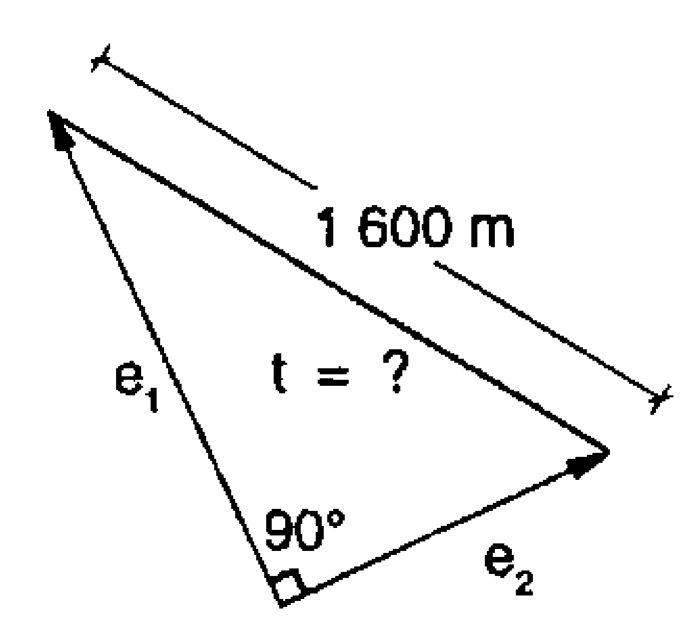
RESOLUCIÓN :

$a_1 = 6\ m/s^2$ $\quad t = ?$

$a_2 = 8\ m/s^2$

$e = 1\,600$ m

Sea la figura que representa el problema:



$$1\,600 = \sqrt{e_1^2 + e_2^2}$$

$$1\,600 = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\times 6t^2\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\times 8t^2\right)^2}$$

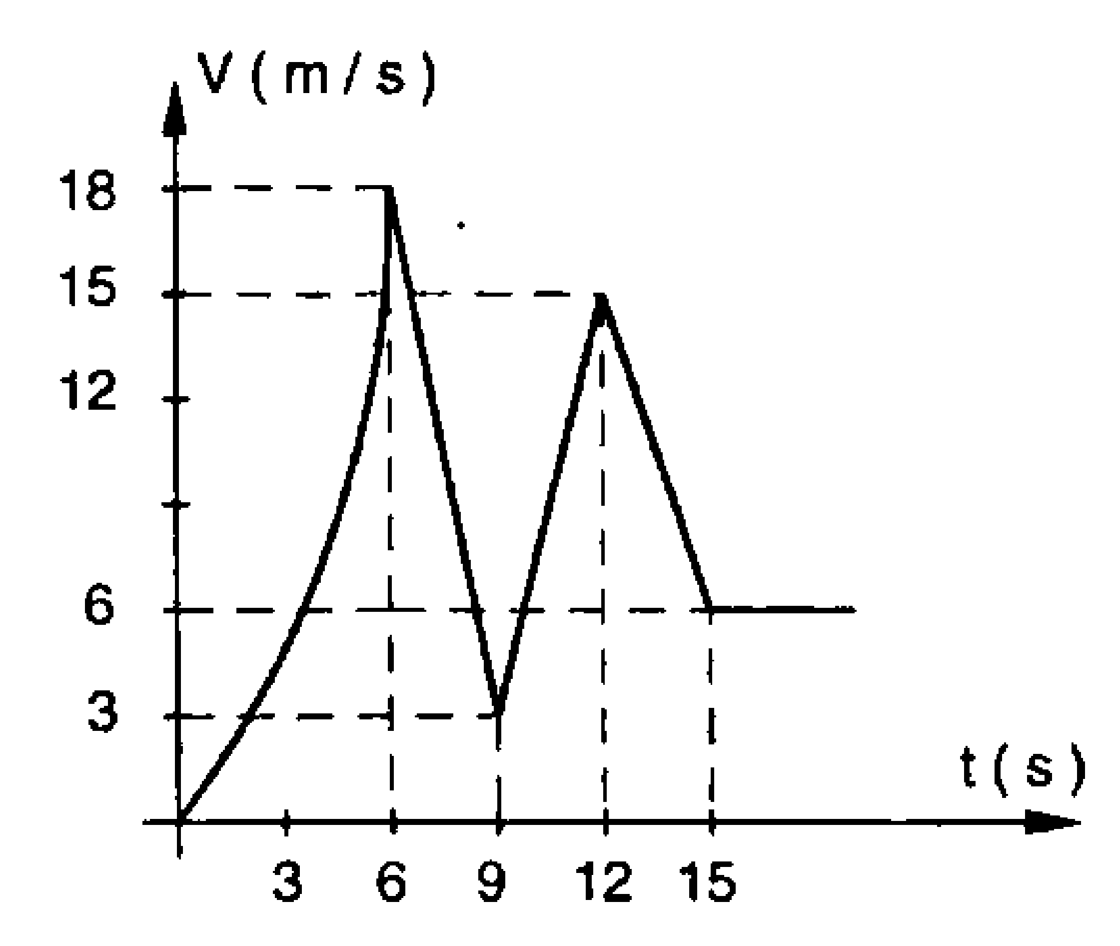
$$1\,600 = \sqrt{\frac{1}{4}\left(6^2 + 8^2\right)t^4}$$

$$1\,600 = t^2\sqrt{\frac{100}{4}}$$

$$\therefore\ t^2 = \frac{1\,600}{5}$$

Rpta.: $t = 17{,}89$ s

PROBLEMA 8. Determine la aceleración en el siguiente gráfico (Velocidad - Tiempo) entre los 12 y 15 segundos.



RESOLUCIÓN :

$$a = \frac{\Delta V}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{t_f - t_i} \qquad (1)$$

$t_f = 15$ s $\qquad V_f = 6$ m / s

$t_i = 12$ s $\qquad V_i = 15$ m / s

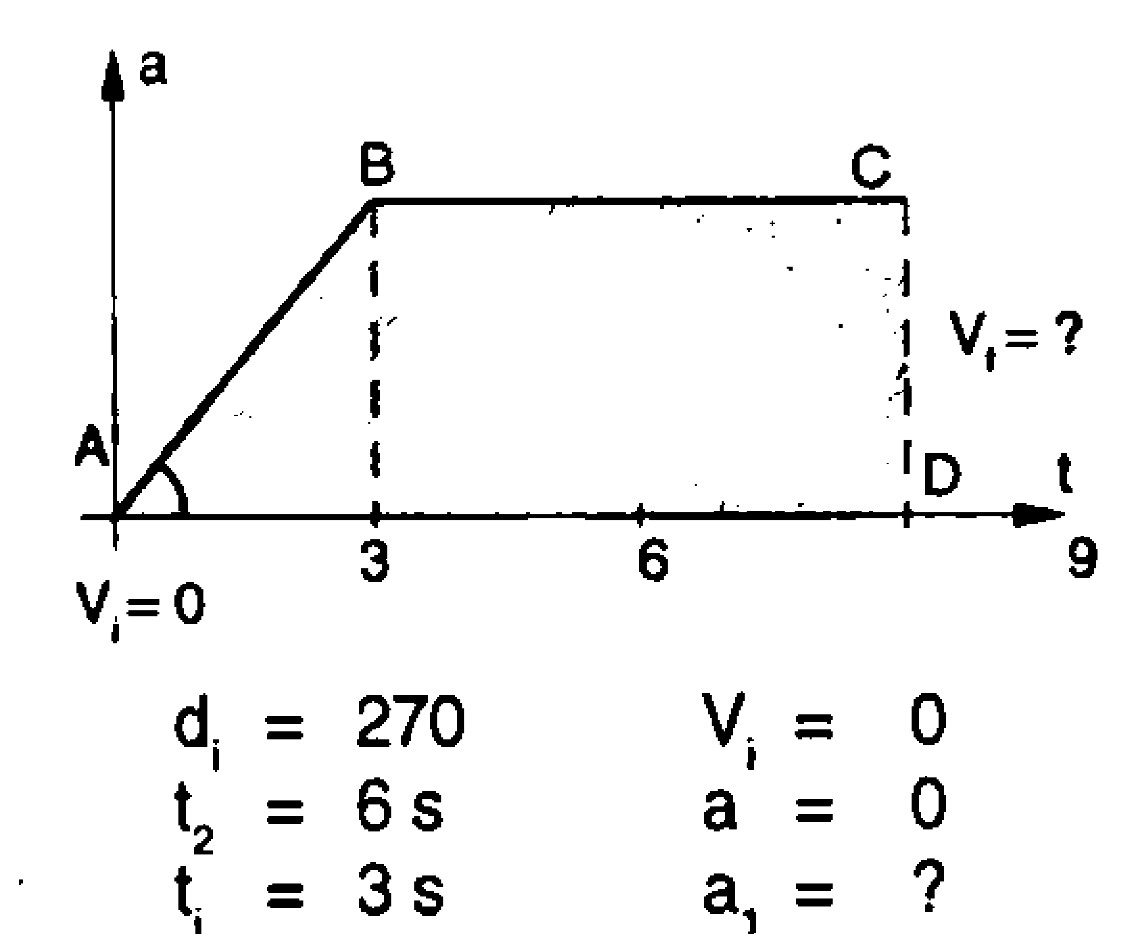
$$a = \frac{16 - 15}{15 - 12}\ m/s^2 = \frac{-9}{3}\ m/s^2$$

Rpta.: $-3\ m/s^2$

PROBLEMA 9. Un móvil parte del reposo y recorre en un trayecto recto la distancia de 270 m. Durante los 3 primeros segundos con una aceleración constante, luego con la velocidad adquirida hace nula la aceleración del móvil durante 6 s, con lo cual completa su recorrido. Hallar la aceleración que tuvo el móvil en el primer segundo

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN :



$$d_i = 270 \qquad V_i = 0$$
$$t_2 = 6\,s \qquad a = 0$$
$$t_i = 3\,s \qquad a_1 = ?$$

El espacio total recorrido es la suma de los espacios e_1 y e_2, es decir 270.

De la figura: área del trapecio ABCD:

$$270 = \left(\frac{9+6}{2}\right)V_f$$

$$\therefore V_f = 36\,m/s$$

$$0\,s < t < 3\,s:$$

$$a = tg\,\alpha = \frac{36\,m/s}{3\,s}$$

$$\therefore a = 12\,m/s^2$$

PROBLEMA 10. Hallar el espacio total recorrido por el móvil hasta los 7 segundos, según los datos del problema anterior.

RESOLUCIÓN :

1) Distancia recorrida durante los tres primeros segundos con aceleración:

Como $V_i = 0$, entonces:

$$e_1 = +\frac{1}{2}a\,t^2$$

Como la aceleración es positiva, la distancia de avance, es positiva Sustituyendo los valores:

$$e_1 = \frac{1}{2} \times 12\,\frac{m}{s^2} \times (3\,s)^2$$

$$e_1 = 54\,m \qquad (1)$$

2) Espacio recorrido durante los 4 segundos restantes con velocidad uniforme.

- Cálculo de la velocidad al terminar el 3 er segundo:

$$V_f = V_i + a\,t$$

$$\text{Como } V_i = 0 \Rightarrow V_f = a\,t$$

Sustituyendo datos:

$$V_f = 12 \times 3 = 36\,m/s$$

Espacio recorrido con esta rapidez:

$$e = V_f\,t = 36\,\frac{m}{s} \times 4\,s$$

$$e = 144\,m \qquad (2)$$

Sumando (1) + (2):

Rpta.: $d_T = 198\,m$

Método Gráfico:

Del gráfico anterior

$$A = e = \left(\frac{4+7}{2}\right)(36)$$

$$\therefore e = 198\,m$$

Método Analítico:

$$0\,s < t < 3\,s \Rightarrow e_1 = \frac{1}{2}a\,t^2$$

$$e_1 = \frac{1}{2}(12)(3)^2 \quad \therefore \quad e_1 = 54\,m$$

$$3\,s < t < 7\,s: \Rightarrow e_2 = V\,t$$

$$e_2 = (36)(4) \quad \therefore \quad e_2 = 144\,m$$

Rpta.: $e = e_1 + e_2 = 198\,m$

PROBLEMA 11. Dos móviles parten de un mismo punto en línea recta y en el mismo sentido. El primero con una

http://librosysolucionarios.net

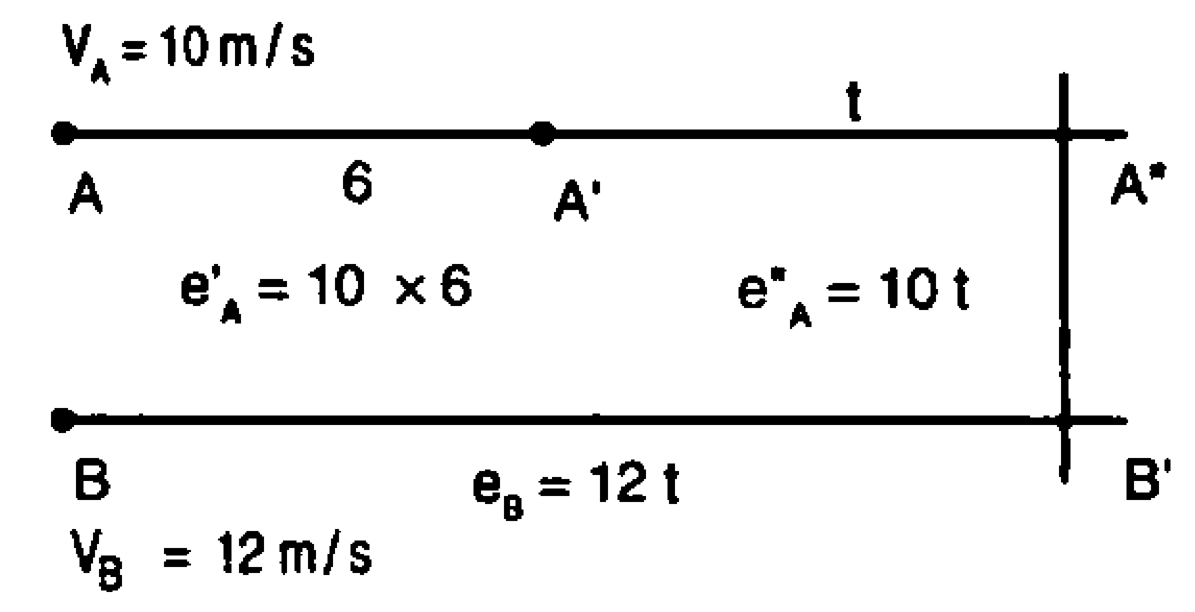
rapidez de 10 m / s, y 6 s después el segundo con una rapidez de 12 m /s. ¿En cuánto tiempo alcanza el segundo al primero y a qué distancia del punto de partida?

RESOLUCIÓN : $v_A = 10\,m/s$

$t = ?$ $v_B = 12\,m/s$

$e = ?$ $t_1 = 6\,s$

Sea la figura representativa del problema



Observando la figura: $e_B = e'_A + e''_A$

sustutuyendo datos: $12t = 10 \times 6 + 10t$

de donde $t = 30\,s$

Entonces: $e_B = 12t = 12 \times 30$

$\therefore\ e_B = 360\,m$

Rpta.: $t = 30\,s$ y $e_B = 360\,m$

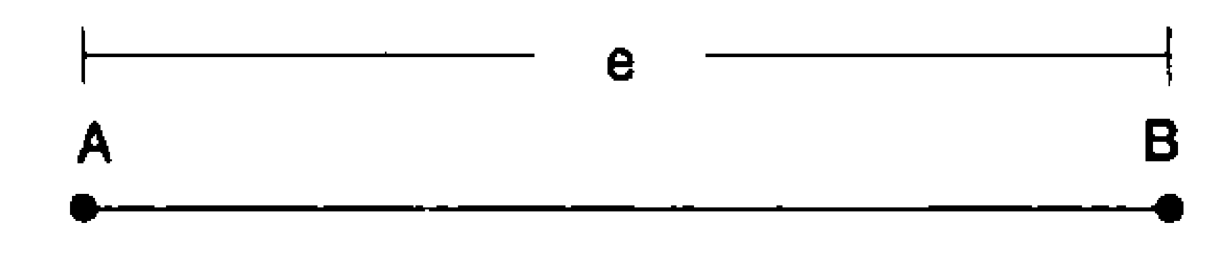
PROBLEMA 12. Con una rapidez de 5 m / s un móvil llega a su destino en un determinado tiempo. A 3 m / s se demora 6 s más. ¿Cuá l será la rapidez que debe imprimir para llegar sólo 2 s más tarde?

RESOLUCIÓN : $t_2 = t_1 + 6$

$V_1 = 5\,m/s$ $t_3 = t_1 + 2$

$V_2 = 3\,m/s$ $V_3 = ?$

Sea el gráfico:



Se observa que:

$$e = V_1 t_1 \qquad (1)$$

$$e = V_2 (t_1 + 6) \qquad (2)$$

$$e = V_3 (t_1 + 2) \qquad (3)$$

Es evidente que el mismo espacio lo recorre en diferentes tiempos porque sus rapideces son distintas.

Igualando espacios (1) y (2) :

$$v_1 t_1 = v_2 (t_1 + 6)$$

sustituyendo datos: $5t_1 = 3(t_1 + 6)$

de donde: $t_1 = 9\,s$

Igualando (2) con (3) :

$$v_2 (t_1 + 6) = v_3 (t_1 + 2)$$

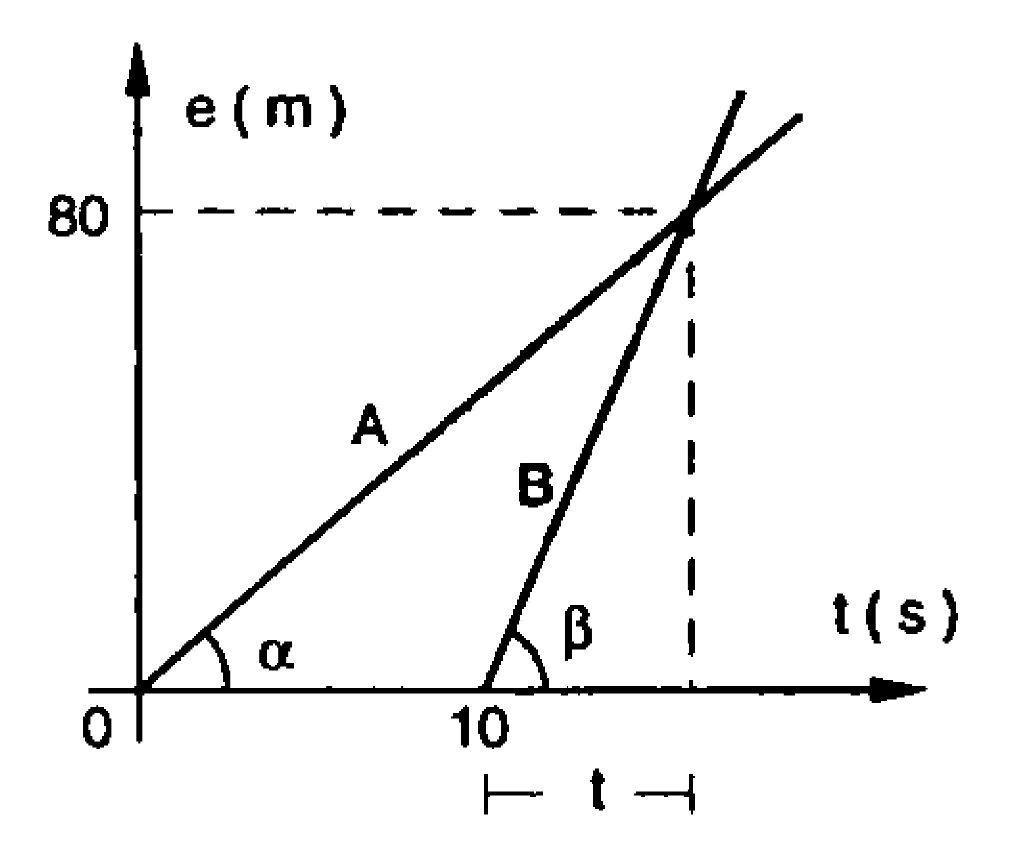
sustituyendo datos:

$3(9 + 6) = v_3 (9 + 2)$, de donde:

Rpta.: $V_3 = 4{,}09\,m/s$

PROBLEMA 13. De acuerdo a los datos mostrados en el gráfico, cuántos minutos después de la partida de B se encuentran los dos móviles A y B, si la suma de sus velocidades es de 20 m / s.

RESOLUCIÓN :



La velocidad de los móviles está dada por las tangentes de las rectas:

$$v_A = tg\,\alpha = \frac{80}{10 + t} \qquad (1)$$

$$v_B = tg\,\beta = \frac{80}{t} \qquad (2)$$

sumando (1) y (2):

$$v_A + v_B = \frac{80}{10+t} + \frac{80}{t}$$

Por dato se puede escribir:

$$2\theta = \frac{80}{10+t} + \frac{80}{t}$$

$$t^2 + 2t - 40 = 0 \quad ; \quad \text{de donde:}$$

Rpta.: $t = 2{,}32\ s$

Además: $v_B = \dfrac{80}{2{,}32} = 34{,}48\ m/s$

Del mismo modo se puede calcular v_A

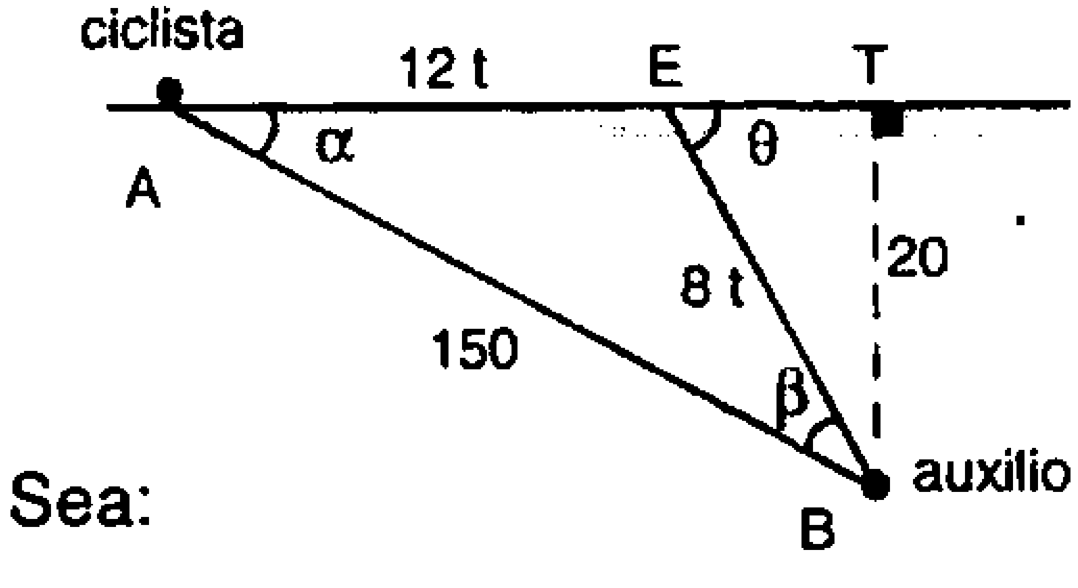
PROBLEMA 14. En una carrera de bicicletas, en una pista recta, uno de los ciclistas va a 12 m/s. Su "auxilio" está en el trayecto a 20 m de la misma pista. El auxilio ve a "su" ciclista a 150 m de distancia. Inmediatamente corre a 8 m/s para encontrarse lo antes posible con el ciclista y darle agua. ¿Cuál será el ángulo que forma con la pista el camino que debe seguir el auxilio?

RESOLUCIÓN : $v_c = 12\ m/s$

$v_a = 8\ m/s \qquad d = 20\ m$

$\theta = \ ? \qquad d_1 = 150\ m$

Sea la figura:



Sea:

E : Punto de encuentro más próximo
EB : Camino recorrido por el auxilio
t : Tiempo empleado por ambos para encontrarse en el punto E

En el triángulo rectángulo ATB:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{20}{150} \Rightarrow \text{sen}\,\alpha = \frac{2}{15}$$

$$\therefore \quad \alpha = 7{,}66° \qquad (1)$$

En el triángulo AEB, por ley de senos:

$$\frac{12t}{\text{sen}\,\beta} = \frac{8t}{\text{sen}\,\alpha}$$

$$\Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{3\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

$$\text{ó: sen}\,\beta = \frac{3 \times 2}{2 \times 15} \Rightarrow \text{sen}\,\beta = \frac{1}{5}$$

De donde: $\beta = 11{,}54°$ (2)

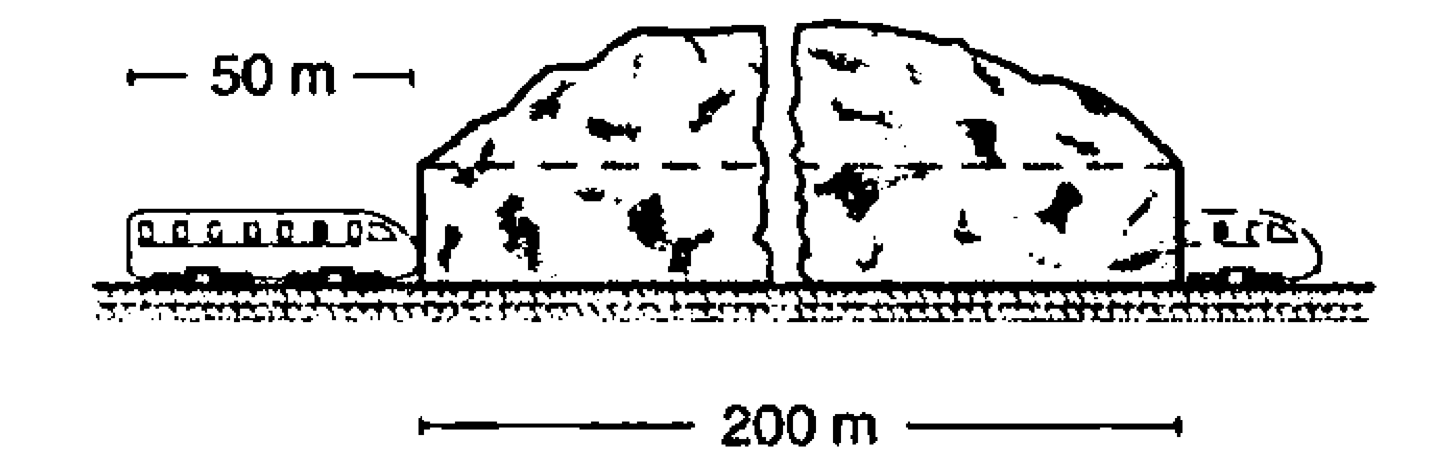
El ángulo θ es exterior del triángulo AEB luego, por propiedad:

$$\theta = \alpha + \beta = 7{,}66° + 11{,}54°$$

Rpta.: $\theta = 19°12'$

PROBLEMA 15. Un tren de 50 m de largo entra a un túnel de 200 m. Si el tren va a una velocidad de 8 m/s, un pasajero que observa el panorama, ¿cuánto tiempo demorará para volver a observar?

RESOLUCIÓN :



Como se trata de lo que le ocurre al "pasajero" que observa por la ventana, no interesa la longitud del tren, sólo su velocidad del pasajero que está viajando, luego:

$$e = vt \Rightarrow 200 = 8t$$

Rpta.: $t = 25\ s$

PROBLEMA 16. Un móvil parte del reposo con M.R.U.V.; a los 6 s alcanza una velocidad de 16 m/s.

Calcular:

a) La aceleración

http://librosysolucionarios.net

b) Qué espacio recorrió en el último segundo.

RESOLUCIÓN: $v_i = 0$

$a = ?$ $t = 6\,s$

$e = ?$ $v_f = 16\,m/s$

a) $v_f = v_i + a\,t$

de donde: $a = \dfrac{v_f - v_i}{t}$

Reemplazando datos:

$$a = \frac{16\,m/s - 0}{6\,s}$$

Rpta.: $a = 2{,}67\ m/s^2$

b) Ahora, por otro lado, recordando que:

$$e = v_m \times t = \frac{v_f + v_i}{2} \times t$$

Espacio recorrido en los 6 segundos:

$$e_1 = \frac{16\,m/s + 0}{2} \times 6\,s$$

$$e_1 = 48\,m$$

Espacio recorrido en 5 segundos:

$$e_2 = \frac{16\,m/s + 0}{2} \times 5\,s$$

$$e_2 = 40\,m$$

Espacio recorrido en el último segundo:

$$e_u = e_1 - e_2 = 48\,m - 40\,m$$

Rpta.: $e_u = 8\,m$

PROBLEMA 17. En un punto A, se le aplican los frenos a un automóvil que iba con una rapidez de 20 m/s. Después de recorrer 75 m, su rapidez bajó a 13 m/s. Hallar:

a) En qué tiempo el móvil recorrió esta distancia
b) El valor de la aceleración
c) A partir de el monento de aplicar los frenos, cuánto tiempo demora en detenerse, y:
d) Qué espacio recorrió hasta detenerse

RESOLUCIÓN: $v_1 = 20\,m/s$

$e = 75\,m$ $v_2 = 13\,m/s$

a) $t_1 = ?$
b) $a = ?$
c) $t_2 = ?$
d) $e = ?$

a) Recordando que:

$e = v_m\,.\,t$; de donde:

$$t = \frac{e}{v_m} = \frac{e}{\frac{v_i + v_f}{2}}$$

$$t = \frac{2\,e}{v_i + v_f}$$

sustituyendo datos:

$$t = \frac{2 \times 75}{20 + 13} = \frac{150}{33}$$

Rpta.: $t_1 = 4{,}54\,s$

b) Sabemos que: $v_f^2 = v_i^2 + 2\,a\,e$

$$a = \frac{v_f^2 - v_i^2}{2\,e}$$

$$a = \frac{13^2 - 20^2}{2 \times 75} = \frac{169 - 400}{150}$$

Rpta.: $a = -1{,}54\ m/s^2$

c) Sabemos que: $v_f = v_i \pm a\,t$

Como la aceleración es negativa y la velocidad final es 0:

$0 = v_i - a\,t$, de donde:

$t = \dfrac{v_i}{a}$; sustituyendo datos:

$$t = \frac{20\,m/s}{1{,}54\,m/s^2}$$

Rpta.: $t_2 = 12{,}99\,s$

d) Sabemos que:

http://librosysolucionarios.net

$$e = v_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

Reemplazando datos:

$$e = (13)(12{,}99) + \frac{1}{2}(-1{,}54)(12{,}99)^2$$

$$e = 168{,}87 \text{ m} - 129{,}93 \text{ m}$$

Rpta.: $e = 38{,}94$ m

PROBLEMA 18. Una bala que va a 150 m/s penetra en un cuerpo pastoso avanzando 3 m hasta detenerse. Calcular:

a) El tiempo en el cuerpo hasta detenerse
b) La aceleración de la bala.

RESOLUCIÓN : $v = 150$ m/s

$t = ?$ $e = 3$ m

$a = ?$ $v = 0$

a) Se sabe que: $e = v_m . t$
de donde:

$$t = \frac{e}{v_m} = \frac{e}{\frac{v_i + v_f}{2}} = \frac{2e}{v_i + v_f}$$

$$t = \frac{2 \times 3}{150 + 0} = \frac{6}{150}$$

Rpta.: $t = 0{,}04 \text{ s} = 4 \times 10^{-2}$ s

b) $v_f = v_i + a t$, como $v_f = 0$

$$0 = v_i + a t$$

de donde: $a = -\dfrac{v_i}{t} = -\dfrac{150 \text{ m/s}}{0{,}04 \text{ s}}$

Rpta.: $a = -3\,750$ m/s²

PROBLEMA 19. Un móvil se desplaza durante 2,5 s con M.R.U.V., acelerado una distancia de 75 m. Ahora cesa su aceleración, y durante 2 s recorre 70 m con M.R.U. Calcular la aceleración cuando se movía con M.R.U.V.

RESOLUCIÓN : $t_2 = 2$ s

$t_1 = 2{,}5$ s $e_2 = 70$ m

$e_1 = 75$ m $a = ?$

M.R.U.V. M.R.U.

V_A V_B V_B

A — 75 m — B — 70 m — C

Analizando cada tramo:

Tramo AB: $v_B = v_A + a t$

$$v_A = v_B + a(2{,}5) \qquad (I)$$

Además $e_1 = v_A t + \frac{1}{2} a t^2$

sustituyendo datos:

$$75 = v_A(2{,}5) + \frac{1}{2} a (2{,}5)^2 \qquad (II)$$

Tramo BC :

$$e = v_B t \Rightarrow 70 = v_B (2)$$

$$\therefore v_B = 35 \text{ m/s}$$

Sustituyendo en (I) :

$$35 = v_A + a(2{,}5) \qquad (III)$$

Resolviendo (II) y (III) :

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un motociclista va de Lima a Jauja con una velocidad de 6 m/s y regresa a 9 m/s. ¿Cuál es su velocidad media?

Rpta.: 7,5 m/s

2. Un auto que parte del reposo con una aceleración constante recorre 200 m en 30 s. ¿Cuál es su velocidad a los 30 s y cuál la aceleración?

Rpta.: 13,33 m/s y 0,44 m/s^2

3. Un cohete que parte del reposo adquiere una aceleración de 100 m/s^2 en 10 s. Hallar la velocidad, ahora, en km/h.

Rpta.: 3 600 km/h

4. Un móvil parte del reposo y recorre una distancia en dos etapas durante 16 s y ha adquirido una velocidad de 60 m/s. La primera parte dura 6 s y es movimiento acelerado; la segunda parte es movimiento uniforme. Calcular:

a) Aceleración de la primera parte
b) Distancia recorrida durante los 16 s

Rpta.: a) 10 m/s^2
b) 780 m

5. A un auto que lleva una velocidad de 80 m/s, se le quiere frenar en 50 m. Calcular:

a) La aceleración necesaria
b) El tiempo que demora hasta parar.

Rpta.: a) - 64 m/s^2
b) 1,25 s

6. Dos puntos móviles "A" y "B" están separados en 4 005 m; "A" detrás de "B". En el mismo instante y con la misma dirección y sentido parten, "A" con rapidez constante de 72 km/h y "B" con M.R.U.V. de 0,04 m/s^2. Se pide calcular:

a) A qué distancia de la partida de "B" se encuentran.
b) Qué tiempo transcurre.
c) La rapidez del móvil "B" en el momento del encuentro.

Rpta.: a) 1 540 m y 10 460 m
b) 277 s y 723 s
c) 11,08 m/s y 28,82 m/s

7. Un móvil parte de A hacia B, distante "L" en línea recta; parte del reposo con aceleración "a" constante; en el mismo instante, parte otro móvil de B hacia A con rapidez "V" constante. ¿Cuál será el valor de "V" para que ambos móviles se crucen en la mitad de la distancia entre A y B?

Rpta.: $V = \frac{1}{2}\sqrt{aL}$

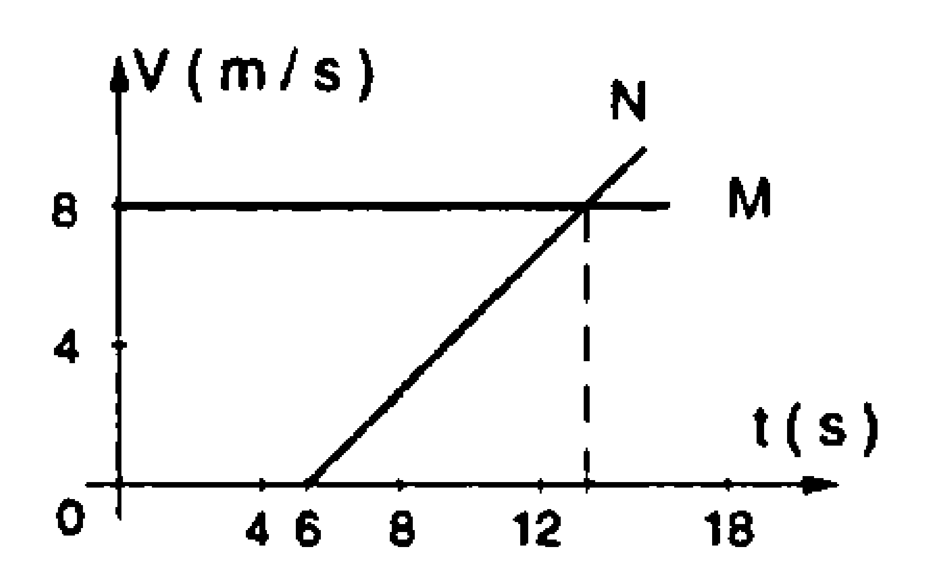
8. Un carro viaja una distancia de 2 km entre dos ciudades con una aceleración de 2,4 m/s^2 durante la mitad del tiempo que tarda en hacer todo el recorrido, y el resto del tiempo los hace con una aceleración de 2,4 m/s^2. Hallar la velocidad máxima alcanzada en este viaje si el carro partió del reposo.

Rpta.: $V_{máx} = 40\sqrt{3}$ m/s

9. Un móvil parte del reposo con aceleración constante. Otro móvil parte 10 s después y recorre 10 s a la velocidad de 20 m/s, y 30 s a la veloci-dad de 30 m/s. Al final ambos móviles se encuentran en el mismo lugar. Hallar la aceleración del primer móvil.

Rpta.: $a_1 = 0,88$ m/s^2

10. El gráfico representa la velocidad en función del tiempo de dos móviles M y N sobre el eje X, en donde se tiene que el móvil N parte 6 s después de M. Si ambos parten de un mismo punto, hallar el instante en que N alcanza a M.



Rpta.: t = 28,75 s

11. Un móvil con velocidad "V" m/s es frenado desacelerando a razón de "a" m/s^2. ¿Qué espacio recorre en el antepenúltimo segundo?

Rpta.: e = 4,5a m

http://librosysolucionarios.net

12. Dos carros A y B se mueven en direcciones contrarias con velocidades de 72 km/h y 60 km/h respectivamente. Cuando estaban separados una cierta distancia fueron frenados y después de 2 s se hallaron detenidos uno frente al otro sin chocar. Hallar la distancia que los separaba antes de frenar.

Rpta.: d = 36,6 m

13. Se tiene "n" coches ubicados en ciudades equidistantes entre sí, y en estado de reposo. Si todos parten simultáneamente con aceleraciones de valores constantes correspon-dientes a:

$$a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots\ldots\ldots, a_{n-1}, a_n$$

Hallar el tiempo que demorarán en en encontrarse, si se considera que:

$$a_1 > a_2 > a_3 >, \ldots\ldots, a_{n-1} > a_n$$

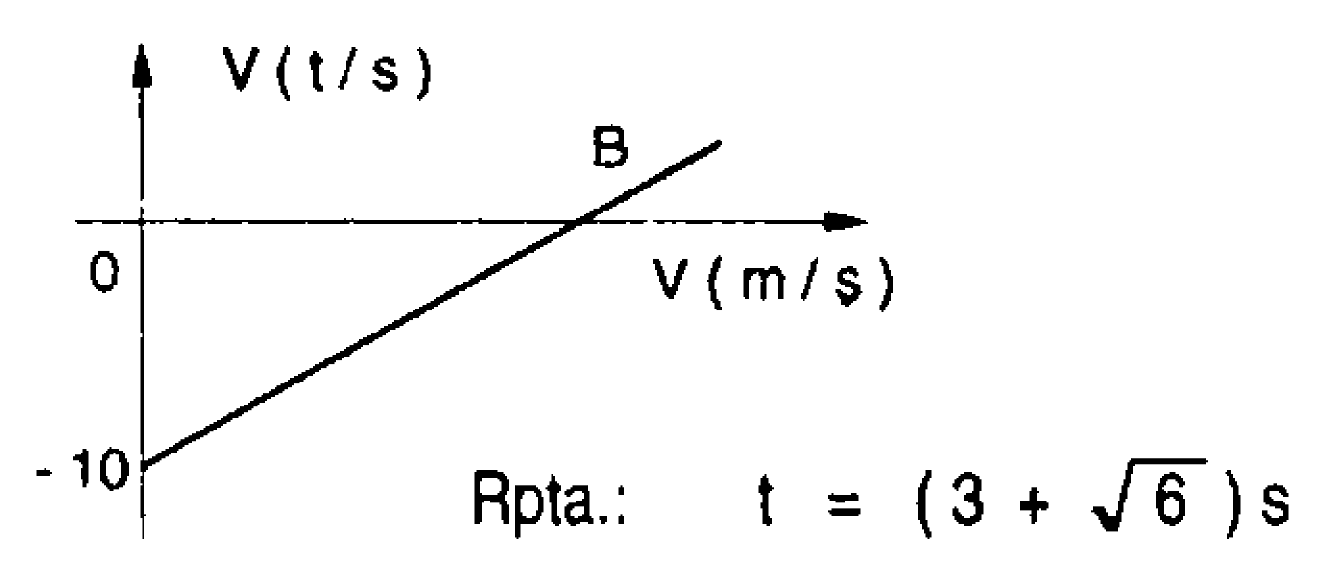
y además, que la distancia que hay entre ciudad y ciudad es "L".

Rpta.: $t = \sqrt{\dfrac{2(n-1)L}{a_1 - a_n}}$

14. Dos móviles parten del reposo, con aceleraciones correspondientes a $\sqrt{a}$ y $\sqrt{3a}$ m/s² respectivamente. Si se desplazan formando con sus direcciones un ángulo de 60°, hallar la distancia de separación al cabo de $\sqrt{3}$ s. Las aceleraciones de los móviles se consideran constantes.

Rpta.: $x = \dfrac{3}{2}\sqrt{a\left(4 - \sqrt{3}\right)}$ m

15. Se tiene un gráfico (V - T) de un móvil que se mueve sobre una línea recta y que en el instante t = 0 el valor x_0 = 5 m. ¿En qué instante pasará por segunda vez por el origen?

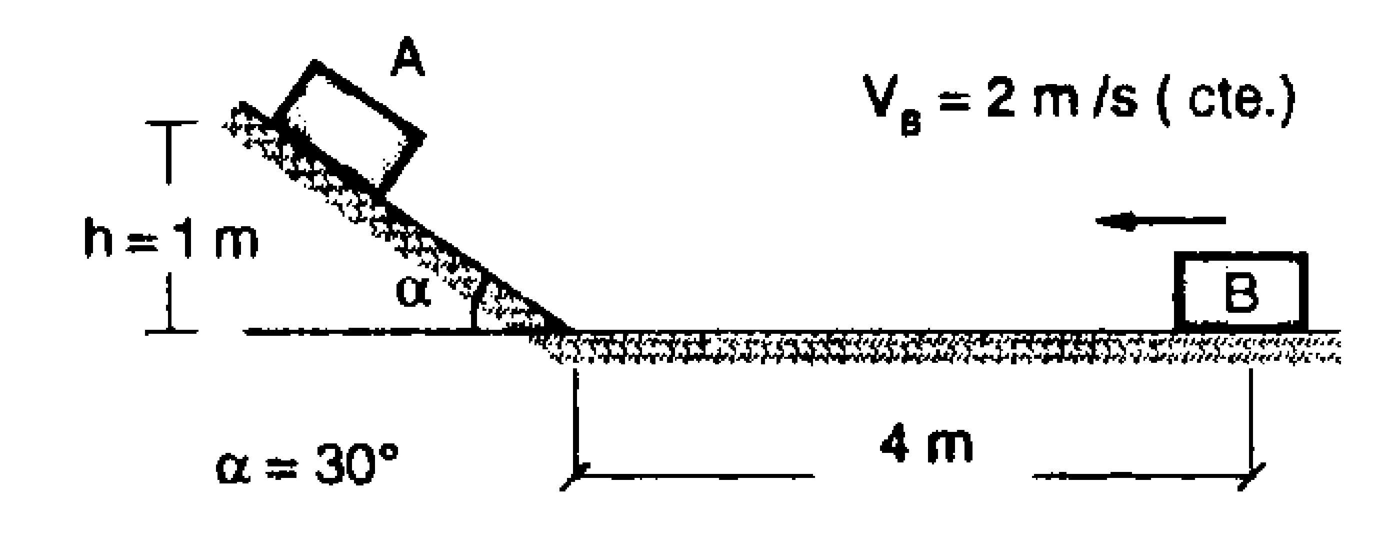


Rpta.: $t = (3 + \sqrt{6})$ s

16. Un automóvil partiendo del reposo con M.R.U.V. recorre una distancia "X" en un tiempo "t / 2" con una aceleración de "2 a"; si la misma distancia recorre en un tiempo "3t". ¿Cuál es su aceleración?

Rpta.: $a_1 = \dfrac{1}{18}a$

17. En el instante mostrado en la figura se suelta un bloque de masa "M", calcular el tiempo transcurrido cuando se produece la colisión entre ambos bloques. Suponer que las su-perficies son lisas y g = 8m/s².



Rpta.: $t = \dfrac{4}{3}$ s

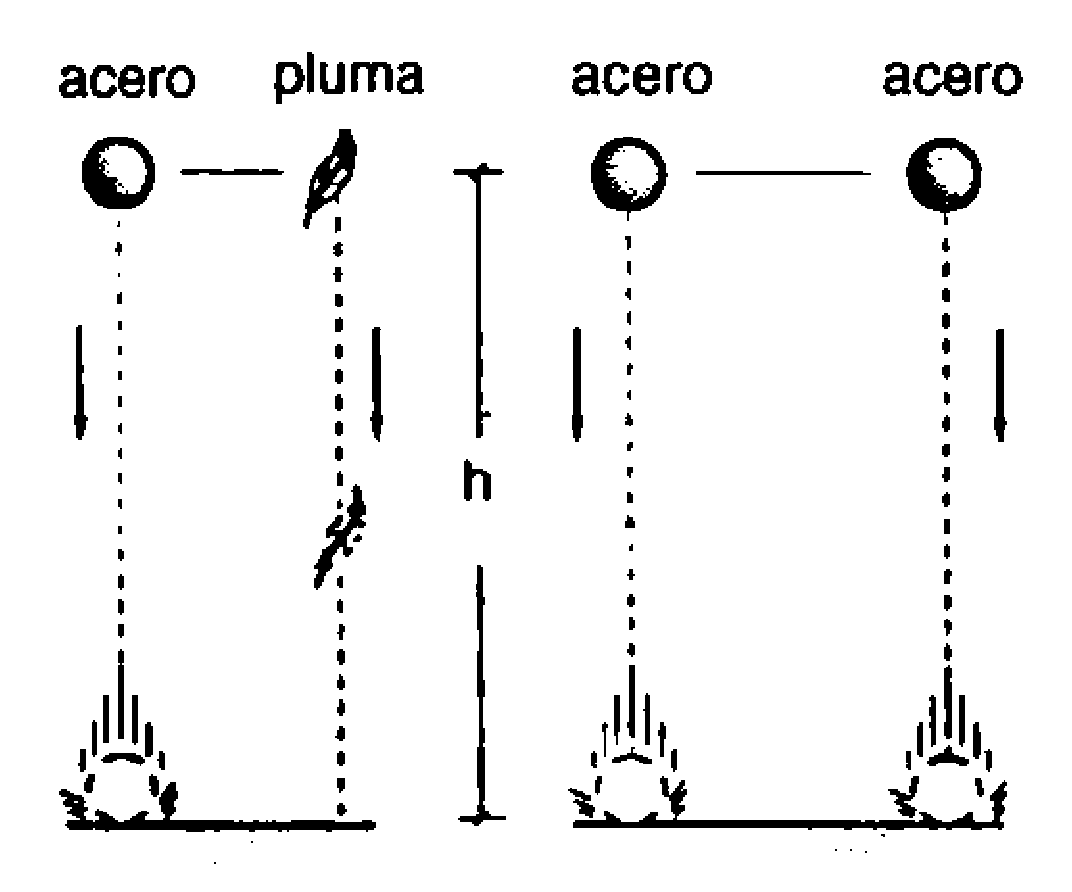
MOVIMIENTO DE CAÍDA LIBRE M.V.C.L.

Es aquel movimiento en el cual el móvil experimenta despalazamiento vertical bajo la ifluencia exclusiva de la fuerza de gravedad. Se desprecia la re-sistencia del aire, es decir, se supone que el móvil se desplaza en el vacío.

En el vacío todos los cuerpos, independientemente de su masa y forma, caen con la misma velocidad. También se acepta que en el aire y en un mismo lugar todos los cuerpos caen a la misma velocidad. Sin embargo, los cuerpos que tienen **poca masa** y **mucha área** sufrirán la resistencia del aire y por consiguiente demorarán más en caer,

http://librosysolucionarios.net

pero en el vacío caerán a la misma velocidad.



La bola de acero cae primero — Las dos bolas caen al mismo tiempo

Galileo Galilei, comprobó que la caída libre de los cuerpos, o el movimiento vertical, es un movimiento uniformemente variado y que todos los cuerpos caen con la misma aceleración, la aceleración de la gravedad, cuyo valor en promedio es:

$$g = 9{,}8\ m/s^2$$

Sin embargo la aceleración de la gravedad no tiene el mismo valor en todos los puntos de la tierra, hay pequeñas diferencias, dependiendo del radio terrestre del lugar, así:

Gravedad en los polos: $g_p = 9{,}83\ m/s^2$

Gravedad en el Ecuador: $g_e = 9{,}78\ m/s^2$

El movimiento vertical es un caso particular del M.R.U.V. en el que la ace-leración **siempre** es la aceleración de la gravedad.

Las fórmulas para cálculos son similares al M.R.U.V. donde la aceleración siempre es la aceleración de la gravedad "g", y el espacio "e" es una altura "h" así:

$$e = V_m t \Rightarrow h = V_m t$$

$$e = V_i t \pm \frac{1}{2} a t^2 \Rightarrow h = V_i t \pm \frac{1}{2} g t^2$$

$$V_f = V_i \pm a t \Rightarrow V_f = V_i \pm g t$$

$$V_f^2 = V_i^2 \pm 2 a d \Rightarrow V_f^2 = V_i^2 \pm 2 g h$$

Donde "h" es la distancia vertical de ascenso o descenso y "g" es la aceleración de caída libre.

CONVENCIÓN DE SIGNOS: Usar:

+ : si la velocidad del móvil aumenta, esto es cuando el móvil cae.

- : si la velocidad delmóvil disminuye, esto es cuando el móvil sube

CASOS PARTICULARES

Cuando un cuerpo es lanzado verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial V_i, va disminuyendo su velocidad y alcanza una altura máxima cuando $V_f = 0$

a) Altura Máxima (h_{max})

Se sabe que: $V_f^2 = V_i^2 - 2 g h$

Cuando: $V_f = 0 \Rightarrow h = h_{máx}$

Reemplazando $0 = V_i^2 = 2 g h_{máx}$

$$\therefore \quad h_{máx} = \frac{V_i^2}{2 g}$$

b) Tiempo de Altura Máxima ($t_{máx}$)

Se sabe que: $V_f = V_i - g t$

Cuando alcanza su altura máxima:

$$V_f = 0 \Rightarrow t = t_{máx}$$

Reemplazando: $0 = V_i - g\, t_{máx}$

$$\therefore \quad t_{máx} = \frac{V_i}{g}$$

c) Tiempo de Vuelo (t_{vuelo})

Se cumple que:

$$t_{vuelo} = t_{subida} + t_{bajada}$$

http://librosysolucionarios.net

como: $t_{subida} = t_{bajada}$

$$\boxed{t_{vuelo} = 2\,t_{máx}}$$

NOTA : El valor de la gravedad "g" se considera constante aproximadamente hasta los 30 km de altura de la superficie terrestre.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Desde la azotea de un edificio se deja caer una piedra y demora 2,8 s en llegar al suelo. Calcular la altura del edificio.

RESOLUCIÓN :

$t = 2{,}8\,s \;;\; g = 9{,}8\,m/s^2 \;;\; h = ?$

Se sabe que: $h = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$

pero como $V_i = 0$, entonces:

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \times 9{,}8\,m/s^2 \times (2{,}8\,s)^2$$

$$h = 4{,}9\,m/s^2 \times 7{,}84\,s^2$$

Rpta.: $h = 38{,}42\,m$

PROBLEMA 2. ¿Con qué rapidez llega al suelo la piedra del problema anterior?

RESOLUCIÓN :

$g = 9{,}8\,m/s^2 \;;\; t = 2{,}8\,s \;;\; V_f = ?$

$V_f = V_i + g\,t$, pero $V_i = 0$ luego:

$$V_f = g\,t = 9{,}8\,m/s^2 \times 2{,}8\,s$$

Rpta.: $V_f = 27{,}44\,m/s$

PROBLEMA 3. Se dispara una bala hacia arriba verticalmente con una rapidez inicial de 600 m/s. Calcular:

a) El tiempo que demora en subir.
b) La altura que alcanza.

RESOLUCIÓN :

$V_i = 600\,m/s \;;\; t = ? \;;\; h = ?$

a) Sabiendo que: $V_f = V_i - g\,t$

Corresponde el signo menos porque el cuerpo sube, luego la aceleración es negativa, el movimiento retardatario.

Pero: $V_f = 0$, luego: $V_i = g\,t$

$$\therefore\; t = \frac{V_i}{g} = \frac{600\,m/s}{9{,}8\,m/s^2} = \frac{600}{9{,}8}\,s$$

Rpta.: $t = 61{,}22\,s$

b) Recordando: $h = V_i t - \frac{1}{2} g t^2$

De igual manera el signo es (-) porque el cuerpo sube:

$$h = 600\,\frac{m}{s} \times 61{,}22\,s - \frac{1}{2} \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} (61{,}22\,s)^2$$

$$h = 18\,367{,}35\,m$$

Otro método:

a) Se sabe: $V_f^2 = V_0^2 - 2\,g\,h$

$$0 = V_0^2 - 2\,g\,h_{máx} \Rightarrow h_{máx} = \frac{V_0^2}{2\,g}$$

Reemplazando con los datos:

$$h_{máx} = \frac{(600)^2}{2\,(9{,}8)}\,m = 18\,367{,}35\,m$$

http://librosysolucionarios.net

b) $$h = \left(\frac{V_0 + V_f}{2}\right)t$$

$$18\,367{,}35 = \left(\frac{600 + 0}{2}\right)t$$

De donde: $t = 61{,}22\ s$

PROBLEMA 4. Un cuerpo cae del reposo desde una altura de 50 m. Calcular:

a) ¿Cuánto tiempo demora en caer?
b) Cuando llega al piso, ¿cuál es su velocidad?

RESOLUCIÓN :

$$V_f = ?\ ;\ t = ?\ ;\ h = 50\,m$$

a) $$h = V_i t + \frac{1}{2} g t^2$$

Corresponde al signo positivo por que el cuerpo cae, luego la aceleración es positiva.

Pero: $V_i = 0$; luego: $h = \frac{1}{2} g t^2$

De donde:

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 50}{9{,}8\,m/s^2}}$$

Rpta.: $t = 3{,}19\ s$

b) $$V_f = V_i + g t$$

Como: $V_i = 0$, se tiene: $V_f = g t$

Sustituyendo datos:

$$V_f = 9{,}8\ m/s^2 \times 3{,}19\ s$$

Rpta.: $V_f = 31{,}26\ m/s$

PROBLEMA 5. Dos cuerpos A y B están en una misma vertical separados 100 m. Al mismo tiempo se deja caer el más alto "A" y se lanza el "B" hacia arriba con una rapidez inicial V_i. Calcular la velocidad con que debe ser lanzado el segundo para que se encuentren en el punto donde éste alcanza su máxima altura.

RESOLUCIÓN : $H = 100\,m$ $\quad V_i = ?$

Para A: $100 - h = V_0 t + \frac{1}{2} g t^2$

pero $V_o = 0$, luego:

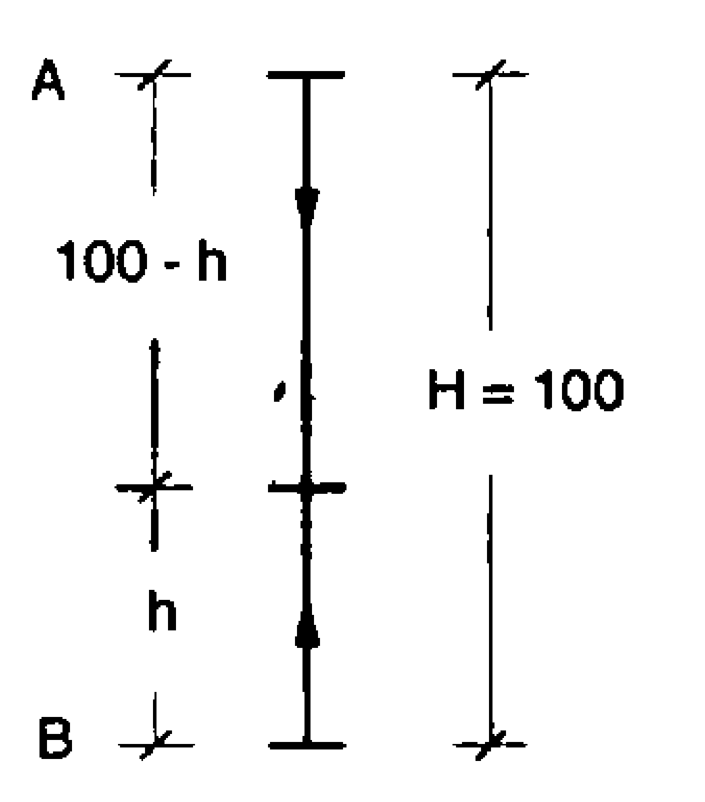
$$100 - h = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (I)$$

Para B: $V_f^2 = V_i^2 - 2 g h$

pero: $V_f = 0$, luego:

$$0 = V_i^2 - 2 g h$$

De donde: $$h = \frac{V_i^2}{2g} \qquad (II)$$



Para el mismo cuerpo B:

$$V_f = V_i - g t$$

Pero: $V_f = 0$, luego: $t = \frac{V_i}{g}$

Sustituyendo en (I):

$$100 - h = \frac{1}{2} \times \frac{V_i^2}{g} \qquad (III)$$

Sumando (II) con (III):

$$100 = \frac{V_i^2}{g} \Rightarrow V_i = \sqrt{100\,g}$$

Pero: $g = 9{,}8\ m/s^2$, luego

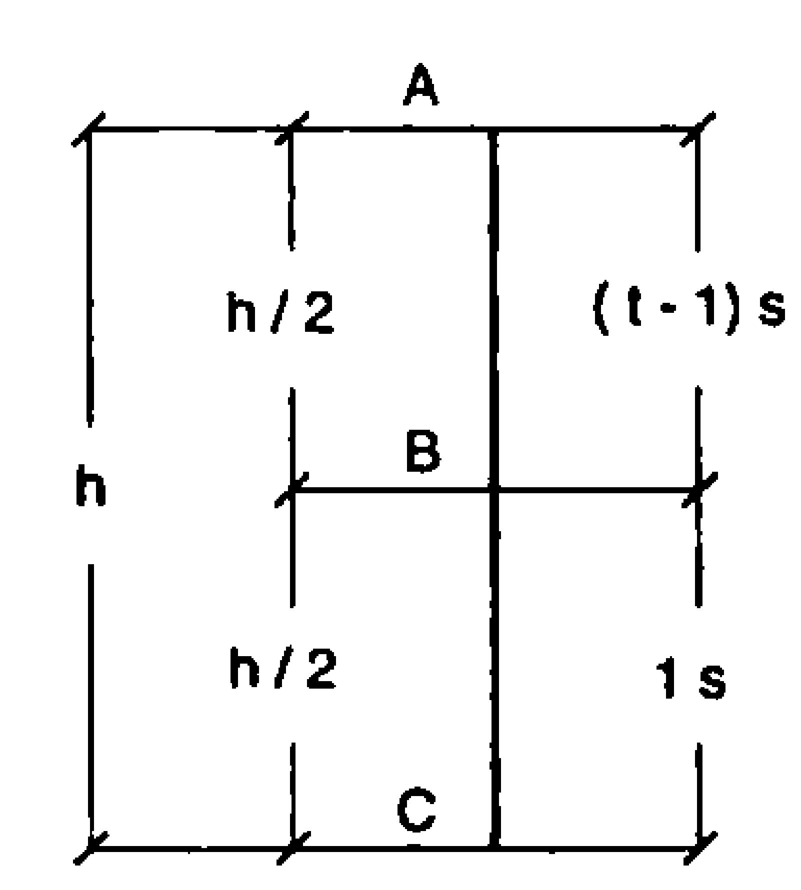
Rpta.: $V_i = 31{,}30\ m/s$

PROBLEMA 6. Un cuerpo que cae libremente recorre durante el último segundo la mitad del camino total. Hallar:

http://librosysolucionarios.net

a) ¿Cuánto demora su caída?
b) ¿Desde qué altura cae?

RESOLUCIÓN :



a) Tramo AB:

$$\frac{h}{2} = V_i t + \frac{1}{2} g (t - 1)^2$$

$$V_i = 0 \quad \therefore \quad \frac{h}{2} = \frac{1}{2} g (t - 1)^2$$

$$h = g(t - 1)^2 \qquad (1)$$

Tramo AC : $h = \frac{1}{2} gt^2 \qquad (2)$

Igualando (1) y (2) ;

$$g(t-1) = \frac{1}{2} gt^2$$

$$2(t^2 - 2t + 1) = t^2$$

$$t^2 - 4t + 2 = 0$$

$$t = \frac{4 \pm \sqrt{16-8}}{2}$$

$$t = 2 \pm \sqrt{2} = 2 \pm 1{,}41$$

Rpta. : $t = 3{,}41$ s

b) Sustituyendo en (2) :

$$h = \frac{1}{2} \times 9{,}8 \ / \ s^2 \times (3{,}41)^2$$

Rpta, : $h = 57$ m

PROBLEMA 7. Una bomba lanzada desde un helicóptero detenido en el aire, tarda 15 s en dar en el blanco. ¿A qué altura volaba el helicóptero?

RESOLUCIÓN : $t = 15$ s $\qquad h = ?$

$$h = V_i t + \frac{1}{2} gt^2$$

pero $V_i = 0$, luego: $h = \frac{1}{2} gt^2$

$$h = \frac{1}{2} \times 9{,}8 m/s^2 \times (15)^2$$

Rpta.: $h = 1\,102{,}5$ m

PROBLEMA 8. ¿Cuántos segundos después de iniciada la caída, la rapidez de un cuerpo es de 80 km / h?

RESOLUCIÓN : $t = ?$

$$V_f = 80 \text{ km/h} = 2{,}2 \text{ m/s}$$

Se sabe que : $V_t = V_i - gt$

pero $V_i = 0$, luego: $V_i = gt$

De donde : $t = \frac{V_i}{g}$

$$t = \frac{22{,}2 \text{ km/s}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}$$

Rpta. 2,27 s

PROBLEMA 9. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una rapidez de 100 m / s.

Hallar:
a) ¿Qué altura alcanza a los 10 s?
b) ¿Qué rapidez desarrolla el cuerpo al cabo de 10 s?
c) ¿Cuál es su altura máxima?

RESOLUCIÓN :

$v_i = 100$ m / s $\qquad h = ?$

$t = 10$ s $\qquad V_f = ?$

$h_{máx} = ?$

a) $h = v_i t - \frac{1}{2} gt^2$

$$h = 100 \text{ m} \times 10 \text{ s} - \frac{1}{2} \times 9{,}8 \frac{m}{s^2} (10 \text{ s})^2$$

$$h = 1\,000\ m - \frac{1}{2} \times 9{,}8\ m/s^2 \times 100\ m$$

Rpta.: $h = 510\ m$

b) $V_f = V_i - gt$

$V_f = 100\ m/s - 9{,}8/s^2 \times 10\ s$

Rpta.: $V_f = 2\ m/s^2$

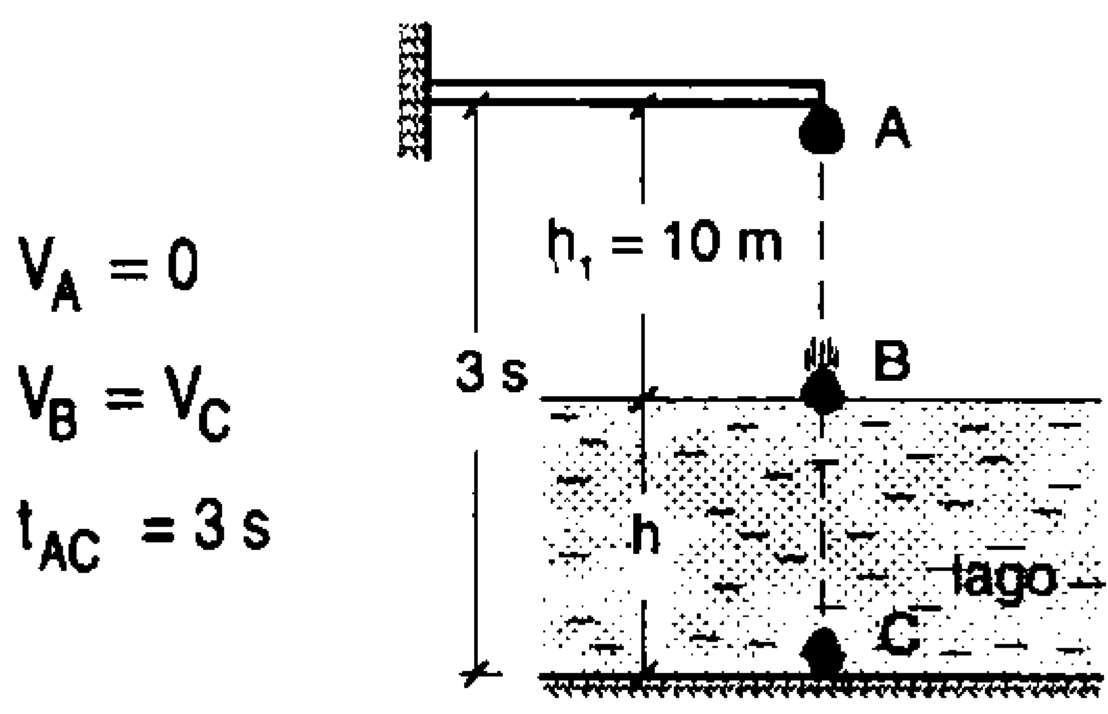
c) $h_{máx} = \frac{V_i^2}{2g}$, sustituyendo datos:

$$h_{máx} = \frac{(100\ m/s)^2}{2 \times 9{,}8\ m/s^2} = \frac{10\,000}{19{,}6} m$$

Rpta.: $h_{máx} = 510{,}20\ m$

PROBLEMA 10. Se deja caer una piedra a un lago desde un trampolín que se encuentra a 10 m de altura sobre el nivel del agua, pega con cierta rapidez y después se hunde con esa misma rapidez constante. La piedra llega al lago 3 s después de que se la soltó. Calcular la velocidad o rapidez de la piedra al llegar al fondo del lago y la profundidad del mismo.

RESOLUCIÓN :



Tramo AB: $V_f^2 = V_i^2 + 2\,gh$

Pero: $V_i = 0$, luego:

$V_B = \sqrt{2gh_1}$

$V_B = \sqrt{2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times 10\ m}$

$V_B = 14\ m/s$

Tramo BC: $V_C = V_B$; luego $V_C = 14\ m/s$

Además: $t_{AB} + t_{BC} = 3\ s$ (I)

Tramo AB: $h = v_i t + 1/2gt^2$

Pero $V_i = 0$, entonces:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_{AB}^2 \Rightarrow t_{AB} = \sqrt{\frac{2h_1}{g}}$$

$$t_{AB} = \sqrt{\frac{2 \times 10\ m}{9{,}8\ m/s^2}} \Rightarrow t_{AB} = 1{,}43\ s$$

Sustituyendo en (1): $t_{BC} = 1{,}57\ s$

Tramo BC:

A partir del punto B la velocidad es constante, hasta C, es decir:

$$V_B = V_C = V$$

Entonces: $t_{BC} = \frac{h}{V} \Rightarrow h = VT_{BC}$

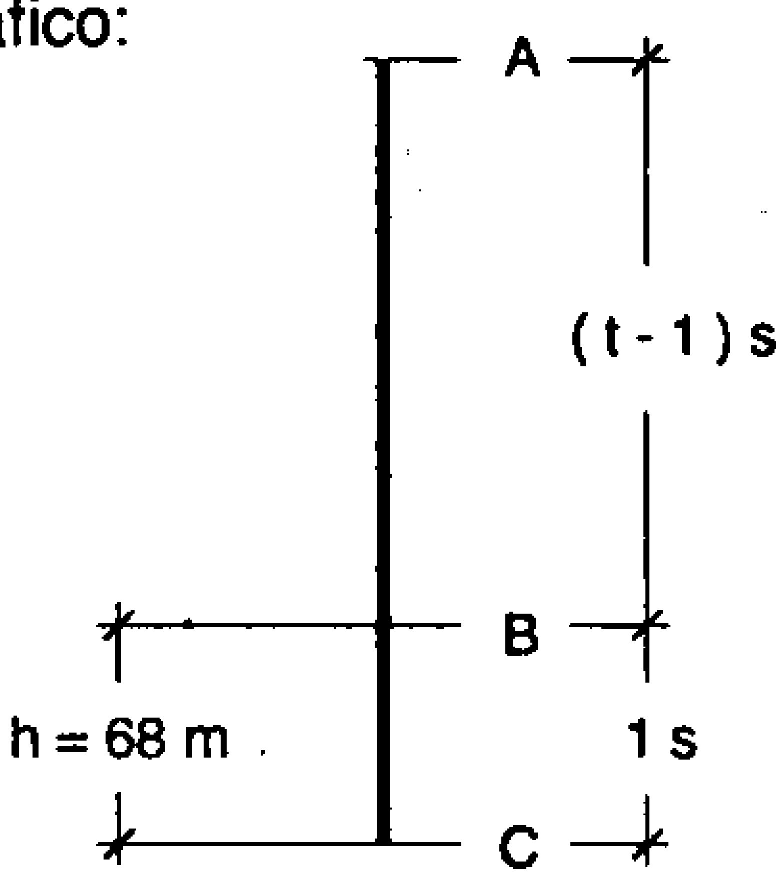
Rpta.: $h = 14\ m/s \times 1{,}57 = 22\ m$

PROBLEMA 11. Un cuerpo cae libremente y recorre en el último segundo 68 m. Hallar el tiempo de caída libre si se considera $g = 10\ m/s^2$

RESOLUCIÓN :

$h = 68\ m$; $g = 10\ m/s^2$; $t = ?$

Sea el gráfico:



Sabiendo que: $h = V_i t + \frac{1}{2} g t^2$

$$68\ m = V_1 \times 1\ s + \frac{1}{2} \times 10\ m/s^2 (1\ s)^2$$

De donde: $V_i = 63\ m/s$

Esta es la rapidez del móvil al llegar al punto B, es decir al entrar al último segundo de caída libre.

Si se considera que parte del reposo del punto A, la rapidez final del móvil cuando llega a B será 63 m / s. Siendo "t" el tiempo total de caída para llegar a C, se tiene:

$$V_f = g(t-1)$$

Luego: $63\ m/s = 10\ m/s^2\ (t-1)$

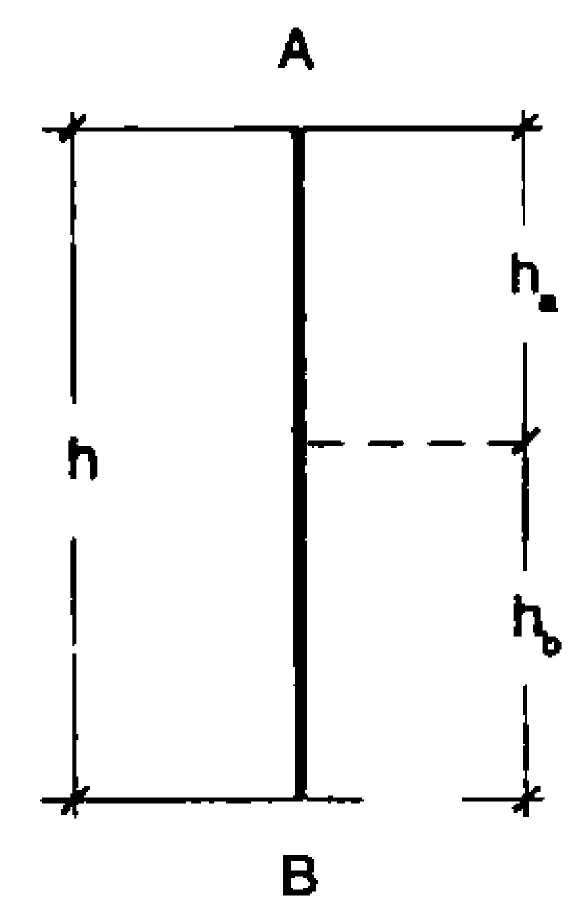
Rpta. : $t = 7{,}3\ s$

PROBLEMA 12. Desde un altura "h" sobre el piso, se suelta un objeto A. Simultáneamente y desde el piso, se lanza otro objeto B con rapidez vertical V_i hacia arriba ¿En qué tiempo se cruzan?

RESOLUCIÓN : Sean:

h_a : la distancia que cae A , y

h_b : la distancia que sube B hasta su encuentro con A



Para A :

$$h_a = V_i t + \frac{1}{2}gt^2$$

pero: $V_i = 0$, luego: $h_a = \frac{1}{2}gt^2$ (1)

Para B : $h_b = V_i\,t - \frac{1}{2}gt^2$ (2)

Sumando (1) y (2) : $h_a + h_b = V_i\,t$

Pero : $h_a + h_b = h$; luego:

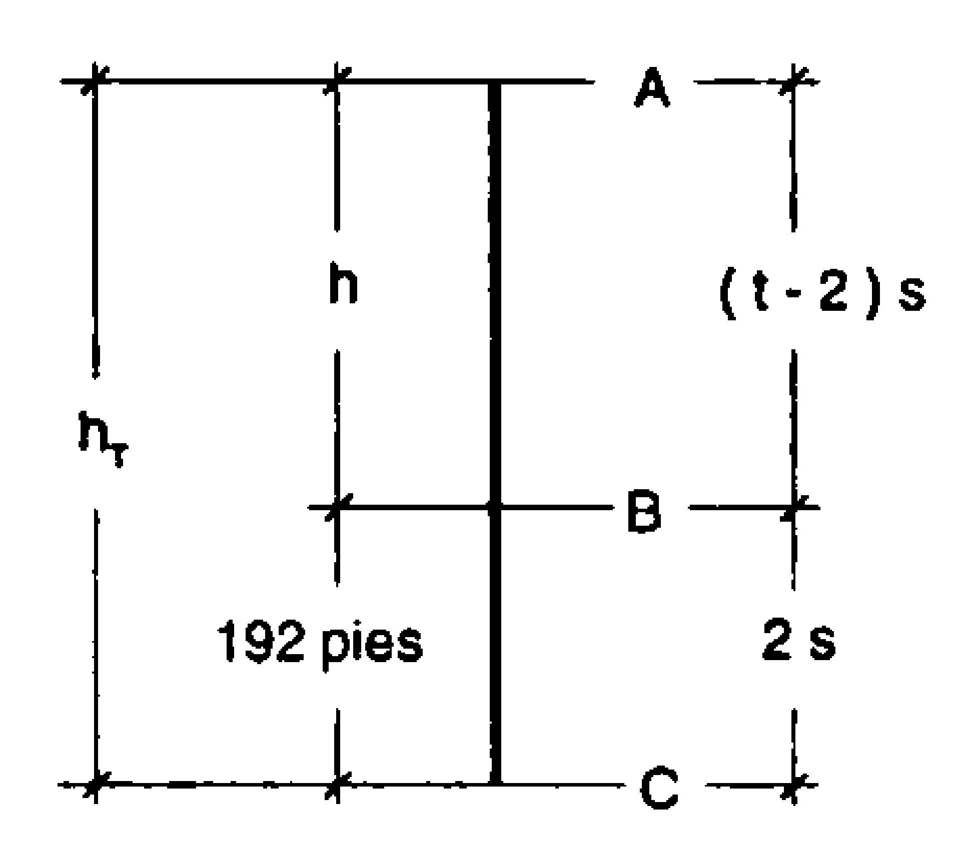
$h = V_i\,t$, de donde:

Rpta.: $t = \dfrac{h}{V_i}$

PROBLEMA 13. Desde cierta altura se deja caer un objeto y se observa que durante los dos últimos segundos se caída recorre una distancia de 192 pies. ¿De qué altura se soltó el objeto? (g = 32 pies / s²).

RESOLUCIÓN :

$t_f = 2\ s$; $d_f = 192$ pies ; $h = ?$



Cálculo de la rapidez con que llega al punto B, en su caída; llamando V_i a esta rapidez inicial para recorrer los últimos 192 pies.

$$h = V_i\,t + \frac{1}{2}gt^2$$

Sustituyendo valores:

$$192\text{ pies} = V_i \times 2\ s + \frac{1}{2} \times 32\ \frac{\text{pies}}{s^2}\ (2\ s)^2$$

De donde: $V_i = 64$ pies / s (1)

Por otro lado en su caída de A hasta B, a la velocidad que se le llamó inicial y que ahora ahora viene a ser la velocidad final, luego:

Tramo AB: $V_f^2 = V_i^2 + 2\,g\,h$

Pero como parte del reposo $V_i = 0$,

luego: $V_f^2 = 2\,g\,h$

Sustityendo datos:

$$(64\text{ pies}/s)^2 = 2 \times 32\text{ pies}/s^2 \times h$$

De donde: $h = 64$ pies , luego:

$$h_T = 64\text{ pies} + 192\text{ pies} = 256\text{ pies}$$

Rpta.: $h_T = 256$ pies

PROBLEMA 14. Se lanza hacia abajo un objeto desde cierta altura y llega al piso 3 s después con una rapidez de 60 m / s. Calcular:

a) La rapidez con que se lanzó.
b) La rapidez media de caída.
c) La altura desde donde se lanzó.

RESOLUCIÓN :

$t = 3\,s$ $\quad V_i = ?$

$V_f = 60\,m/s$ $\quad V_m = ?$ $\quad H = ?$

a) Cálculo de la rapidez inicial:

$$V_f = V_i + g\,t \Rightarrow V_i = V_f - g\,t$$

$$V_i = 60\,m/s - 9{,}8\,m/s \times 3\,s$$

Rpta.: $V_i = 30{,}6\,m/s$

b) Cálculo de la velocidad promedio:

$$V = \frac{V_f + V_i}{2}$$

$$V = \frac{60\,m/s + 30{,}6\,m/s}{2}$$

Rpta.: $V = 45{,}3\,m/s$

c) Cálculo de la altura:

$$H = V_i t + \frac{1}{2}\,g\,t^2$$

$$H = 30{,}6\,m/s \times 3\,s + \frac{1}{2} \times 9{,}8\,m/s^2\,(3\,s)^2$$

Rpta.: $H = 135{,}9\,m$

PROBLEMA 15. Desde un ascensor que sube con una rapidez de 2 m/s y que se encuentra a 4 m sobre el suelo, se deja caer un objeto. ¿En qué tiempo llegará al piso? si se considera $g = 10\,m/s^2$.

RESOLUCIÓN :

$V = 2\,m/s$; $h = 4\,m$; $t = ?$

En el momento de ser soltado, el objeto asciende un cierto trecho, por inercia, con velocidad inicial de 2 m / s; durante todo el tiempo t_1 alcanza una velocidad final 0 y recién empieza a caer.

$$V_f = V_i - g\,t_1 \quad ; \quad \text{pero: } V_f = 0$$

$$0 = V_i - g\,t_1 \quad , \quad \text{de donde:}$$

$$t_1 = \frac{V_i}{g} = \frac{2\,m/s}{10\,m/s^2} = 0{,}2\,s$$

Cálculo de la altura que se eleva durante ese tiempo:

$$h = V_i\,t_1 - \frac{1}{2}\,g\,t_1^2$$

Reemplazando datos:

$$h = 2\,m/s \times 0{,}2\,s - 1/2 \times 10\,m/s^2\,(0{,}2)^2$$

De donde: $h = 0{,}4$

De manera que el objeto recién empieza a caer desde la altura de:

$$4\,m + 0{,}4\,m = 4{,}4\,m$$

Cálculo del tiempo que demora en caer los 4,4 m

$$h = V_i\,t_2 + \frac{1}{2}\,g\,t_2^2 \quad , \quad \text{pero: } V_i = 0$$

$$\therefore\ h = \frac{1}{2}\,g\,t_2^2 \quad , \quad \text{de donde:}$$

$$t_2 = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 4\,m}{10\,m/s^2}} = 0{,}89\,s$$

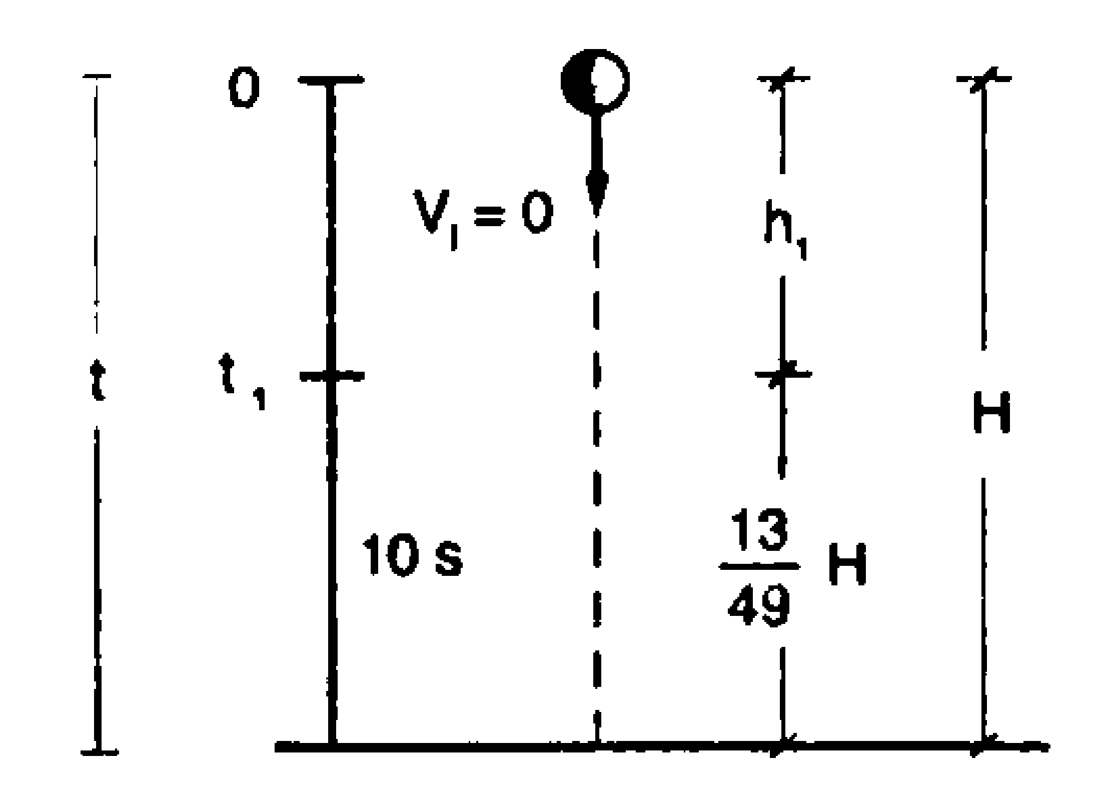
Cálculo del tiempo total que emplea para llegar al piso

$$t = t_1 + t_2 = 0{,}2\,s + 0{,}89\,s$$

Rpta.: $t = 1{,}09\,s$

PROBLEMA 16. Desde que altura "H" se deja caer un cuerpo, para que tarde 10 s en recorrer los (13/49)H que le faltan para llegar al piso.

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN : A los t_1 s se cumple:

$$h_1 = \frac{1}{2} g t_1^2$$

O sea: $$H - \frac{13}{49}H = \frac{1}{2} g(t-10)^2$$

$$\frac{36}{49} H = \frac{1}{2} g(t-10)^2 \quad (I)$$

Y a los 3 s ha caído H:

$$H = \frac{1}{2} g t^2 \quad (II)$$

$$\frac{(I)}{(II)}: \quad \frac{36}{49} = \frac{(t-10)^2}{t^2}$$

Extrayendo raíz cuadrada:

$$\frac{6}{7} = \frac{t-10}{t} \quad \therefore \quad t = 70\,s$$

Sustituyendo valores en (II):

$$H = \frac{1}{2}(9{,}81)(70)^2$$

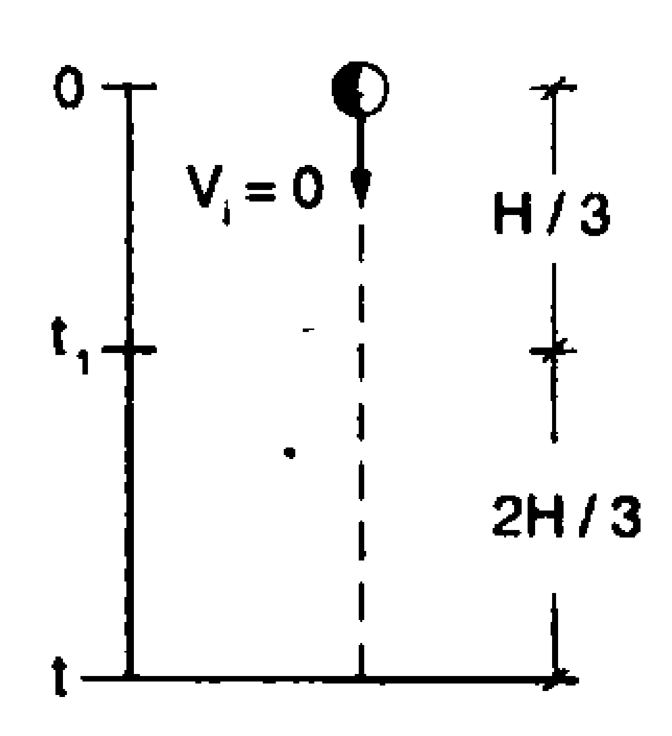
Rpta.: $H = 24\,034{,}50$ m

PROBLEMA 17. Un cuerpo se deja caer desde una altura "H" y demora un tiempo " t " en caer. Se pide hallar ¿qué tiempo demorará en recorrer " H / 3 " en un lugar donde la aceleración de la gravedad es g / 4?

RESOLUCIÓN :

$$H = \frac{1}{2} g t^2 \quad (I)$$

$$\frac{H}{3} = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{4}\right) t_1^2 \quad (II)$$

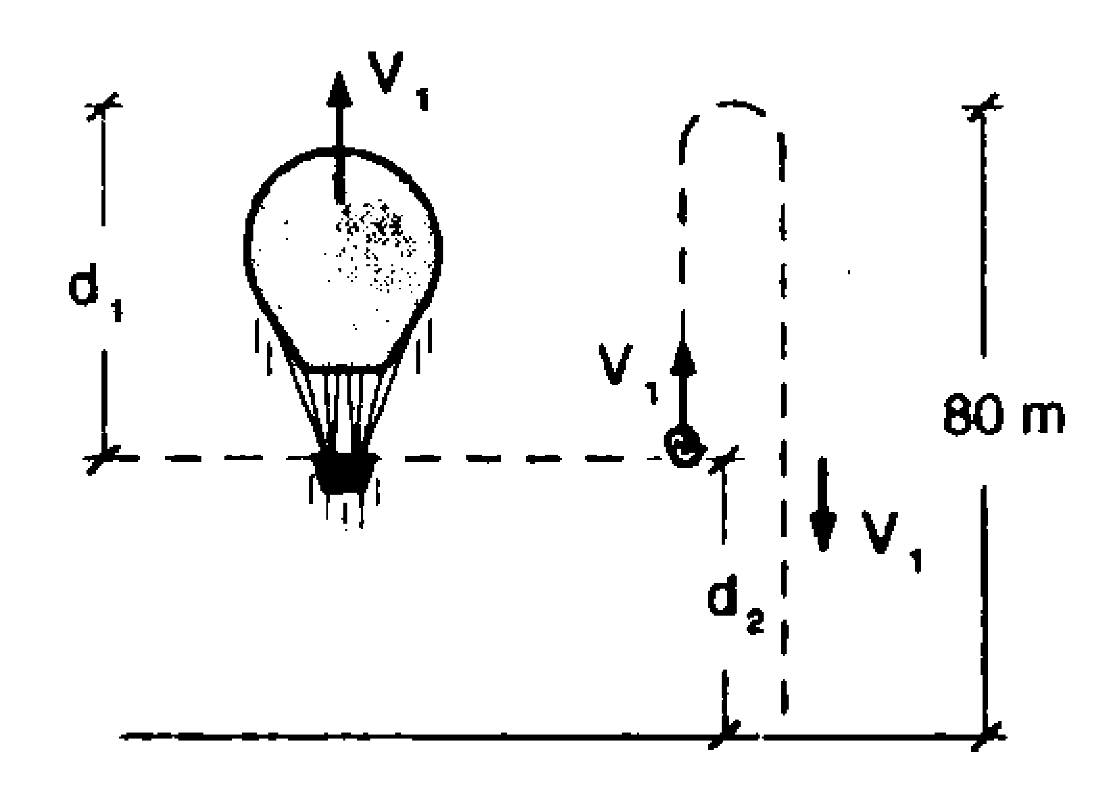


Dividiendo (I) entre (II): $$3 = 4 \times \frac{t^2}{t_1^2}$$

De donde: $$t_1 = \frac{2\sqrt{3}}{3}\,t$$

PROBLEMA 18. Desde el suelo se suelta un globo que sube a razón de 10 m/s, después de recorrer una altura considerable, del globo se suelta una piedra. ¿Luego de qué tiempo, a partir de ese instante, estarán separados 80 m el globo y la piedra?

RESOLUCIÓN :



Para el globo: $d_1 = V_1 t = 10\,t \quad (I)$

Para la piedra: $$d_2 = V_1 t + \frac{1}{2} g t^2$$

Pero d_2 como es una dirección contraria a d_1 entonces: $V_1 = -10$

$$\therefore \ d_2 = -10\,t + \frac{g}{2} t^2 \quad (II)$$

Sumando (I) y (II)

$$d_1 + d_2 = \frac{g t^2}{2} \quad (III)$$

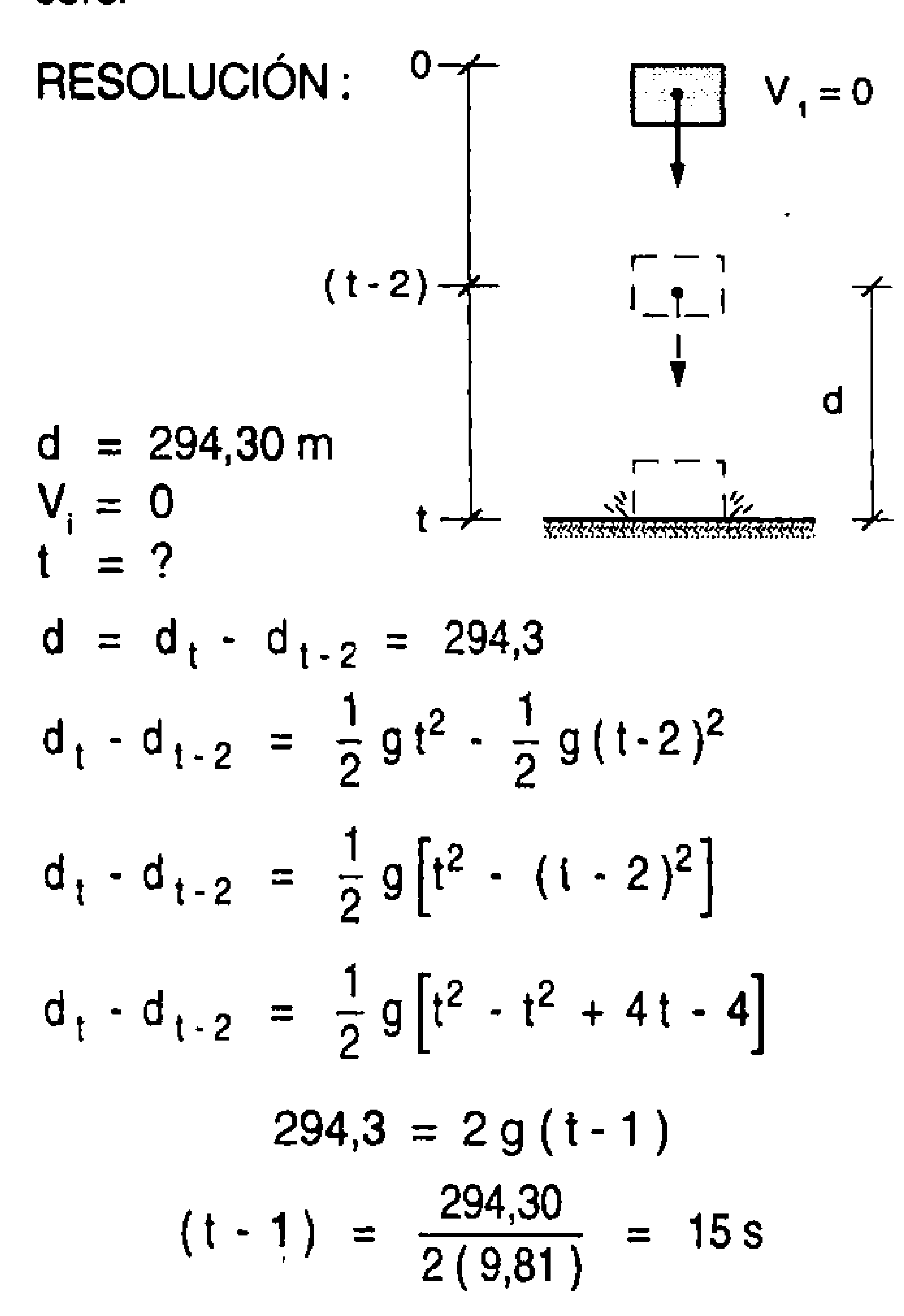
Además: $d_1 + d_2 = 80 \quad (IV)$

Luego: $80 = \frac{g\,t^2}{2} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{160}{9,81}}$

Rpta.: $t = 4,04$ s

PROBLEMA 19. Un cuerpo recorre entre el momento que toca el piso y el antepenúltimo segundo de caída libre la distancia de 294,30 m. Hallar el tiempo total de caída libre del cuerpo, si el cuerpo comenzó con una velocidad inicial igual a cero.

RESOLUCIÓN :



$d = 294,30$ m
$V_i = 0$
$t = ?$

$$d = d_t - d_{t-2} = 294,3$$

$$d_t - d_{t-2} = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g (t-2)^2$$

$$d_t - d_{t-2} = \frac{1}{2} g \left[t^2 - (t-2)^2\right]$$

$$d_t - d_{t-2} = \frac{1}{2} g \left[t^2 - t^2 + 4t - 4\right]$$

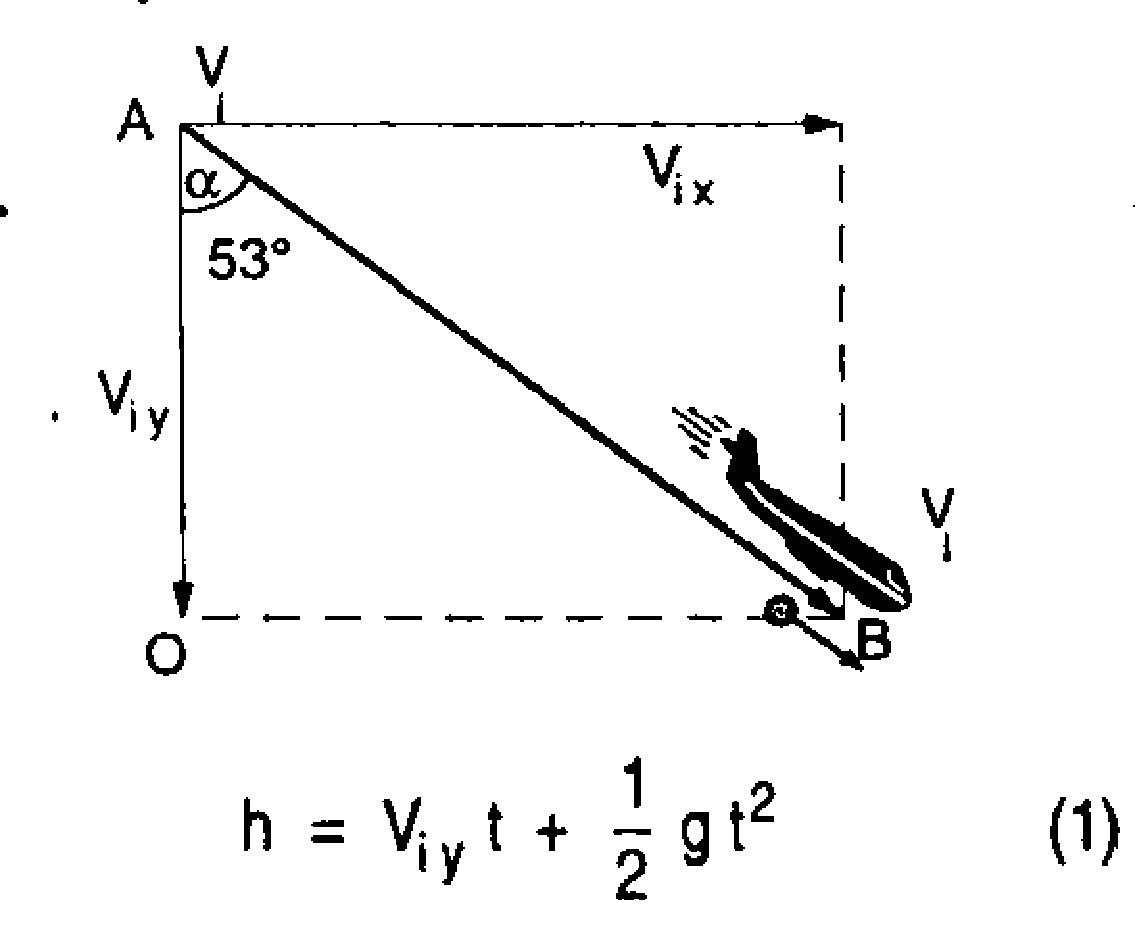
$$294,3 = 2g(t-1)$$

$$(t-1) = \frac{294,30}{2(9,81)} = 15\ \text{s}$$

Rpta.: $t = 16$ s

PROBLEMA 20. Un avión baja en picada, formando un ángulo de 53° con la vertical y arroja una bomba a una altura de 900 m. La bomba llega al suelo 6 s después. Calcular la velocidad de picada del avión, en el momento de arrojar la bomba (considerar $g = 10$ m/ s^2)

RESOLUCIÓN : El avión para empezar la bajada, o la picada, lleva una velocidad V_i, en la bajada lleva una velocidad V_o, a esa velocidad va a salir la bomba, en otras palabras, esa es la velocidad inicial de la bomba, luego calcular esta velocidad es hallar la velocidad de avión en el momento de arrojar la bomba.



$$h = V_{iy}\,t + \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Pero en el triángulo AOB: $V_{iy} = V_i \cos 53°$

Pero $\cos 53° = \frac{3}{5}$; luego:

$$V_{iy} = V_i \times \frac{3}{5}$$

Sustituyendo los valores en (1):

$$900\text{ m} = V_i \times \frac{3}{5} \times 6\text{ s} + \frac{1}{2} \times 10\text{ m/s}^2 \times (6\text{ s})^2$$

$$900\text{ m} = V_i \times \frac{18}{5}\text{ s} + 180\text{ m}$$

de donde:

Rpta.: $V_i = 200$ m / s

PROBLEMA 21. Se están soltando objetos desde cierta alturcon una frecuencia "f". Despreciando el rozamiento del aire, calcular la separación "h" entre dos objetos que caen contiguos, después de un tiempo "t".

RESOLUCIÓN :

Caída libre sin velocidad inicial es:

$$h = \frac{1}{2} g t^2$$

Luego, caída del primer objeto:

http://librosysolucionarios.net

$$h_1 = \frac{1}{2} g t^2 \qquad (1)$$

Como frecuencia es el número de objetos que caen en un tiempo determinado, la inversa de la frecuencia es el tiempo que los separa en ser soltado uno y otro objeto , luego caída del segundo objeto:

$$h_2 = \frac{1}{2} g \left(t - \frac{1}{f}\right)^2$$

Distancia que lo separa:

$$h = h_1 - h_2 = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g \left(t - \frac{1}{f}\right)^2$$

$$h = \frac{1}{2} g t^2 - \frac{1}{2} g t^2 + \frac{g t}{f} - \frac{1}{2} g \frac{1}{f^2}$$

Rpta.: $h = \frac{g}{f}\left(t - \frac{1}{2f}\right)$

PROBLEMA 22. Un cuerpo de masa "m" es lanzado verticalmente hacia arriba, alcanza una altura "h" después de un tiempo "t_1" ynuevamente, al cabo del tiempo "t_2". Hallar la altura "h" y también la velocidad inicial "V_i" con que fué lanzado.

RESOLUCIÓN :

I. El cuerpo de masa "m" llega a "h" en un tiempo t_1, éste sigue subiendo hasta lograr detenerse y luego baja alcanzando la misma posición "h" con respecto al piso para un tiempo t_2.

II. Se sabe que si un cuerpo se lanza verticalmente hacia arriba:

$$h = V_i t - \frac{1}{2} g t^2$$

Igualando a cero, se tiene:

$$\frac{1}{2} g t^2 - V_i t + h = 0$$

de donde por propiedades de las raíces de una ecuación de segundo grado:

a) $t_1 + t_2 = -\left(\frac{-V_1}{(1/2)\, g}\right)$ luego:

$$t_1 + t_2 = \frac{2 V_i}{g} \quad \text{de donde:}$$

Rpta. 1 : $V_i = \frac{g}{2}(t_1 + t_2)$

b) $t_1 . t_2 = \frac{h}{(1/2)\, g}$ de donde:

Rpta. 2 : $h = \frac{1}{2} g t_1 t_2$

PROBLEMA 23. Una pelota es lanzada verticalmente hacia arriba. Al regresar a la tierra y dar el primer bote, se observa que su velocidad inicial se redujo en 10%. ¿En qué porcentaje se reduce su altura máxima?

RESOLUCIÓN : Utilizando la fórmula:

$$h_{max} = \frac{V_i^2}{2g} \qquad (I)$$

Después de primer bote se tiene:

$$h'_{max} = \frac{V_i'^2}{2g} \doteq \frac{(0{,}9\, V_i)^2}{2g}$$

$$h'_{max} = 0{,}81 \frac{V_i^2}{2g} \qquad (II)$$

Sustituyendo (I) en (II) :

$$h'_{max} = 0{,}81\, h_{max}$$

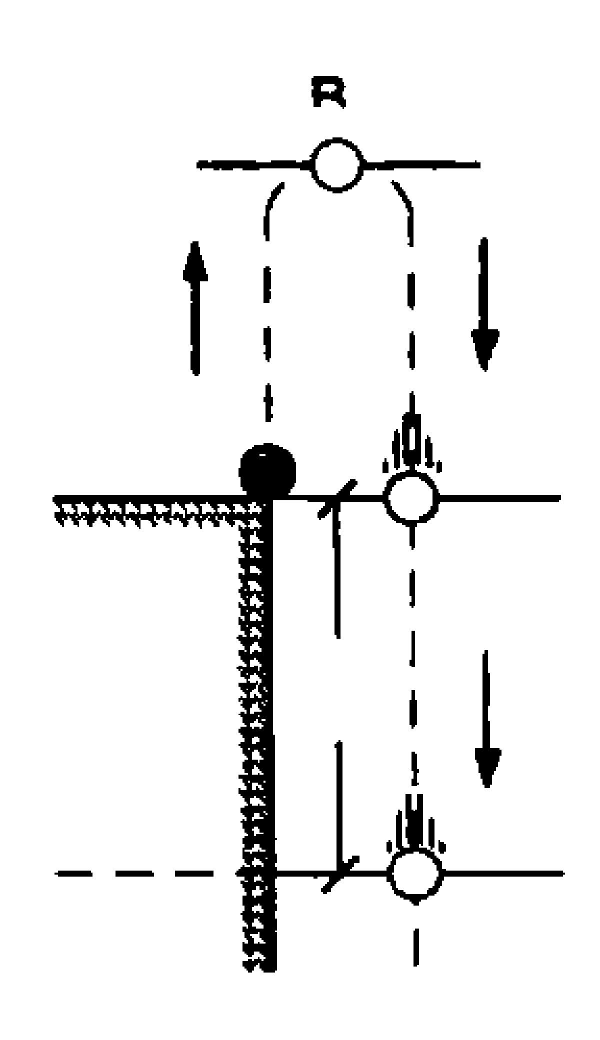
Entonces, se ve que la reducción de h_{max} es 0,19 h_{max} , que porcentualmente resulta ser:

Rpta.: 19%

PROBLEMA 24. Se lanza una piedra verticalmente hacia arriba con rapidez de 8 m/s. Calcular el tiempo que debe pasar para que tenga una velocidad de 30 m/s.

RESOLUCIÓN :

$V_i = 8$ m/s ; $t = ?$; $V_f = 30$ m/s



Si alcanza una velocidad de 30 m/s, quiere decir que al lanzarlo hacia arriba, alcanza su altura máxima cuando su velocidad vale 0, de aquí empieza el regreso, aumenta su velocidad, pasa por el sitio donde fue lanzado (con la misma rapidez V_i del lanzamiento) y continua hasta alcanzar 30 m/s.

- Cálculo del tiempo de vuelo, es decir el tiempo empleado en subir AB y bajar BC:

$$t_{vuelo} = \frac{2V_1}{g} = \frac{2 \cdot 8}{10} = 1,6\,s$$

- Cálculo del tiempo de caída CD:

$$V_f = V_i + g\,t_2$$

(El signo es positivo por que la piedra está cayendo).

$$30 = 8 + 10 \cdot t_2 \;\; ; \text{ de donde:}$$

$$t_2 = 2,2\,s$$

$$\therefore\; t_T = t_{vuelo} + t_2 = 1,6\,s + 2,2\,s$$

Rpta.: $t_T = 3,8\,s$

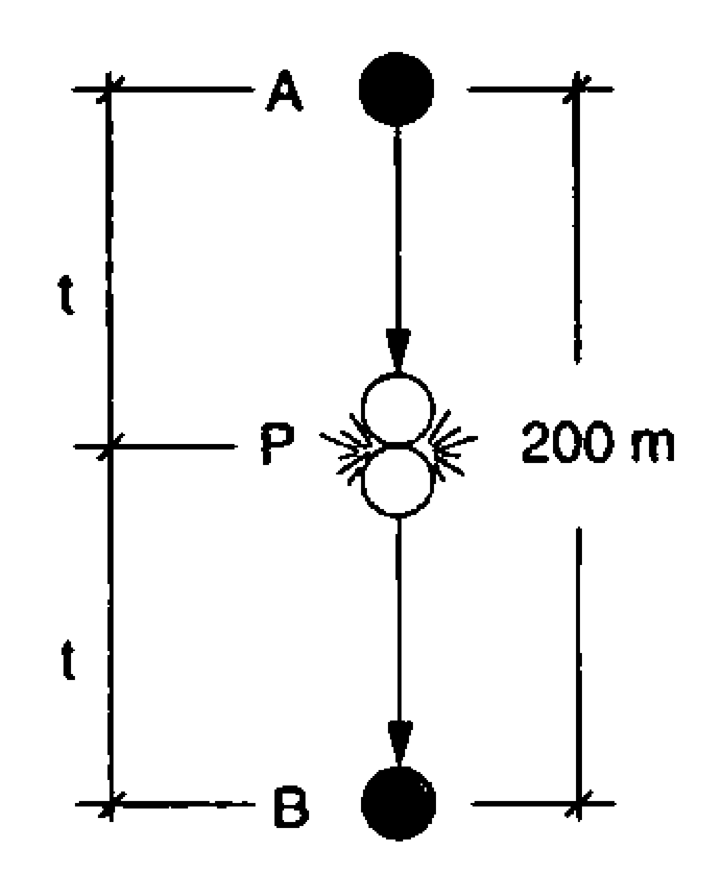
PROBLEMA 25. Dos cuerpos (A arriba y B abajo) están en una misma vertical separados en 200 m. si se lanzan al mismo tiempo uno al encuentro del otro con rapideces iniciales: $V_A = 5$ m/s y $V_B = 10$ m/s ¿ai cabo de cuánto tiempo chocan?

RESOLUCIÓN : $V_B = 10\,m/s$

$t = ?$

$e_{AB} = 200\,m$

$V_A = 5\,m/s$



Si se lanzan simultáneamente el tiempo en movimiento es el mismo para los dos. Los espacios son diferentes.

Para A: $e_{AP} = V_A\,t + \frac{1}{2}g\,t^2$ (baja $\therefore$ +)

Para B: $e_{BP} = V_B\,t - \frac{1}{2}g\,t^2$ (sube $\therefore$ -)

Sumando: $e_{AB} = (V_A + V_B)\,t$

$$\therefore\; t = \frac{e_{AB}}{V_A + V_B} \quad \text{sustituyendo datos:}$$

$$t = \frac{200\,m}{5\,m/s + 10\,m/s} = \frac{200}{15}\,s$$

Rpta.: $t = 13,\overset{\frown}{3}\,s$; chocan

PROBLEMA 26. Del techo de un ascensor de 3,50 m de alto, que sube con una aceleración retardataria de 2 m/s², cae un perno, cuando su velocidad era de 3 m/s. Al cabo de cuánto tiempo cae al piso del ascensor.

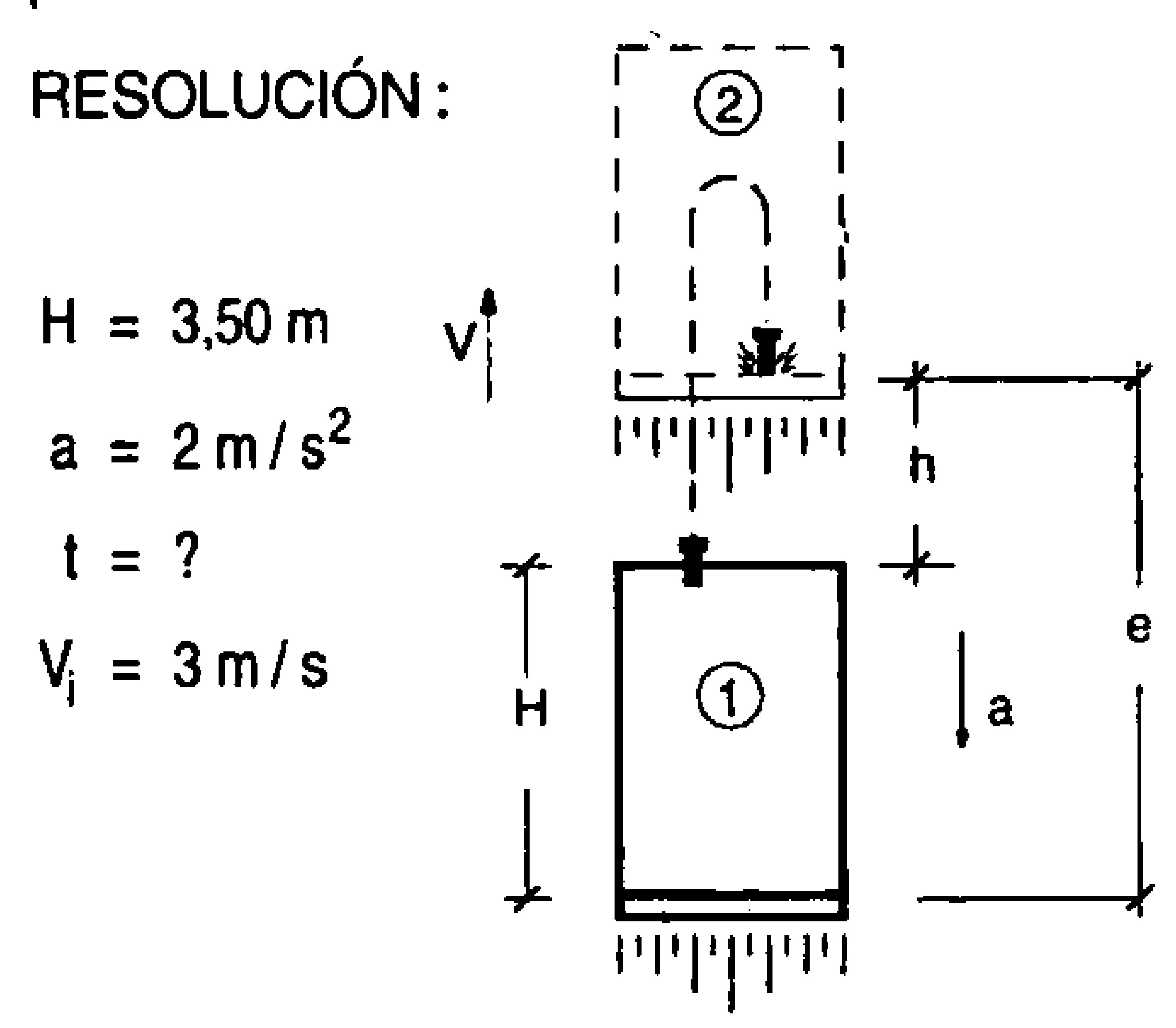
RESOLUCIÓN :

$H = 3,50\,m$

$a = 2\,m/s^2$

$t = ?$

$V_i = 3\,m/s$



Aceptamos que el suceso ha ocurrido como se indica en la figura, entonces:

http://librosysolucionarios.net

- Para el ascensor: $e = V_i t - \frac{1}{2} g t^2$

- Para el perno: $h = V_i t - \frac{1}{2} a t^2$

Restando miembro a miembro:

$$e - h = \frac{1}{2} t^2 (g - a)$$

Pero: $e - h = H$ $\therefore$

$$H = \frac{1}{2} t^2 (g - a) \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2H}{g - a}}$$

Con datos: $t = \sqrt{\frac{2 \times 3{,}50}{10 - 2}}$

Rpta.: $t = 0{,}94$ s

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un cuerpo se deja caer desde una altura de 60 m ($g = 10$ m/s²). Calcular:

a) La velocidad a los 3 s.
b) El tiempo que demora en caer.

Rpta.: a) 30 m/s y b) 3,46 s

2. Se lanza un objeto verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 80 m/s; $g = 10$ m/s². Calcular qué velocidad tiene:

a) A los 2 s b) A los 8 s c) A los 12 s

Rpta.:

a) 60 m/s (está subiendo)
b) 0 m/s (alcanzó su altura máxima)
c) -20 m/s (está bajando)

3. Se lanza un cuerpo verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 70 m/s. ¿A qué distancia del punto de lanzamiento se encontrará cuando su velocidad sea de -10 m/s ($g = 10$ m/s²).

NOTA: Si la velocidad es de -10 m/s quiere decir que está bajando. Si la velocidad fuera de 10 m/s significaría que está subiendo, pero en ambos casos estaría a la misma distancia del punto de lanzamiento. (sugerencia: $V_i^2 = V_f^2 - 2gh$)

Rpta.: h = 49 m

4. Desde la azotea de un edificio de 6 pisos (cada piso mide 3 m) cae una pelota. Cuál será la velocidad:

a) Cuando llega al techo del 1er. piso.
b) Cuando toca el suelo.

Rpta.: a) 17,32 m/s y b) 18,97m/s

5. Del techo de un ascensor de 4 m de alto que sube con una aceleración de - 3 m/s² cae un perno. ¿Al cabo de cuánto tiempo toca el piso?

Rpta.: t = 1,07 s

6. Un proyectil es disparado vertical-mente hacia arriba con una velocidad inicial de 400 m/s. Calcular:

a) El tiempo que tarda en detenerse y empezar el regreso.
b) La altura máxima que alcanza.
c) El tiempo de vuelo ($g = 10$ m/s²)

Rpta.: a) 40 s b) 8 000 m c) 80 s

7. Un cuerpo se suelta en el vacío y cae. Calcular:

a) Altura que debe caer para recorrer en los 2 últimos segundos la dis-tancia de 60 m.
b) ¿Qué distancia recorrerá el cuerpo en el último segundo de su movimiento vertical de caída libre? ($g = 10$ m/s²)

Rpta.: a) 80 m b) 35 m

8. Se lanza un proyectil en forma vertical hacia arriba, con una velocidad de 20 m/s. Al mismo tiempo se deja caer un cuerpo desde una altura de 30 m. Calcular:

a) ¿Cuánto tiempo después del disparo se

http://librosysolucionarios.net

cruzan? ($g = 10\ m/s^2$)

b) ¿A qué altura del piso?

Rpta.: a) 1,5 s b) 18,75 m

9. Un helicóptero suelta una bomba que cae al suelo 18 s después. ¿A qué altura volaba el helicóptero.

Rpta.: 1 620 m

10. Un cohete que asciende verticalmente con una velocidad de 160 m/s, deja caer un aparato que llega al suelo 40 s después. ¿A qué altura se desprende el aparato?

Rpta.: 1 600 m.

11. Un proyectil es lanzado verticalmente hacia arriba, con una velocidad tal que alcanza una altura de 2 000 m. Calcular:

a) Velocidad a los 4 s

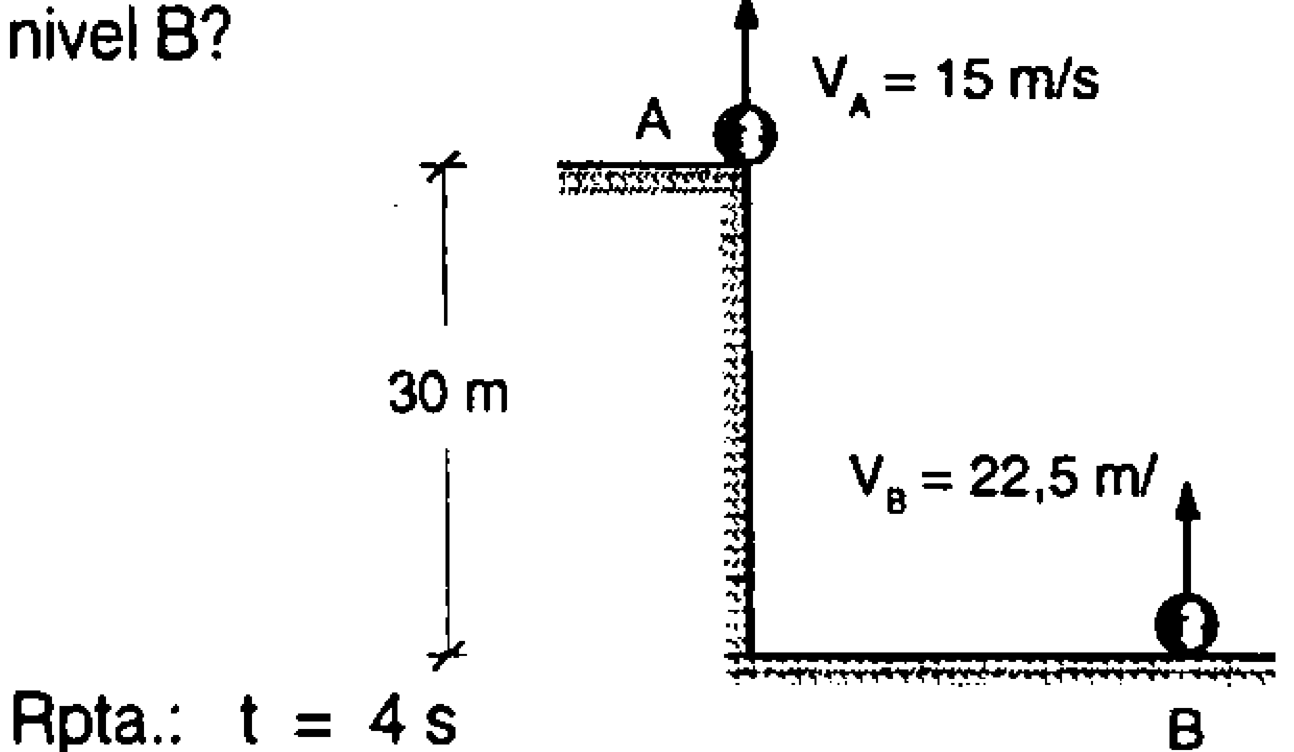
b) En qué tiempo su velocidad es 50 m/s ($g = 10\ m/s^2$)

Rpta.: a) 160 m/s b) 15 s

12. Calcular con qué velocidad inicial fue lanzada una piedra verticalmente hacia arriba para que el módulo del vector desplazamiento entre el intervalo t_1 a t_2 sea cero ($t_2 > t_1$). Se sabe que $t_1 + t_2 = 5$ s y además que $g = 10\ m/s^2$

Rpta.: $V_i = 25$ m/s

13. Dos piedras se lanzan verticalmente y en el mismo instante, desde A y B con velocidades de 15 m/s y 22,5 m/s respectivamente. ¿Para qué instante "t" después del lanzamientos estarán a la misma altura del nivel B?



Rpta.: t = 4 s

14. Un piloto de un avión deja caer una señal luminosa desde cierta altura. La señal cae libremente con $V_i = 0$ y un observador ve que a las 3 p.m. la señal pasa por un punto situado a 250 m de altura y que choca con el piso a las 3 p.m. con 5 s. Hallar el tiempo que la señal permaneció en el aire ($g = 10\ m^2$).

Rpta.: t = 7,5 s

15. Se lanza un cuerpo de 20 g de masa, con una velocidad V, l ogrando una altura H. Determinar qué altura lograría si su velocidad fuera de 3V.

Rpta.: h = 9 H

16. ¿Con qué velocidad se debe lanzar un proyectil verticalmente hacia arriba, para que en el último segundo de caída recorra H metros? sabiendo que esta caída dura "n" s

Rpta.: $V_i = \dfrac{2H - g(2n - 1)}{2}$

17. De la azotea de un edificio de altura "h", se suelta una moneda. Un hombre situado en un ascensor parte simultáneamente del piso y sube con una velocidad constante de 10 m/s, ve la moneda a "h/4" de la base del edificio. Hallar "h".

Rpta.: h = 244,65 m

18. La masa de un martinete cae desde una altura de 2,5 m ; para levantarla a esta altura es necesario gastar un tiempo 3 veces mayor que para la caída. ¿Cuántos golpes hace ésta en 1 minuto, si la aceleración de la caída libre de la masa del martinete es de 9,81 m/s²?

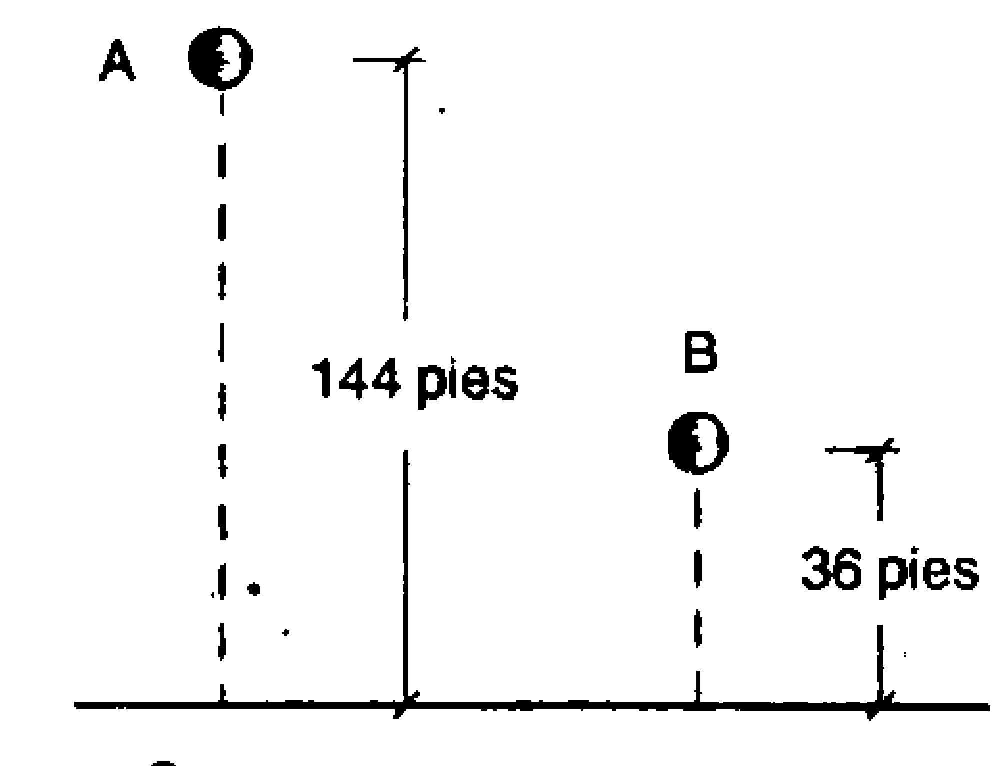
Rpta.: 21 golpes

19. Unas gotas de agua salen del orificio de un tubo vertical con el intervalo de 0,1 s cae con una aceleración de 981 cm/s². Determinar la distancia entre la primera y segunda gota pasando un segundo después que sale la primera gota.

http://librosysolucionarios.net

Rpta.: 93,2 cm

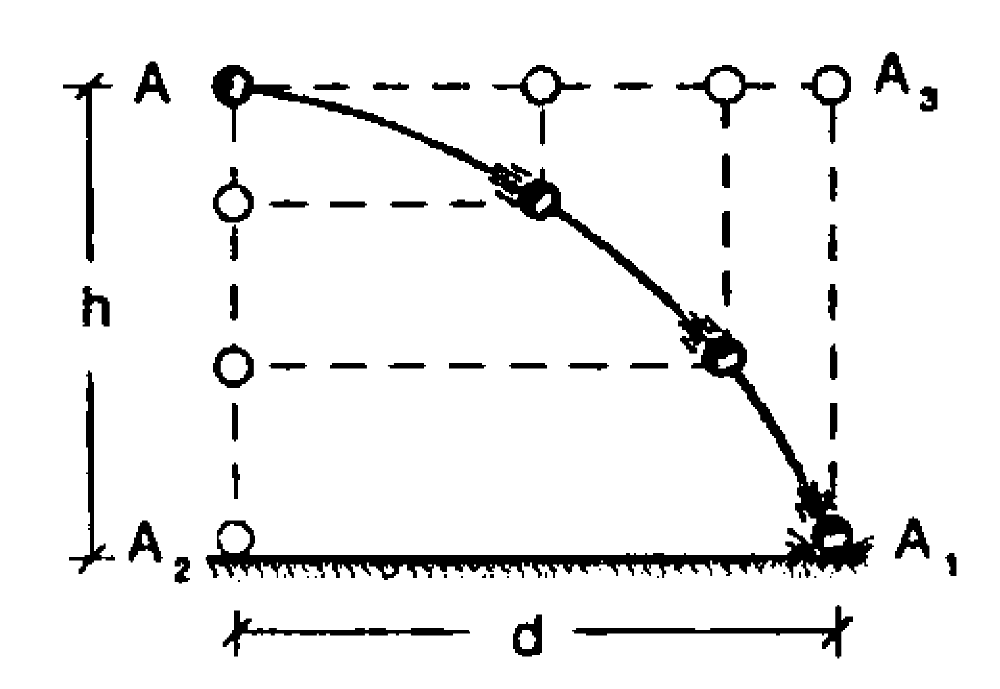
20. Sobre una placa elástica caen libre-mente 2 bolas metálicas, tal como se muestra en la figura. La bola "B" cae T segundos después que "A". Al pasar cierto tiempo después las velocidades de la bolas coinciden (en todo). Determinar el lapso "T" y el intervalo de tiempo durante el cual las velocidades de dichas bolas cumplan con la condición antes mencionada ($g = 32$ pies/s^2)



Rpta.: 3 s

MOVIMIENTO COMPUESTO

Es aquel en cual existe simultáneamente 2 ó más tipos de movimientos. Por ejemplo: Movimiento horizontal y vertical a la vez.

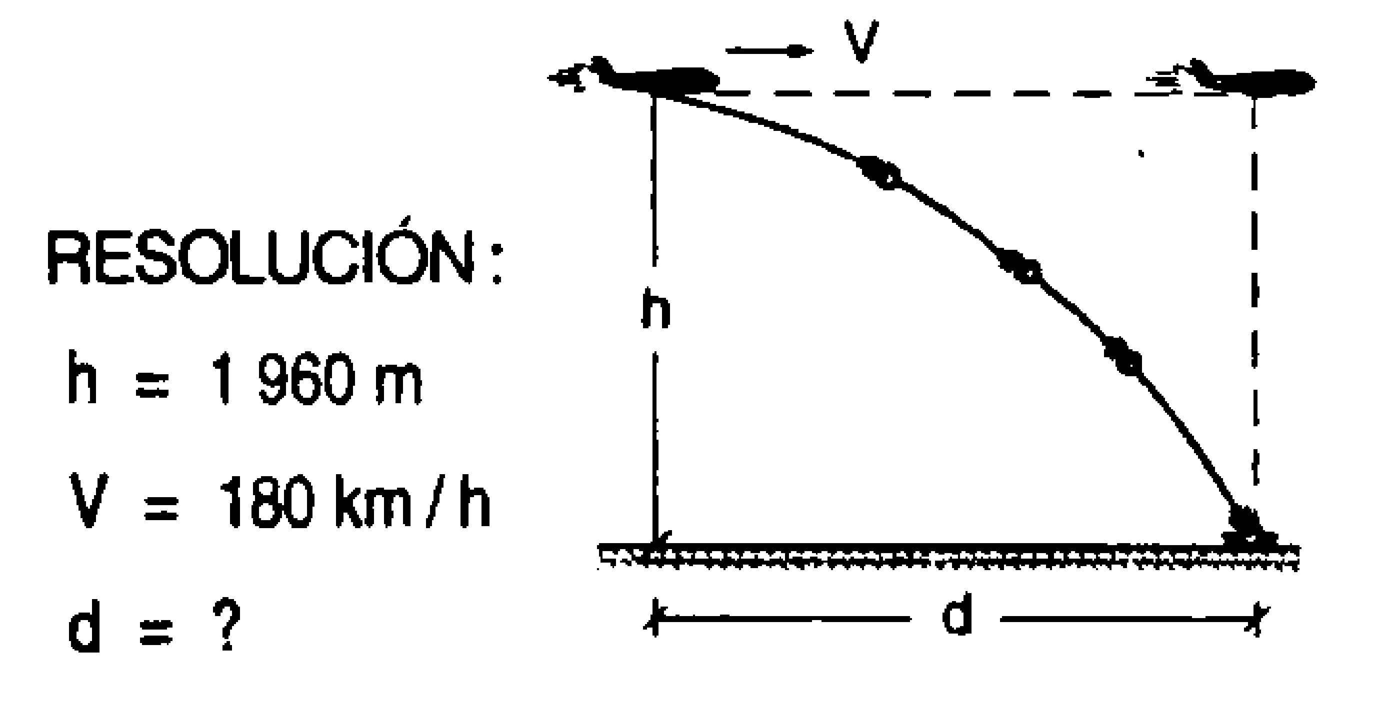


Experimentalmente se ha comprobado que si se lanza una esferita rodando sobre una mesa, hasta que salga de la mesa, la bolita, después de avanzar una longitud horizontal, caerá al suelo; el tiempo que demora en caer al punto A_1, en el suelo, es el mismo tiempo que habría empleado en caer libremente de A a A_2, y es el mismo tiempo que habría empleado en desplazarse horizontalmente hasta A_3 resbalando por una superficie sin rozamiento. La trayectoria que describe la bolita lanzada es una línea curva llamada parábola, se indica en la figura, siguiendo las sucesivas posiciones.

PRINCIPIO DE LA INDEPENDENCIA DE LOS MOVIMIENTOS (PLANTEADA POR GALILEO)

Si un cuerpo experimenta un movimiento compuesto, se verifica que cada uno de los movimientos componentes se desarrolla con sus propias leyes en forma independiente pero simultánea.

EJEMPLO 1: Un avión vuela horizontalmente a 1 960 m de altura, a una velocidad de 180 km/h. Del avión cae un cajón de provisiones a un grupo de personas. ¿Cuántos metros antes de volar sobre el grupo debe soltar el cajón?



RESOLUCIÓN:

$h = 1\,960$ m

$V = 180$ km/h

$d = ?$

Como el tiempo que demora en caer verticalmente y el tiempo que demora en caer en curva es el mismo, se calcula el tiempo que demora en caer "h". ($V_i = 0$)

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

$$t = \sqrt{\frac{2 \times 1\,960\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 20\ s$$

Horizontalmente ha estado avanzando durante los 20 s a la misma velolocidad del avión, es decir a la velocidad con que fue soltado.

$$d = v\,t = 180\ km/h \times 20\ s$$

http://librosysolucionarios.net

$d = (180 \times 1\,000\ m / 3\,600\ s)\ 20\ s$

$d = 1\,000\ m$

Rpta.: Desde el avión se deberá soltar el cajón 1 000 m antes de volar exactamente sobre el grupo.

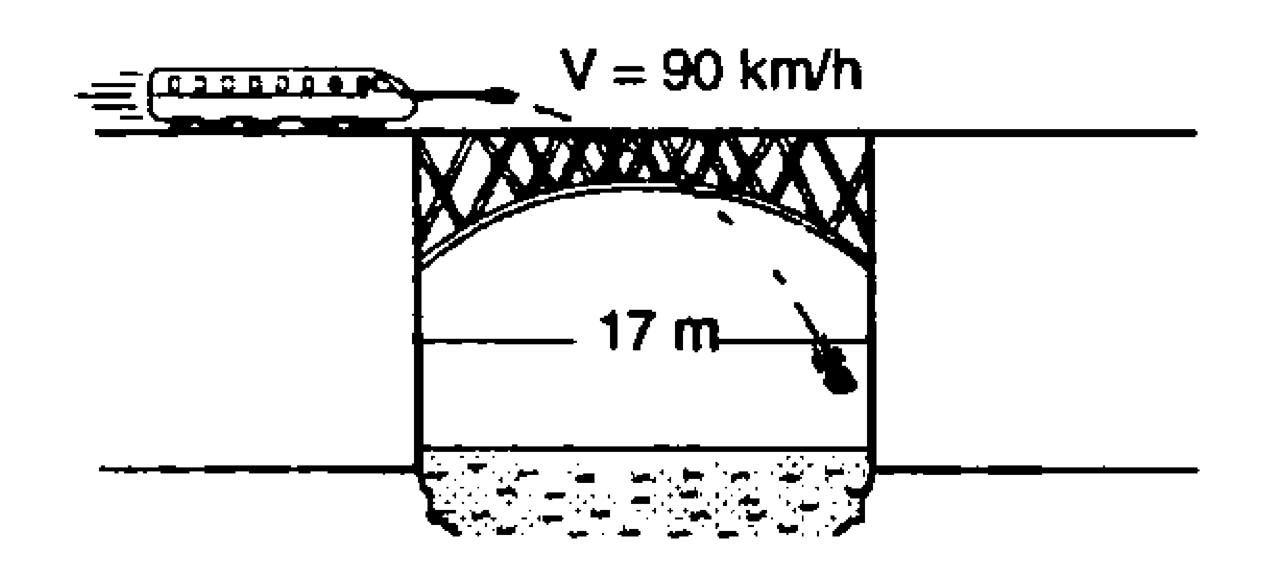
Ejemplo 2: Un tren avanza a 90 km/h y entra a un puente de 17 m de largo y justo en el momento de entrar al puente un pasajero deja caer, afuera del tren, una pequeña piedra a una altura de 2,45 m del suelo. ¿La piedra caerá al agua?

RESOLUCIÓN:

$V = 90\ km/h$

$d = 17\ m$

$h = 2{,}45\ m$



El tiempo que demora en caer verticalmente será el tiempo que recorra horizontalmente.

a) Tiempo que demora en caer 2,45 m

como $V_{iy} = 0$, $h = \frac{1}{2} g t^2$ de donde

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 2{,}45\ m}{9{,}8\ m/s^2}} = 0{,}7\ s$$

b) Distancia horizontal que recorre la piedra en este tiempo:

$d = V_T \times t = 90\ km/h \times 0{,}7\ s = 17{,}5\ m$

Rpta.: Como la piedra se desplaza un espacio de 17,5 m no cae al agua, cae fuera del puente que tiene sólo 17 m.

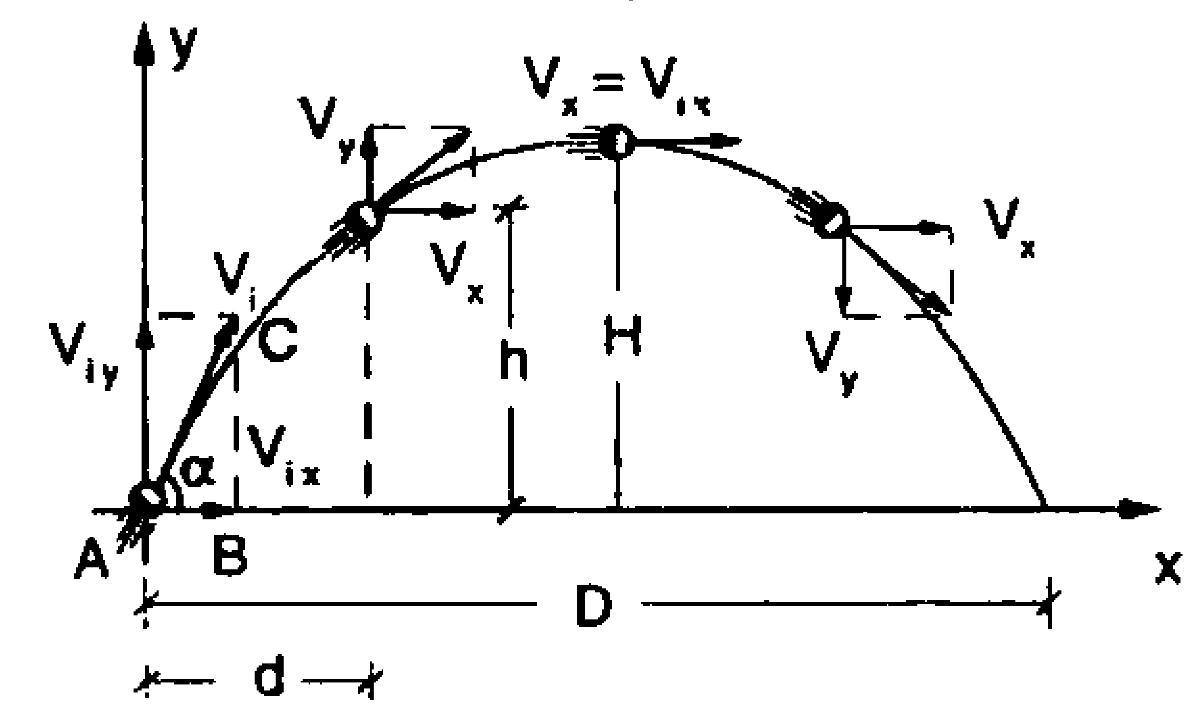
MOVIMIENTO PARABÓLICO

(INTRODUCCIÓN A LA BALÍSTICA)

El movimiento de un proyectil es parabólico, y en el vacío, resulta de la composición de un movimiento horizontal rectilíneo y uniforme, y un movimiento vertical uniformemente variado por la acción de la aceleración de la gravedad (retardado en la primera parte y acelerado en la segunda parte).

CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

a) Forma de la trayectoria: Parábola



b) Velocidad horizontal: Constante.

$(V_{ix} = V_x = \text{cte.})$

En el triángulo vectorial ABC:

$V_{ix} = V_i \cos a$

Pero: V_{ix} = cte. y se le designa con V_x, luego:

$$\boxed{V_x = V_i \cos \alpha}$$

c) Velocidad vertical: Uniformemente variada

Cumple con las siguientes fórmulas:

$$\boxed{y = V_{iy} t - \frac{1}{2} g t^2}$$

$$\boxed{V_y = V_{iy} - g t}$$

$$\boxed{V_y^2 = V_{iy}^2 - 2 g y}$$

Tomando en cuenta el ángulo α:

I. Velocidad vertical inicial:

$$V_{iy} = V_i \text{ sen } \alpha$$

II. Velocidad vertical en un punto cualquiera de la trayectoria:

$$V_y = V_{iy} - g\,t$$

Como: $V_{iy} = V_i \text{ sen } \alpha$, luego:

$$\boxed{V_y = V_i \text{ sen } \alpha - g\,t}$$

En esta fórmula, se tiene en cuenta que para un valor negativo de V_y el proyectil estará en descenso, y para un valor positivo estará en ascenso.

Ejemplo: Un proyectil se lanza con una velocidad inicial de 98 m/s y un ángulo de tiro de 30°. Hallar la componente vertical de la velocidad al cabo de 10 s de haber sido lanzado (considerar g = 10 m/s²).

RESOLUCIÓN :

$$V_y = V_i \text{ sen } \alpha - g\,t$$

$$V_y = 98 \times \text{sen } 30° - 10 \times 10$$

$$V_y = 49 - 100 = -51 \text{ m/s}$$

El signo negativo indica que el proyectil está en descenso .

d) Magnitud de la velocidad o rapidez en cualquier punto.

$$\boxed{V_y^2 = V_{iy}^2 - 2\,g\,y}$$

Donde:

$$V_x = V_i \cos \alpha$$

$$V_y = V_i \text{ sen } \alpha - g\,t$$

e) Tiempo "t" para altura máxima "H"

Se sabe: $V_y = V_i \text{ sen } \alpha - g\,t$

La altura "H" es máxima cuando: $V_y = 0$

Luego: $0 = V_i \text{ sen } \alpha - g\,t$

De donde: $\boxed{t = \dfrac{V_i \text{ sen } \alpha}{g}}$

Como este tiempo corresponde cuando logra la altura máxima, es también el tiempo para lograr la mitad de su alcance horizontal "D/2". Esto indica que el tiempo para recorrer toda la distancia "D", horizontal será:

$$t_{total} = t_{subida} + t_{bajada}$$

$$t_{total} = \frac{V_i \text{ sen } \alpha}{g} + \frac{V_i \text{ sen } \alpha}{g}$$

$$\therefore \quad \boxed{t_{total} = \frac{2\,V_i \text{ sen } \alpha}{g}}$$

f) Altura máxima "H".

Sabiendo que:

$$V_y^2 = V_i^2 \text{ sen}^2 \alpha - 2\,g\,H$$

Cuando la altura es máxima, $V_y = 0$, de tal manera que:

$$0^2 = V_i^2 \text{ sen}^2 \alpha - 2\,g\,H$$

$$\boxed{H = \frac{V_i^2 \text{ sen}^2 \alpha}{2\,g}}$$

g) Alcance horizontal "D"

$$D = V_i \cos \alpha \,.\, t_{total} \qquad (1)$$

Pero: $t_{total} = \dfrac{2\,V_i \text{ sen } \alpha}{g}$ (2)

Reemplazando (2) en (1) :

$$D = V_i \cos \alpha \,.\, \frac{2\,V_i \text{ sen } \alpha}{g}$$

$$D = \frac{V_i^2 \cdot 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}{g}$$

$$\therefore \quad \boxed{D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}}$$

El alcance horizontal es **máximo**, cuando el numerador es máximo; para que así sea el sen 2 a debe ser máximo, es decir igual a 1. Así:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1 \quad \text{luego:} \quad 2\alpha = 90°$$

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = 45°}$$

Por consiguiente, para lograr un alcance horizontal máximo el disparo debe ser con un ángulo de inclinación de 45°.

EN UN MOVIMIENTO PARABÓLICO SE TIENE EN CUENTA QUE

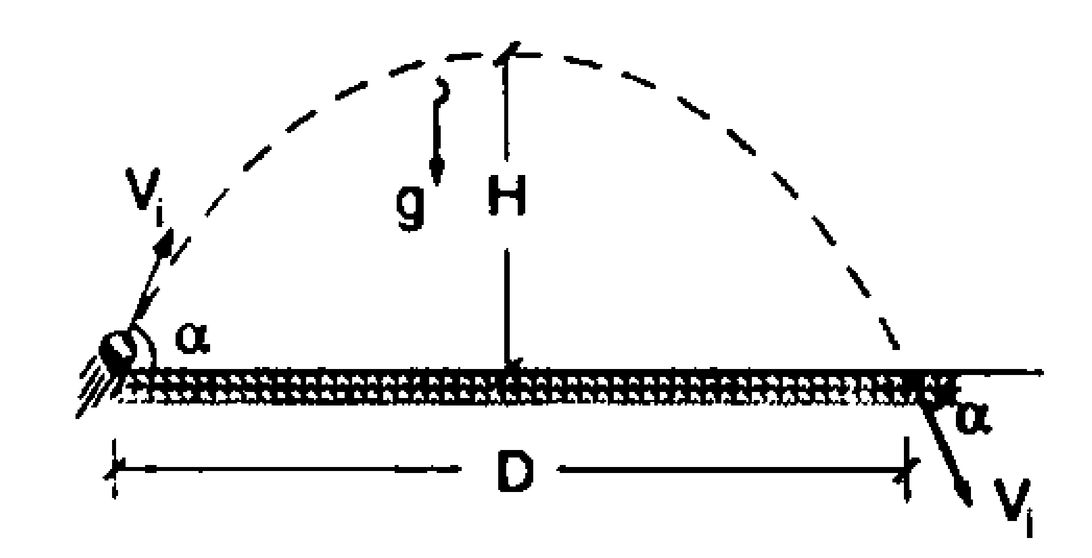
a) La única fuerza sobre el proyectil es la fuerza de gravedad.

b) La curvatura de la tierra se desprecia

c) Las alturas alcanzadas, no motivan una variación en el valor de "g".

d) La resistencia por parte del aire se desprecia

Ejemplo 1. Determinar H_{max} en función de "t" y "g" para la siguiente trayectoria mostrada.



RESOLUCIÓN : Por fórmula.

t : tiempo de permanencia del proyectil en el aire.

$$\operatorname{sen} 2\alpha = 1 \quad \text{luego:} \quad 2\alpha = 90°$$

$$\therefore \quad \alpha = 45°$$

Por otra parte se sabe que:

$$H_{max} = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \qquad (2)$$

Reemp. (2) en (1): $t^2 = \frac{8}{g} \times H_{max}$

$$\therefore \quad \boxed{H_{max} = \frac{g t^2}{8}}$$

Ejemplo 2. Hallar una relación: H/D.

RESOLUCIÓN : Se sabe:

$$H = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g} \qquad (1)$$

También: $$D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{g} \qquad (2)$$

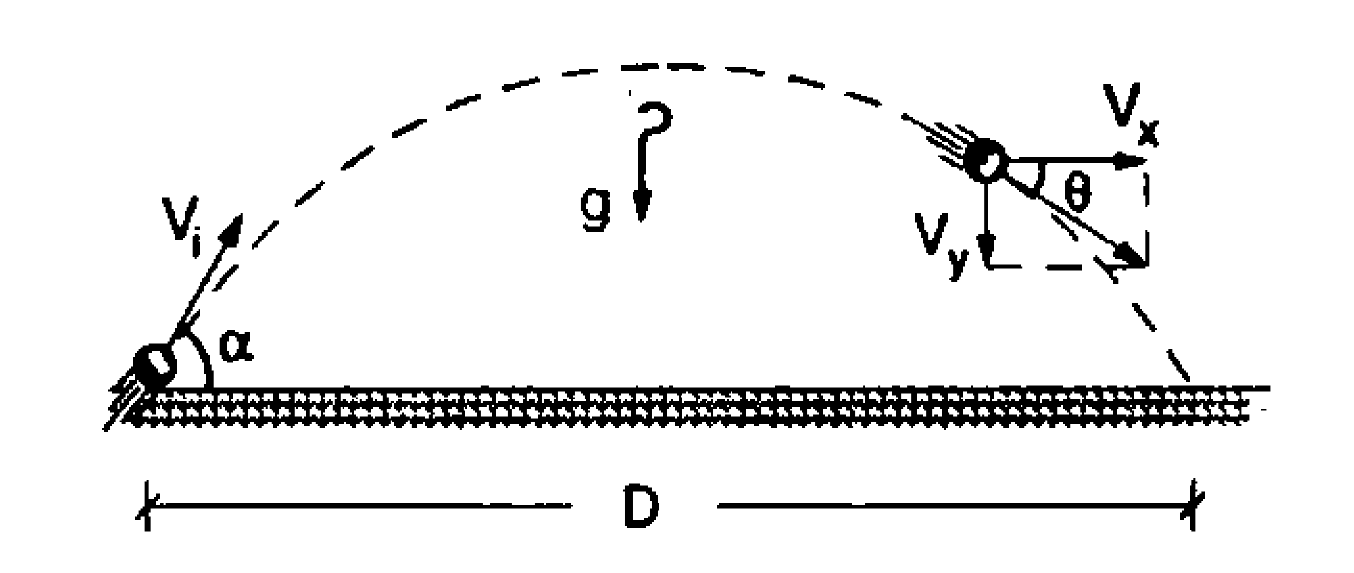
Dividiendo (1) ÷ (2):

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \frac{H}{D} = \frac{\dfrac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 \alpha}{2g}}{\dfrac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}}$$

$$\frac{H}{D} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{2 \operatorname{sen} 2\alpha} = \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{4 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{H}{D} = \frac{1}{4} \operatorname{tg} \alpha}$$

Ejemplo 3. Hallar una fórmula para determinar la rapidez en cualquier instante "t", con ángulo "a" y velocidad inicial V_i.



RESOLUCIÓN :

Se sabe: $V = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$ (1)

$V_x = V_i \cos\alpha$ (2)

$V_y = V_i \operatorname{sen}\alpha - g\,t$ (3)

(2) y (3) en (1) :

$$V = \sqrt{(V_i \cos\alpha)^2 + (V_i \operatorname{sen}\alpha - g\,t)^2}$$

$$V = \sqrt{V_i^2\cos^2\alpha + V_i^2\operatorname{sen}^2\alpha - 2gt\,V_i\operatorname{sen}\alpha + g^2t^2}$$

$$V = \sqrt{V_i^2(\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha) - 2gt\,V_i\operatorname{sen}\alpha + g^2t^2}$$

$$\boxed{V = \sqrt{V_i^2 - 2\,g\,t\,V_i \operatorname{sen}\alpha + g^2t^2}}$$

Ejemplo 4:

a) ¿ Cuál es la rapidez vertical V_y, si $V_i = 100$ m/s, a = 60°, a los 10 s ?

RESOLUCIÓN : $V_y = V_i \operatorname{sen}\alpha - g\,t$

$$V_y = 100\frac{m}{s} \times \operatorname{sen}60° - 9{,}8\frac{m}{s^2} \times 10\,s$$

Rpta.: $V_y = -11{,}40\ \frac{m}{s}$

El que la velocidad tenga valor negativo quiere decir que el proyectil ya está en el tramo de descenso.

b) ¿Cuál es la velocidad horizontal a los 10 s?

RESOLUCIÓN : Recuérdese que la velocidad V_x es siempre constante y no depende del tiempo, sólo de la V_i y del ángulo de disparo.

$$V_x = 100\,m/s \times \cos 60°$$

Rpta.: $V_x = 50\ \frac{m}{s}$; (cte.)

c) Calcular la velocidad total a los 10 s

RESOLUCIÓN:

$$V_T = \sqrt{V_y^2 + V_x^2}$$

$$V_T = \sqrt{(-11{,}4\,m/s)^2 + (50\,m/s)^2}$$

Rpta.: $V_T = 51{,}28\ \frac{m}{s}$

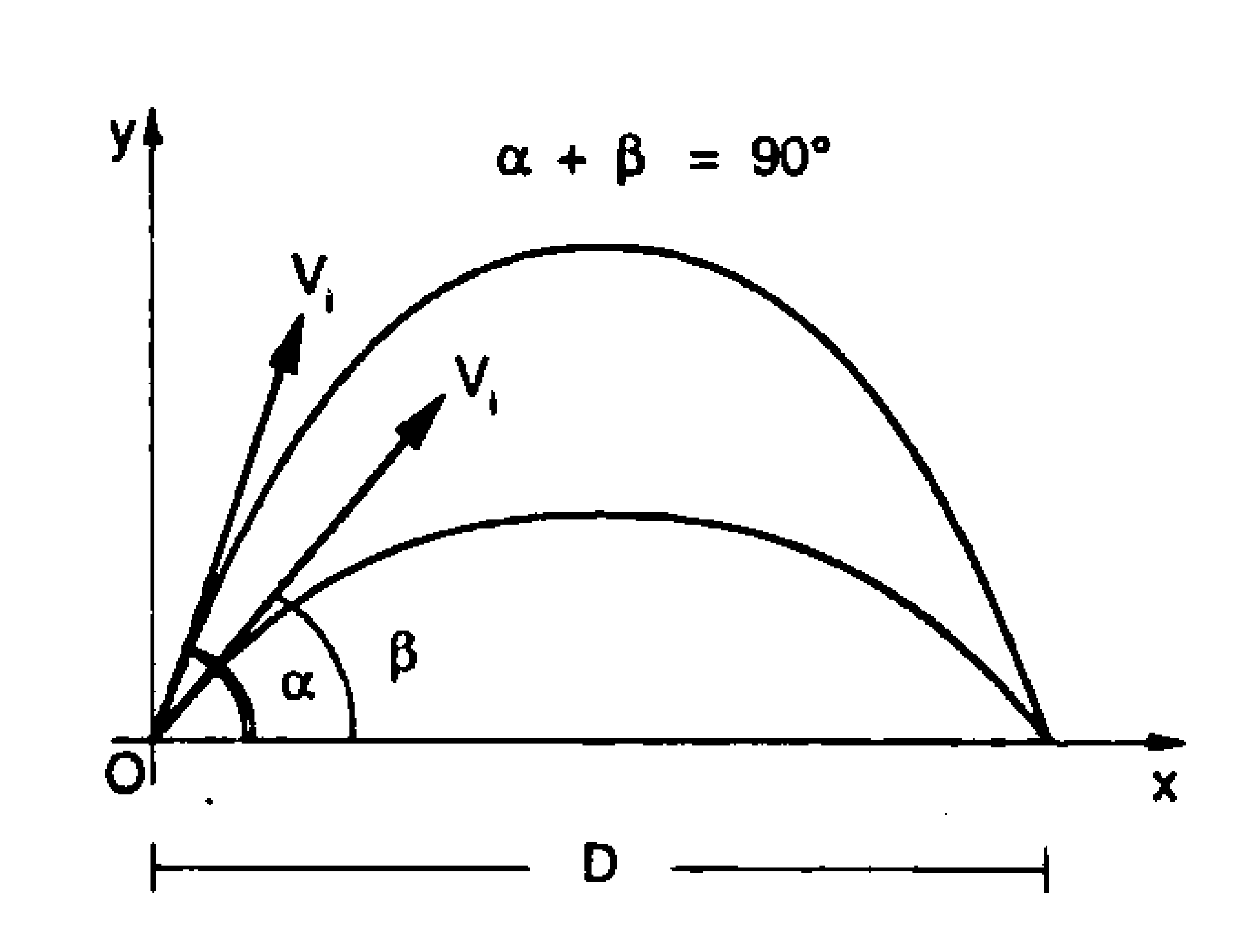
OTRAS CARACTERÍSTICAS DEL MOVIMIENTO PARABÓLICO

1. Cuando el proyectil regresa al plano del lanzamiento, el ángulo que forma con dicho plano es igual al ángulo de lanzamiento.

2. La velocidad con que el proyectil regresa al nivel del plano de lanzamiento es igual a la velocidad con que salió disparado (se desprecia el rozamiento del aire).

3. La velocidad y el ángulo que forma esta velocidad con la horizontal son iguales en dos puntos que están a la misma altura.

4. Si se dispara un proyectil con una misma velocidad que otro, pero formando ángulo de tiro complementario; el proyectil tiene el mismo alcance horizontal.



Sean: $\alpha + \beta = 90°$

En efecto se sabe que:

$$D = \frac{V_i^2 \text{ sen } 2\alpha}{g} \quad (1)$$

Como: $\alpha + \beta = 90° \Rightarrow \alpha = 90° - \beta$

$$D = \frac{V_i^2 \text{ sen } 2(90 - \beta)}{g}$$

$$D = \frac{V_i^2 \text{ sen } (180 - 2\beta)}{g}$$

pero sen (180 - 2 β) = sen 2 β, por consiguiente:

$$D = \frac{V_i^2 \text{ sen } 2\beta}{g} \quad (2)$$

Es decir: (1) = (2), el mismo alcance.

5. El ángulo de máximo alcance horizontal es el de 45°.

En efecto: $D = \dfrac{V_i^2 \text{ sen } 2\alpha}{g}$

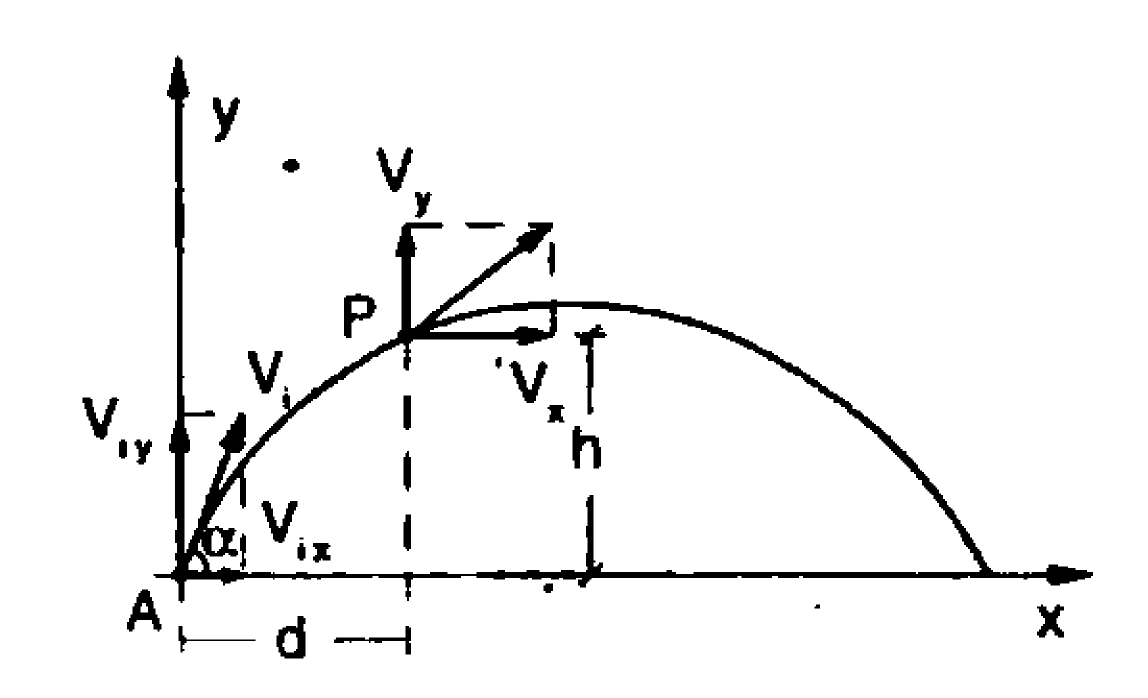
Para que este valor sea máximo, el numerador debe ser máximo. Como el que varía es el ángulo entonces:

sen 2 α debe ser máximo, es decir:

sen 2 α = 1 de donde: 2 α = 90°

$$\therefore \quad \boxed{\alpha = 45}$$

CÁLCULO DE "d", "t" y "h" EN UN PUNTO CUALQUIERA "P"



Movimiento Horizontal:

$V_x = \text{cte.}$; $d = V_x \cdot t$;

pero: $V_x = V_i \cos\alpha$

$$\therefore \quad \boxed{d = (V_i \cos\alpha)\, t} \quad (I)$$

$$\therefore \quad \boxed{t = \frac{d}{V_i \cos\alpha}} \quad (II)$$

Movimiento Vertical: MRUV

Con la fórmula: $h = V_{iy}\, t - \frac{1}{2} g t^2$

Pero: $V_{iy} = V_i \text{ sen } \alpha$

reemplazando se tiene:

$$h = (V_i \text{ sen } \alpha)t - \frac{1}{2} g t^2 \quad (III)$$

Luego, sustituyendo (II) en (III) :

$$h = V_{iy} \text{ sen } \alpha) \frac{d}{V_i \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{d}{V_i \cos\alpha}\right)^2$$

$$\boxed{h = d \operatorname{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2 V_i^2 \cos^2\alpha}} \quad (IV)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Se dispara un proyectil con una rapidez de 100 m/s formando ángulo de máximo alcance horizontal. Calcular:

a) Alcance máximo: "D"
b) Máxima altura: "H"
c) Tiempo "t" que permanece el proyectil en el aire.

RESOLUCIÓN :

$V_i = 100$ m/s
$\alpha = 45°$

a) D = ?
b) H = ?
c) t = ?

a) $$D = \frac{V_i^2 \text{ sen } 2\alpha}{g}$$

http://librosysolucionarios.net

$$D = \frac{\left(100\,\frac{m}{s}\right)^2 \operatorname{sen}(2 \times 45°)}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 1\,020\,m$$

b) $$H = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{g}$$

$$H = \frac{(100\ m/s)^2 \operatorname{sen}^2 45°}{2 \times 9{,}8\ m/s^2} = 510\ m$$

c) $$t = \frac{2\,V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

Sustituyendo datos:

$$t = \frac{2 \times 100\,\frac{m}{s} \times \operatorname{sen} 45°}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} = 14{,}4\ s$$

PROBLEMA 2. Un jugador de fútbol patea una pelota que sale disparada a razón de 15 m/s y haciendo un ángulo de 37° con la horizaontal. Otro jugador, que se encuentra a 25 m de distancia y al frente del primero corre a recoger la pelota. ¿Con qué rapidez debe correr este último para recoger la pelota justo en el momento en que ésta llega a tierra?. (sen 37° =3/5 ; cos 37° = 4/5). Considerar: g = 10 m/s²

RESOLUCIÓN : $v_i = 15$ m/s

V = ? $\alpha = 37°$

$d_1 = 25$ m

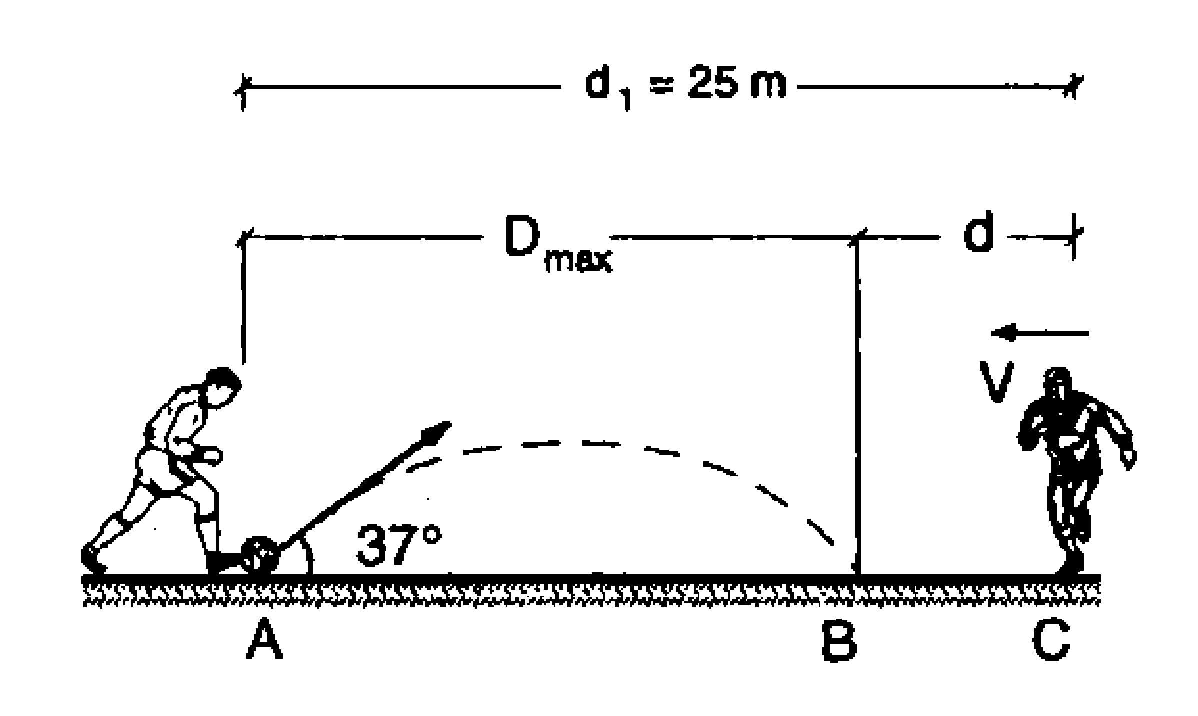
Distancia horizontal máxima que se desplaza la pelota.

$$D = \frac{V_i^2 \times \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

$$D = \frac{V_i^2 \times 2 \operatorname{sen}\alpha \times \cos\alpha}{g}$$

$$D = \frac{(15\ m/s)^2 \times 2 \times 3/5 \times 4/5}{10\ m/s^2}$$

$$D = 21{,}60\ m$$



Esto quiere decir que el jugador que recibe la pelota tiene que correr:

$$d = 25\ m - 21{,}60\ m = 3{,}40\ m$$

Cálculo del tiempo que la pelota está en el aire:

$$t = \frac{2\,V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

$$t = \frac{2 \times 15\ m/s \times \operatorname{sen} 37°}{10{,}0\ m/s^2}$$

$$t = 1{,}8\ s$$

En este tiempo el jugador que recibe la pelota debe correr los 3,40 m. Cálculo de su rapidez:

$$V = \frac{d}{t} = \frac{3{,}40\ m}{1{,}8\ s} = 1{,}\hat{8}\ m/s$$

PROBLEMA 3. Se dispara una bala con una rapidez inicial de 50 m/s, formando un ángulo de tiro de 53°. Se observa que, al caer a tierra, pasa justo rozando el borde de un precipicio de 200 m de altura. Hallar:

a) Alcance horizontal total
b) Tiempo que permanece en el aire.

RESOLUCIÓN : $V_i = 50$ m/s

a) D = ? $\alpha = 53°$

b) t = ? h = 200 m

Cálculo del alcance máximo en el tramo AB:

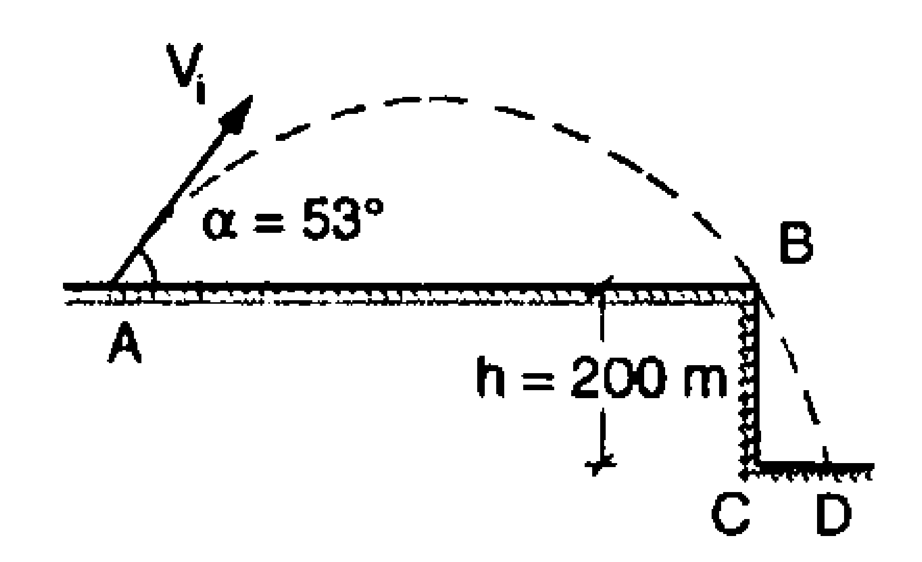
a) $$D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

$$D = \frac{(50\ m/s)^2\ 2 \operatorname{sen} 53° \cos 53°}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$D = 244{,}89\ m$$

http://librosysolucionarios.net

Cálculo del alcance en el tramo CD, al caer el proyectil los 200 m.



Previamente se calcula el tiempo que demora en caer lòs 200 m, que es el mismo que demora en avanzar CD.

$$h = V_i \operatorname{sen}\alpha \,.\, t + \frac{1}{2} g t^2$$

pero: $V_i \operatorname{sen}\alpha = V_y$

$$2h = 2V_y t + g t^2 \quad ; \quad \text{de donde:}$$

$$t = \frac{-(V_y) \pm \sqrt{(V_y)^2 + 2gh}}{g}$$

pero: $V_y = V_i \operatorname{sen}\alpha = 50 \,.\, \frac{4}{5} = 40$

reemplazando valores:

$$t = \frac{-40 \pm \sqrt{(40)^2 + 2 \,.\, 9{,}8 \,.\, 200\,m}}{9{,}8} = 3{,}5\,s$$

Es decir: $t_{CD} = 3{,}5\,s$

En ese tiempo se ha desplazado la distancia CD, entonces:

$$d_{CD} = V_i \cos\alpha \,.\, t$$

$$d_{CD} = 50 \frac{m}{s} \cos 53° \times 3{,}5\,s$$

$$d_{CD} = 105{,}3\,m \quad , \quad \text{Luego:}$$

$$d_T = AB + CD = 244{,}89m + 105{,}3m$$

$$d_T = 350{,}19\,m$$

b) Cálculo del tiempo que emplea en recorrer AB:

$$t_{AB} = \frac{2V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}$$

$$t_{AB} = \frac{2 \,.\, 50 \,.\, \operatorname{sen} 53°}{9{,}8}$$

$$t_{AB} = 8{,}16\,s$$

Luego:
$$t_T = t_{AB} + t_{CD}$$
$$= 8{,}16\,s + 3{,}5\,s$$
$$t_t = 11{,}66\,s$$

PROBLEMA 4. Desde un punto situado a 100 m de un blanco, el cual está a 10 m sobre la horizontal, se lanza un proyectil con $V_i = 80$ m/s.

a) ¿Cuál debe ser el ángulo de inclinación del disparo para dar en el blanco?.

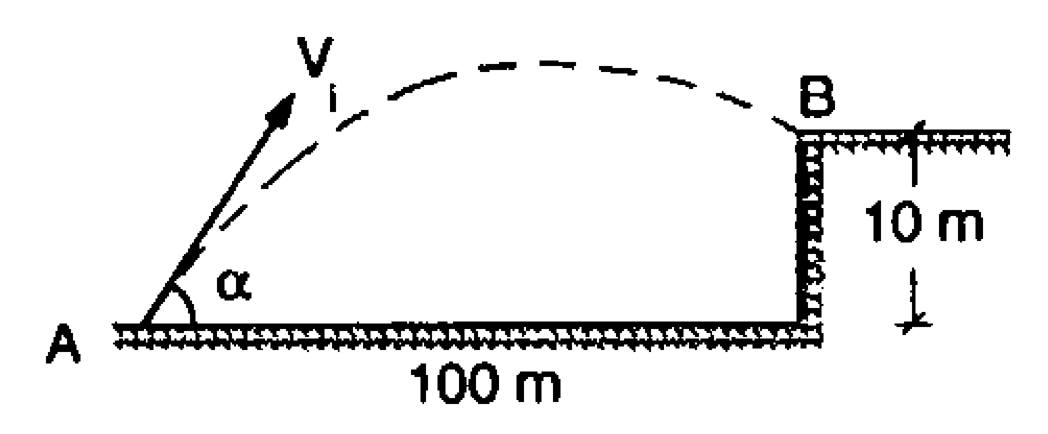
b) ¿En cuánto tiempo llega el proyectil al blanco. Tómese $g = 10$ m/s²

RESOLUCIÓN : $d = 100$ m

a) $d = ?$ $h = 10$ m

b) $t = ?$ $V_i = 80$ m/s

Sea A el punto del disparo y B el blanco.



a) Recordando la fórmula :

$$h = d \operatorname{tg}\alpha - \frac{g d^2}{2V_i^2 \cos^2\alpha}$$

Sustituyendo datos:

$$h = 100 \operatorname{tg}\alpha - \frac{10\,(100)^2}{2\,(80)^2 \cos^2\alpha}$$

Efectuando y reemplazando $\cos^2\alpha$ por su equivalente: $1/(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$

$$1 = 10 \operatorname{tg}\alpha - \frac{25}{32}(1 + \operatorname{tg}^2\alpha)$$

De donde: $25 \operatorname{tg}^2\alpha - 320 \operatorname{tg}\alpha + 57 = 0$

Resolviendo: $\operatorname{tg} = \dfrac{160 \pm \sqrt{25\,600 - 1\,425}}{25}$

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = 12{,}62 \quad \therefore \quad \alpha_1 = 85°\,28'\,14''$$
$$\operatorname{tg}\alpha_2 = 0{,}18 \quad \therefore \quad \alpha_2 = 10°\,12'\,14''$$

b) Para calcular el tiempo con la fórmula:

http://librosysolucionarios.net

$$t = \frac{d}{V_i \cos\alpha} \; ; \qquad \text{sustituyendo datos:}$$

Para: $\cos\alpha_1 = \cos 85° \, 28' \, 10'' = 0{,}08$

$$\therefore \; t_1 = \frac{100}{80\,(0{,}80)} = 15{,}63\,s \quad \text{(no)}$$

Para: $\cos\alpha_2 = \cos 10° \, 12' \, 14'' = 0{,}98$

$$\therefore \; t_2 = \frac{100}{80\,(0{,}98)} = 1{,}28\,s \quad \text{(si)}$$

Rpta.: 1,28 s

PROBLEMA 5. Se hace un disparo con un ángulo de 37° y con una repidez de 80 m/s.

Calcular:
a) Tiempo en alcanzar su altura máxima
b) Altura máxima.
c) Distancia horizontal

RESOLUCIÓN : a) $t = ?$

$\alpha = 37°$ b) $H = ?$

$V_i = 80$ m/s c) $D = ?$

a) Con la fórmula: $t = \dfrac{V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}$

$$t = \frac{80\,m/s \times \operatorname{sen} 37°}{9{,}8\,m/s^2}$$

$$t = \frac{80 \times 3/5}{9{,}8}\,s = 4/9\,s$$

b) $H = \dfrac{V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$

Sustituyendo valores: $H = \dfrac{(80)^2 \operatorname{sen}^2 37°}{2 \times 9{,}8}$

$$H = \frac{(80)^2\,(3/5)^2}{2 \times 9{,}8}$$

Efectuando operaciones se tiene:

Rpta.: $H = 117{,}55$ m

c) El alcance horizontal

$$D = \frac{V_i^2 \times \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

$$D = \frac{(80\,m/s)^2 \times 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{9{,}8\,m/s^2}$$

$$D = \frac{6\,400 \times 2 \operatorname{sen} 37° \cos 37°}{9{,}8}$$

$$D = \frac{6\,400 \times (2)\,(3/5)\,(4/5)}{9{,}8}$$

De donde:

Rpta.: $D = 1\,567{,}35$ m

PROBLEMA 6. Dos proyectiles son disparados con igual rapidez inicial y con ángulos de inclinación de 45° y 60° respectivamente. Determinar la relación entre sus alturas máximas.

RESOLUCIÓN : $\dfrac{H_1}{H_2} = ?$

$\alpha_1 = 45°$; $\alpha_2 = 60°$

Recordando que la altura máxima se calcula así:

$$H = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha}{2g}$$

Para $\alpha_1 = 45°$: $H_1 = \dfrac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 45°}{2g}$ (1)

Para $\alpha_2 = 60°$: $H_2 = \dfrac{V_i^2 \operatorname{sen}^2 60°}{2g}$ (2)

Dividiendo (1) entre (2):

Rpta.: $\dfrac{H_1}{H_2} = \dfrac{2}{3}$

PROBLEMA 7. ¿Cuál será el ángulo con el que debe dispararse un proyectil para que su alcance horizontal sea 4 veces su altura máxima?, ¿Cuál es la ecuación de la parábola que describe el proyectil?

RESOLUCIÓN :

Datos: $D = 4H$ Incógnita: $a = ?$

a) Usando la respuesta del ejemplo 2:

http://librosysolucionarios.net

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{4H}{D}\ ; \qquad \text{por dato } D = 4H$$

$$\therefore\ \operatorname{tg}\alpha = \frac{4H}{4H} = 1 \Rightarrow \alpha = 45°$$

b) Recordando la fórmula:

$$h = d\operatorname{tg}\alpha - \frac{g\,d^2}{2V_i^2\cos^2\alpha}$$

Aquí: $\alpha = 45°$, luego: $\operatorname{tg}45° = 1$

$\cos 45° = \sqrt{2}/2$

$$h = d(1) - \frac{g\,d^2}{2V_i^2(\sqrt{2}/2)^2}$$

Rpta.: $h = d - g\left(\frac{d}{V_i}\right)^2$

PROBLEMA 8. Si se disparan 2 proyectiles con la misma rapidez inicial "V_i" con ángulos de (45° + b) y (45° - b), donde 0° < b < 45°. ¿Cuál será la relación de alcance máximo en ambos casos?

RESOLUCIÓN : Datos: V_i iguales

$$\alpha_1 = (45° + \beta)\ ;\ \alpha_2 = (45° - \beta)$$

Incógnita: $\frac{D_1}{D_2} = ?$

La expresión para calcular el alcance máximo es:

$$D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen}2\alpha}{g}$$

Para $\alpha_1 = (45° + \beta)$:

$$D_1 = \frac{V_i^2\operatorname{sen}2(45° + \beta)}{g} \qquad (1)$$

Para $a_2 = (45° - b)$:

$$D_2 = \frac{V_i^2\operatorname{sen}2(45° - \beta)}{g} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{V_i^2\operatorname{sen}2(45° + \beta)/g}{V_i^2\operatorname{sen}2(45° - \beta)/g}$$

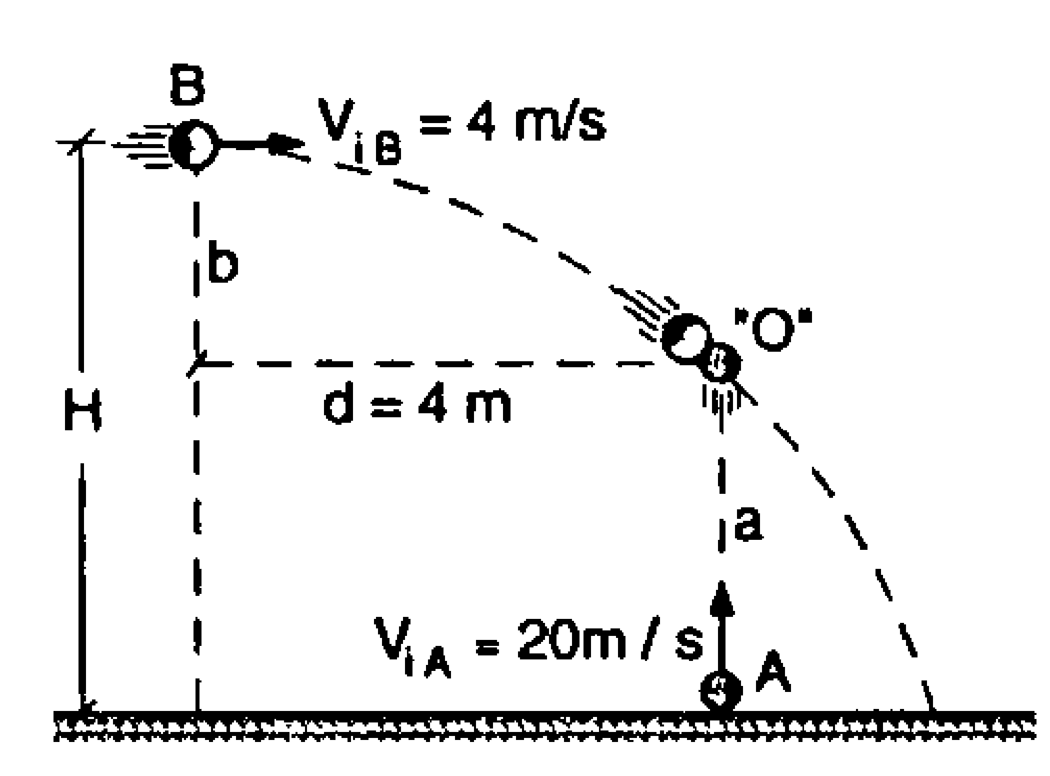
$$\frac{D_1}{D_2} = \frac{\operatorname{sen}(90° + 2\beta)}{\operatorname{sen}(90° - 2\beta)} = \frac{\cos 2\beta}{\cos 2\beta}$$

Rpta.: $\frac{D_1}{D_2} = 1$

PROBLEMA 9. Un cuerpo "A" se lanza verticalmente hacia arriba con una rapidez de 20 m/s. ¿A qué altura se encontraba un cuerpo "B" que fue lanzado horizontalmente con una rapidez de 4 m/s y al mismo tiempo que el cuerpo "A" y luego choca con este último durante el vuelo. La distancia horizontal entre las dos posiciones iniciales de los cuerpos es 4 m. Calcular el tiempo empleado hasta el instante del choque y la velocidad de cada uno de los cuerpos en ese instante.

RESOLUCIÓN :

V_{iA} = 20 m/s	a) t = ?
V_{iB} = 4 m/s	b) H = ?
d = 4 m	c) V_{fA} = ?
	d) V_{fB} = ?



a) Cálculo del tiempo transcurrido para el encuentro:

Para B: $d_{iB} = V_{iB}\,t_B$

$$\therefore\ t_B = \frac{d}{V_{iB}} = \frac{4\,m}{4\,m/s}$$

Rpta.: $t_B = 1\,s$

b) Sea "O" el punto de encuentro.

Luego: $H = a + b \qquad (1)$

Cálculo de "b" :

(caída libre con $V_{iy} = 0$)

$$b = \frac{1}{2} g t_B^2 = \frac{1}{2} (9,8)(1)^2$$

$$b = 4,9 \text{ m} \qquad (2)$$

Cálculo de "a" : $a = V_{iA} t_A - \frac{1}{2} g t_A^2$

$$a = (20)(1) - \frac{1}{2}(9,8)(1)^2$$

$$a = 15,1 \text{ m} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1) :

Rpta.: $H = 15,1 \text{ m} + 4,9 \text{ m} = 20 \text{ m}$

c) Cálculo de V_{fA}

$$V_{fA} = V_{iA} + g t_A \text{ ; g, negativo}$$

$$V_{fA} = 20 - 9,8 . 1$$

Rpta.: $V_{fA} = 10,2$ m/s

d) Cálculo de V_{fB}

$$V_{fA} = \sqrt{(V_{iB})^2 + (V_{yB})^2}$$

$$V_{fA} = \sqrt{(V_{iB})^2 + (g t_B)^2}$$

Sustituyendo datos y efectuando:

Rpta.: $V_{fB} = 10,8$ m/s

PROBLEMA 10. Un aro "A" de basket está a 1,50 m del piso. Un jugador que está en un punto "O" situado a una distancia horizontal de 6 m, lanza una pelota dirigida al centro del aro "A" con un ángulo inicial de 53° (g = 9,8 m/s²). Calcular:

a) ¿Con qué rapidez inicial se debe lanzar la pelota para que pase por el centro del aro "A"?

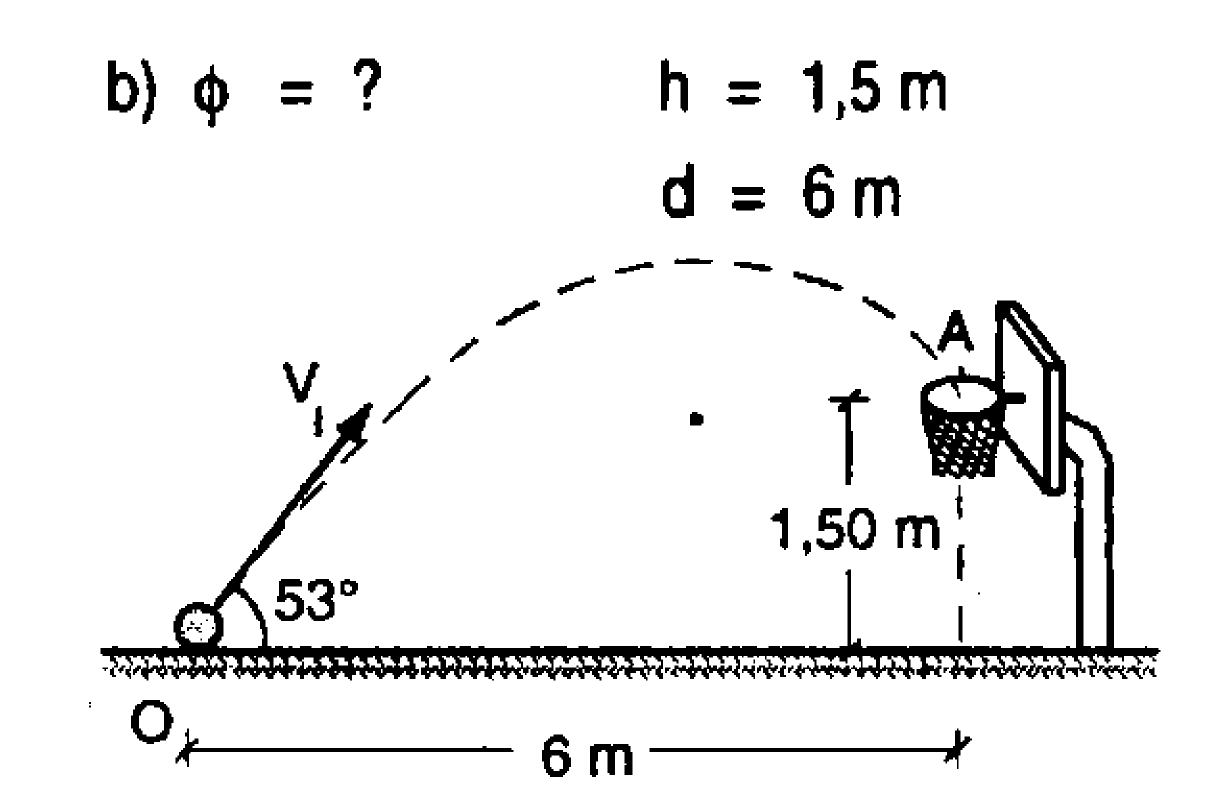
b) ¿Qué ángulo de inclinación forma la trayectoria de la pelota al pasar por el aro?

RESOLUCIÓN : $\alpha = 53°$

a) $V = ?$ $\qquad g = 10 \text{ m/s}^2$

b) $\phi = ?$ $\qquad h = 1,5$ m

$d = 6$ m



a) Recordando la fórmula :

$$h = d . \text{tg}\,\alpha - \frac{g d^2}{2 V_i^2 \cos^2 \alpha}$$

sustituyendo valores:

$$1,5 = 6\left(\frac{3}{4}\right) - \frac{10 \times 6^2}{2 V_i^2 \left(\frac{3}{5}\right)^2}$$

Despejando V_i :

Rpta.: $V_i = 8,77$ m/s

b) Sea ϕ el ángulo que forma la trayectoria de la pelota con la horizontal.

$$V_y = V_{iy} - g t, \qquad \text{ó:}$$

$$V_y = V_i \text{ sen } 53° - g t \qquad (1)$$

Donde "t" tiempo que demora en ascender 1,50 m y en recorrer 6 m horizontalmente.

Por otro lado: $V = V_i \cos \alpha . t$

Sustituyendo datos:

$$6 = 8,77 \times \frac{3}{5} \times t \quad ; \quad \text{de donde:}$$

$t = 1,14$ s

Sustituyendo valores en (1):

$$V_y = 8,77 \times \frac{4}{5} - 9,8 \times 1,14$$

$$V_y = -4,156 \text{ m/s}$$

Lo que quiere decir que la pelota está de bajada.

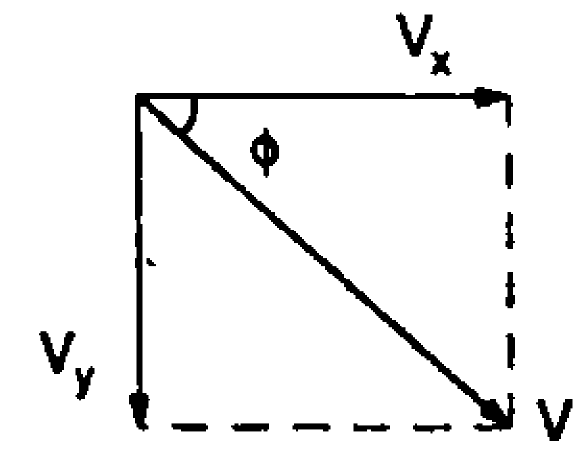
Cálculo del ángulo ϕ

http://librosysolucionarios.net

Diseñando las velocidades horizontal y vertical de la pelota.

$$V_x = V_i \cos 53° = 8{,}77 \times \frac{3}{5} = 5{,}22 \, m/s$$

$$\text{tg}\,\phi = \frac{V_y}{V_x} = \frac{4{,}156}{5{,}22} = -0{,}8$$



Rpta.: $\phi = 42° \, 48'$

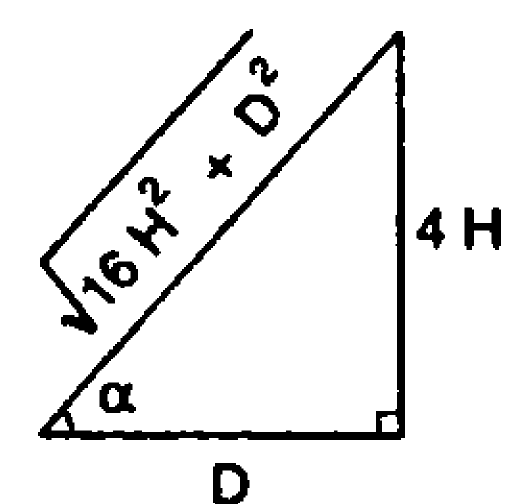
PROBLEMA 11: Calcular el alcance horizontal de un proyectil en M.P.C.L. que en su vuelo alcanza una altura máxima "H", sabiendo que, si fuera lanzado verticalmente hacia arriba con la misma rapidez inicial, su altura máxima sería "5H".

RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \qquad (I)$$

Además: $\quad \text{tg}\,\alpha = \dfrac{4H}{D}$

Llevando a un triángulo rectángulo:



$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{4H}{\sqrt{16H^2 + D^2}} \; ;$$

$$\cos\alpha = \frac{D}{\sqrt{16H^2 + D^2}}$$

Si: $\qquad \operatorname{sen} 2\alpha = 2 \operatorname{sen}\alpha \, . \cos\alpha$

Sustituyendo valores:

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \frac{8HD}{16H^2 + D^2} \qquad (II)$$

Del movimiento vertical:

$$h_{máx.} = \frac{V_i^2}{2g} \; ; \quad \text{por dato:} \quad h_{máx.} = 5H$$

$$\therefore \qquad 5H = \frac{V_i^2}{2g} \; ; \quad \text{de donde:}$$

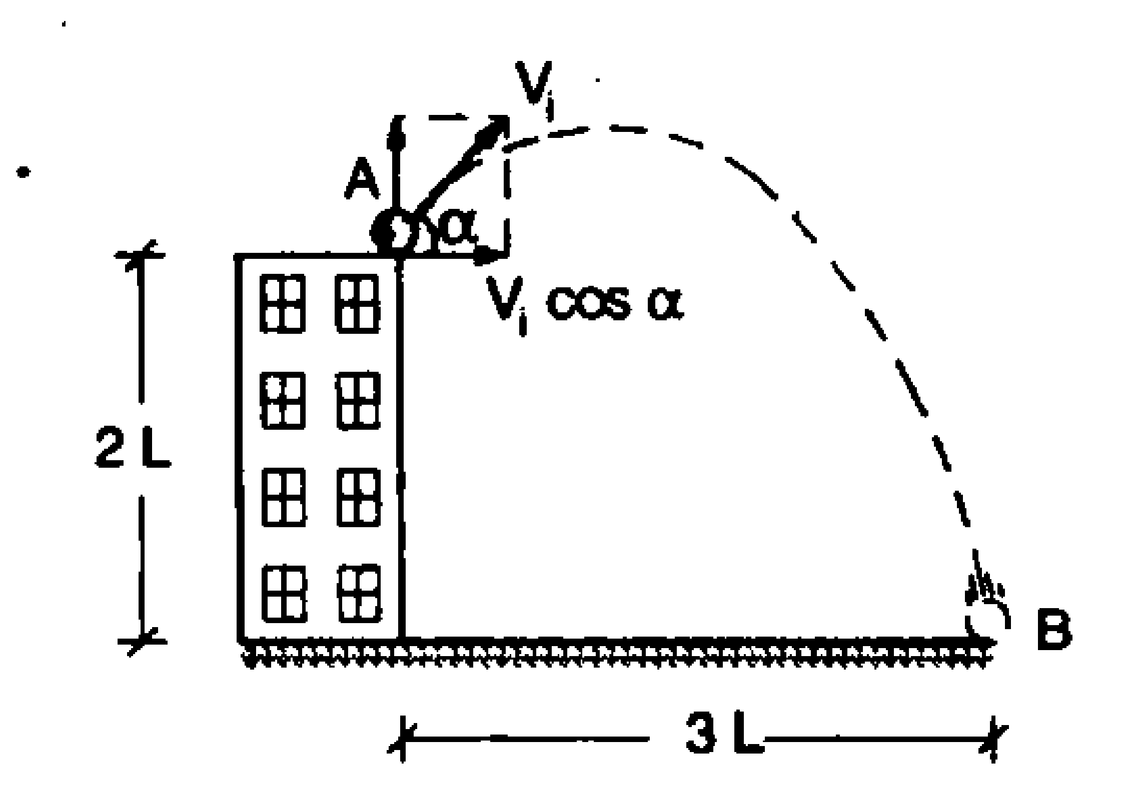
$$V_i^2 = 10gh \qquad (III)$$

Sustituyendo (II) y (III) en (I) :

$$D = \frac{10gh\left(\dfrac{8HD}{16H^2 + D^2}\right)}{g} \; ;$$

Rpta.: $\qquad D = 8H$

PROBLEMA 12. Una bola se lanza hacia arriba con una rapidez inicial "V_i" y con un ángulo de inclinación "a" desde la azotea de un edificio de 2 L metros de alto. Si la bola cae al suelo a una distancia de 3 L metros del pie del edificio; calcular L.



RESOLUCIÓN : $\qquad H = 2L$

$L = ? \qquad D = 3L$

a) Movimiento Horizontal:

$$3L = V_i \cos\alpha \, . t$$

de donde: $\qquad t = \dfrac{3L}{V_i \cos\alpha} \qquad (1)$

Este es el tiempo que demora en caer la altura 2 L y el tiempo que demora en avanzar la distancia 3 L.

b) Movimiento vertical:

$$H = V_i \operatorname{sen}\alpha \, . t + \frac{1}{2} g t^2$$

Asumiendo positivo el desplazamiento hacia arriba y negativo hacia abajo,

http://librosysolucionarios.net

sustituyendo los valores de H y t :

$$-2L = V_i \operatorname{sen}\alpha \frac{3L}{V_i \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \left(\frac{3L}{V_i \cos\alpha}\right)^2$$

$$-2 = \operatorname{tg}\alpha - \frac{9gL}{2V_i \cos^2\alpha} \quad \text{de donde:}$$

Rpta.: $$L = \frac{2V_i^2 \cos^2\alpha\,(3\operatorname{tg}\alpha + 2)}{9g}$$

PROBLEMA 13. Se lanza un proyectil dos veces, con ángulos de inclinación "α" y "β", logrando en ambos casos el mismo alcance horizontal. Si poseen la misma rapidez inicial, hallar la relación entre "α" y "β".

RESOLUCIÓN : Sabiendo qué distancia o alcance horizontal:

$$D = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Para α: $$D_1 = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} \quad (1)$$

Para β: $$D_2 = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\beta}{g} \quad (2)$$

Según el problema (1) = (2), luego:

$$\frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = \frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\beta}{g}$$

$$\operatorname{sen} 2\alpha = \operatorname{sen} 2\beta \quad (3)$$

De (3): $\operatorname{sen} 2\alpha - \operatorname{sen} 2\alpha = 0$

$2\cos(\alpha + \beta)\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$

De donde: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = 0$; luego:

$\alpha - \beta = 0 \quad \therefore \quad \alpha = \beta$ Una solución

Otra solución: $\cos(\alpha + \beta) = 0$

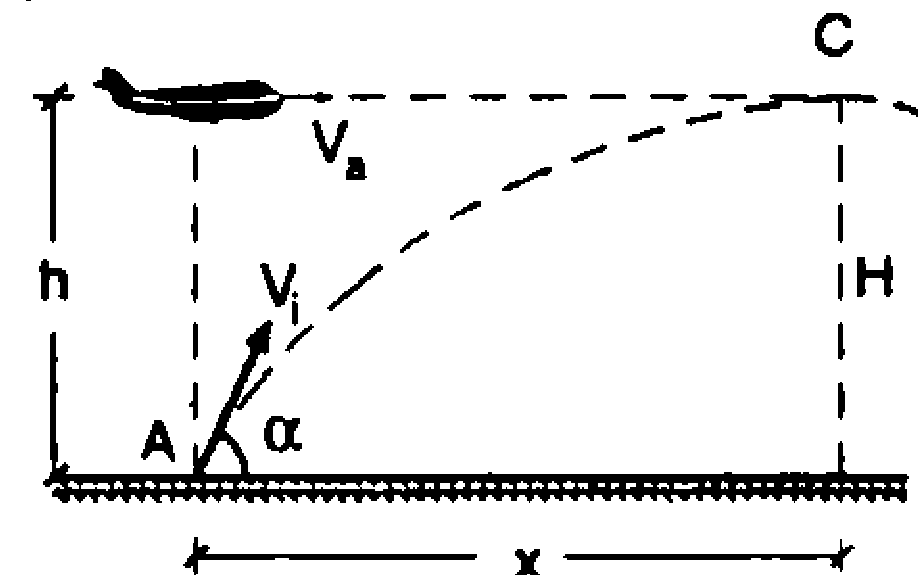
$$\therefore \quad \alpha + \beta = 90°$$

Entonces, el alcance de los dos disparos son iguales cuando: los ángulos o son iguales o son complementarios.

PROBLEMA 14. Un avión vuela horizontalmente con una velocidad "V_a" y una altura "h" sobre un plano de nivel; si se dispara un proyectil con un cañón, desde el plano, en el instante en que el aeroplano se encuentra en la misma línea vertical del cañón, cuál debe ser el ángulo de inclinación "a" y la rapidez inicial del proyectil para hacer blanco en el avión, cuando el proyectil alcanza su máxima altura. Calcular también la distancia "d", detrás del cañón, desde donde debe arrojar una bomba el avión para hacer blanco en el cañón.

RESOLUCIÓN :

a) Sea C el punto donde el proyectil toca al avión.



El avión vuela con velocidad rectilínea y uniforme (M.R.U.).

Distancia que recorre el avión:

$$x = V_a \cdot t \quad (1)$$

Distancia que recorre el proyectil

$$x = V_i \cos a \cdot t \quad (2)$$

(1) = (2): $V_a \cdot t = V_i \cos\alpha \cdot t$

De donde: $V_i \cos a = V_a \quad (3)$

Por otro lado, recordando que para el proyectil:

$$V_y^2 = V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 2gh$$

Cuando alcanza al avión, por enunciado:

$$V_y = 0 \quad ; \quad \text{luego:}$$

$$0 = V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha - 2gh$$

$$V_i^2 \operatorname{sen}^2\alpha = 2gh$$

http://librosysolucionarios.net

$$V_i \operatorname{sen} \alpha = \sqrt{2gh} \qquad (4)$$

Dividiendo (4) entre (3):

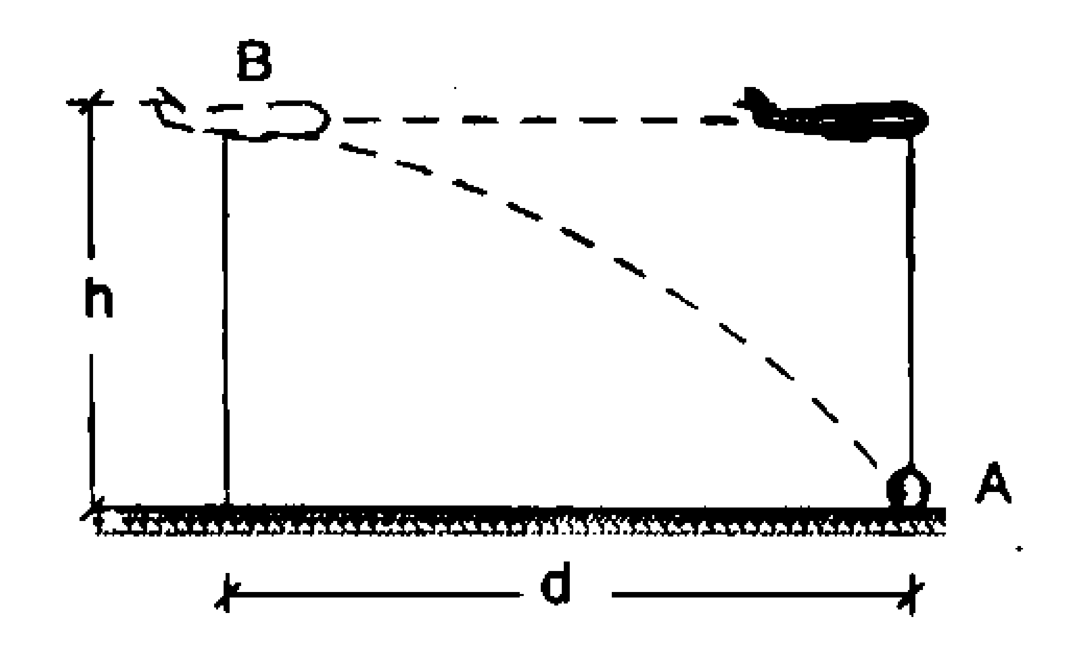
$$\text{1ra. Rpta.:} \quad \operatorname{tg} \alpha = \frac{\sqrt{2gh}}{V_a}$$

b) La velocidad horizontal de la bomba durante la caída es igual a la que lleva el avión. Considerando que la velocidad inicial de caída es cero, se tiene:

$$h = V_{iy} + \frac{1}{2} g t^2$$

Pero $V_{iy} = 0$, luego ; $h = \frac{1}{2} g t^2$

De donde: $$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (1)'$$



Por otro lado $d = V_a \, . \, t$ (2)'

Sustituyendo (1)' en (2)':

$$\text{2da. Rpta.:} \quad d = V_a \, . \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

PROBLEMA 15. El alcance horizontal de un proyectil se determina por:

$$X = \frac{V_i \, . \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

Si el proyectil es lanzado desde un móvil que se desplaza con M.R.U.. y velocidad "V". Calcular el nuevo alcance.

RESOLUCIÓN :

Como los movimientos son independientes, se tiene que el alcance horizontal aumenta, ya que aumenta la velocidad horizontal; luego:

$$X' = (V + V_i \cos\alpha)\, t \qquad (1)$$

t = Tiempo total en el aire

Por otro lado el tiempo de alcance horizontal es:

$$t = \frac{2 V_i \operatorname{sen}\alpha}{g} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1) :

$$X' = (V + V_i \cos\alpha)\left(\frac{2 V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}\right)$$

$$X' = \frac{2V \, . \, V_i \operatorname{sen}\alpha}{g} + \frac{V_i^2 \, 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha}{g}$$

Pero: $2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \operatorname{sen} 2\alpha$, luego:

$$X' = \frac{2V \, . \, V_i \operatorname{sen}\alpha}{g} + \frac{V_i^2 \, 2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$$

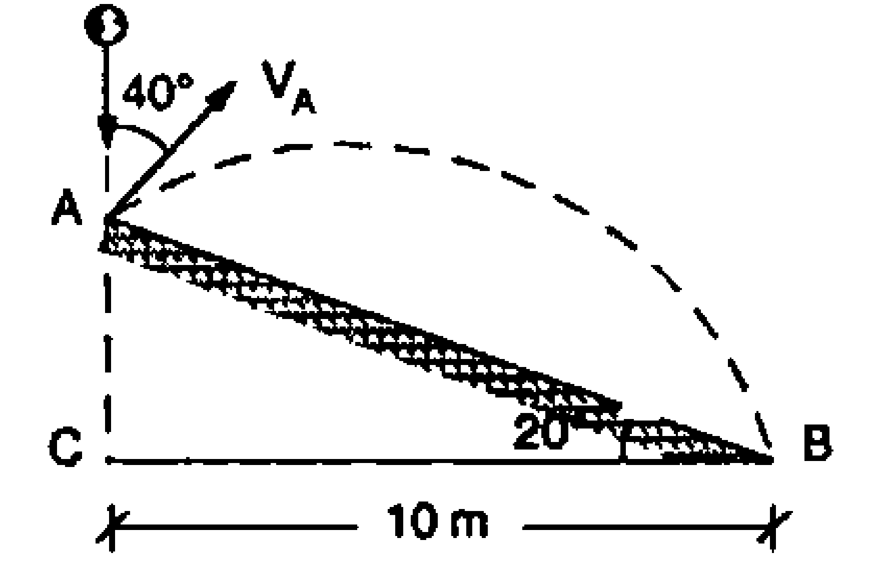
Como: $\frac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g} = X$; entonces:

$$\text{Rpta.:} \quad X' = \frac{2V \, . \, V_i \operatorname{sen}\alpha}{g} + X$$

PROBLEMA 16. Verticalmente se deja caer una pelota sobre un punto "A", ubicado en un plano inclinado que hace un ángulo de 20° con la horizontal; la dirección del rebote forma un ángulo de 40° con la vertical; si el próximo rebote es en "B", calcular:

a) La velocidad del rebote en "A".

b) El tiempo que demora la pelota en ir de "A" a "B".



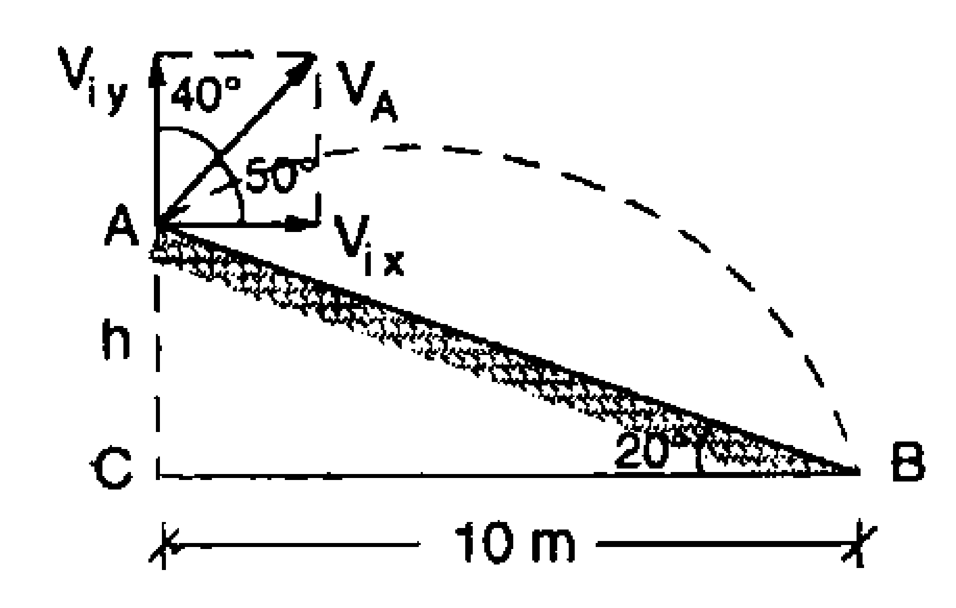
RESOLUCIÓN :

a) $V_A = ?$ $\qquad \beta = 20°$

b) $t = ?$ $\qquad \alpha = 40°$

$d = 10\,m$

Considerando al punto "B" del movimiento parabólico como un punto cualquiera:



a) A partir del rebote en el punto "A", el movimiento es parabólico y la velocidad de salida de este punto es la velocidad inicial de este movimiento. Recordando fórmula :

$$h = d\,tg\alpha - \frac{g\,d^2}{2\,V_i^2\cos^2\alpha}$$

Considerando (+) hacia arriba y (-) hacia abajo, y reemplazando valores:

$$-10\,tg20° = 10\,tg50° - \frac{9{,}8\,(10)^2}{2\,V_i^2\cos 50°}$$

Donde: tg 20° = 0,364
cos 50° = 0,642
tg 50° = 1,192

$$-10\,(0{,}364) = 10\,(1{,}192) - \frac{9{,}8\,(10)^2}{2\,V_i^2\,(0{,}642)}$$

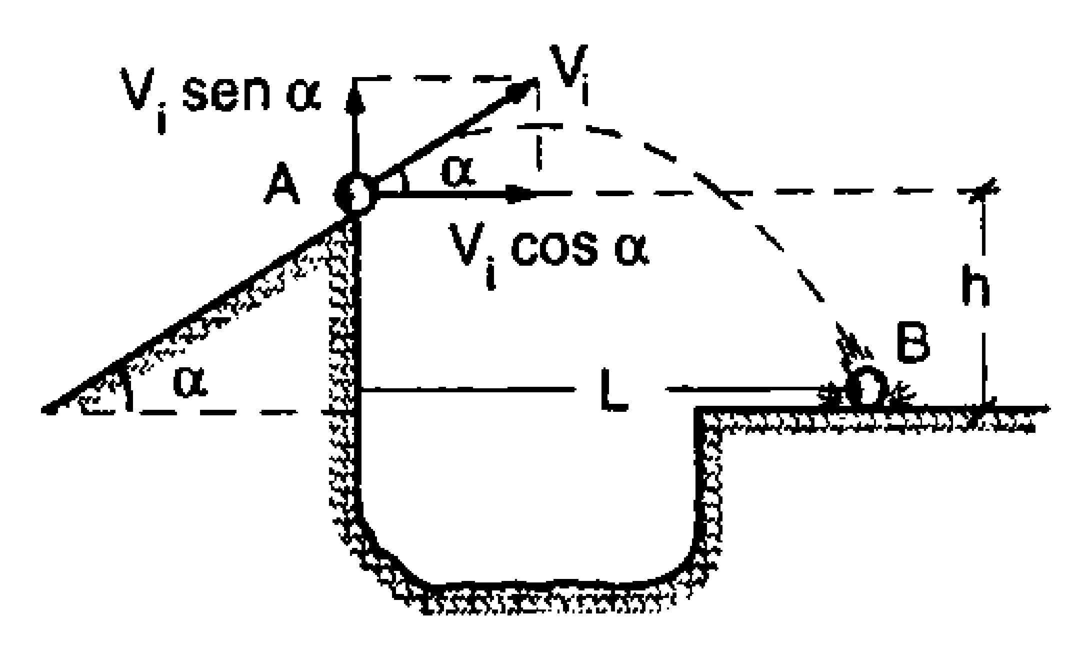
Rpta.: $V_i = 8{,}73$ m/s

b) $$t = \frac{d}{V_i\cos\alpha}$$

$$t = \frac{10}{8{,}73 \times \cos 50°}$$

Rpta.: t = 1,78 s

PROBLEMA 17. ¿Cuál debe ser la velocidad mínima en el punto "A" para que la esfera de masa "m" llegue al punto "B"?



RESOLUCIÓN :

Considerando "h" positiva por encima del punto "A" y negativa por debajo:

$$-h = V_i\,sen\alpha\,t - \frac{1}{2}g\,t^2 \qquad (1)$$

Por otro lado, por fórmula:

$$L = V_i\cos\alpha\,t \Rightarrow t = \frac{L}{V_i\cos\alpha} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$-h = V_i\,sen\alpha\,\frac{L}{V_i\cos\alpha} - \frac{1}{2}g\,\frac{L^2}{V_i^2\cos^2\alpha}$$

$$\frac{g\,L^2}{2\,V_i^2\cos^2\alpha} = h + L\,tg\alpha$$

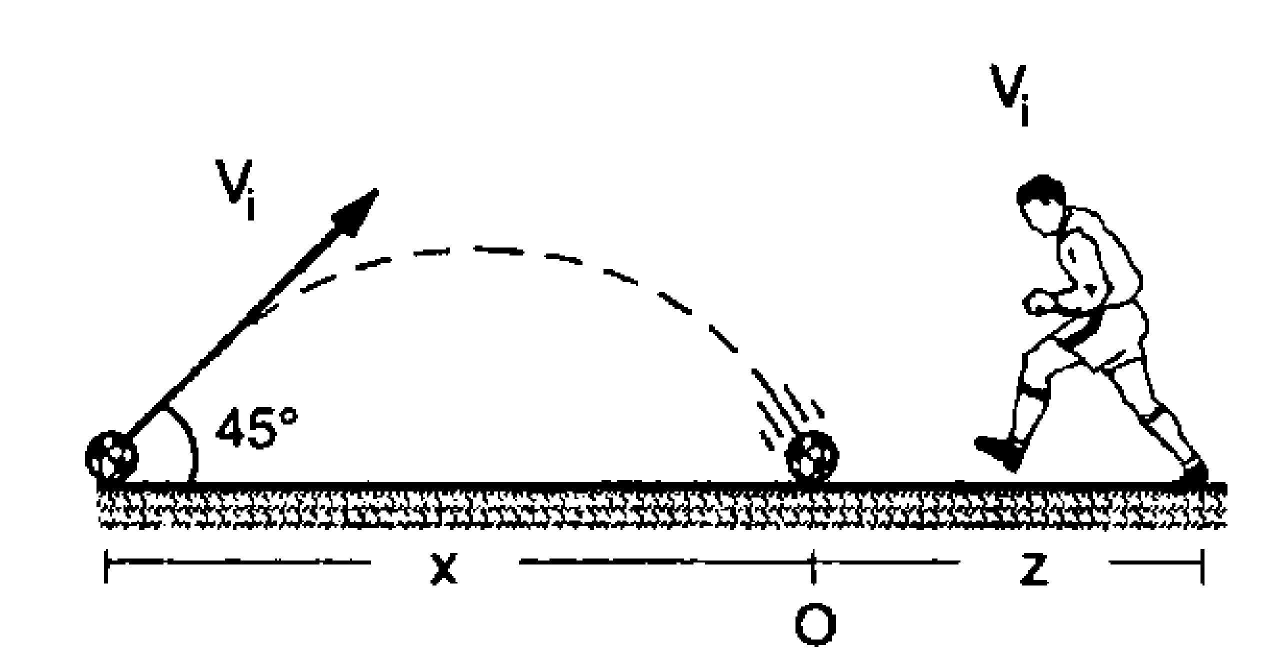
$$\frac{L^2}{\cos^2\alpha}\cdot\frac{g}{2\,(h+L\,tg\alpha)} = V_i^2$$

Rpta.: $$V_i = \frac{L}{\cos\alpha}\sqrt{\frac{g}{2\,(h+L\,tg\alpha)}}$$

PROBLEMA 18. Una pelota de fútbol es pateada con una rapidez de 19,5 m/s, y un ángulo de 45° con la horizontal. Un jugador que se encuentra en el mismo plano horizontal a una distancia de 55 m comienza en el mismo instante, a correr al encuentro de la pelota. ¿Cuál debe ser su aceleración para coger a ésta, en el momento en que toque el grass? (g = 10 m/s²)

RESOLUCIÓN :

Sea "O" punto donde el segundo jugador coge la pelota; "x" y "z" las distancias recorridas por la pelota y el segundo jugador.



El tiempo empleado por la pelota en llegar a "O" es el mismo tiempo que demora el segundo jugador en llegar a dicho punto.

a) $t_x = t_z = t$

b) $x = \dfrac{V_i^2 \operatorname{sen} 2\alpha}{g}$ (alcance horizontal)

$$x = \frac{(19{,}5\ m/s)^2\ (\operatorname{sen} 2\times 45°)}{10\ m/s^2} = 38\ m$$

c) Como: $x + z = 55\ m$

$\therefore \quad z = 17\ m$

d) $t_x = \dfrac{2\,V_i \operatorname{sen}\alpha}{g}$

$$t_x = \frac{2\,(19{,}5\ m/s)}{10\ m/s^2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = 1{,}95\sqrt{2}\ s$$

$$t_x = t_z = t = 1{,}95\sqrt{2}\ s$$

e) Sabiendo que:

$$z = V_i t_z + \frac{1}{2} a t_z^2$$

Pero: $V_i = 0$, entonces:

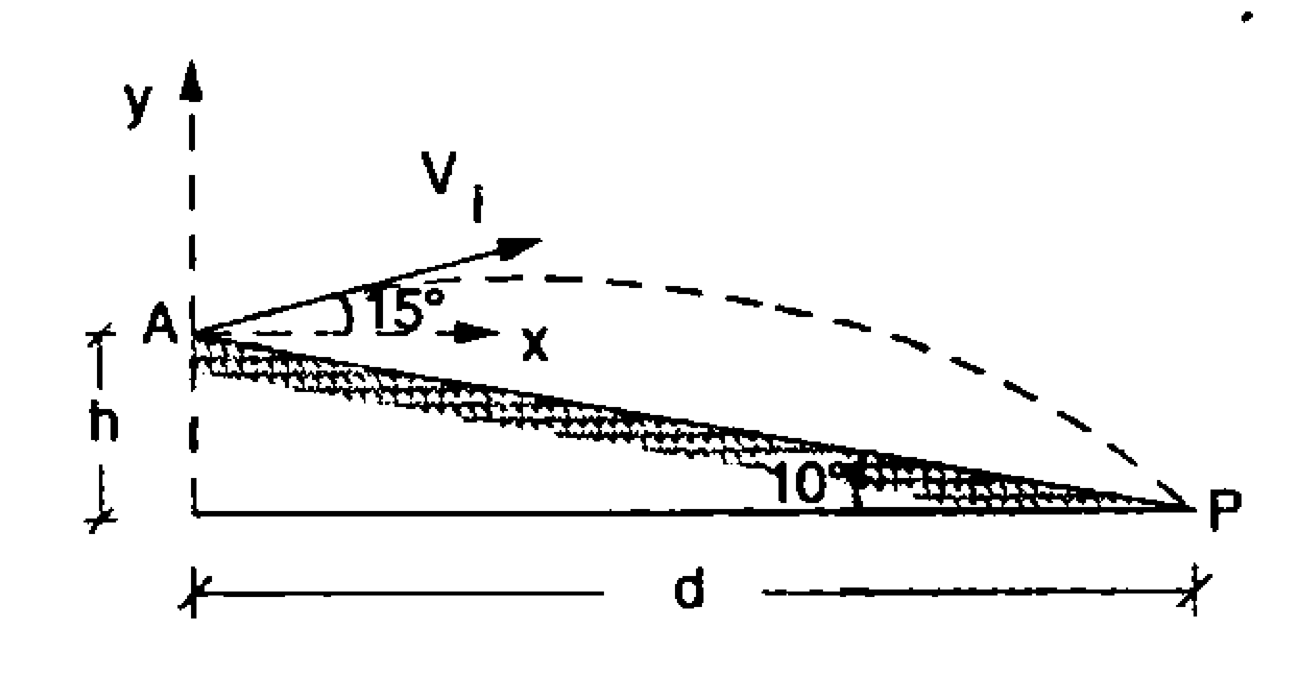
$z = \dfrac{1}{2} a t_z^2$; de donde:

$a = \dfrac{2z}{t_z^2}$; sustituyendo datos:

$$a = \frac{2\times 17}{(1{,}95\sqrt{2})^2} = 4{,}61$$

Rpta.: $a = 4{,}61\ m/s^2$

PROBLEMA 19. Un arquero situado en la ladera de una colina lanza una flecha con una velocidad inicial de 60 m/s, formando un ángulo $\alpha = 15°$ con la horizontal. Calcular la distancia horizontal "d" recorrida por la flecha antes de tocar el suelo. Calcular también el tiempo que demora la flecha en llegar al punto "P", según la figura.



$\cos 15° = 0{,}965\,9$

$\operatorname{sen} 15° = 0{,}258\,8$

$\operatorname{tg} 10° = 0{,}176\,3$

$g = 9{,}8\ \dfrac{m}{s^2}$

RESOLUCIÓN : a) $h = d\operatorname{tg}\alpha - \dfrac{g\,d^2}{2V_i^2\cos\alpha}$

Considerando (+) hacia arriba y (-) hacia abajo y reemplazando:

$$-d\operatorname{tg}10° = d\operatorname{tg}15° - \frac{9{,}8\,d^2}{2\,(60)^2\cos^2 15°}$$

Simplificando y despejando "d":

$$d = 3\,600\left(\frac{\operatorname{tg}15° + \operatorname{tg}10°}{4{,}9}\right)\cos^2 15°$$

Sustituyendo valores y efectuando:

Rpta.: $d = 304{,}54\ m$

b) $t = \dfrac{d}{V_i\cos\alpha}$

Sustituyendo valores: $t = \dfrac{304{,}54}{60\cos 15°}$

Rpta.: $t = 5{,}25\ s$

PROBLEMA 20. Se disparan 3 proyectiles A, B y C, con el mismo ángulo de elevación (30°) y con velocidades de 5 m/s, 10 m/s y 20 m/s respectivamente. ¿Cuál de los proyectiles alcanza, en menor tiempo, su altura máxima? ($g = 10\ m/s^2$)

RESOLUCIÓN :

Tiempo para alcanzar altura máxima:

http://librosysolucionarios.net

$$t = \frac{V_i \text{ sen } \alpha}{g} \quad ; \quad \text{Luego:}$$

Proyectil A: $t_1 = \dfrac{V_i \text{ sen } \alpha}{g}$

$$t_1 = \frac{(5)(1/2)}{10} = \frac{5}{20} = \frac{1}{4} \text{ s}$$

Proyectil B: $t_2 = \dfrac{V_2 \text{ sen } \alpha}{g}$

$$t_2 = \frac{(10)(1/2)}{10} = \frac{1}{2} \text{s}$$

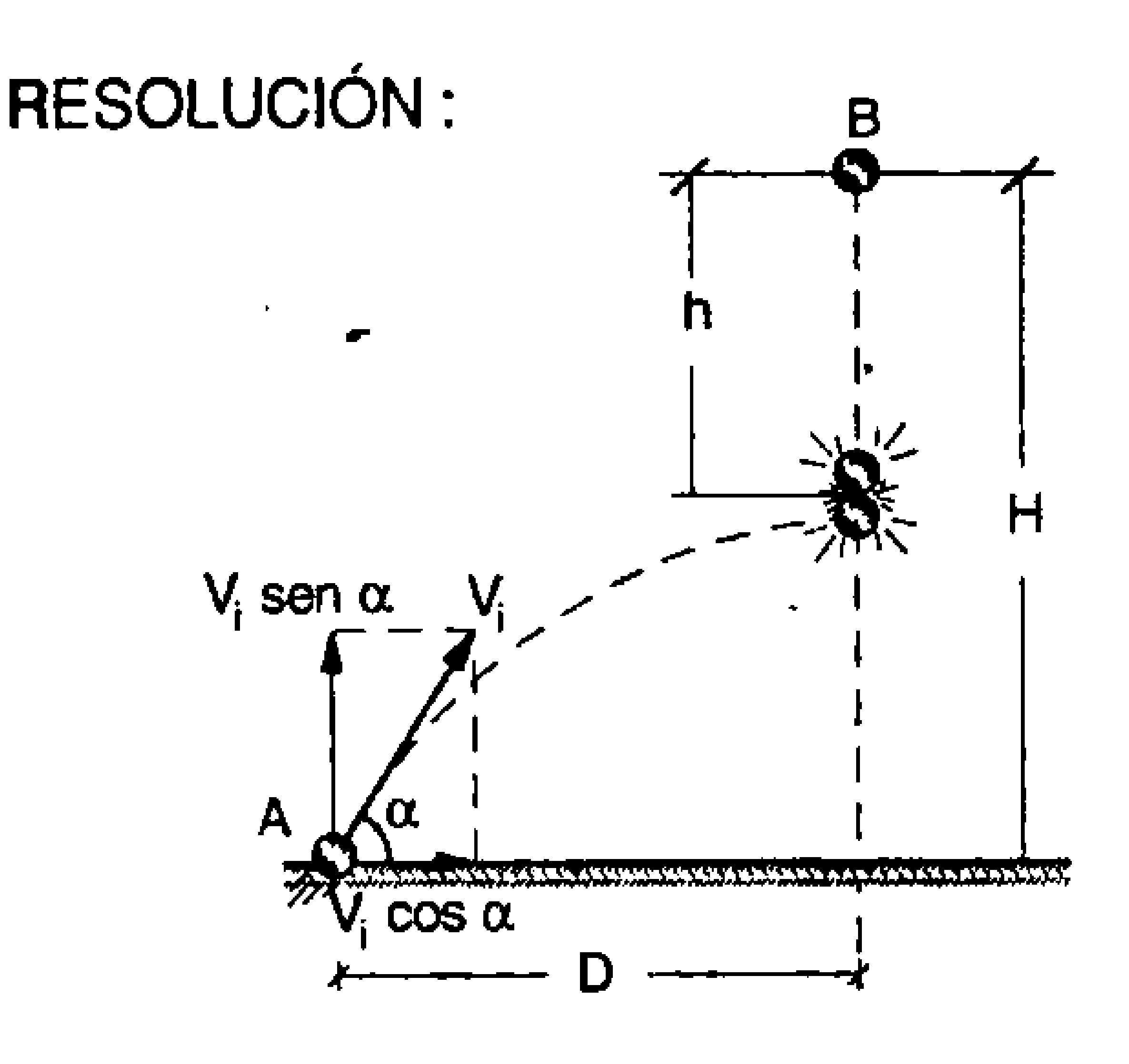
Proyectil C: $t_3 = \dfrac{V_3 \text{ sen } \alpha}{g}$

$$t_3 = \frac{(20)(1/2)}{10} = 1 \text{ s}$$

Rpta.: El proyectil A.

PROBLEMA 21. En el instante que se dispara un proyectil A desde la Tierra, se deja caer una piedra B desde la altura "H". Determinar el ángulo con que debe disparar el proyectil para que intercepte a la piedra en un punto situado a una distancia horizontal "D" del punto de disparo.

RESOLUCIÓN :



Datos: H , D Incógnita: α

Para A: $D = V_i \cos \alpha \, . \, t$ (1)

$$H - h = V_i \text{ sen } \alpha \, . \, t - \frac{1}{2} gt \qquad (2)$$

Para $h = V_i t + \dfrac{1}{2} gt^2$

Pero: $V_i = 0 \quad \therefore \quad h = \dfrac{1}{2} gt^2$ (3)

Sumando (2) + (3):

$$H = V_i \text{ sen } \alpha \, . \, t \qquad (4)$$

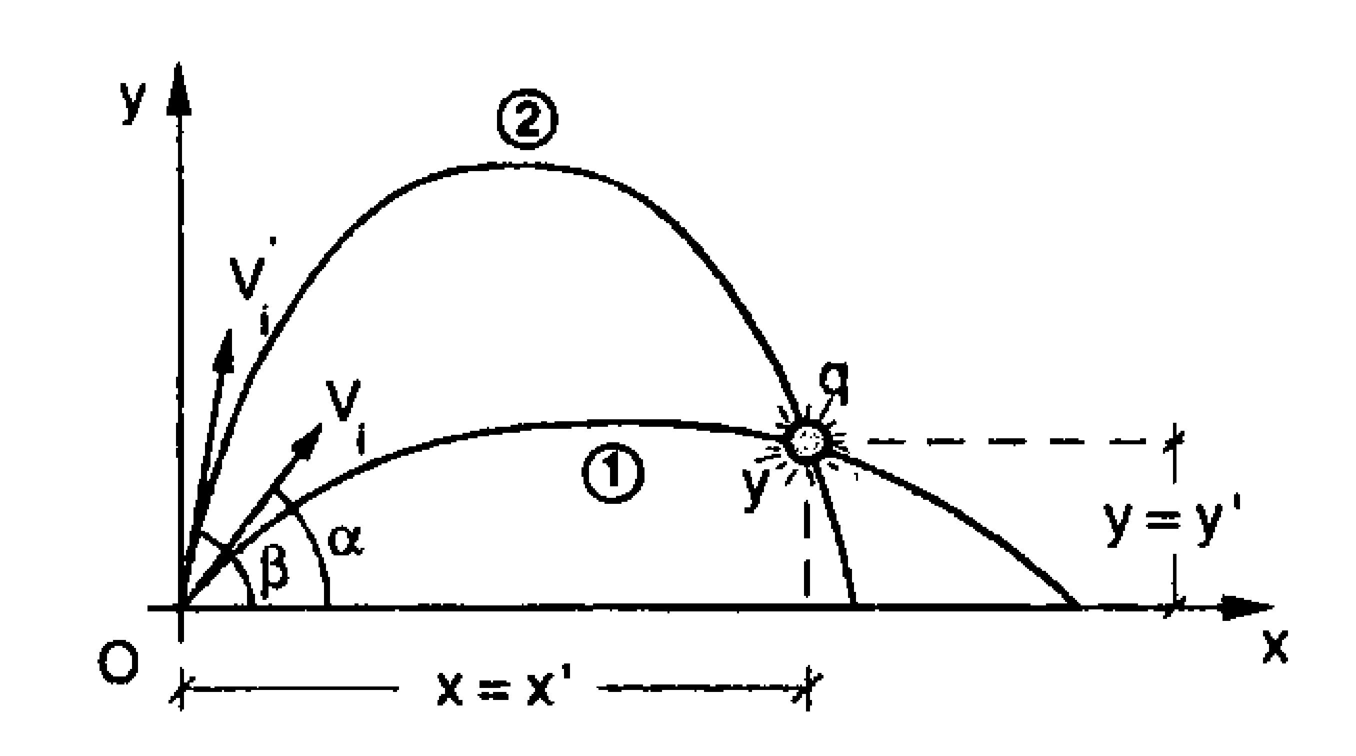
Dividiendo (4) ÷ (1)

$$\frac{H}{D} = \frac{V_i \text{ sen } \alpha \, . \, t}{V_i \cos \alpha \, . \, t} \,, \quad \text{de donde:}$$

$$\text{tg } \alpha = \frac{H}{D} \qquad \text{Rpta.:} \quad \alpha = \text{arco tg } \frac{H}{D}$$

PROBLEMA 22. Dos proyectiles son lanzados desde "O". El (1) con V_i, y α, el (2) con V_i', y β, ambos en el mismo plano vertical. El (2) es lanzado "p" segundos después del (1). ¿Cuál debe ser el valor de "p" para que haya choque?

RESOLUCIÓN : Sea "q" el punto de choque



a) Primer proyectil:

$$y = V_i \text{ sen } \alpha \, . \, t - \frac{1}{2} g \, t^2 \qquad (1)$$

$$x = V_i \cos \alpha \, . \, t \qquad (2)$$

b) Segundo proyectil:

$$y' = V_i' \text{ sen } \beta \, (t - p) - \frac{1}{2} g \, (t - p) \qquad (3)$$

$$x' = V_i' \cos \beta \, (t - p) \qquad (4)$$

Con (2) y (4): (igualando)

$$t = \frac{V' p \cos\beta}{V_i' \cos\beta - V_i' \cos\alpha} \qquad (5)$$

Con (1) y (3): (igualando)

$$V_i \operatorname{sen}\alpha\, t - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= V_i' \operatorname{sen}\beta\,(t - p) - \frac{1}{2} g(t - p)^2$$

$$V_i\, t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 = V_i' t \operatorname{sen}\beta - V_i' p \operatorname{sen}\beta -$$

$$- \frac{1}{2} g(t^2 - 2pt + p^2)$$

$$V_i\, t \operatorname{sen}\alpha - \frac{1}{2} g t^2 =$$

$$= V_i' t \operatorname{sen}\beta - V_i' p \operatorname{sen}\beta -$$

$$- \frac{1}{2} g t^2 + g p t - \frac{1}{2} g p^2$$

$$\frac{g p^2}{2} + V_i' p \operatorname{sen}\beta =$$

$$= t(V_i' \operatorname{sen}\beta + g p - V_i \operatorname{sen}\alpha) \qquad (6)$$

Reemplazando (5) y (6):

$$g p^2 + 2 V_i' . p \operatorname{sen}\beta = \left(\frac{2 V_i p \cos\beta}{V_i' \cos\beta - V_i \cos\alpha}\right).$$

$$. (V_i' \operatorname{sen}\beta + g p - V_i \operatorname{sen}\alpha)$$

$$(g p + 2 V_i' \operatorname{sen}\beta) =$$

$$= \frac{(2 V_i' \cos\beta)}{(V_i' \cos\beta - V_i \cos\alpha)} \times$$

$$\times (V_i' \operatorname{sen}\beta + g p - V_i \operatorname{sen}\alpha)$$

Quitando denominador y efectuando:

$$gp V_i' \cos\beta - gp V_i \cos\alpha + 2V_i'^2 \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\beta - 2V_i' V_i \operatorname{sen}\beta \cos\alpha = 2V_i'^2 \operatorname{sen}\beta$$

$$\cos\beta + 2gp V_i' \cos\beta - 2V_i' V_i \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

Ordenando, factorizando y simplificando:

$$g p (-V_i \cos\alpha + V_i' \cos\beta) =$$

$$= 2 V_i V_i' \operatorname{sen}\beta \cos\alpha - 2 V_i V_i' \operatorname{sen}\alpha \cos\beta$$

$$g p (-V_i \cos\alpha + V_i' \cos\beta) =$$

$$= 2 V_i V_i' (\operatorname{sen}\alpha \cos\beta - \operatorname{sen}\beta \cos\alpha)$$

Rpta.: $$p = \frac{2 V_i V_i' \operatorname{sen}(\alpha - \beta)}{V_i \cos\alpha + V_i' \cos\beta}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Se lanza un objeto con V_i = 20 m/s y con ángulo de 45°. ¿Cuál es el alcance máximo. (g = 10 m/s²)
Rpta.: D = 40 m

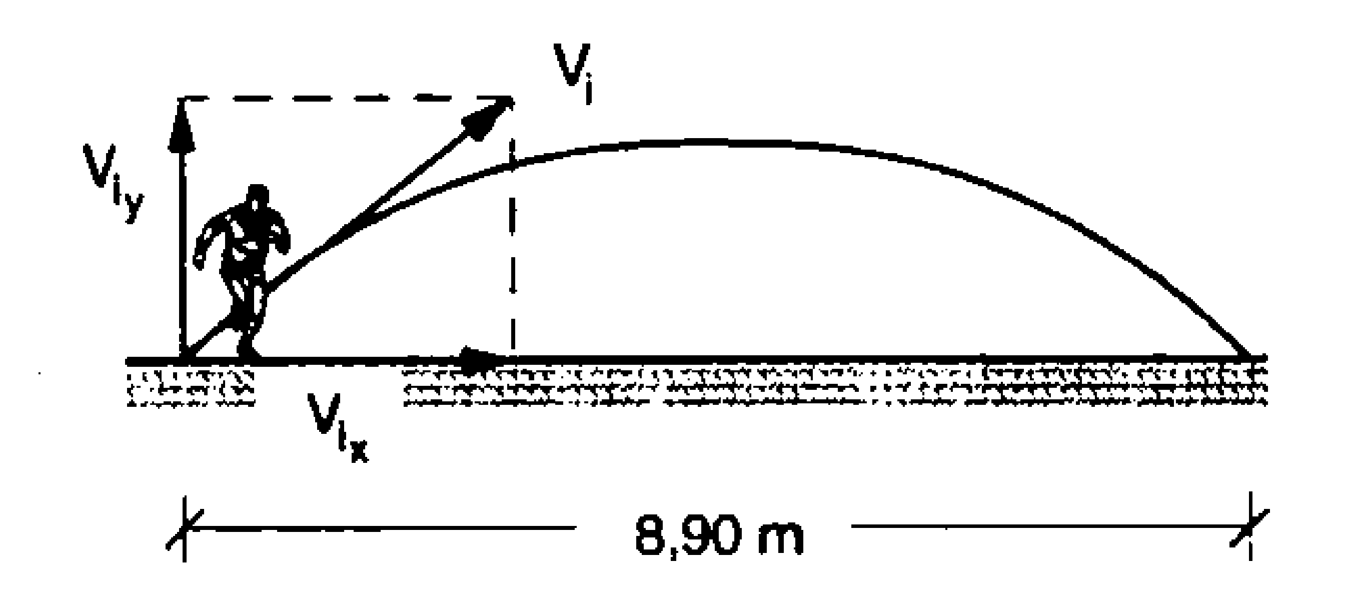
2. Un proyectil es lanzado con V_i = 40 m/s α = 30°, para t = 5 s; hallar :
a) Velocidad "V"
b) Altura "h"
c) Distancia horizontal "d"
Rpta.: a) V = 45,82 m
b) h = 75 m
c) d = 173,2 m

3. Desde una altura de vuelo de 600 m, un avión deja caer una bomba, si el avión está volando a 70 m/s. Calcular:
a) Tiempo que demora en caer
b) Distancia horizontal que avanza
c) Velocidad del momento del impacto
Rpta.: a) t = 10,95 s
b) d = 766,5 m
c) V = 124,86 m/s

4. Un jugador patea una pelota con una velocidad de 20 m/s formando un ángulo de 30° con la horizontal. ¿Cuál es el alcance horizontal de la pelota? (g = 10 m/s²)
Rpta.: D = 71,28 m

http://librosysolucionarios.net

5. Cuál debe ser la velocidad inicial de un atleta de salto largo para igualar el record mundial de 8,90 m, si su salto hace un ángulo de 37° con la horizontal.



Rpta.: 18,54 m/s

6. Se dispara un cañón con un ángulo de tiro de 37° y una velocidad inicial de 196,8 pies/s, un tanque avanza alejándose del cañón a una velocidad de 10,8 km/h. Calcular la distancia del cañón y el tanque en el momento del disparo, para hacer blanco, en el tanque.

   Rpta.: 316,8 m

7. Un cuerpo es lanzado hacia abajo haciendo un ángulo de 37° con la horizontal, desde un punto que está a 270 metros sobre un plano, con una velocidad inicial de 60 m/s. Calcular su avance horizontal y el tiempo que demora la caída

   Rpta.: d = 565,44 m
   t = 11,78 m

8. Calcular cuál debe ser el ángulo de inclinación con el que se debe disparar un proyectil para que alcance una altura de 16,40 pies si su velocidad inicial es de 65,6 pies/s. (considerar g = 32,8 pies/s²)

   Rpta.: a = 30°

9. Se lanza un proyectil con trayectoria parabólica, alcanza una altura de 40 m y avanza horizontalmente una distancia de 190 m. Calcular:

   a) Velocidad inicial
   b) Ángulo de elevación.

   Rpta.: a) V_i = 43,5 m/s
   b) α = 40° 06' 03" , 2

10. ¿Cuál será el alcance horizontal de un proyectil lanzado con una velocidad inicial de 100 m/s y un ángulo de inclinación de 37°?
    g = 10 m/s²

    Rpta.: D = 960 m

11. Desde una superficie horizontal se lanza una esferilla con una velocidad de 50 m/s y con un ángulo de elevación de 53°. Hallar la altura y alcance para t = 3 s.

    Rpta.: h = 75 m
    e = 90 m

12. Una pelota de caucho sale rodando del descanso de una escalera con una velocidad horizontal v = 1,52 m/s los escalones son exactamente de 0,20 m de alto y 0,20 m de ancho. ¿Cuál será el primer escalón al que llegue la pelota?
    Rpta.: 3er escalón.

13. Desde una torre de 20 m se lanza horizontalmente una pelota con una rapidez de 25 m/s. Hallar el ángulo con el cual hace impacto con el suelo y la velocidad correspondiente.
    Rpta.: θ = arc tg (1,25) = 57°
    $v = 5\sqrt{41}$ m/s

14. Desde el punto A de un muro se lanza un proyectil con una velocidad V_o y con un ángulo de inclinación "θ" con respecto a la horizontal. Calcular el radio de curvatura "ρ" de la trayectoria cuando el proyectil pase por el punto P. (A y P están en la misma horizontal).

    Rpta.: $\rho = \frac{V_o^2}{g} \sec\theta$

15. Determinar la velocidad y ángulo de tiro de un proyectil, si se sabe que sube hasta 3 m de altura y en el punto más alto de su trayectoria tiene un radio de curvatura r = 2 m. (g = 10 m/s²).

    Rpta.: $V_o = 4\sqrt{5}$ m/s
    θ = 60°

http://librosysolucionarios.net

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL

Es aquel movimiento en el cual el móvil describe una trayectoria circun-ferencial. Estudiaremos el movimiento circunferencial uniforme M.C.U. y el movimiento circunferencial uniformemente variado M.C.U.V.

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORME M.C.U.

El M.C.U. ocurre cuando el móvil describe ángulos centrales iguales en intervalos de tiempos iguales.

PERIODO "T"

Es el período de tiempo "T" que tarda un móvil con movimiento circunferencial en dar una vuelta o revolución.

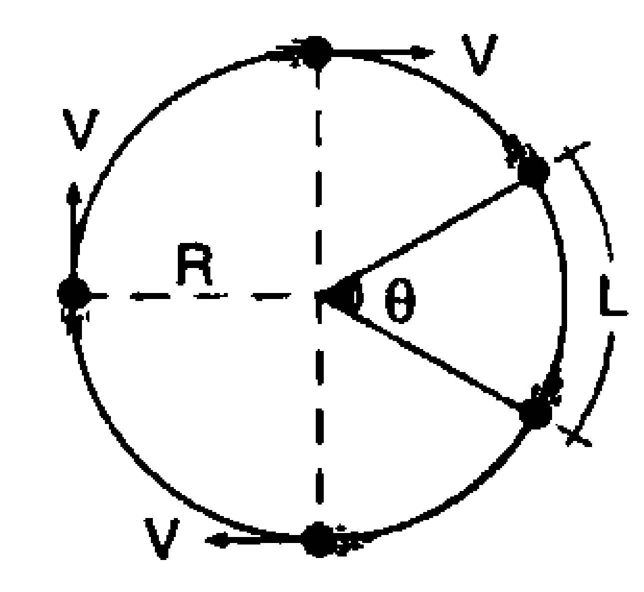
En todo movimiento circunferencial el móvil experimenta dos tipos de velocidades simultáneas.

a) Velocidad tangencial $\vec{V}$:

Es una cantidad vectorial cuyo módulo o rapidez se determina como la longitud de arco "L" que recorre el móvil en la unidad de tiempo.

b) Velocidad angular $\vec{\omega}$:

Es una cantidad vectorial que se representa por un vector perpendicular al centro de la circunferencia y cuyo valor se define como el ángulo central "θ", descrito en la unidad de tiempo.



Velocidad tangencial "V" : $V = \frac{L}{t}$

Velocidad angular "ω" : $\omega = \frac{\theta}{t}$

Ejemplo 1. Un móvil con movimiento circunferencial uniforme tarda 8 segundos en dar 3 vueltas. Calcular su velocidad angular.

RESOLUCIÓN : $\omega = \frac{\theta}{t}$

$$\omega = \frac{3 \text{ vuelta}}{8 \text{ s}} = 0{,}375 \frac{\text{vuelta}}{\text{s}}$$

NOTA: Una vuelta es igual a una revolución, luego haciendo la respectiva conversión.

$$\omega = 0{,}375 \frac{\text{revolución}}{\text{s}} = 0{,}375 \frac{\text{rev}}{(1/60) \text{ min}}$$

$$\omega = 0{,}375 \times 60 \text{ rev/min ó R.P.M.}$$

$$\omega = 22{,}5 \text{ R.P.M.}$$

Ejemplo 2. Un motor gira a 2 000 R.P.M. Calcular su velocidad angular en grados por segundo.

RESOLUCIÓN :

$$\omega = 2\,000 \text{ R.P.M.} = 2\,000 \frac{\text{revol}}{\text{min}}$$

$$= 2\,000 \frac{360°}{60 \text{ s}}$$

Rpta.: $\omega = 12\,000 \frac{\text{grado}}{\text{s}}$

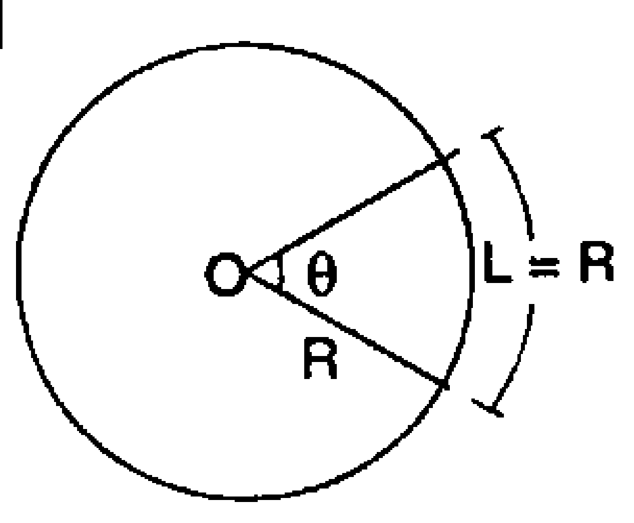
RADIÁN: Es un ángulo central, cuyos lados subtienden un arco igual a la longitud de su radio.

$$\theta = \frac{L}{R}$$

θ = ángulo en radianes

L = longitud del arco

R = radio del círculo



VELOCIDAD ANGULAR Y PERÍODO

Siendo "T" el tiempo empleado por un mó-

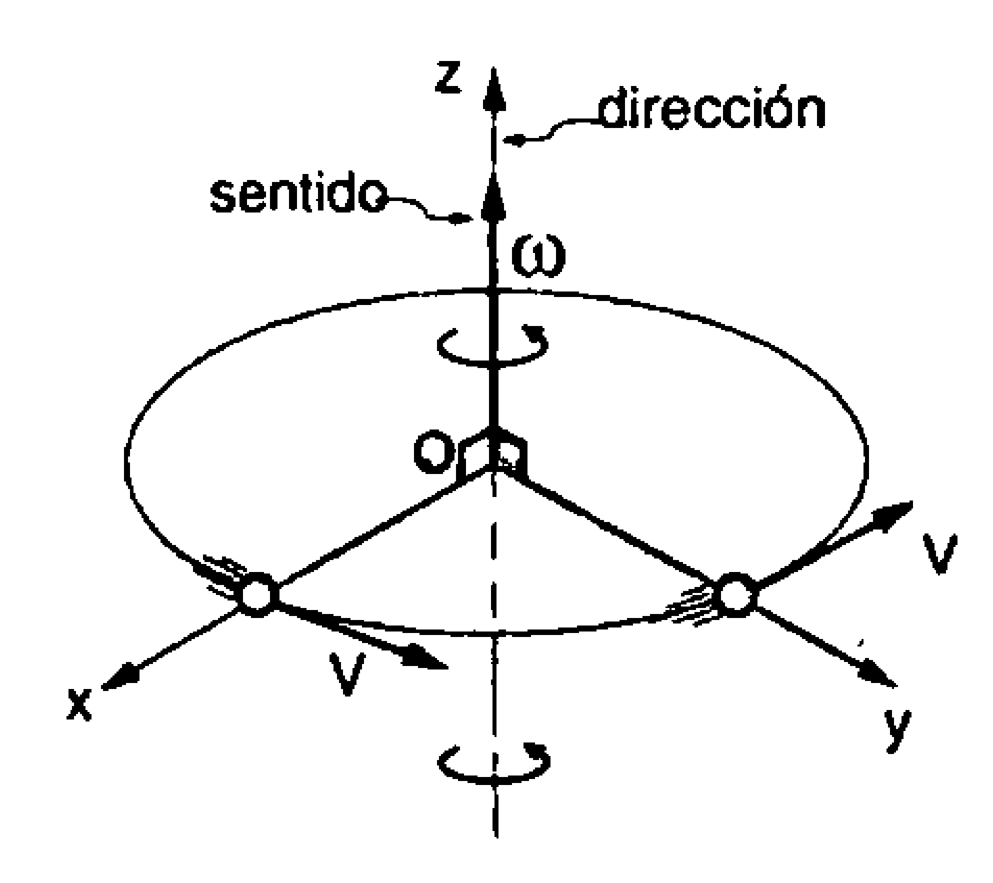
vil para dar una vuelta, es decir, 2π radianes, se tiene que la velocidad angular es:

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T}}$$

DIRECCIÓN, SENTIDO Y MAGNITUD DE LA VELOCIDAD ANGULAR "ω"

La velocidad angular también es una magnitud vectorial.

Dirección: Perpendicular al plano de la circunferencia que describe el móvil. Puede ser el eje de rotación.



Sentido: Convencionalmente, se le da el valor positivo al sentido en que avanza el tirabuzón que apunta hacia arriba.

Magnitud: La magnitud de la velocidad angular se mide, convencionalmente, indicando el espacio angular barrido por el radio de giro del móvil en una unidad de tiempo. Así:

$$\omega : \frac{\text{vuelta}}{s} \text{ ó } \frac{\text{revolución}}{\text{min}} \text{ ó }$$

$$\frac{2\pi x}{s} \text{ ó } \frac{x^\circ}{s} \text{ ó } \frac{\text{rad}}{s}, \text{ etc.}$$

Ejemplo 1. El período de un móvil de M.C.U. es 1,5 s. ¿Cuál es su velocidad angular?

RESOLUCIÓN : $\omega = \dfrac{2\pi \text{ rad}}{1{,}5 \text{ s}} = 4{,}19 \dfrac{\text{rad}}{s}$

Ejemplo 2. Calcular la velocidad angular y el periodo de un motor que tiene 1 700 R.P.M.

RESOLUCIÓN :

a) $\omega = 1\,700 \dfrac{\text{rev}}{\text{min}} = 1\,700 \times \dfrac{2\pi \text{ rad}}{\text{min}}$

$$\omega = 1\,700 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{s} = 178 \frac{1}{s}$$

Rpta.: $\omega = 178 \text{ rad/s}$

b) Sabiendo: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ de donde:

Rpta. : $T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2 \times 3{,}1416}{178 \frac{1}{s}} = 0{,}035 \text{ s}$

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD TANGENCIAL Y EL PERÍODO

Siendo "T" el tiempo empleado para dar una vuelta circular sobre una circunferencia de radio R, la velocidad tan-gencial es:

$$\boxed{V = \frac{2\pi R}{T}}$$

UNIDADES SI: $V = \dfrac{m}{s}$

Ejemplo: Hallar la velocidad tangencial de un móvil que circula por una circunferencia de 10 m de radio, en 3 minutos.

RESOLUCIÓN : $V = \dfrac{2\pi R}{T}$

$$V = \frac{2\pi \times 10 \text{ m}}{3 \times 60 \text{ s}} = 0{,}349 \frac{m}{s}$$

RELACIÓN ENTRE LA VELOCIDAD ANGULAR Y LA VELOCIDAD TANGENCIAL O LINEAL

Sabemos que:

Velocidad angular: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (1)

Velocidad tangencial: $V = \dfrac{2\pi R}{T}$ (2)

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo (1) en (2): $\boxed{V = \omega R}$

UNIDADES SI : $V = \frac{m}{s}$

Ejemplo 1. Calcular la velocidad tangencial de un móvil que describe una circunferencia de 5 m de radio con una velocidad angular de 60 rad/s.

RESOLUCIÓN: R = 5 m ; V = ?

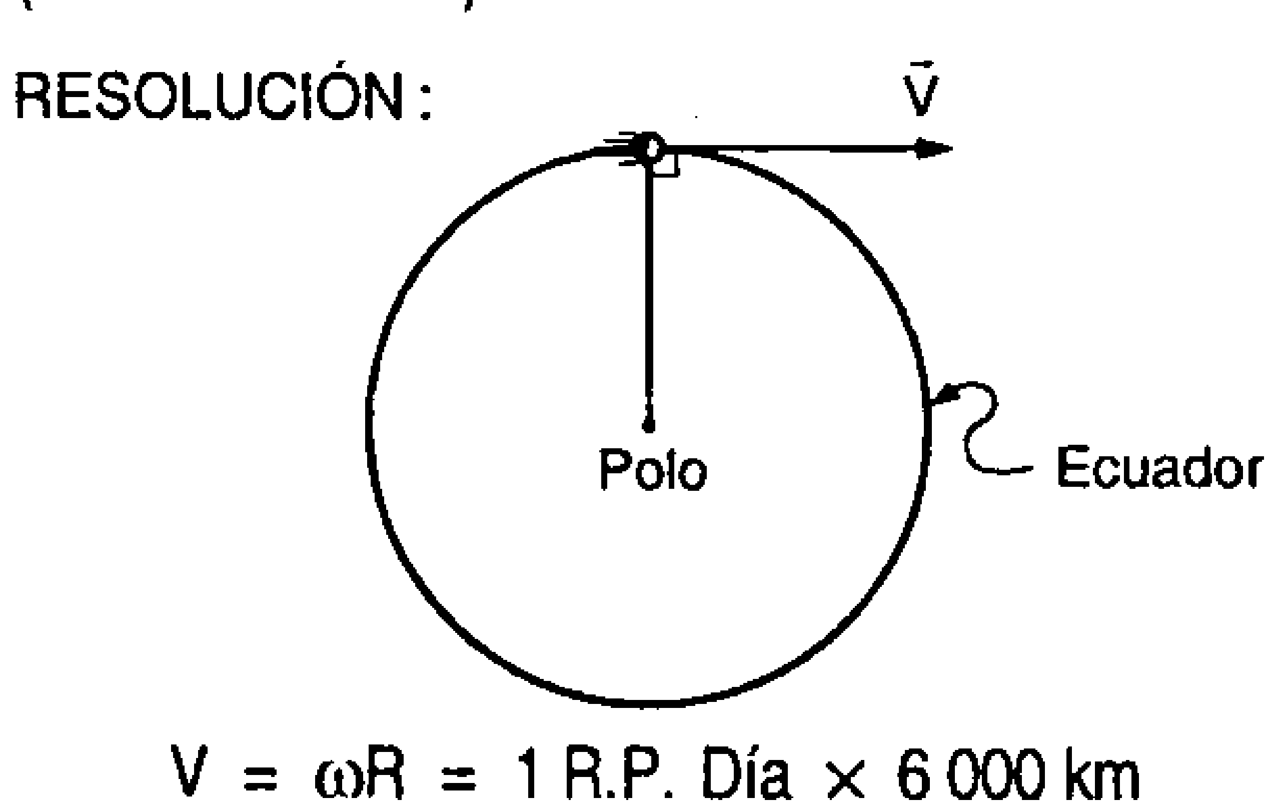
$$\omega = 60\ \frac{rad}{s} = 60\ \frac{1}{s}$$

$$V = w \times R = 60\ \frac{1}{s} \times 5\,m$$

Rpta.: $V = 300\ m/s$

Ejemplo 2. Calcular la velocidad tangencial de un punto del ecuador (R ≈ 6 000 km).

RESOLUCIÓN :



$$V = \omega R = 1\ R.P.\ Día \times 6\,000\ km$$

$$V = \frac{2\pi\ rad}{24\ h} \times 6\,000\ km$$

$$V = \frac{2 \times 3{,}14 \times 6\,000 \times 1\,000\ m}{24 \times 3\,600\ s}$$

Rpta.: $V = 436{,}11\ m/s$

Ejemplo 3. Calcular la velocidad angular y el período de un móvil que circula sobre una circunferencia que tiene un radio de 20 m y su velocidad es de 8 m/s.

RESOLUCIÓN: $\omega = \frac{V}{R} = \frac{8\ \frac{m}{s}}{20\ m}$

Rpta.: $\omega = 0{,}4\ \frac{rad}{s} = 0{,}4\ \frac{1}{s}$

Cálculo de T: $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$

$$T = \frac{2 \times 3{,}14}{0{,}4\ \frac{1}{s}} = 15{,}7\ s$$

Ejemplo 4. Calcular el ángulo descrito en 12 minutos, por el radio de una circunferencia que gira con una velocidad angular de 8 rad/s. Calcular cuántas revoluciones ha dado.

RESOLUCIÓN : $\omega = \frac{\theta}{t}$ de donde:

a) $\theta = \omega t$

$$\theta = 8 \times \frac{rad}{s} \times 12 \times 60\ s$$

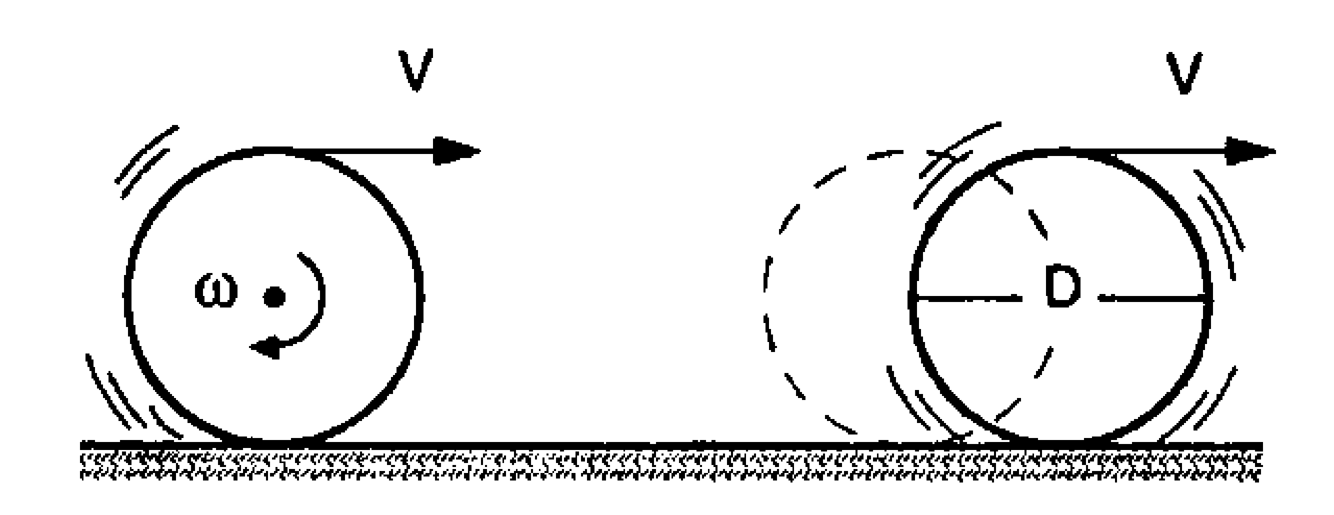
Rpta.: $\alpha = 5\,760\ rad$

b) $N = \frac{n°\ de\ rad}{2\pi\ rad/vueltas} = \frac{5\,760\ rad}{2\pi\ \frac{rad}{vuelta}}$

Rpta.: $N = 916{,}73\ vueltas$

Ejemplo 5. Un auto va a 80 km/h. El diámetro de la llanta es 23 pulgadas (1 pulg = 2,54 cm). Calcular la velocidad angular de la llanta.

RESOLUCIÓN :



$V = \omega R$ de donde:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{80\ km/h}{\frac{23}{2}\ pulg} = \frac{\frac{80 \times 1\,000 \times 100\ cm}{3\,600\ s}}{\frac{23}{2} \times 2{,}54\ cm}$$

Rpta.: $\omega = 76{,}08 \dfrac{rad}{s}$

FRECUENCIA " f "

Es el número de vueltas o revoluciones que da un móvil en una unidad de tiempo (por ejemplo, el número de vueltas que daría en 1 s).

Con una regla de 3 se tiene:

1 vuelta da en T s
f vueltas ______ 1 s

$$\therefore \quad \boxed{f = \frac{1}{T}}$$

Ejemplo: En un motor de 1 700 R.P.M., calcular su período, su velocidad angular y su frecuencia.

RESOLUCIÓN :

a) Cálculo de la velocidad angular:

$\omega = 1\,700$ R.P.M. ; o sea:

$$\omega = 1\,700 \frac{rev}{min} = 1\,700 \times \frac{2\pi}{60} \cdot \frac{rad}{s}$$

Rpta.: $\omega = 178{,}02 \times \dfrac{rad}{s} = 178{,}02 \dfrac{1}{s}$

b) Cálculo del período: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{178{,}02 \times \frac{1}{s}}$$

Rpta.: $T = 0{,}035$ s

c) Cálculo de la frecuencia:

$$f = \frac{1}{T} = \frac{1\ rev}{0{,}035\ s}$$

Rpta.: $f = 28{,}57$ rev/s

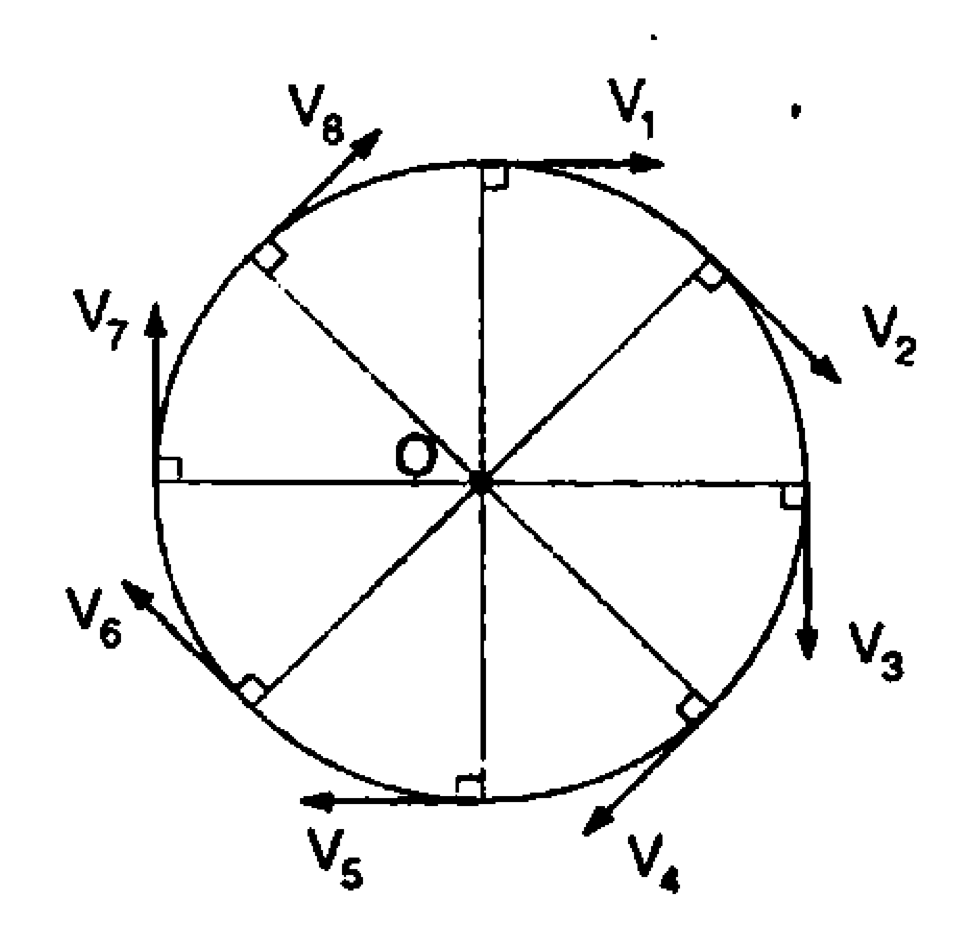
ACELERACIÓN CENTRÍPETA " a_c"

RELACIÓN CON LA VELOCIDAD TANGENCIAL Y LA VELOCIDAD ANGULAR

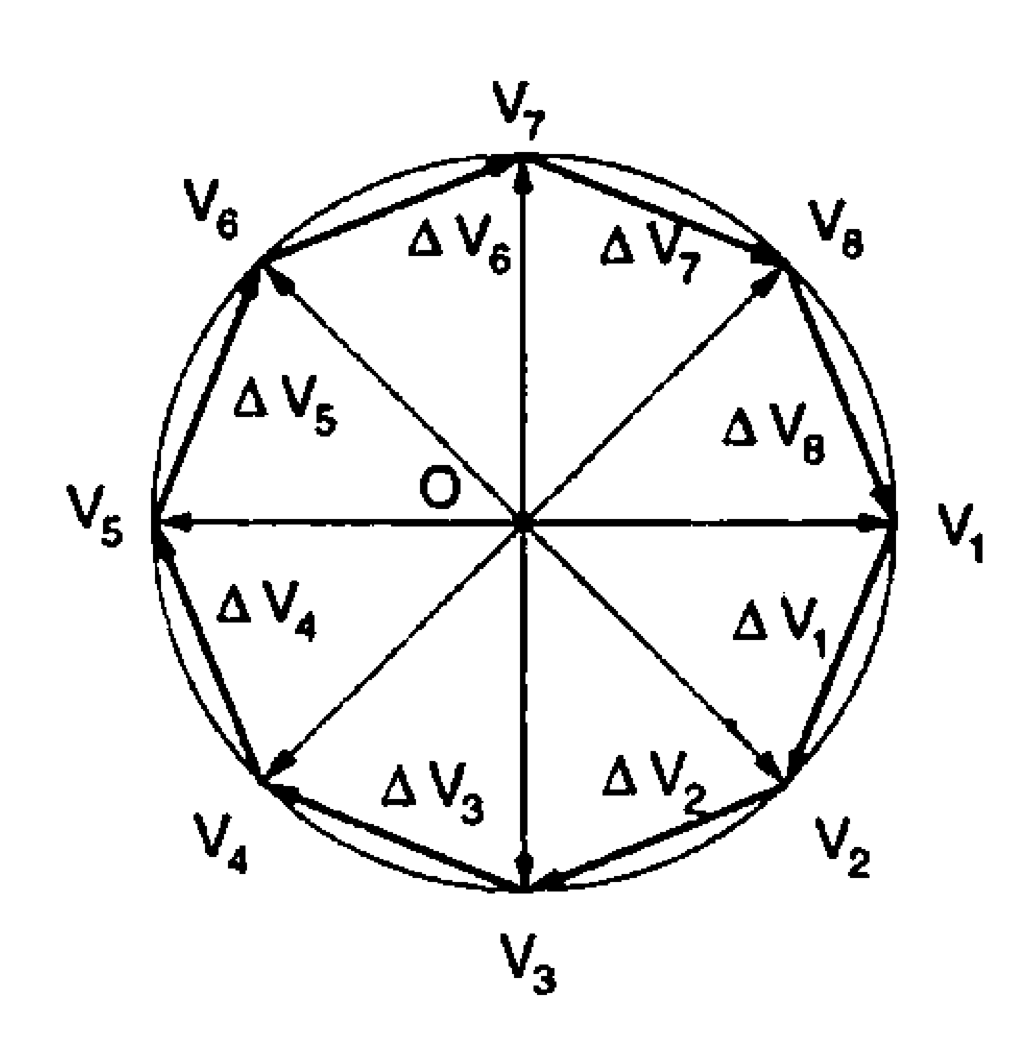
La aceleración centrípeta es la que experimenta un móvil en movimiento circunferencial. Es una cantidad vectorial dirigida hacia el centro de la circunferencia y mide la rapidez con que cambia la dirección de la velocidad tangencial.

El movimiento circunferencial uniforme de un cuerpo siempre es acelerado por que la velocidad tangencial cambia de dirección, aunque el módulo de la velocidad tangencial se mantiene constante.

Graficando las velocidades para intervalos iguales y sucesivos de tiempo.



Colocando en el punto "O" los orígenes de los vectores.



Como el vector velocidad gira un ángulo pequeño, la variación de la velocidad se representa por la base del triángulo isósceles.

http://librosysolucionarios.net

Construyamos la variación de la velocidad durante el tiempo en que el cuerpo hace una vuelta completa. La suma de las magnitudes de las variaciones de la velocidad durante este tiempo será igual a la suma de los lados del polígono representado. Al construir cada triángulo, se supone simplemente que el vector velocidad varía bruscamente, pero en realidad la dirección del vector velocidad varía continuamente.

Está absolutamente claro que cuanto menor se tome el ángulo del triángulo, tanto menor será el error. Cuanto menor sea cada lado del polígono, tanto más se aproximará este a una circunferencia de radio **V**. Por eso, el valor exacto de la suma de los valores absolutos de las variaciones de la velocidad durante una vuelta del cuerpo será igual a la longitud de la circunferencia, o sea, igual a **2πV**. La magnitud de la aceleración se hallará dividiendo ésta por el tiempo **T** de una vuelta completa.

Así pues, la magnitud de la aceleración centrípeta, llamada también aceleración normal (a_n) en el movimiento circunferencial uniforme, queda expresada en la fórmula:

Para 1 vuelta: $$a_c = \frac{\Delta V}{t} = \frac{2\pi V}{T} \qquad (1)$$

Pero, el tiempo de una vuelta completa en el movimiento sobre una circunferencia de radio **R**, puede escribirse con la fórmula:

Para 1 vuelta: $$T = \frac{e}{V} = \frac{2\pi R}{V} \qquad (2)$$

Sustituyendo la expresión (2) en (1):
Se obtiene:

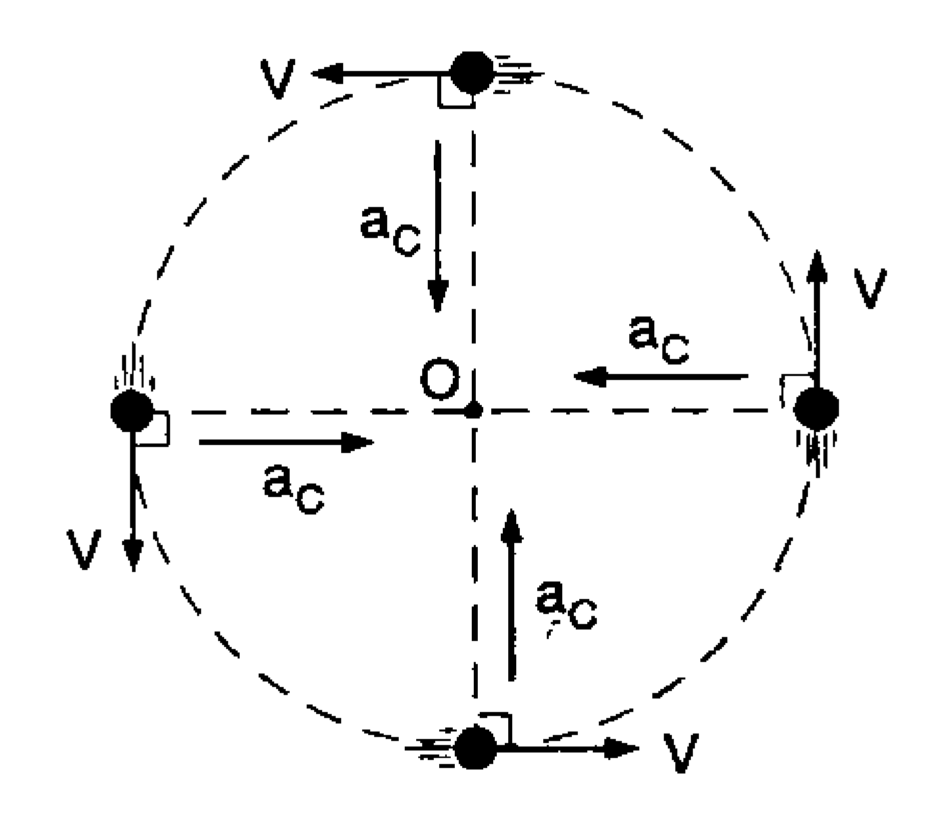
$$\boxed{a_c = \frac{V^2}{R}} \qquad (I)$$

UNIDADES SI $a_c = \dfrac{m}{s^2}$

Siendo constante el radio de la rotación, la aceleración es proporcional al cuadrado de la velocidad. Siendo dada la velocidad, la aceleración es inversamente proporcional al radio. Este mismo rozamiento nos muestra cómo está dirigida en cada instante la aceleración del movimiento circunferencial.

Cuanto menor sea el ángulo de los vértices de los triángulos isósceles que empleamos para la demostración, tanto más se aproximará a 90° el ángulo entre la variación de velocidad y la velocidad misma.

Por lo tanto, la dirección de la aceleración en el movimiento circunferencial uniforme es perpendicular a la velocidad tangencial, ¿Qué direcciones tienen la velocidad y la aceleración con relación a la trayectoria? La velocidad tangencial es tangente al trayecto y la aceleración centrípeta tiene la dirección del radio y además, va hacia el centro de la circunferencia.



Hagamos la prueba de dar vueltas a una piedra con una cuerda. Con gran claridad sentiremos la necesidad de hacer un esfuerzo muscular.

¿Para qué hace falta la fuerza, si el movimiento del cuerpo es uniforme? En realidad no resulta así. El cuerpo se mueve con una velocidad tangencial de una magnitud invariable, pero la variación de la dirección de la velocidad es contínua, esto es el origen de que el movimiento sea acelerado. La fuerza se necesita para desviar al cuerpo de su camino inercial rectilíneo, para crear la aceleración centrípeta (V^2/ R) que acabamos de calcular.

Según la 2[DA] ley de Newton, la fuerza señala la dirección de la aceleración. Por consiguiente, el cuerpo que gira sobre una cir-

http://librosysolucionarios.net

consiguiente, el cuerpo que gira sobre una circunferencia con una rapidez constante tiene que experimentar la acción de una fuerza que va por el radio en dirección del centro de rotación. La fuerza que actúa sobre la piedra a través de la cuerda es la que garantiza la aceleración V^2/R.

Por otro lado recordando que: $V = \omega R$

Sustituyendo en (I): $a_c = \dfrac{\omega^2 R^2}{R}$

$$\therefore \boxed{a_c = w^2 R}$$

UNIDAD SI $a_c : m / s^2$

Ejemplo 1. ¿Cuál es la aceleración centrípeta de un móvil que recorre una pista circular de 80 m de radio con M.C.U. a 80 km/h?

RESOLUCIÓN:

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(80 \times \frac{1000}{3600})^2}{80\,m}$$

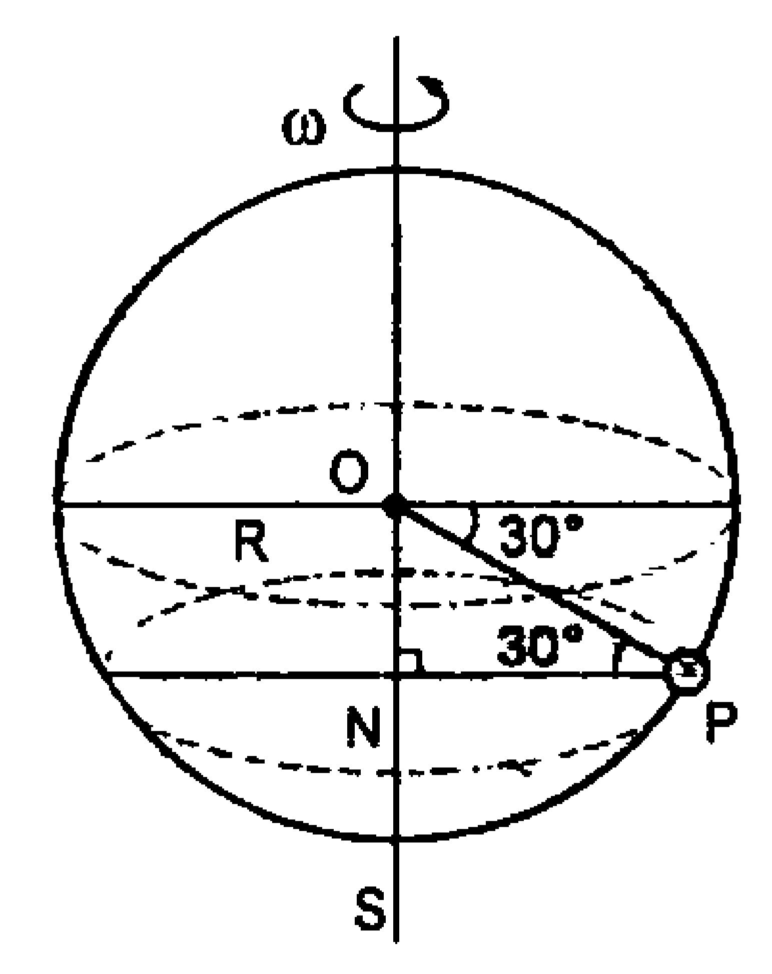
Rpta.: $a_c = 6{,}172\ m/s^2$

Ejemplo 2. Si la velocidad de la tierra es W, ¿Cuál será la velocidad tangencial de un punto de la superficie terreste a 30° de lalitud sur?. Radio de la tierra: $R = 6 \times 10^3$ km.

RESOLUCIÓN : $w = W$; $V = ?$

$R = 6 \times 10^3$ km ; 30° Lat. Sur

En la figura: $V = W \cdot NP \ldots (1)$



El punto P es un lugar de la Tierra, que está situado en un punto del paralelo 30° Sur.

En el triángulo ONP: $NP = OP \cos 30°$

pero: $OP = R = 6 \times 10^3$ km

$$NP = 6 \times 10^3 \times \frac{\sqrt{3}}{2}\ km$$

sustituyendo en (1):

Rpta.: $V = W \times 3\sqrt{3} \times 10^3$ km / h

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un motor eléctrico que gira a 1 800 R.P.M. tiene 2 ruedas de poleas en su eje. Hallar la velocidad lineal de la faja cuando se coloca sobre la rueda de mayor diámetro. Los diámetros de las poleas son 7,5 cm y 15 cm.

RESOLUCIÓN : $\omega = 1\,800$ R.P.M.

$V = ?$ $D = 15$ cm

Sabiendo que: $V = \omega R$

Cálculo de la velocidad angular en radianes por min:

$w = 1\,800$ rev/min

$$w = 1\,800 \times \frac{2\pi}{min} = \frac{3600\,\pi}{min}$$

Sustituyendo valores en (1):

$$V = 3600\,\frac{\pi}{min} \times \frac{15\ cm}{2}$$

$V = 84\,823$ cm/min

Rpta.: $V = 848{,}23$ m/min

PROBLEMA 2. Calcular la velocidad angular de la Tierra alrededor de su eje.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (1)

El período de rotación de la Tierra es 24 horas, luego:

$$\omega = \frac{2\pi}{24\,h} = \frac{\pi}{12} \times \frac{rad}{h} = \frac{\pi}{12} \times \frac{1}{h}$$

PROBLEMA 3. Un avión de juguete, sujeto a una cuerda de 100 m de largo, en 5 s describe un arco de 15°. ¿Cual es su velocidad angular y cuál es su velocidad tangencial?

RESOLUCIÓN : $R = 100\,m$

$\omega = ?$ $\quad t = 5\,s$

$V = ?$ $\quad \theta = 15°$

Cálculo de θ en radianes:

$$\theta = 15° = \frac{15\pi\,rad}{180} = \frac{\pi}{12}\,rad$$

$$\omega = \frac{\theta}{t} = \frac{\frac{\pi}{12}\,rad}{5\,s} = \frac{\pi}{60} \cdot \frac{rad}{s}$$

luego, rotará: $\omega = \dfrac{\pi}{60} \cdot \dfrac{rad}{s}$

- Cálculo de la velocidad tangencial:

$$V = \omega R = \frac{\pi}{60} \cdot \frac{rad}{s} \times 100\,m$$

Rpta.: $V = 5{,}24\,\dfrac{m}{s}$

PROBLEMA 4. En un momento, un trompo gira a razón de 300 R.P.M. ¿Cuál será su velocidad angular en ese instante?

RESOLUCIÓN :

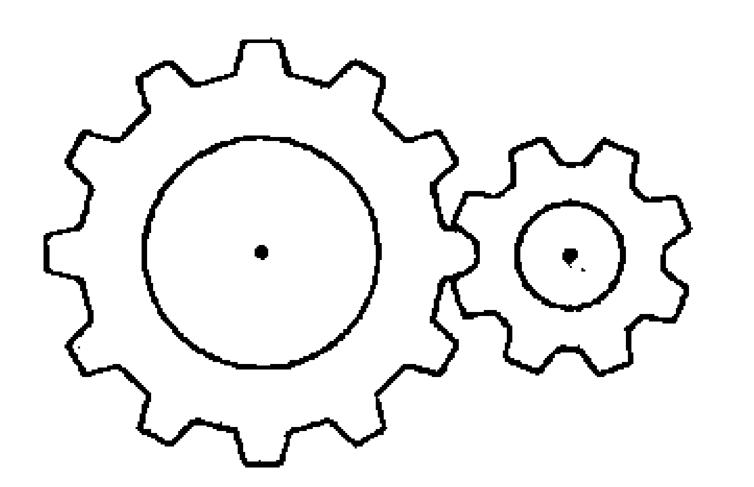
$$\omega = 300\,\frac{vueltas}{min} = 300 \times \frac{2\pi\,rad}{60\,s}$$

Rpta.: $\omega = 31{,}416\,\dfrac{rad}{s}$

PROBLEMA 5. Dos engranajes están girando uno engranado al otro, el mayor de 30 cm de diámetro gira a 200 R.P.M. Hallar la velocidad tangencial y la velocidad angular del segundo que tiene 10 cm de diámetro.

RESOLUCIÓN :

Obsérvese con cuidado que las velocidades tangenciales de ambos es la misma, por consiguiente bastará con calcular la velocidad tangencial del engranaje más grande.



$$V = \omega R = 200\,R.P.M. \times R$$

$$V = 200 \times \frac{2\pi\,rad}{min} \times 15\,cm$$

$$V = 200 \times \frac{2\pi \times 15\,cm}{60\,s} = 314{,}6\,cm/s$$

Cálculo de la velocidad angular del engranaje chico:

$V = \omega R$, de donde:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{314{,}16\,cm/s}{5\,cm}$$

Rpta.: $\omega = 62{,}83\,\dfrac{1}{s}$

PROBLEMA 6. Un ciclista, en una competencia da 80 pedaleadas completas por minuto. La catalina tiene un diámetro de 20 cm, el piñón de la rueda 8 cm y la rueda o llanta, tiene un diámetro de 60 cm. Calcular la velocidad que lleva el ciclista.

RESOLUCIÓN :

$\omega = 80\,R.P.M.$ $\quad V = ?$

$d_c = 20\,cm$

$d_p = 8\,cm$

$d_{LL} = 60\,cm$

http://librosysolucionarios.net

La cadena de transmisión entre la catalina y el piñón tiene una velocidad lineal que es la misma que la catalina y el piñón; luego calcular la velocidad lineal de la catalina es calcular la velocidad lineal de la cadena y el piñón.

$$V_c = \omega R = 80\,\frac{\text{rev}}{\text{min}} \times 10\text{ cm}$$

$$V_c = 80 \times \frac{2\pi}{60\text{ s}} \times 10\text{ cm}$$

luego: $V_p = 0{,}84\text{ m/s} \quad (V_c = V_p)$

Con esta velocidad del piñón se calcula la velocidad tangencial de la llanta que será la velocidad que lleva el ciclista.

Evidentemente que piñón y llanta tienen igual velocidad angular:

$$\omega_p = \omega_{LL}$$

Por consiguiente:

$$\frac{V_p}{r_p} = \frac{V_{LL}}{R_{LL}} \qquad \text{de donde:}$$

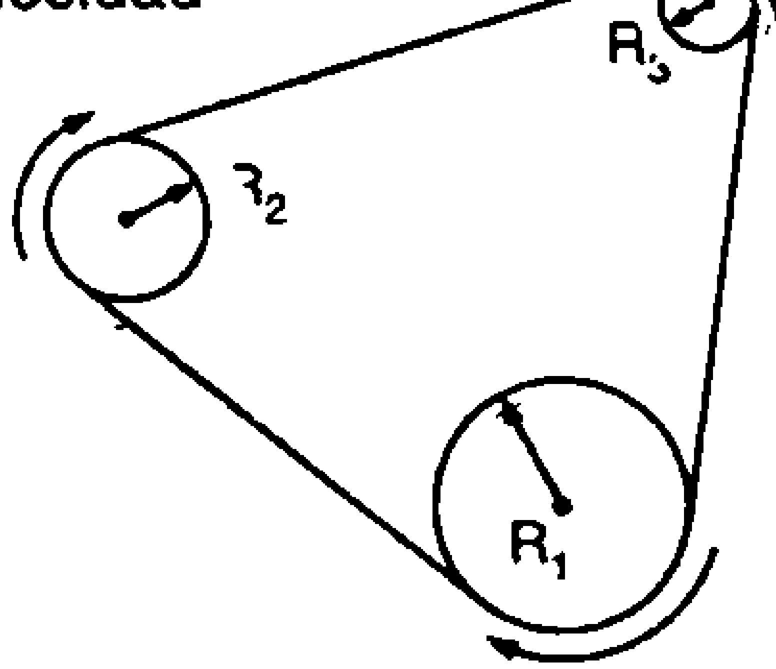
$$V_{LL} = R_{LL}\,\frac{V_p}{r_p} = 30\text{ cm} \times \frac{83{,}77\text{ cm/s}}{4\text{ cm}}$$

$$V_{LL} = 628{,}28\,\frac{\text{cm}}{\text{s}} = 6{,}28\text{ m/s}$$

Transformando a km/h :

Rpta.: $V_{LL} = 22{,}6\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$

PROBLEMA 7. Los radios de tres poleas conectadas por una faja de transmisión son como 5 : 3 : 1, la polea mayor gira a razón de 50 R.P.M. ¿Cuál es la velocidad angular de las otras dos?



RESOLUCIÓN :

La velocidad lineal o tangencial en las tres poleas es igual, porque todas ellas tienen la velocidad lineal de la faja transmisora , luego:

$$V_1 = V_2 = V_3$$

pero: $V = \omega R$

luego: $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2 = \omega_3 R_3$

de donde: $\omega_1 R_1 = \omega_2 R_2$

$$\omega_2 = \frac{\omega_1 R_1}{R_2} = \frac{50 \times 5}{3}\text{ R.P.M.}$$

Rpta.: $\omega_2 = 83{,}33$ R.P.M.

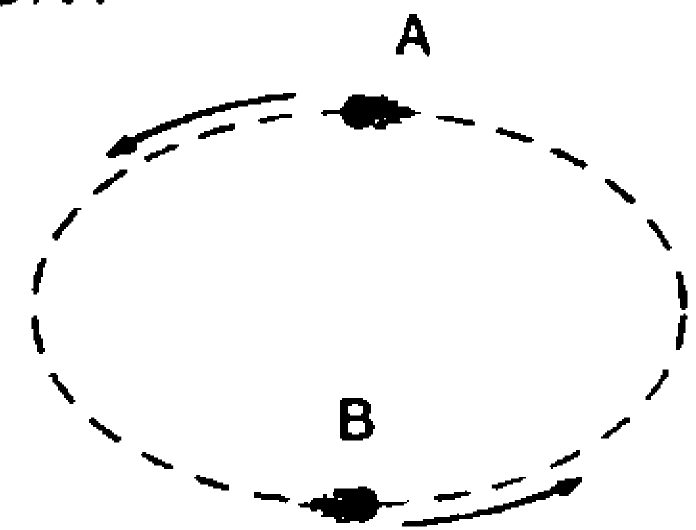
También: $\omega_1 R_1 = \omega_3 R_3$

$$\omega_3 = \frac{\omega_1 R_1}{R_3} = \frac{50 \times 5}{1}\text{ R.P.M.}$$

Rpta.: $\omega_3 = 250$ R.P.M.

PROBLEMA 8. En un velódromo se corre la carrera de persecución individual, para lo cual la partida de dos ciclistas se hace en puntos diametralmente opuestos, uno en persecución del otro. Si un ciclista en los entrenamientos comprobó que daba 7 vueltas por minuto y el otro 8 vueltas por minuto. ¿Cuánto tiempo después de la partida el segundo alcanzó al primero?

RESOLUCIÓN :



Sea "t" el tiempo en que el segundo alcanzó al primero. Cuando lo alcanzó la diferencia angular será 0, pero el segundo habrá recorrido un ángulo mayor que el primero en un valor igual a π, en otras palabras el ángulo descrito por **B**, será igual al de **A** más π:

$$\theta_B = \theta_A + \pi$$

$$\text{ó} \quad \theta_B - \theta_A = \pi \qquad (1)$$

pero: $\theta_B = \omega_B t$ y: $\theta_A = \omega_A t$

En (1): $\omega_B t - \omega_A t = \pi$ (2)

pero:

$$\omega_B = \frac{8 \text{ vuelta}}{\text{min}} = 8 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{min}} = 16\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

$$\omega_A = \frac{7 \text{ vuelta}}{\text{min}} = 7 \times \frac{2\pi \text{ rad}}{\text{min}} = 14\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}}$$

Sustituyendo en (2):

$$16\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} \times t - 14\pi \frac{\text{rad}}{\text{min}} \times t = \pi$$

de donde: $2t = 1 \text{ min}$, luego:

Rpta.: Le da alcance en: $t = \frac{1}{2} \text{ min}$

PROBLEMA 9. Una "silla voladora" de un parque de juegos, gira a razón de 8 R.P.M., formando la cuerda que la sostiene con la vertical un ángulo de 45°. Calcular la aceleración centrípeta.

RESOLUCIÓN : $\omega = 8$ R.P.M.

$a_c = ?$ $\theta = 45°$

$L = 6 \text{ m}$

Se tiene : $a_c = \omega^2 R$ (I)

Calculando ordenadamente ω y R:

1) $\omega = 8 \text{ R.P.M.} = 8 \frac{\text{rev}}{\text{min}} = 8 \times \frac{2\pi}{60 \text{ s}}$

$$\omega = 0{,}84 \frac{1}{s} \qquad (1)$$

En el triángulo ABH:

2) $R = L \operatorname{sen} \theta = 6 \text{ m} \times \operatorname{sen} 45°$

$R = 6 \text{ m} \times 0{,}71$

$R = 4{,}26 \text{ m}$ (2)

sustituyendo (1) y (2) en (I):

$$a_c = \left(0{,}84 \frac{1}{s}\right)^2 \times 4{,}26 \text{ m}$$

Rpta.: $a_c = 3 \text{ m/s}^2$

PROBLEMA 10. Calcular la velocidad angular de las tres agujas de un reloj.

RESOLUCIÓN: $\omega = \frac{\text{ángulo}}{\text{tiempo}}$ (I)

Para el horario:

$$\omega_1 = \frac{2\pi}{12 \text{ h}} = \frac{2 \times 3{,}141\,6}{12 \times 3\,600 \text{ s}}$$

Rpta.: $\omega_1 = 1{,}454\,4 \times 10^{-3} \frac{1}{s}$

Para el minutero:

$$\omega_2 = \frac{2\pi}{1 \text{ h}} = \frac{2 \times 3{,}141\,6}{3\,600 \text{ s}}$$

Rpta.: $\omega_2 = 1{,}745\,3 \times 10^{-3} \frac{1}{s}$

Para el segundero:

$$\omega_3 = \frac{2\pi}{1 \text{ min}} = \frac{2 \times 3{,}141\,6}{60 \text{ s}}$$

Rpta.: $\omega_3 = 0{,}104\,7 \frac{1}{s}$

PROBLEMA 11. La distancia promedio de la Tierra a la Luna es de 38,4 x 10^4 km. Calcular la velocidad angular, lineal y aceleración centrípeta de la Luna sabiendo que realiza una revolución cada 28 dias.

RESOLUCIÓN : $\omega = ?$

$d = 38{,}4 \times 10^4 \text{ km}$ $V = ?$

$t = 28 \text{ días}$ $a_c = ?$

a) $\omega = \dfrac{\text{vuelta}}{\text{tiempo}} = \dfrac{1\text{ rev}}{28\text{ días}}$

$$\omega = \frac{2\pi\text{ rad}}{28 \times 3\,600 \times 24}$$

Rpta.: $\omega = 2{,}597 \times 10^{-6}\ \dfrac{1}{s}$

b) $V = \omega R$ (I)

El radio de giro será la distancia de la Tierra y a la Luna más el radio de la Tierra, ya que el centro de giro de la Luna es el centro de la Tierra, luego:

$$R = 38{,}4 \times 10^4\text{ km} + 6 \times 10^3\text{ km}$$

$$R = 390 \times 10^3\text{ km}$$

Luego sustituyendo valores en (I):

$$V = 2{,}597 \times 10^{-6}\ \frac{1}{s} \times 390 \times 10^3 \times 10^3\text{ m}$$

Rpta.: $V = 10\,128\text{ m/s}$

c) $a_c = \omega^2 R = \left(2{,}597 \times 10^{-6}\ \dfrac{1}{s}\right)^2 \times$

$$\times\ 390 \times 10^3 \times 10^3\text{ m}$$

Rpta.: $a_c = 0{,}263 \times 10^{-2}\text{ m/s}^2$

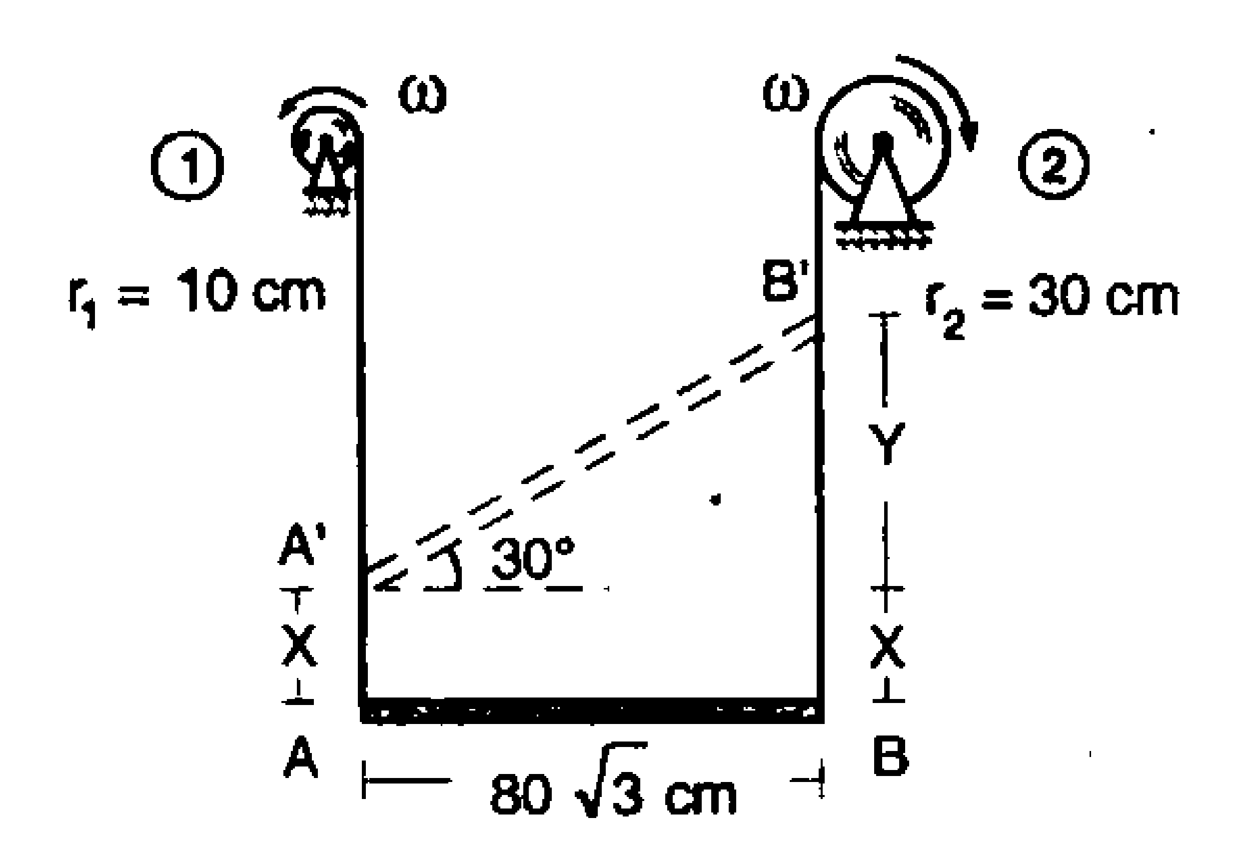
PROBLEMA 12. La velocidad tangencial de un electrón es de 4×10^5 m/s. La circulación del electrón se debe a un campo magnético; el radio de giro es de 3 m. Calcular su aceleración centrípeta.

RESOLUCIÓN :

$$a_c = \frac{V^2}{R} = \frac{(4 \times 10^5\text{ m/s})^2}{3\text{ m}}$$

Rpta.: $a_c = 5{,}33 \times 10^{10}\text{ m/s}^2$

PROBLEMA 13. Se tiene una barra horizontal AB en reposo, cuya longitud es de $80\sqrt{3}$ cm, sostenida por 2 cuerdas unidas a dos poleas. Si las poleas empiezan a girar con una velocidad de 120 R.P.M. ¿Al cabo de cuánto tiempo la barra formará un ángulo de 30° con la horizontal?



RESOLUCIÓN : De acuerdo a la figura:

a) La velocidad con que sube el extremo A de la barra es igual a la velocidad tangencial de la polea N° 1.

b) La velocidad con que sube el extremo B de la barra es igual a la velocidad tangencial de la polea N° 2.

$$d = Vt \quad \therefore \quad X = \omega r_1 t \qquad \text{(a)}$$

$$\text{y:} \quad X + Y = \omega r_2 t \qquad \text{(b)}$$

Reemplazando (a) en (b):

$$Y = \omega(r_2 - r_1)t \qquad \text{(c)}$$

Por otro lado, de la figura se deduce:

$$\text{tg } 30° = \frac{Y}{80\sqrt{3}}$$

$$\therefore \quad Y = 80\text{ cm} \qquad \text{(e)}$$

Igualando (c) y (e) y reemplazando datos numéricos, donde:

$$r_2 - r_1 = 20 \quad \text{y} \quad \omega = 120 \times \frac{2\pi}{60}$$

Se tiene: $120 \times \dfrac{2\pi}{60} \times 20 \times t = 80$

Simplificando y despejando:

Rpta.: $t = \dfrac{1}{\pi}\text{ s}$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la velocidad angular de un disco que gira con M.C.U. de 26,4 radianes en 5 s. Calcular el período y la frecuencia.

Rpta.: $\omega = 5{,}28 \text{ rad/s}$

$T = 1{,}19 \text{ s}$

$f = 0{,}84 \text{ rev/s}$ ó $0{,}84 \text{ Hz}$

2. La distancia de la Tierra al Sol es de $149{,}7 \times 10^6$ km; su período de revolución es de 365 días. El diámetro del Sol es de $1{,}4 \times 10^6$ km. Calcular:

a) Velocidad angular (rad/s)
b) Velocidad tangencial.
c) Aceleración centrípeta.

Rpta.: $\omega = 199 \times 10^{-9} \text{ rad/s}$

$V = 29\,651 \text{ m/s}$

$a_c = 0{,}6 \times 10^{-2} \text{ m/s}^2$

3. Una rueda de 5 m de diámetro gira a 200 R.P.M. Calcular:

a) Frecuencia.
b) Período.
c) Velocidad angular.
d) Velocidad lineal de un punto del borde.

Rpta.: a) $f = 3{,}33 \times \frac{1}{s}$

b) $T = 0{,}3 \text{ s}$

c) $\omega = 20{,}94 \text{ rad/s}$

d) $V = 52{,}35 \text{ m/s}$

4. Un long play da 33,5 R.P.M. Su diámetro es de 30 cm. Calcular:

a) La velocidad tangencial del filo.
b) La aceleración centrípeta.

Rpta.: a) $V = 07{,}526 \text{ m/s}$

b) $a_c = 1{,}84 \text{ m/s}^2$

5. ¿Qué velocidad angular en rad/h tiene la Tierra en el ecuador?

Rpta.: $\frac{\pi}{12} \cdot \frac{\text{rad}}{\text{h}}$

6. Calcular la aceleración centrípeta de un cuerpo que recorre en 3 s una circinferencia de 1,8 m de radio.

Rpta.: 8 m/s^2

7. Determinar la aceleración angular de una rueda, si se sabe que al cabo de 2 s de iniciado el movimiento uniformemente acelerado, la aceleración lineal de un punto periférico de la rueda forma un ángulo de 60° con la velocidad lineal del mismo.

Rpta.: $\alpha = 0{,}433 \text{ rad/s}^2$

8. Un cuerpo atado a una cuerda de 2 m de longitud, gira a 180 R.P.M. Si se rompe la cuerda. ¿Con qué velocidad escapa el cuerpo?

Rpta.: 12 m/s

9. Dos ruedas empiezan a girar simultáneamente, la primera gira a razón de 25π rad/s y la segunda parte del reposo y gira acelerando a razón de $10\pi \text{ rad/s}^2$. ¿Después de cuánto tiempo habrán realizado igual número de vueltas?

Rpta.: $t = 5 \text{ s}$

10. La aceleración angular de una rueda es 2 rad/s^2. Luego de 0,5 s de iniciado el movimiento la aceleración lineal es de 13,6 m/s^2. Sobre la base de estas condiciones determine el radio de la rueda.

Rpta.: $R = 6{,}08 \text{ m}$

MOVIMIENTO CIRCUNFERENCIAL UNIFORMEMENTE VARIADO M.C.U.V.

El M.C.U.V. es aquel movimiento en el cual el móvil se desplaza por una circunferencia y experimenta cambios o variaciones iguales en su velocidad angular para intervalos de tiempo iguales.

http://librosysolucionarios.net

ACELERACIÓN ANGULAR "$\vec{\alpha}$"

Es una cantidad vectorial cuyo valor nos expresa la variación de la velocidad angular por inetervalo de tiempo.

$$\alpha = \frac{\Delta\omega}{t}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}}$$

Unidad de medida en el SI α : rad/s^2

Ejemplo: Un punto tiene M.C.U.V. Después de 6 s de haber iniciado la marcha su velocidad angular es 18 rad/s. Calcular su aceleración.

RESOLUCIÓN : $\alpha = \frac{\Delta\omega}{t} = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$

pero: $\omega_i = 0$, luego: $\alpha = \frac{\omega_f}{t}$

Con datos: $\alpha = \frac{18\ rad/s}{6\ s}$

Rpta.: $\alpha = 3\ rad/s^2$

En el M.C.U.V. la aceleración angular $\vec{\alpha}$ se mantiene constante.

ECUACIONES DEL M.C.U.V.

I. $\boxed{\theta = \left(\frac{\omega_i + \omega_f}{2}\right)t}$; $\boxed{\theta = \omega_m . t}$

II. $\boxed{\omega_f = \omega_i \pm \alpha . t}$

III. $\boxed{\theta = \omega_i \pm \frac{1}{2} \cdot \alpha \cdot t^2}$

IV. $\boxed{\omega_f^2 = \omega_i^2 \pm 2\alpha.\theta}$

ω_f : velocidad angular final
θ : ángulo girado
ω_i : velocidad angular inicial
α : aceleración angular
t : teimpo que dura el movimiento
ω_m : velocidad angular media

Unidades de medida SI:

$$\omega : \frac{rad}{s} \ ; \ \theta : rad \ ; \ \alpha : \frac{rad}{s^2} \ ; \ t : s$$

CONVENCIÓN DE SIGNOS: Usar

(+) Si la velocidad angular del móvil aumenta.

(-) Si la velocidad angular del móvil disminuye.

Ejemplo 1. Al cabo de 16 s de iniciado su M.C.U.V. ¿Cuál será la velocidad angular de un móvil cuya aceleración angular es de 10 rad/s²?

RESOLUCIÓN : Usando la fórmula II:

$\omega_f = \omega_i + \alpha t$ Pero : $\omega_i = 0$

$$\therefore \ \omega_f = \alpha t = 10\frac{rad}{s^2} \times 16\,s$$

Rpta.: $\omega_f = 16\theta\ rad/s$

Ejemplo 2. ¿Cuánto tarda un disco en alcanzar la velocidad de $2\pi\ rad/s$, si el movimiento es circunferencial y uniformemente variado, de aceleración (π/2) rad/s²?

RESOLUCIÓN : Con la fórmula II:

$\omega_f = \omega_i + \alpha t$ Pero : $\omega_i = 0$

$$\therefore \ t = \frac{\omega_f}{\alpha} = \frac{2\pi\frac{rad}{s}}{\frac{\pi}{2}\times\frac{1}{s^2}}$$

Rpta.: $t = 4\,s$

Ejemplo 3. En un instante, la velocidad angular de un disco es de 150 rad/s con aceleración angular de 10 rad/s². ¿Cuál era su velocidad angular 5 s antes?

RESOLUCIÓN : De la fórmula II se despeja w_i:

$$\omega_i = \omega_f - \alpha t$$

$$\omega_i = 150\frac{rad}{s} - 10\frac{rad}{s^2} \times 5\,s$$

Rpta.: $\omega_i = 100\ rad/s$

http://librosysolucionarios.net

RELACIÓN ENTRE LA ACELERACIÓN TANGENCIAL " a_t" Y LA ACELERACIÓN ANGULAR "α"

Se sabe: $a_t = \frac{\Delta V}{t}$ (I)

También: $\Delta V = \Delta \omega R$

Sustituyendo en (I):

$a_t = \frac{\Delta \omega R}{t}$; de donde:

$$\boxed{a_t = \alpha R}$$

Donde: a_t = aceleración tangencial

α = aceleración angular

R = radio de giro

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Al desconectar la corriente a un motor eléctrico su velocidad de 1 700 R.P.M. desciende a 1 000 R.P.M. en 2 s. Calcular:

a) La desaceleración.
b) El número de vueltas que da durante ese tiempo.

RESOLUCIÓN :

ω_i = 1 700 R.P.M. a) α = ?

ω_f = 1 000 R.P.M. b) θ = ?

t = 2 s

a) Sabiendo: $\omega_f = \omega_i + \alpha t$

De donde: $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$

Sustituyendo datos:

$$\alpha = \frac{1\,000 \text{ R.P.M.} - 1\,700 \text{ R.P.M.}}{2 \text{ s}}$$

$$\alpha = -350 \frac{\text{R.P.M.}}{\text{s}}$$

$$\alpha = -350 \frac{\text{revolución}}{\text{min} \times \text{s}}$$

$$\alpha = -350 \frac{2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}^2}$$

Rpta.: $\alpha = -11{,}67\,\pi \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

b) por fórmula: $\omega_m = \frac{\omega_i + \omega_f}{2} = \frac{\theta}{t}$

De donde: $\theta = \frac{t(\omega_i + \omega_f)}{2}$

Sustituyendo los datos:

$$\theta = \frac{t(1\,700 \text{ R.P.M.} + 1\,000 \text{ R.P.M.})}{2}$$

$$\theta = 22{,}5 \frac{\text{rev}}{\text{s}} \times 2 \text{ s}$$

Rpta.: θ = 45 rev = 45 vueltas

PROBLEMA 2. ¿Cuál será el número de revoluciones que da la rueda de un carro que está aumentando su velocidad, de 4 m/s a 10 m/s en 8 s? La rueda tiene un radio de 25 cm.

RESOLUCIÓN : Espacio angular:

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad (1)$$

Pero: $V_i = \omega_i R$

$$\therefore \qquad \omega_i = \frac{V_i}{R} \qquad (2)$$

(2) en (1): $\theta = \frac{V_i}{R} t + \frac{1}{2}\alpha t^2$ (3)

Por otra parte: $a_t = \frac{\Delta V_t}{\Delta t} = \frac{V_f - V_i}{\Delta t}$

Donde: V_f = 30 m/s Δt = 8 s

V_i = 4 m/s

Sustituyendo valores:

$$a_t = \frac{30 - 4}{8} = \frac{13}{4} \text{ m/s}^2$$

Además: $a_t = \alpha R \Rightarrow \alpha = \frac{a_t}{R}$

$$\alpha = \frac{\frac{13}{4}\ m/s^2}{0,25\ m} = 13\ rad/s^2$$

Reemplazando valores en (3):

$$\theta = \frac{4}{0,25} \times 8 + \frac{1}{2} \times 13 \times 64$$

$$\theta = 128 + 416 = 544\ rad$$

$$N^\circ \text{ de vueltas} = \frac{544}{2\pi} = 86,58$$

Rpta.: 86,58 vueltas

PROBLEMA 3. Un motor gira a 1 700 R.P.M., disminuye uniformemente hasta 200 R.P.M., realizando 100 revoluciones. Calcular:

a) La desaceleración angular.
b) El tiempo para detenerse a partir del momento en que está a 200 R.P.M.

RESOLUCIÓN :

a) $$\theta = \frac{t(\omega_i + \omega_f)}{2}$$

$$\therefore\ t = \frac{2\theta}{\omega_i + \omega_f}$$

$$t = \frac{2(100)}{200 + 1\,700}$$

$$\therefore\ t = \frac{2}{19}\ min \qquad (1)$$

Este tiempo corresponde a lo que tarda en variar el valor de su velocidad angular de 1 700 R.P.M. a 200 R.P.M.

Cálculo de α : Sabiendo que:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) y considerando:

ω_i = 1 700 R.P.M. ; ω_f = 200 R.P.M.

$$\alpha = \frac{200 - 1\,700}{\frac{2}{19}}\ \frac{rev}{min^2}$$

$$\alpha = -750 \times 19\ \frac{rev}{min^2}$$

$$\alpha = -\frac{750 \times 19 \times 2\pi}{3600}\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\therefore\ \alpha = -24,87\ \frac{rad}{s^2}$$

b) Utilizando la fórmula de (II) :

$$t = \frac{\omega_f - \omega_i}{\alpha}$$

$$t = \frac{0 - 200}{-750 \times 19}\ min$$

$$t = \frac{200}{700 \times 19}\ min \times \frac{60\ s}{1\ min}$$

$$t = 0,84\ s$$

PROBLEMA 4. Un punto se mueve por una circunferencia cuyo radio R = 20 cm, con una acelración tangencial constante $a_t = 5\ cm/s^2$. ¿Cuánto tiempo a partir del momento en que empieza a moverse el punto, deberá trancurrir para que la aceleración normal o centrípeta, sea igual a la aceleración tangencial?

RESOLUCIÓN:

Se sabe que: $$a_t = \frac{V}{t} \qquad (1)$$

y que: $$a_C = \frac{V^2}{R} \qquad (2)$$

De (1): $$t = \frac{V}{a_t} \qquad (3)$$

De (2): $$V = \sqrt{a_C R} \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3): $$t = \frac{\sqrt{a_C R}}{a_t}$$

Si: $$a_C = a_t = 5\ \frac{cm}{s^2}$$

y: $$R = 20\ cm$$

Reemplazando: $$t = \frac{\sqrt{5\ cm/s^2 \times 20\ cm}}{5\ cm/s^2}$$

Rpta.: $t = 2\ s$

http://librosysolucionarios.net

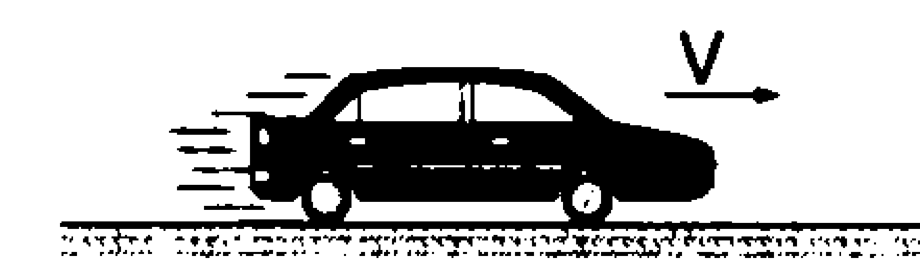
PROBLEMA 5. Un móvil marcha a razón de 80 km/h. El chofer aplica los frenos y empieza a desacelerar a razón de 5 m/s². Si las ruedas tienen un diámetro de 50 cm. Calcular cuántas vueltas darán las ruedas hasta detenerse. Tomar en cuenta que no ha habido deslizamiento o patinaje.

RESOLUCIÓN : $V = 80\ km/h$

$V = 80\ km/h \qquad \theta = ?$

$a_t = -5\ m/s^2$

$d = 50cm$



Cálculo de la velocidad en m/s:

$$V = 80\frac{1\,000\ m}{3\,600\ s} = 22,2\ m/s$$

Cálculo de la velocidad angular de las ruedas:

Sabiendo: $V = \omega R$, luego:

$$\omega = \frac{V}{R} = \frac{22\ m/s}{0,25\ m} = 88,8\ rad/s$$

En revoluciones por segundo:

$$\omega = \frac{88,8}{2\pi}\frac{rev}{s} = 14,13\frac{rev}{s} \qquad (1)$$

Por otro lado: $\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$

Pero: $\omega_f = 0 \quad \therefore \quad 0 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$

De donde: $0 = \dfrac{\omega_i^2}{2\alpha} \qquad (2)$

Cálculo de α en rev / s²:

$$\alpha = \frac{a_t}{R} = \frac{-5\ m/s^2}{0,25\ m/rad} = -20\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\alpha = -20\ \frac{rev}{2\pi\ rad} \times \frac{rad}{s^2}$$

de donde: $\alpha = -3,18\ \dfrac{rev}{s^2} \qquad (II)$

sustituyendo valores en (2):

$$\theta = \frac{(14,13\ rev/s)^2}{2(-3,18\ rev/s^2)} \quad ; \text{ de donde:}$$

Rpta.: $\theta = 31,39\ rev$

PROBLEMA 6. En 30 s, una rueda de 5 dm de diámetro, que sale del reposo, acelera uniformemente hasta 3 000 rev/min. Calcular la aceleración angular y tangencial.

RESOLUCIÓN : $t = 30\ s$

$\alpha = ? \qquad D = 5\ dm$

$\omega_f = 3\,000\ rev/min$

a) Sabemos que: $\omega_f = \omega_i + \alpha t$

de donde: $\alpha = \dfrac{\omega_f - \omega_i}{t}$

$$\alpha = \frac{3\,000\ \frac{rev}{min} - 0}{30\ s} = 100\ \frac{rev}{min \times s}$$

$$\alpha = 100 \times \frac{2\pi\ rad}{60\ s \times s}$$

$$\alpha = 10,47\ \frac{rad}{s^2}$$

b) $a_t = \alpha R = 10,47\ \dfrac{rad}{s^2} \times 0,25\ m$

Rpta.: $a_t = 2,62\ m/s^2$

PROBLEMA 7. Calcular el número de revoluciones que dio la rueda del problema anterior hasta adquirir la velocidad de 3 000 rev/min.

RESOLUCIÓN :

Calculando la velocidad media:

$$\omega_m = \frac{\omega_f + \omega_i}{2}$$

Pero: $\omega_i = 0$

$$\therefore \quad \omega_m = \frac{3\,000\ rev/min}{2}$$

$$\omega_m = 25\ rev/s$$

http://librosysolucionarios.net

Luego: $\theta = \omega_m t = 25 \frac{rev}{s} \times 30\,s$

Rpta.: $\theta = 750\,rev$

PROBLEMA 8. Una barra delgada de 1 m de longitud gira en un plano horizontal, alrededor de uno de sus extremos. En el tiempo de 6 s aumenta su velocidad de 30 rev/s a 40 rev/s. Calcular:

a) Velocidad lineal en su punto medio al principio y al final de ese intervalo.
b) La aceleración angular y tangencial.

RESOLUCIÓN :

$L = 1\,m$ a) $V_i = ?$

$t = 6\,s$ b) $V_f = ?$

$\omega_i = 30\,rev/s$ c) $\alpha = ?$

$\omega_f = 40\,rev/s$ d) $a_t = ?$

a) $V_i = \omega_i R = 30 \frac{rev}{s} \times 0{,}50\,m$

$$V_i = 30 \frac{2\pi\,rad}{s} \times 0{,}50\,m$$

Rpta.: $V_i = 30\pi\,m/s$

b) $V_f = \omega_f R = 40 \frac{rev}{s} \times 0{,}50\,m$

$$V_f = 40 \frac{2\pi\,rad}{s} \times 0{,}50\,m$$

Rpta.: $V_f = 40\pi\,m/s$

c) $\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t}$

$$\alpha = \frac{40 \frac{rev}{s} - 30 \frac{rev}{s}}{6\,s}$$

$$\alpha = \frac{10}{6} \frac{rev}{s^2} = \frac{10}{6} \cdot \frac{2\pi\,rad}{s^2}$$

Rpta.: $\alpha = 3{,}33\,\pi\,rad/s^2$

d) $a_t = \alpha R$

$$a_t = 3{,}33\,\pi \frac{rad}{s^2} \times 0{,}50 \frac{m}{rad}$$

Rpta.: $a_t = 1{,}67\,\pi\,m/s^2$

PROBLEMA 9. Una polea que parte del reposo, en 0,8 s tiene una velocidad de 300 R.P.M. Durante 5 s gira a esta velocidad, finalmente frena y se detiene en 0,3 s. Calcular el número de revoluciones que ha dado.

RESOLUCIÓN :

$\omega = 300\,R.P.M.$ $t_1 = 0{,}8\,s$

$\theta_T = ?$ $t_2 = 5\,s$

$t_3 = 0{,}3\,s$

Primera fase: $\theta_1 = \frac{\omega_i + \omega_f}{2} \cdot t_1$

$$\theta_1 = \frac{0 + 300 \frac{rev}{min}}{2} \times 0{,}8\,s$$

$$\theta_1 = 2\,rev \qquad (1)$$

Segunda fase:

$$\theta_2 = \omega_f t_2 = 300 \frac{rev}{min} \times 5\,s$$

$$\theta_2 = 25\,rev \qquad (2)$$

Tercera fase: $\theta_3 = \frac{\omega_i + \omega_f}{2} \cdot t_3$

$$\theta_3 = \frac{300 \frac{rev}{min} + 0}{2} \times 0{,}3\,s$$

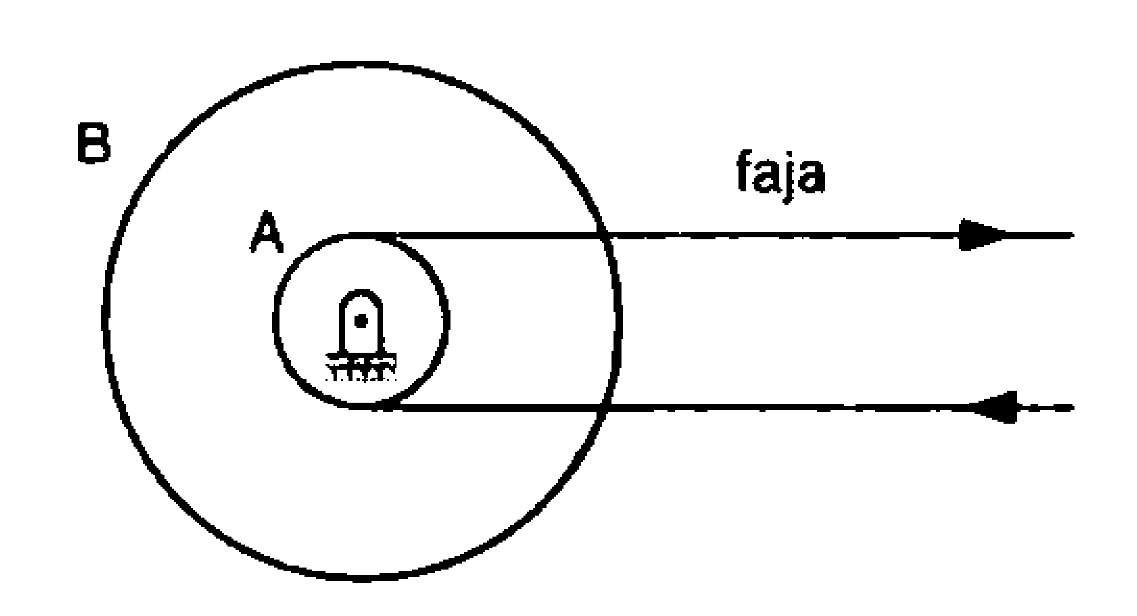
$$\theta_3 = 0{,}75\,rev$$

Luego: $\theta_T = \theta_1 + \theta_2 + \theta_3$

Rpta.: $\theta_T = 27{,}75\,rev$

PROBLEMA 10. Una faja cuya velocidad lineal es de 40 m/s y cuya aceleración de 8 m/s², mueve una polea "A" de 10 cm de diámetro, a la cual se encuentra solidaria otra polea "B" de 50 cm de diámetro, conforme muestra la figura. Calcular la velocidad y aceleración tangenciales del punto B.

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN : $V_A = 40\ m/s$

a) $V_B = ?$ $a_A = 8\ m/s^2$

b) $a_B = ?$ $D_A = 10\ cm$

$D_B = 50\ cm$

Las velocidades angulares de los puntos A y B son iguales. La velocidad lineal de la faja es igual al de la polea chica.

a) Se sabe que: $V = \omega R$

de donde: $\omega = \dfrac{V}{R}$; luego:

Pero ya se sabe que: $\omega_A = \omega_B$

Luego:

$$V_B = \omega_B R = 400\ \frac{rad}{s} \times 0{,}25\ \frac{m}{rad}$$

Rpta.: $V_B = 100\ m/s$

b) $a_A = \alpha_A R_A$, de donde:

$$\alpha_A = \frac{a_A}{R_A}\ ,\ \text{luego:}$$

$$\alpha_A = \frac{8\ \frac{m}{s^2}}{0{,}1\ \frac{m}{rad}} = 80\ \frac{rad}{s^2}$$

$$\alpha_A = 80\ \frac{rad}{s^2}$$

Pero ya se dijo que: $\alpha_A = \alpha_B$

Luego: $a_B = \alpha_B R_B = 80\ \dfrac{m}{s^2} \times 0{,}25\ \dfrac{m}{s}$

Rpta.: $a_B = 20\ m/s^2$

PROBLEMA 11. Una llanta de 60 cm de diámetro pasa del reposo a 300 R.P.M. en 20 s. Calcular, 1 segundo después de partir del reposo:

a) ¿Cuál será la velocidad tangencial en la periferia?

b) ¿Cuál será la aceleración tangencial en la periferia?

RESOLUCIÓN : $D = 60\ cm$

a) $V_t = ?$ $\omega = 300\ R.P.M.$

b) $a_t = ?$ $t = 20\ s$

$t_1 = 1\ s$

Cálculo de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{300\ R.P.M. - 0}{20\ s}$$

$$\alpha = \frac{300\ rev}{60 \times 20 \times s \times s} = \frac{1\ rev}{4\ s^2}$$

$$\alpha = \frac{2\pi\ rad}{4\ s^2} = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{rad}{s^2} \qquad (1)$$

Cálculo de la velocidad angular al cabo de 1 s:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t = 0 + \frac{\pi}{2}\ \frac{rad}{s^2} \times 1\ s$$

$$\omega_f = \frac{\pi}{2}\ \frac{rad}{s} \qquad (2)$$

a) Cálculo de la velocidad tangencial:

$$V_t = \omega R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{rad}{s} \times 0{,}30\ m$$

de donde: $V_t = 0{,}15\ \pi\ m/s$

b) Cálculo de la aceleración tangencial:

$$a_t = \alpha R = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{rad}{s^2} \times 0{,}30\ m$$

de donde: $a_t = 0{,}15\ \pi\ m/s^2$

PROBLEMA 12. Un disco desarrolla un M.C.U.V. y acelera a razón de $4\pi\ rad/s^2$. Si emplea un tiempo "t" en dar la tercera parte del número de vueltas total, ¿cuál debe ser la velocidad angular inicial para que las dos terceras partes restantes las haga también en un tiempo "t" ?

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : Por fórmula:

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$$

Para el tramo total:

$$\theta = \omega_i (2t) + \frac{1}{2} 4\pi (2t)^2$$

$$\theta = 2\omega_i t + 8\pi t^2 \qquad (1)$$

Para el primer tramo:

$$\frac{\theta}{3} = \omega_i t + \frac{1}{2} 4\pi t^2$$

$$\frac{\theta}{3} = \omega_i t + 2\pi t^2$$

$$\theta = 3\omega_i t + 6\pi t^2 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$3\omega_i t + 6\pi t^2 = 2\omega_i t + 8\pi t^2$$

$$\omega_i t = 2\pi t^2$$

Rpta.: $\omega_i = 2\pi t$

PROBLEMA 13. Un motor que gira a 1 600 R.P.M. se detiene en 20 s una vez desconectado. ¿Cuántas vueltas ha dado hasta detenerse?

RESOLUCIÓN : $\theta = \left(\frac{\omega_i + \omega_f}{2}\right) t$

$\omega_f = 0$ $\qquad t = 20\text{ s} = \frac{1}{3}\text{ min}$

$\omega_i = 1\,800\text{ R.P.M.}$

Reemplazando:

Rpta.: $\theta = \left(\frac{1\,800}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right) = 300\text{ rev}$

PROBLEMA 14. Un volante de 30 cm de radio, parte del reposo y empieza a moverse con una aceleración de $0{,}5\pi$ rad / s^2. Calcular su aceleración tangencial en el instante de haber girado un ángulo de π^2 rad y la velocidad angular en ese instante.

RESOLUCIÓN :

a) $\qquad a_t = \alpha R$

de donde: $\quad \alpha = 0{,}5\pi \frac{\text{rad}}{s^2}$

y: $\quad R = 30\text{ cm}$

$$a_t = \left(0{,}5\pi \frac{\text{cm}}{s^2}\right)(30)$$

$$\therefore \quad a_t = 15\pi \frac{\text{cm}}{s^2} = 0{,}15\pi \frac{\text{m}}{s^2}$$

a) $\qquad \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha\theta$

$$\omega_f^2 = 0 + 2(0{,}5\pi)\pi^2 = \pi^3$$

$$\therefore \quad \omega_f = \pi\sqrt{\pi}$$

PROBLEMA 15. Una rueda tiene una aceleración constante de 3 rad/s². En un intervalo de **4** s gira un ángulo de 120 radianes. Suponiendo que la rueda partió del reposo. ¿Cuánto tiempo había estado en movimiento antes de ese intervalo de 4 s?

RESOLUCIÓN :

Para el intervalo de **4** s:

$$\theta = \omega_i \cdot t + \frac{\alpha t^2}{2}$$

$$120 = \omega_i (4) + \frac{3(4)^2}{2}$$

De donde: $\quad \omega_i = 24 \frac{\text{rad}}{s}$

Pero el intervalo entre (0) s y "t" s:

a) $\qquad \omega'^2_f = \omega'^2_i + 2\alpha\theta'$

En este caso: $\quad \omega'_f = \omega_i$

Reemplazando en la fórmula:

$$(24)^2 = 0 + 2(23)\theta'$$

Resolviendo: $\quad \theta' = 96\text{ rad}$

Por otra parte: $\quad \theta' = \left(\frac{\omega_i' + \omega_f'}{2}\right) t$

http://librosysolucionarios.net

Reemplazando: $96 = \left(\frac{0 + 24}{2}\right) t$

Rpta.: $t = 8\text{ s}$

PROBLEMA 16. Un volante tiene una velocidad angular inicial ω_i. Deducir una fórmula para calcular el ángulo girado para un intervalo de tiempo determinado. Se sabe que la aceleración angular es α.

RESOLUCIÓN: $\theta_{n'} = \theta_{n\,s} - \theta_{(n-1)\,s}$ (1)

n' : enésimo segundo

a) Para n segundos:

$$\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \quad (2)$$

$$\theta_{n\,s} = \omega_i n + \frac{1}{2}\alpha n^2$$

b) Para (n - 1) s:

$$\theta_{(n-1)\,s} = \omega_i (n-1) + \frac{1}{2}\alpha (n-1)^2 \quad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\theta_{n'} = (\omega_i n + \frac{1}{2}\alpha n^2) - [\omega_i (n-1) + \frac{1}{2}\alpha (n-1)^2]$$

$$\theta_{n'} = \omega_i n + \frac{1}{2}\alpha n^2 - \omega_i n + \omega_i - \frac{1}{2}\alpha (n-1)^2$$

$$\theta_{n'} = \omega_i + \frac{1}{2}\alpha [n^2 - (n-1)^2]$$

Efectuando:

Rpta.: $\theta_{n'} = \omega_i + \frac{1}{2}\alpha (2n-1)$

PROBLEMA 17. ¿Cuántas vueltas dará una rueda durante el 5to segundo, sabiendo que partió del reposo y su aceleración angular es de 20 rad/s^2?

RESOLUCIÓN:

Usando la fórmula deducida en el problema anterior donde $\omega_i = 0$:

$$\theta_{5to} = 0 + \frac{1}{2}\alpha (2n - 1)$$

$$\theta_{5to} = \frac{1}{2}\times 20\,(2\times 5 - 1)$$

$$\theta_{5to} = 90\text{ rad}$$

Para saber el número de vueltas:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{90\text{ rad}}{2\pi\text{ rad / vuelta}}$$

Rpta.: $N = \frac{45}{\pi}$ vueltas $= 90$ rad

PROBLEMA 18. ¿En cuánto tiempo hubiese dado el mismo número de vueltas a partir del reposo (problema anterior).

RESOLUCIÓN: $\theta = \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2$

Pero: $\omega_i = 0$

$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$, de donde:

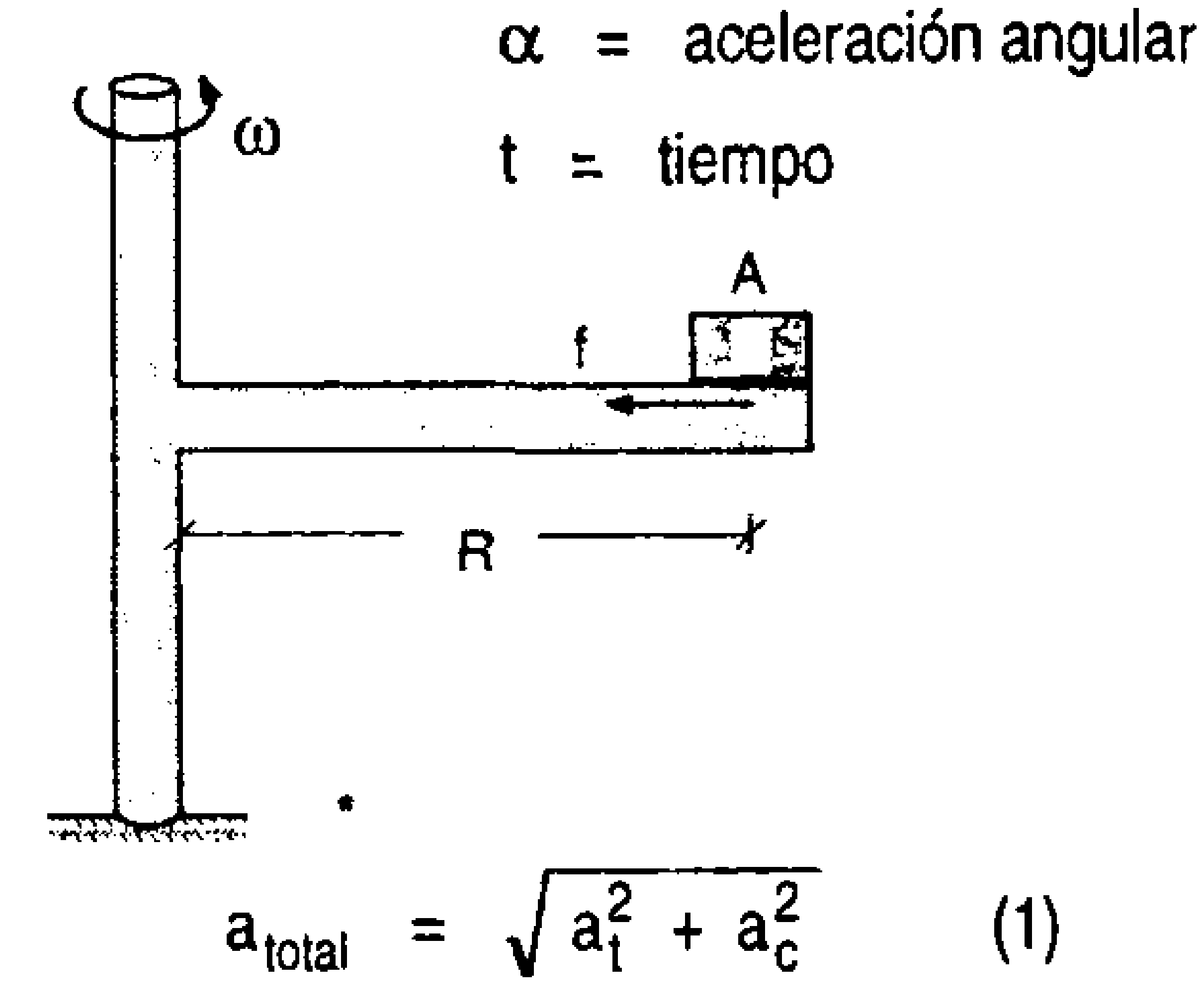
$$t = \sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}} = \sqrt{\frac{2\times 90\text{ rad}}{20\text{ rad / s}^2}} = 3\text{ s}$$

PROBLEMA 19. Un bloque A permanece en reposo sobre un brazo horizontal que gira alrededor de un eje vertical. Si el brazo está inicialmente en reposo en el instante $t = 0$ y se acelera con un valor de α rad / s^2. Hallar una expresión para la aceleración total del bloque en el tiempo "t" y el ángulo que forma la aceleración total y el radio "R".

RESOLUCIÓN: f = fuerza de rozamiento

R = radio

http://librosysolucionarios.net



α = aceleración angular

t = tiempo

$$a_{total} = \sqrt{a_t^2 + a_c^2} \qquad (1)$$

$$a_t = \alpha R \qquad (2)$$

$$a_c = \omega^2 R \qquad (3)$$

Por otra parte: $\omega = \omega_i + \alpha t$

$$\omega_i = 0 \quad \therefore \quad \omega = \alpha t \qquad (4)$$

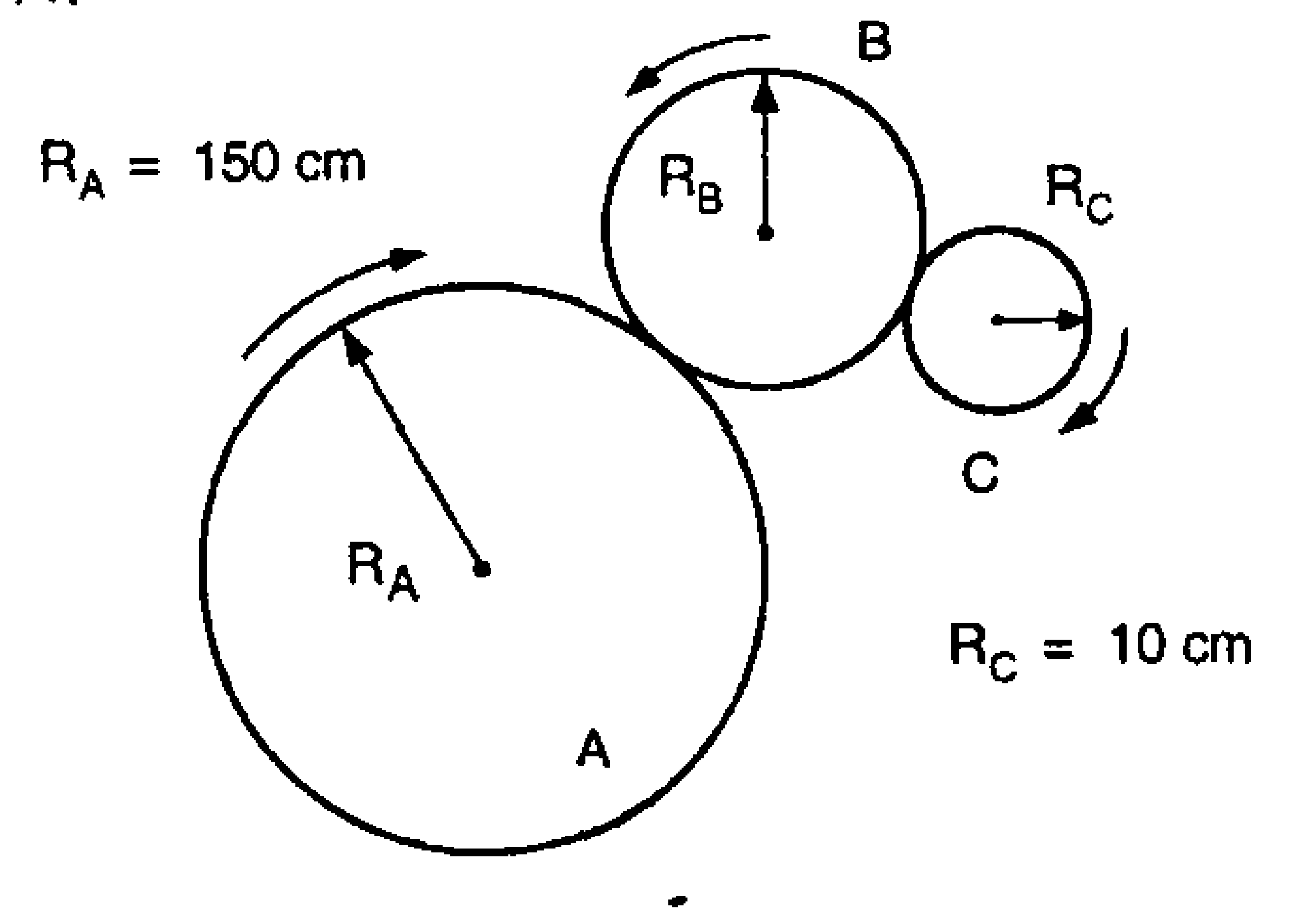
(4) en (3): $a_c = \alpha^2 t^2 R \qquad (5)$

(2) y (5) en (1):

$$a_{total} = \sqrt{\alpha^2 R^2 + \alpha^4 t^4 R^2}$$

Rpta.: $a_{total} = \alpha R \sqrt{1 + \alpha^2 t^4}$

PROBLEMA 20. Entre las ruedas de la figura no hay resbalamiento y empiezan a girar a partir del reposo. Si la rueda C acelera a razón de 10p rad/s² durante un minuto. ¿Cuántas vueltas giró la rueda A?



RESOLUCIÓN :

Las aceleraciones tangenciales en A y en C son iguales.

$$a_A = a_C$$

Pero recordando que: $a = \alpha R$

$$\therefore \quad \alpha_A R_A = \alpha_C R_C$$

Sustituyendo datos:

$$\alpha_A\,(150\text{ cm}) = \left(10\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}\right)(10\text{ cm})$$

$$\alpha_A = \frac{10}{15}\,\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Luego el ángulo girado en 60 s será:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{\frac{10\pi}{15}\,\frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \times (60)^2}{2}$$

$$\theta = 1\,200\pi \text{ rad}$$

Cálculo del número de vueltas:
Se divide el valor del ángulo girado entre lo que vale una vuelta: 2π:

$$N = \frac{1\,200\pi \text{ rad}}{2\pi\,\frac{\text{rad}}{\text{vuelta}}}$$

Rpta.: N = 600 vueltas

PROBLEMA 21. Una rueda gira a razón de 1 000 R.P.M. Si se retira la fuerza que mantiene dándole vueltas, se detiene después de 100 vueltas. ¿Cuánto tardó la última vuelta?

RESOLUCIÓN: Cálculo del tiempo que tardó hasta detenerse:

Sabiendo que:

$$\theta = \left(\frac{\omega_f + \omega_i}{2}\right) t \qquad (I)$$

donde: $\theta = 100 \times 2\pi \text{ rad} \qquad (1)$

$$\omega_f = 0 \qquad (2)$$

$$\omega_i = \frac{1\,000 \times 2\pi \text{ rad}}{60 \text{ s}}$$

http://librosysolucionarios.net

$$\omega_i = 33{,}33\,\pi \text{ rad/s} \qquad (3)$$

Sustituyendo (1), (2) y (3) en (I):

$$100 \times 2\pi \text{ rad} = \frac{33{,}33\pi \text{ rad}}{2 \times s} \times t$$

de donde $t = 12\text{ s}$

Cálculo de la aceleración:

$$\alpha = \frac{\omega_f - \omega_i}{t} = \frac{0 - 33{,}33\pi \text{ rad/s}}{12\text{ s}}$$

$$\alpha = -2{,}78\pi \text{ rad/s}^2$$

Cálculo de la velocidad después de 99 vueltas:

$$\omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\,\alpha\,\theta$$

$$\omega_f^2 = \left(33{,}33\pi \frac{\text{rad}}{s}\right)^2 + 2\left(-2{,}78\pi \frac{\text{rad}}{s^2}\right)\times$$

$$\times\ (99 \times 2\pi \text{ rad})$$

$$\omega_f^2 = 1\,110{,}9\pi^2 \frac{\text{rad}^2}{s^2} - 1\,100{,}9\pi^2 \frac{\text{rad}^2}{s^2}$$

$$\omega_f = 3{,}16\pi \frac{\text{rad}}{s}$$

Recordando otra vez que: $\theta = \dfrac{\omega_f + \omega_i}{2} \times t$

$$\therefore \qquad t = \frac{2\,\theta}{\omega_f + \omega_i}$$

En este caso, como es para la última vuelta, $\omega_f = 0$; ω_i es lo que fue la velocidad al final de la 99[na] vuelta, es decir:

$$\omega_i = 3{,}16\pi \frac{\text{rad}}{s} \quad ; \quad \theta = 2\pi$$

Sustituyendo valores en (II):

$$t = \frac{2 \times 2\pi \text{ rad}}{3{,}16\pi \dfrac{\text{rad}}{s}}$$

de donde finalmente: Rpta.: $t = 1{,}27\text{ s}$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una rueda de 40 cm de diámetro, parte del reposo y acelera uniformemente, hasta 4 000 rev/min después de 40 s, calcular su aceleración angular y su aceleración tangencial.

Rpta.: a) 10,47 rad/s²
b) 2,094 m/s²

2. En el problema anterior, ¿cuántas revoluciones habrá dado la rueda cuando su velocidad sea de 400 rev/min?

Rpta.: $\frac{40}{3}$ rev.

3. Una varilla delgada de 0,3 m de longitud gira horizontalmente alrededor de uno de sus extremos. Su velocidad varía de 20 rev/s a 30 rev/s. Calcular la velocidad lineal al principio y al final.

Rpta.: a) 12p m/s
b) 18p m/s

4. En 0,5 s una rueda que sale del reposo, está girando a 200 R.P.M. Con esta velocidad gira durante 2 s. Luego frena y se detiene en 1/3 s. Calcular el número de revoluciones, en total, que dio la rueda.

Rpta.: $n = 8{,}06$ rev

5. Una rueda de 1,50 m de diámetro pasa del reposo a 280 R.P.M. en 15 s. Calcular la velocidad tangencial en la periferia y la aceleración total de la rueda al cabo de 15 s.

Rpta.: a) 21,99 m/s
b) 644,81 m/s²

6. La velocidad angular de un motor que gira 900 R.P.M. desciende uniformemente hasta 300 R.P.M., efectuando 50 revoluciones. Calcular la aceleración angular.

Rpta.: $4\pi \text{ rad/s}^2$

http://librosysolucionarios.net

7. Un móvil describe una circunferencia de giro de 10 cm de diámetro.

Si partió del reposo e incrementa su velocidad angular en 10 rad/s cada segundo. Calcular ¿qué velocidad tangencial tendrá a los 10 s de iniciado el movimiento?

Rpta.: 5 m/s

8. Una rueda parte del reposo, y acelera hasta que en el último segundo de su recorrido da dos vueltas. Determinar el valor de la aceleración angular y el tiempo que toma su movimiento, si su velocidad en dicho instante fue 180 R.P.M.

Rpta.: a) $4\pi \text{ rad/s}^2$
b) 1,5 s

9. Hallar cuántas veces mayor será la aceleración normal (centrípeta) de un punto que se encuentra en la llanta de una rueda giratoria, tal que su aceleración tangencial en el momento que el vector aceleración total de este punto forma un ángulo de 30° con su vector velocidad lineal (tangencial).

Rpta.: $a_n = \frac{\sqrt{3}}{3} a_t$

10. Al partir de la estación, la velocidad del tren crece uniformemente y al cabo de 3 minutos alcanza el valor de 72 km/h; la vía es un arco de circunferencia de 800 m de radio. Determinar, 2 minutos después de su partida cuál será:
a) La aceleración tangencial.
b) La aceleración normal (centrípeta).
c) La aceleración total del tren.

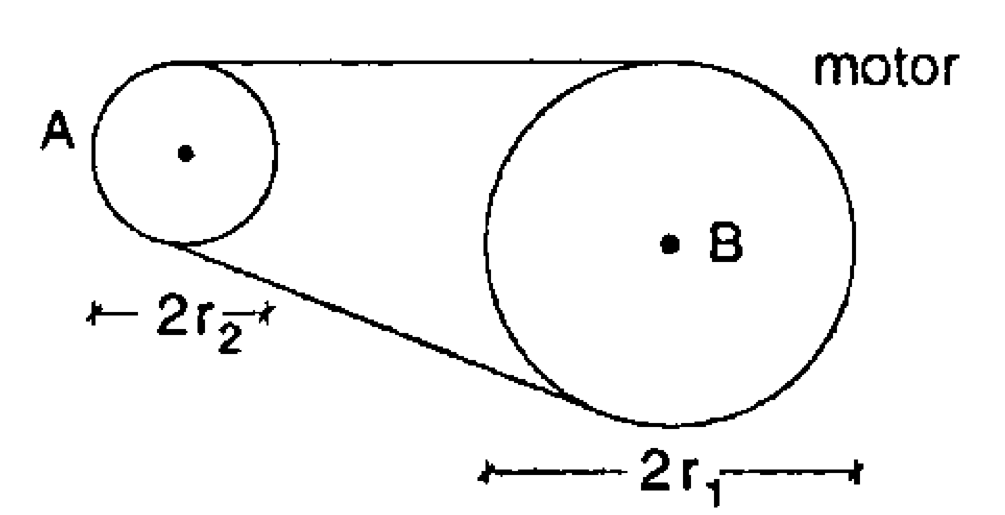
Rpta.: a) $a_t = \frac{1}{9} \text{ m/s}^2$

b) $a_n = \frac{1}{2} \text{ m/s}^2$

c) $a_{total} = 0{,}51 \text{ m/s}^2$

11. Un torno con la polea A se pone en movimiento a partir del estado de reposo por medio de una correa sin fin de la polea B del motor eléctrico; los radios de la polea son: $r_1 = 75$ cm, $r_2 = 30$ cm; después de arrancar el motor eléctrico, su aceleración angular es $0{,}4\pi$ rad/s². Despreciando el deslizamiento de la correa por las poleas, determinar dentro de que tiempo el torno hará 300 R.P.M.

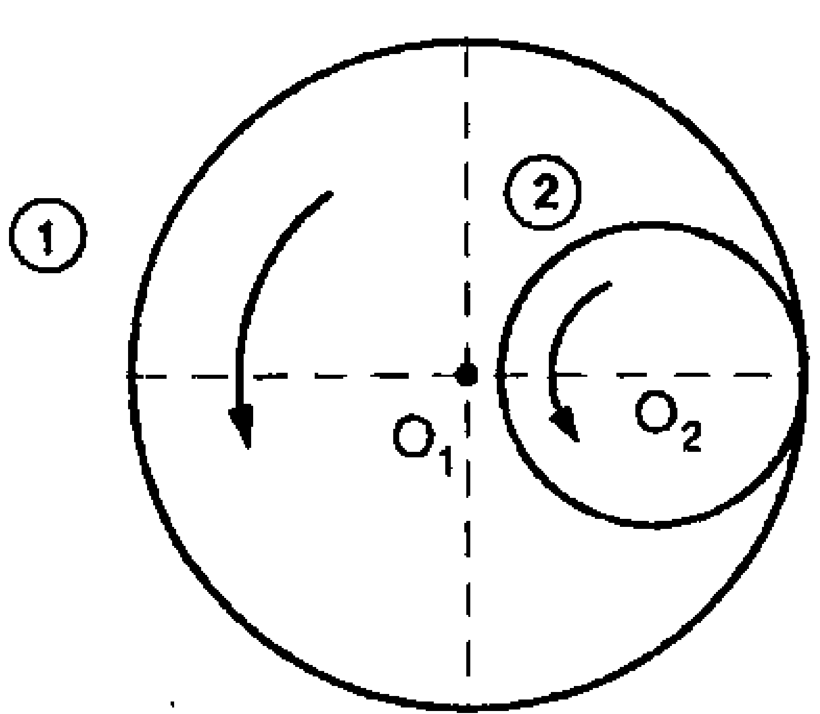
Rpta.: t = 10 s



12. Una esferilla está adherida sobre un disco liso de radio R; a una distancia R/2 de su eje de giro. Si el disco gira a 5 R.P.M. y repentinamente se despega la esferilla, ¿después de cuánto tiempo saldrá despedida del disco si se deslizó sin fricción?

Rpta.: t = 3,3 s

13. Una rueda dentada ① de diámetro D_1 = 360 mm efectúa 100 R.P.M. ¿Cuál deberá ser el diámetro de la rueda dentada ② que se encuentra en engranaje interior con la rueda ① y que efectúa 300 R.P.M.?

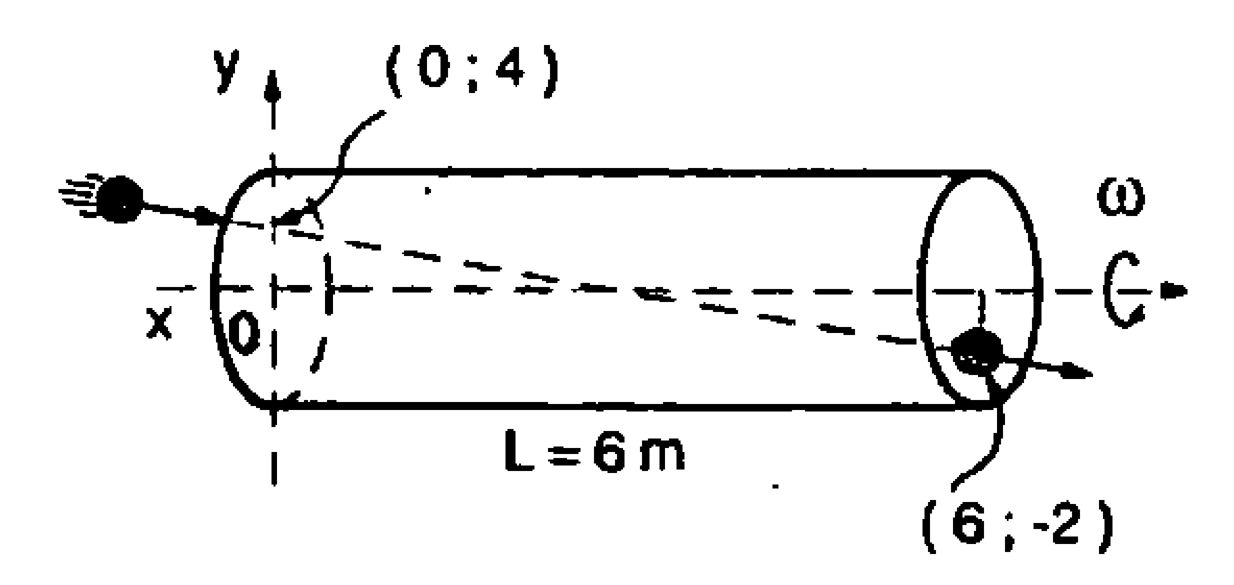


Rpta.: D_2 = 120 mm

14. Un cilindro hueco gira con movimiento circunferencial uniforme, tal como se muestra en la figura, barriendo en cada 2 segundos un ángulo de 120°. En cierto instante se dispara un proyectil el cual

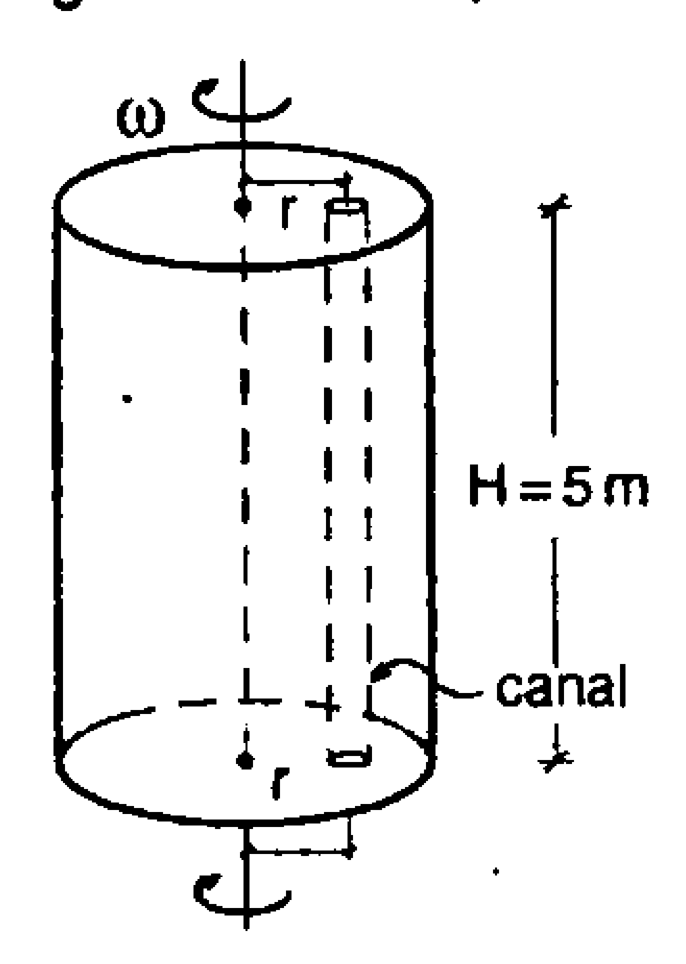
http://librosysolucionarios.net

ingresa al cilindro por el punto (0 ; 4) m y sale por el punto (6 ; -2) m con una velocidad constante de módulo $3\sqrt{2}$ m / s . ¿Qué ángulo "θ" habrá barrido el cilindro desde que el proyectil ingresa hasta que sale del cilindro?



Rpta.: $\theta = 120°$

15. Un cilindro mostrado en la figura, gira con velocidad angular constante. Una partícula se deja caer por un canal vertical mostrado, y al salir de ella el cilindro completó un ángulo de giro igual a 20 rad. ¿Con qué velocidad sale la partícula del canal? Despreciar todo efecto de rozamiento $g = 10 \, m/s^2$; $r = 1$ m.



Rpta.: $V = 10\sqrt{5}$ m / s

16. Hallar la aceleración angular de una rueda, si después de 0,5 s de iniciado el M.C.U.V., la aceleración lineal de un punto periférico de la rueda forma 37° con la velocidad lineal del mismo.

Rpta.: $a = 3 \, rad/s^2$

APTITUD: *"Disposición natural o adquirida para realizar una actividad"*

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 5

ESTÁTICA

La Estática es una parte de la Mecánica que estudia el equilibrio mecánico de los cuerpos

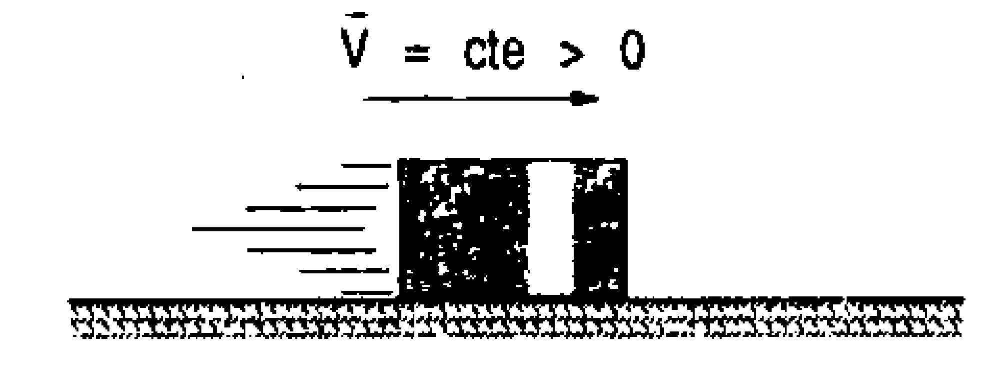
EQUILIBRIO MECÁNICO

Es aquel estado en el cual un cuerpo mantiene su velocidad constante; Existe dos tipos de equilibrio: Estático y Cinético

I. Si el cuerpo se encuentra en reposo: **¡Existe equilibrio estático!**

$$\vec{V} = cte = \vec{0}$$

II. Si el cuerpo se encuentra en movimiento rectilíneo uniforme: $\vec{V}$ = cte, **¡Existe equilibrio cinético!**-

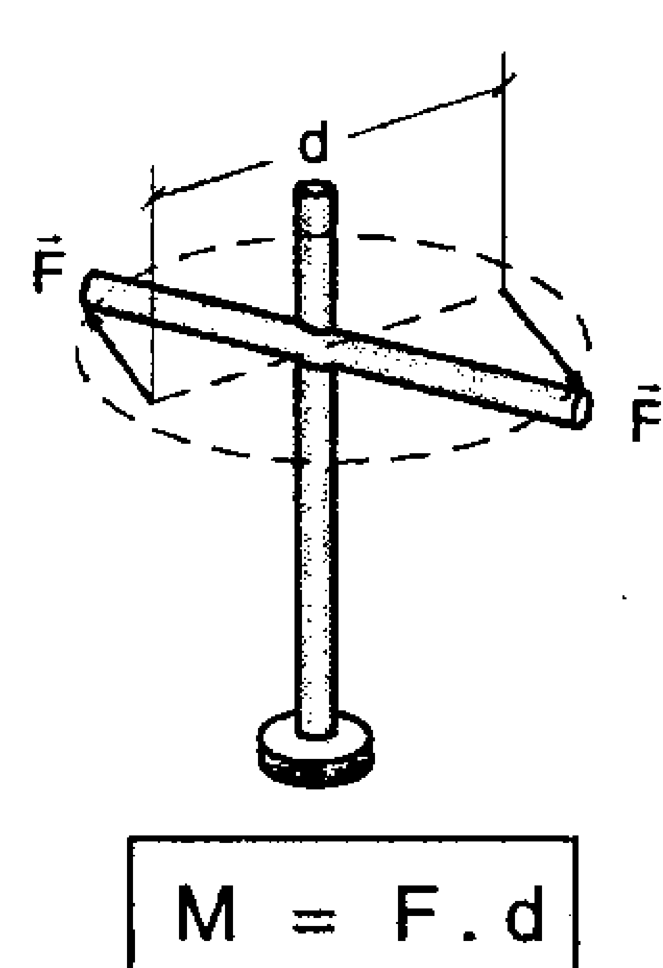


FUERZA $\vec{F}$

Es una magnitud vectorial que mide el grado de intensidad de una interacción. Llamaremos interacción a la influencia mutua de dos cuerpos en contacto o a distancia.

La fuerza puede originar en los cuerpos, entre otros efectos los siguientes: cambios en su velocidad, cambios en sus dimensiones y también puede originar giros o rotaciones (cuplas), en los cuerpos rígidos (no deformables)

CUPLA: Se llama así a un par de fuerzas de igual módulo y dirección contraria, aplicadas a un mismo cuerpo. Su valor se calcula en forma similar al del momento de una fuerza.



NIDADES SI : N . m

M : Momento de la cupla en N.m
F : Valor de cada una de las fuerzas iguales en N
d : Distancia entre las dos fuerzas en m

NOTA: La CUPLA no es si no un MOMENTO, del cual se hablará en páginas subsiguientes.

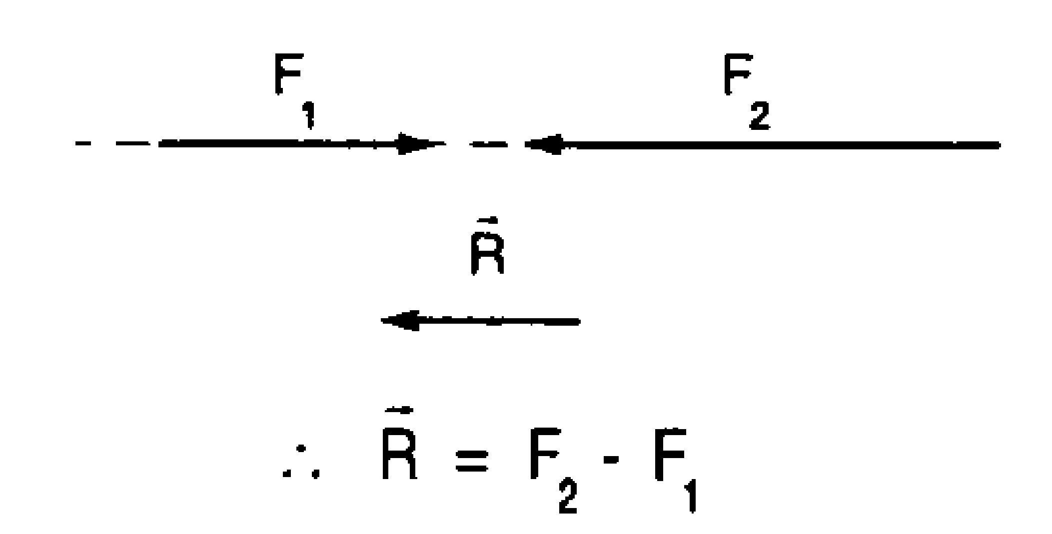
RESULTANTE DEL SISTEMA DE FUERZAS

Se llama resultante de un sistema de fuerzas que actúan sobre un cuerpo a una fuerza que los reemplace, produciendo sobre el cuerpo el mismo efecto que el sistema. Se presentan los siguientes casos:

http://librosysolucionarios.net

1. Resultante de fuerzas que tienen la misma línea de acción y sentidos opuestos:

- Su recta de acción es la misma que la de los componentes.
- Su medida es la diferencia de las componentes.
- Su sentido es el del que tiene mayor valor absoluto.
- Su punto de aplicación es cualquier punto de la línea de acción.



* El equilibrio se consigue aplicando una fuerza igual y contraria a la resultante.

2. La resultante de cuplas con respecto a un mismo eje:

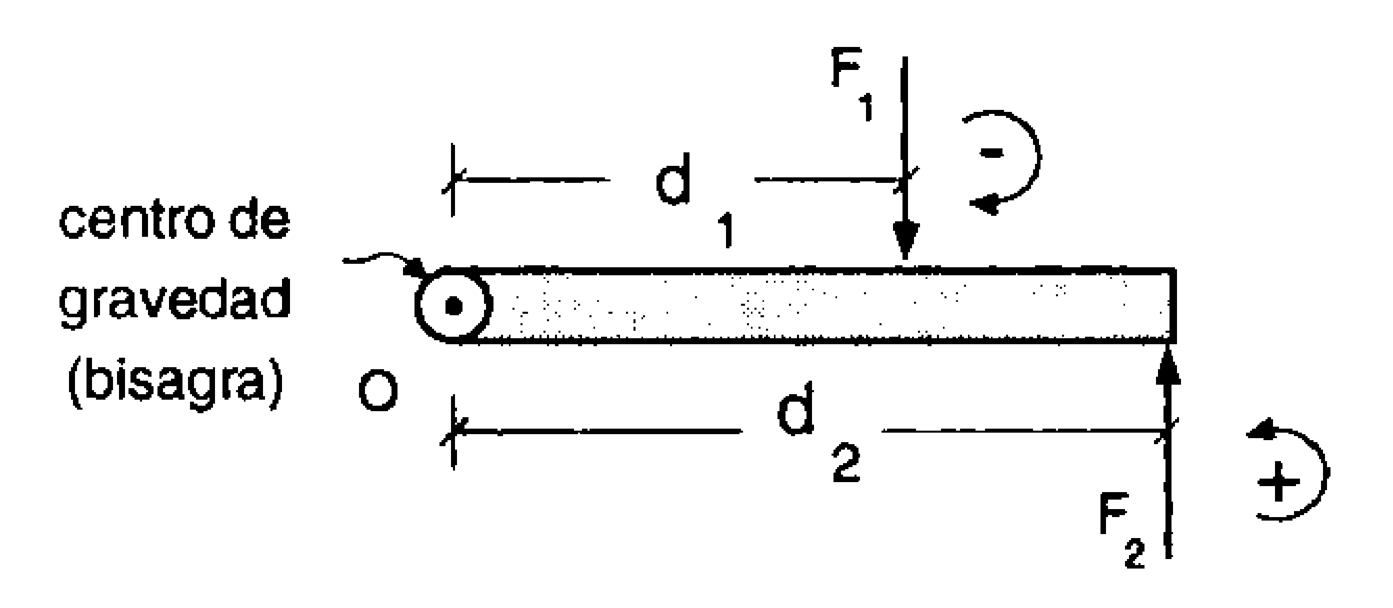
- Su dirección: la de su eje de rotación.
- Su sentido: Se determina por la regla de la mano derecha o "tirabuzón".
- Su medida: La medida de su momento "F . d".
- Su punto de aplicación: Es cualquiera, es un vector libre.

* El equilibrio se consigue aplicando una cupla igual y contraria a la resultante.

NOTA: La unidad en el SI de la fuerza es en NEWTON "N". Es la fuerza que al aplicar a un kg de masa, se le ocasiona la aceleración de 1 m/s².

EQUIVALENCIA: $1\ N = 1\ kg\ \frac{m}{s^2}$

Ejemplo 1. Una persona empuja una puerta hacia afuera con una fuerza de 20 N y a una distancia de 30 cm de la bisagra. Otra empuja hacia adentro con una fuerza de 25 N y a 20 cm de la bisagra eje. Hallar la resultante.



Llamando (-) y (+) los sentidos de las fuerzas

RESOLUCIÓN : Por definición:

$$M = F . d$$

$$M_1 = F_1 d_1 = -20\ N \cdot 30\ cm$$

$$M_1 = -600\ N \cdot cm$$

$$M_2 = F_2 d_2 = 25\ N \cdot 20\ cm$$

$$M_2 = 500\ N \cdot cm$$

$$M_R = M_1 + M_2 = -100\ N \cdot cm$$

3. La resultante de fuerzas con la misma línea de acción y el mismo sentido:

- Su recta de acción, es la misma que la de los componentes.
- Su sentido, el mismo que los componentes.
- Su medida es la suma.
- Su punto de aplicación es cualquier punto de la recta de acción.

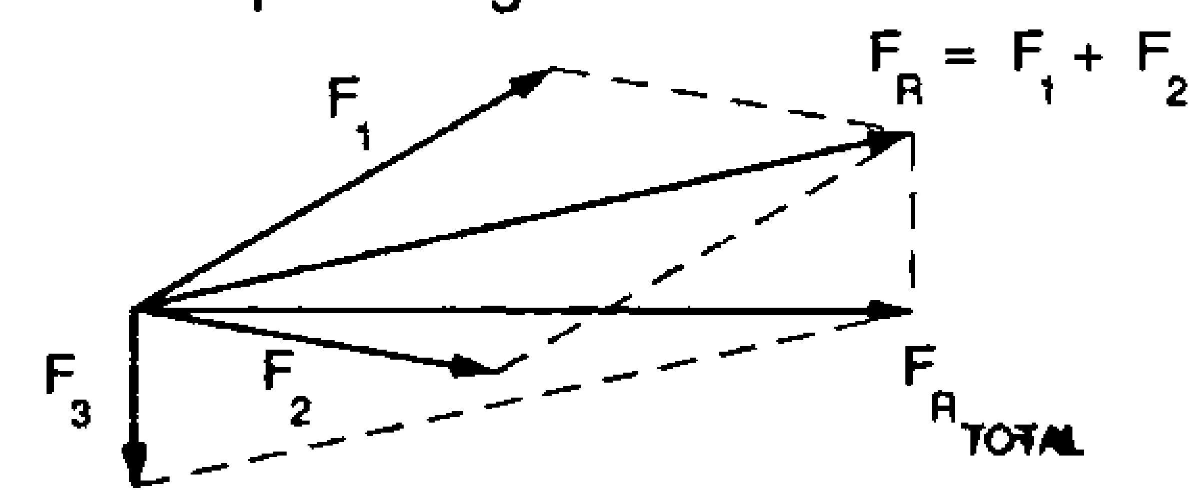
4. Resultante de fuerzas concurrentes:

Dos o más fuerzas son concurrentes cuando sus rectas de acción se cortan en un punto. La resultante se halla por el método del polígono de fuerzas, por el método del paralelogramo o por el sistema de ejes cartesianos.

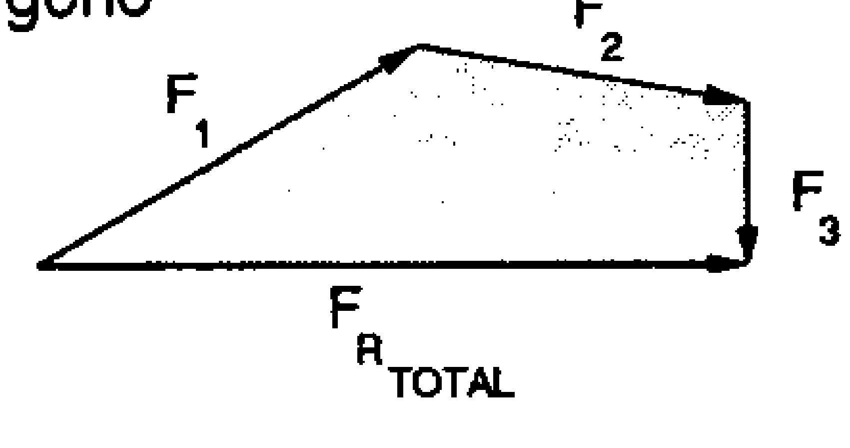
Ejemplo 2. Sean las fuerzas $\vec{F}_1$, $\vec{F}_2$ y $\vec{F}_3$, que se cortan en el punto O. Hallar gráficamente la resultante.

RESOLUCIÓN:

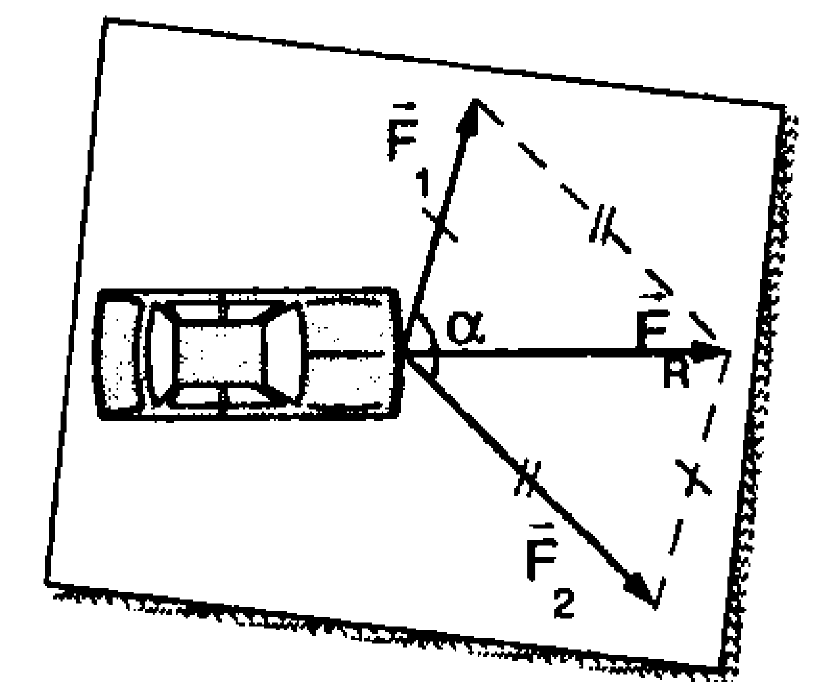
Método del paralelogramo:



Método del polígono de fuerzas:



Ejemplo 3. Mediante dos lazos jalan un carro dos personas con fuerzas de 30 N y 40 N, haciendo un ángulo de 120°. Calcular la resultante y la dirección que seguirá el automóvil al moverse. Las fuerzas son coplanares.



RESOLUCIÓN :

Calculamos el módulo de la fuerza resultante mediante la ley del paralelogramo:

$$F_R = \sqrt{F_1^2 + F_2^2 + 2F_1F_2\cos\alpha}$$

Donde "α" es el ángulo entre las fuerzas $\vec{F}_1$ y $\vec{F}_2$.

Reemplazando valores:

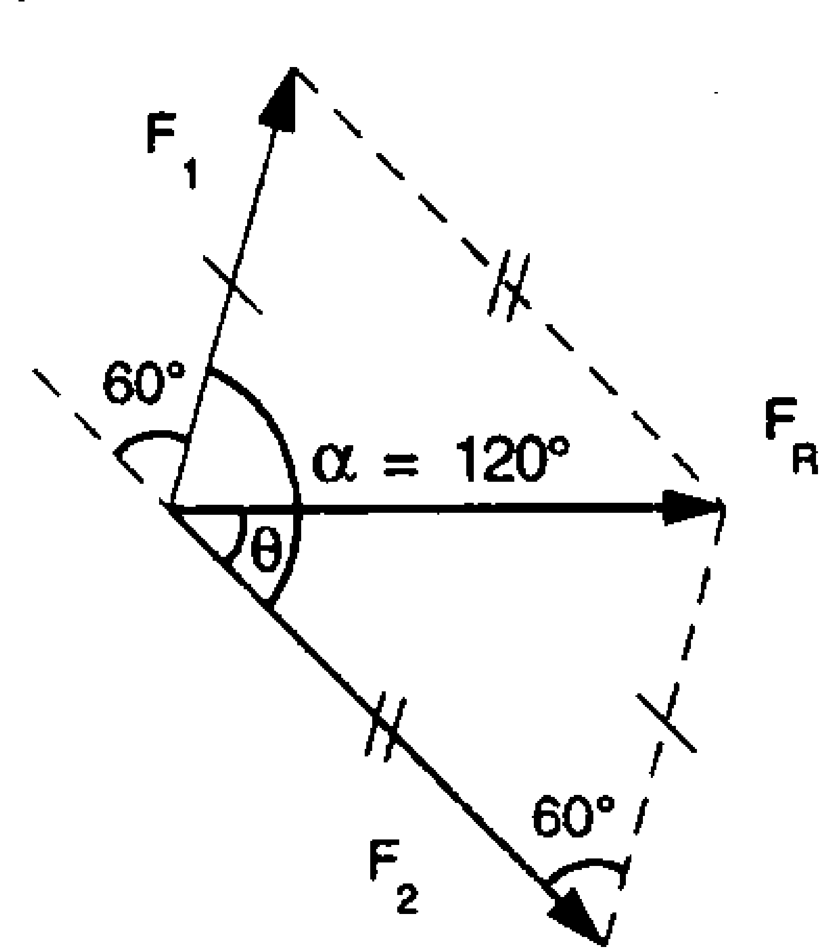
$$F_R = \sqrt{30^2 + 40^2 + 2(30)(40)\cos 120°}$$

Sabemos que: $\cos 120° = -1/2 \Rightarrow$

$$F_R = \sqrt{900 + 1\,600 + 2\,(30)(40)(-\frac{1}{2})}$$

$$F_R \approx 36\text{ N}$$

¿Qué ángulo "θ" forma el vector $\vec{F}_2$ con la resultante $\vec{F}_R$?



De la ley de senos:

$$\frac{\text{sen}\,\theta}{F_1} = \frac{\text{sen}\,60°}{F_R}$$

$$\text{sen}\,\theta = \frac{F_1 \cdot \text{sen}\,60°}{F_R}$$

$$\text{sen}\,\theta = 0{,}72$$

$$\theta = 46°$$

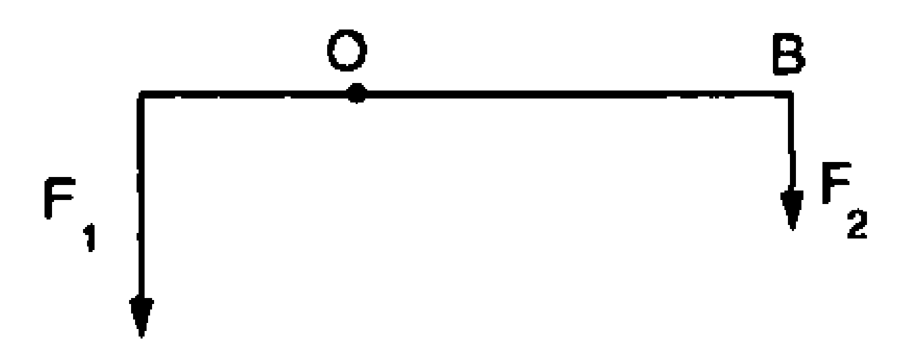
5. Resultante de fuerzas paralelas y del mismo sentido:

- Su recta de acción es paralela a las fuerzas.
- Su sentido, el de las fuerzas.
- Su medida, la suma.
- Su punto de aplicación está situado en un punto que divide a la barra que une las fuerzas en segmentos inversamente proporcional a las fuerzas (Ley de Stevin).

RELACIÓN DE STEVIN:

Sea O el punto de aplicación de la resultante.

Por momentos: $F_1 \times \overline{AO} = F_2 \times \overline{BO}$



De donde: $\dfrac{F_1}{\overline{BO}} = \dfrac{F_2}{\overline{AO}}$

Por una propiedad de proporciones:

$$\frac{F_1}{\overline{BO}} = \frac{F_2}{\overline{AO}} = \frac{F_1 + F_2}{\overline{BO} + \overline{AO}} = \frac{R}{\overline{AB}}$$

$$\boxed{\frac{F_1}{\overline{BO}} = \frac{F_2}{\overline{AO}} = \frac{R}{\overline{AB}}}$$

De la expresión se despeja $\overline{AO}$ ó $\overline{BO}$ según cual de los extremos de la barra se quiera tomar como referencia.

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 4. Un cuerpo soporta la acción de dos fuerzas paralelas, y del mismo sentido $F_1 = 16$ N, y $F_2 = 30$ N; la distancia que los separa es de 1,20 m. Calcular:

a) La resultante.
b) El punto de aplicación.

RESOLUCIÓN :

a) $R = F_1 + F_2 = 16\text{ N} + 30\text{ N}$

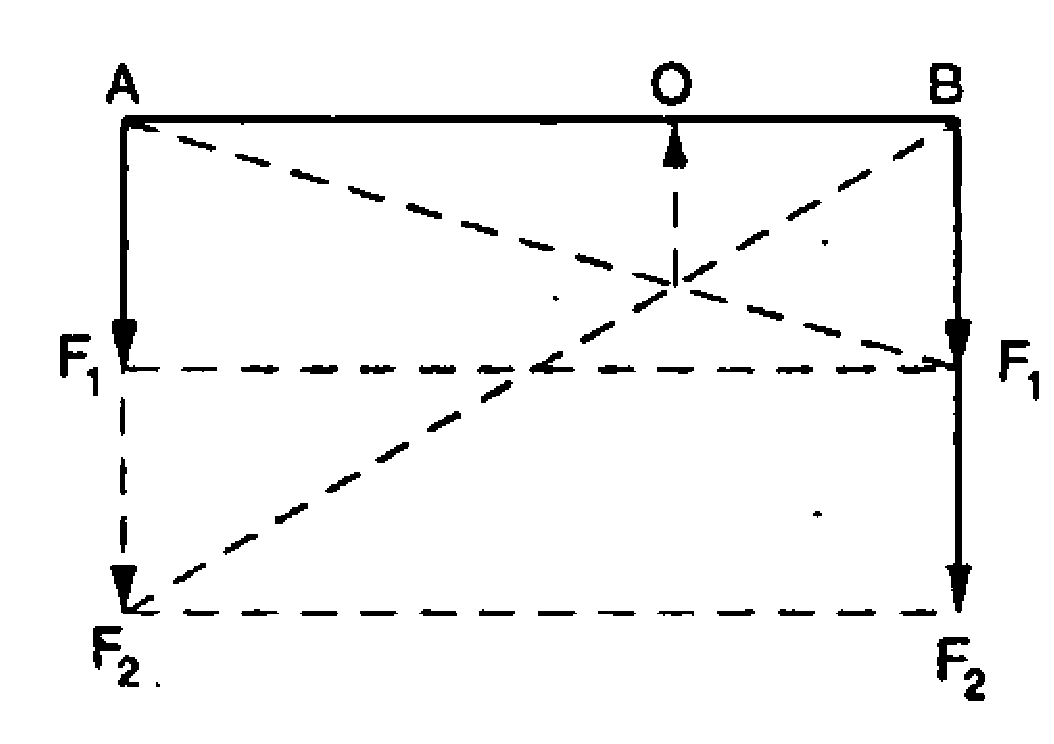
$R = 46\text{ N}$

b) $$\frac{F_1}{\overline{BO}} = \frac{R}{\overline{AB}}$$

$$\overline{BO} = \frac{F_1 \times \overline{AB}}{R} = \frac{16 \times 1{,}120}{46}\text{ m}$$

$$\therefore\ \overline{BO} = 0{,}417\text{ m}$$

MÉTODO GRÁFICO PARA HALLAR EL PUNTO DE APLICACIÓN DE LA RESULTANTE



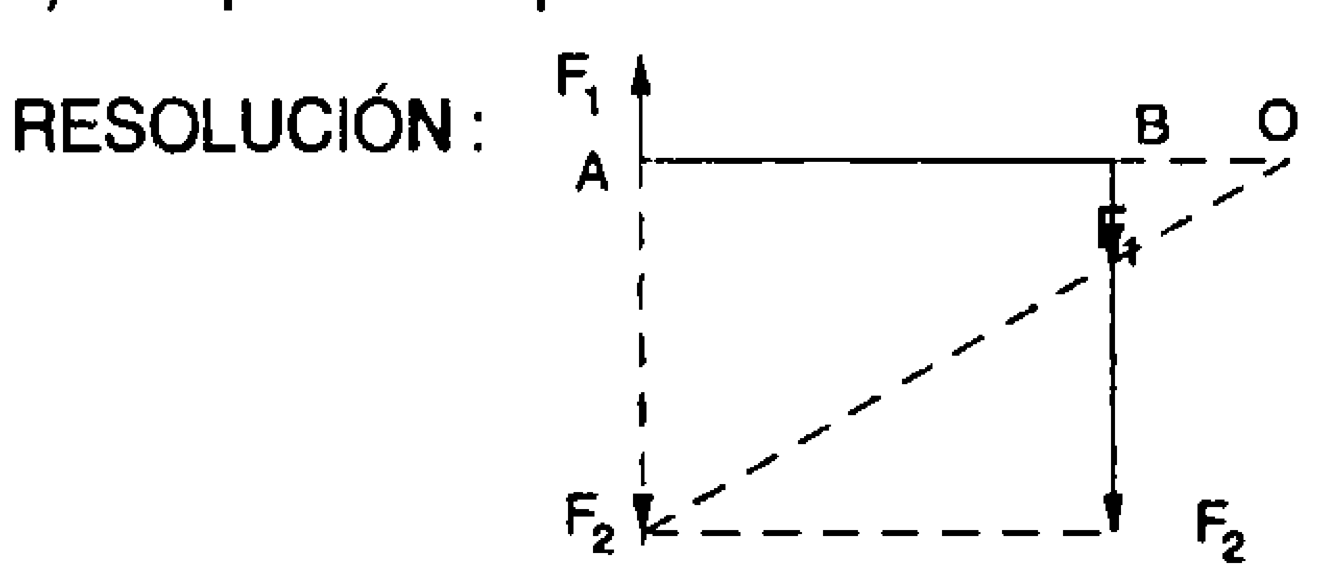
6. Resultante de fuerzas paralelas y de sentido contrario:

- Su recta de acción es paralela a las fuerzas.
- Su sentido, es el de fuerza mayor.
- Su medida, la diferencia.
- Su punto de aplicación, está situado en un punto que divide a la barra que une las fuerzas en segmentos, inversamente proporcionales a las fuerzas (Ley de Stevin).

Ejemplo 5. Sean los módulos de dos fuerzas $F_1 = 20$ N y $F_2 = 30$ N dirigidas en sentido contrario y paralelas, separadas en 1,10 m. Calcular:

a) El módulo de la resultante.
b) El punto de aplicación.

RESOLUCIÓN :



a) $E = F_1 - F_2 = 10\text{ N}$

b) $$\frac{\overline{BO}}{F_1} = \frac{\overline{AB}}{R}$$

$$\overline{BO} = \frac{F_1 \times \overline{AB}}{R} = \frac{20\text{ N} \times 1{,}10\text{ m}}{10\text{ N}}$$

$$\overline{BO} = 2{,}20\text{ m}$$

$$\therefore\ AO = 1{,}10\text{ m} + 2{,}20\text{ m} = 3{,}30\text{ m}$$

LEYES DE NEWTON

Son tres leyes que fundamentan el estudio de la Mecánica. La 1ra y la 3ra se estudia aquí en Estática, la 2da ley se estudiará en Dinámica

PRIMERA LEY DE NEWTON

Se le conoce también como "Principio de Inercia" y establece que: "Todo cuerpo tiende a conservar su estado inicial de reposo o movimiento rectilíneo uniforme, siempre que la fuerza resultante sea cero"

TERCERA LEY DE NEWTON

Se le conoce también como "Principio de acción y reacción" y establece que: "Siempre que dos cuerpos se afecten entre sí, entre ambos se establece una inter
acción mutua, uno ejerce una fuerza al otro y éste reacciona sobre el primero con una fuerza de dirección contraria y de igual valor". Las fuerzas de acción y reacción pueden originar efectos diferentes.

http://librosysolucionarios.net

PRIMERA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Establece que cuando un cuerpo está en reposo o movimiento rectilíneo uniforme, se debe cumplir que la suma de todas las fuerzas ejercidas sobre él es igual a cero. Esta ley garantiza el **equilibrio de traslación**.

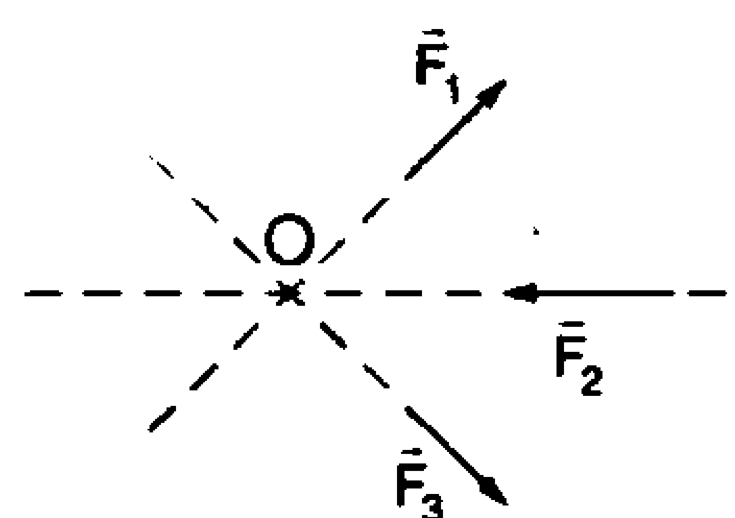
$$\Sigma\vec{F} = \vec{0}$$

Cuando las fuerzas que actúan sobre un cuerpo se descomponen en sus componentes rectangulares se tiene en forma práctica las siguientes relaciones:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad \Sigma F_y = 0$$

FUERZAS CONCURRENTES

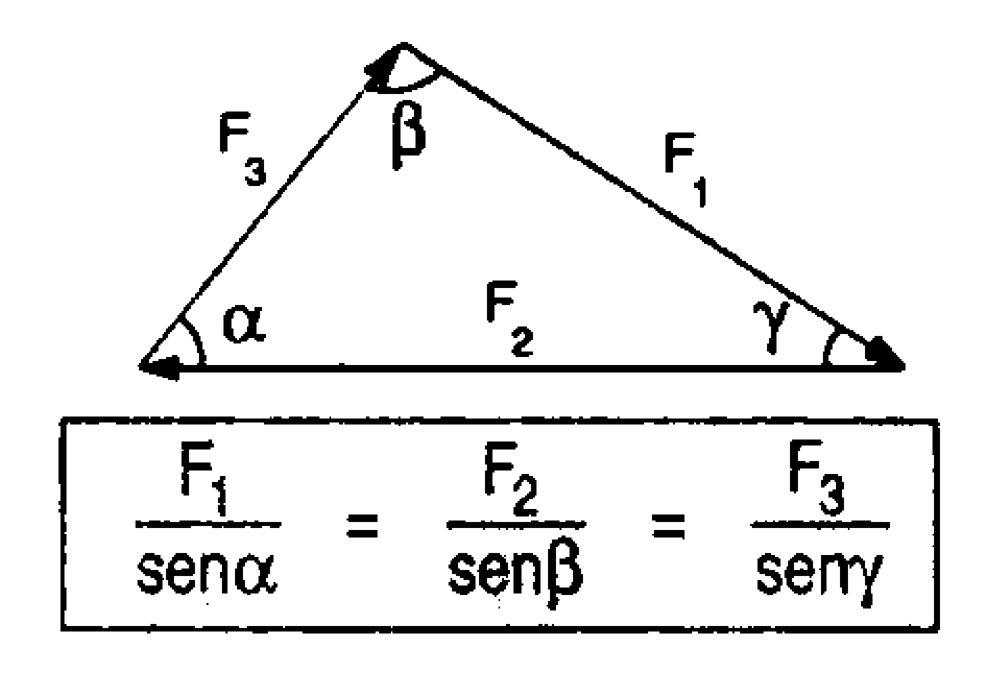
Son aquellas fuerzas cuyas líneas de acción se intersectan o se cortan en un punto.



NOTA IMPORTANTE: Un cuerpo está en estado de equilibrio mecánico cuando está soportando la acción de tres fuerzas concurrentes que se anulan mutuamente. Estas fuerzas deben cumplir la condición gráfica de formar una cadena vectorial cerrada.

LEY DE LAMY

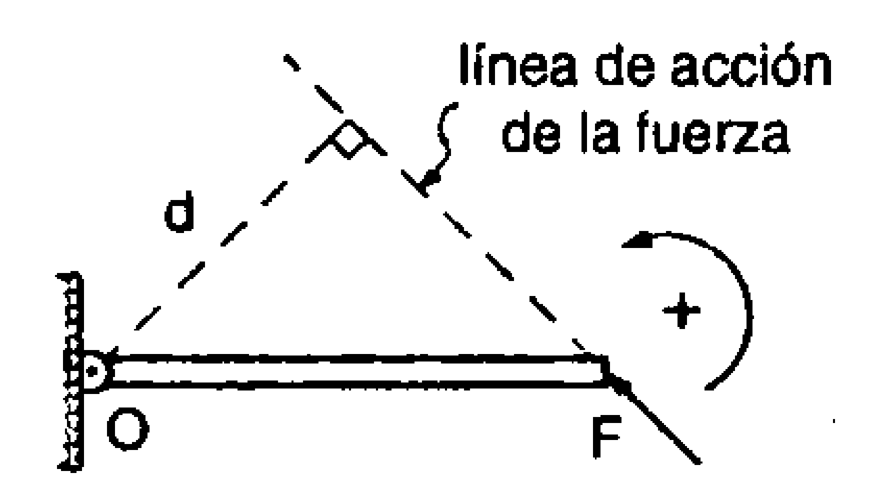
Llamada también "Ley de Senos". Por su gran utilidad en la resolución de problemas de Estática. Esta Ley ya fue planteada en el capítulo de VECTORES sin embargo, por su importancia aquí en CINEMÁTICA volvemos a plantearla: "En un triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos"



$$\frac{F_1}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{F_2}{\operatorname{sen}\beta} = \frac{F_3}{\operatorname{sen}\gamma}$$

MOMENTO DE UNA FUERZA

Es una magnitud física vectorial que mide el efecto de giro o rotación que puede originar una fuerza aplicada a un cuerpo. Su módulo se determina como el producto del valor de la fuerza "F" y la distancia "d" trazada desde el centro de momentos hasta la línea de acción de la fuerza.



O: es el centro de momentos o centro de giro.
La fuerza F origina un giro antihorario

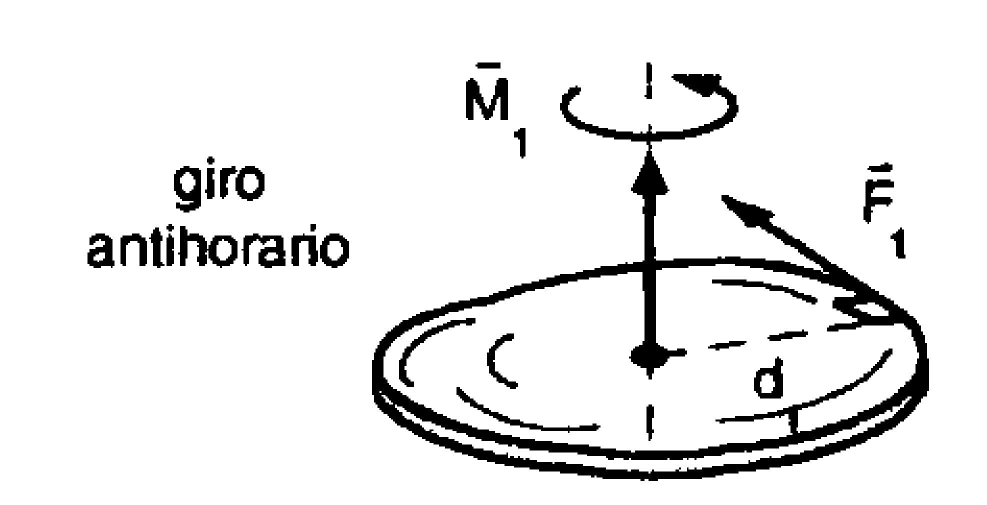
$$M_O^F = F \cdot d$$

UNIDADES SI : N . m

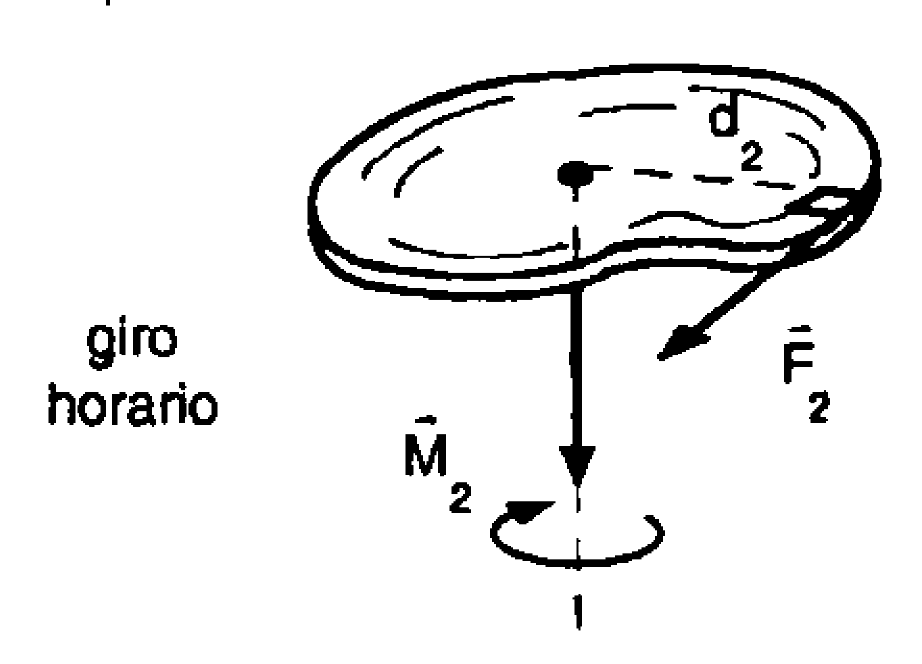
M_O^F: Momento de la fuerza F con respecto al centro de momentos "O", en: N.m
d : Es la distancia medida, en: m

NOTAS:

1. El vector momento siempre es perpendicular al plano de rotación y su sentido queda determinado siguiendo la regla de la mano derecha.



http://librosysolucionarios.net



2. Las fuerzas cuyas líneas de acción pasan por el centro de rotación no producen momento o su momento es cero.

SEGUNDA CONDICIÓN DE EQUILIBRIO

Establece que cuando un cuerpo permanece en reposo o cuando rota con velocidad uniforme, la suma de todos los momentos debe ser cero. Esta ley garantiza el **equilibrio de rotación.**

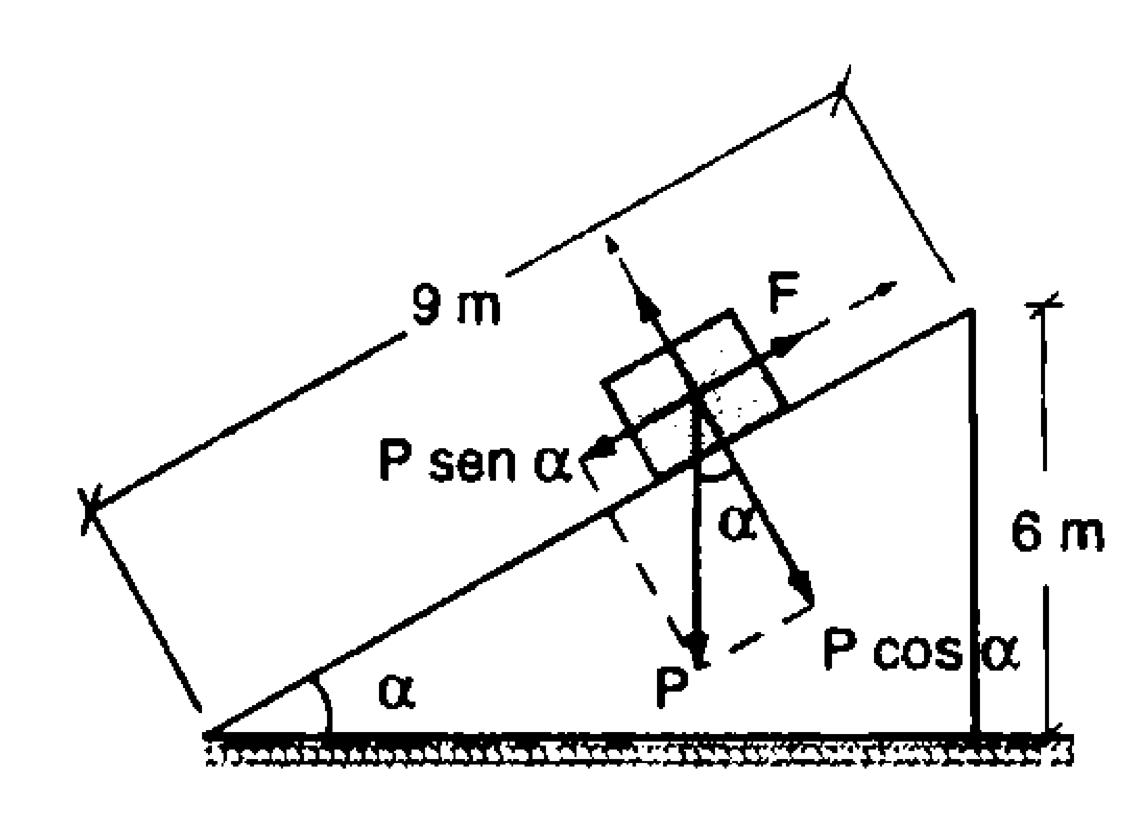
$$\Sigma M = 0$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar la fuerza mínima paralela al plano inclinado de la figura, sin rozamiento, de 9 m de longitud, que es necesario aplicar a un cuerpo de 100 N para subir hasta una plataforma horizontal, a 6 m sobre el nivel del suelo.

RESOLUCIÓN :

$P = 100\,N \quad L = 9\,m \quad h = 5\,m$



Se descompone la fuerza que representa el peso en dos fuerzas, una paralela al piso y otra normal (perpendicular al piso). Entonces:

$$F = P \operatorname{sen} \alpha$$

$$F = 100\,N \times \frac{6}{9} = 66{,}67\,N$$

$$F = 66{,}67\,N$$

Esta fuerza tiende a bajar el cuerpo; una fuerza igual pero de sentido contrario mantendrá el cuerpo en equilibrio y una fuerza ligeramente mayor hará que el cuerpo suba aceleradamente.

DIAGRAMA DE CUERPO LIBRE O DIAGRAMA LIBRE

Es un gráfico donde se indica **todas las fuerzas** que actúan **sobre el cuerpo**.

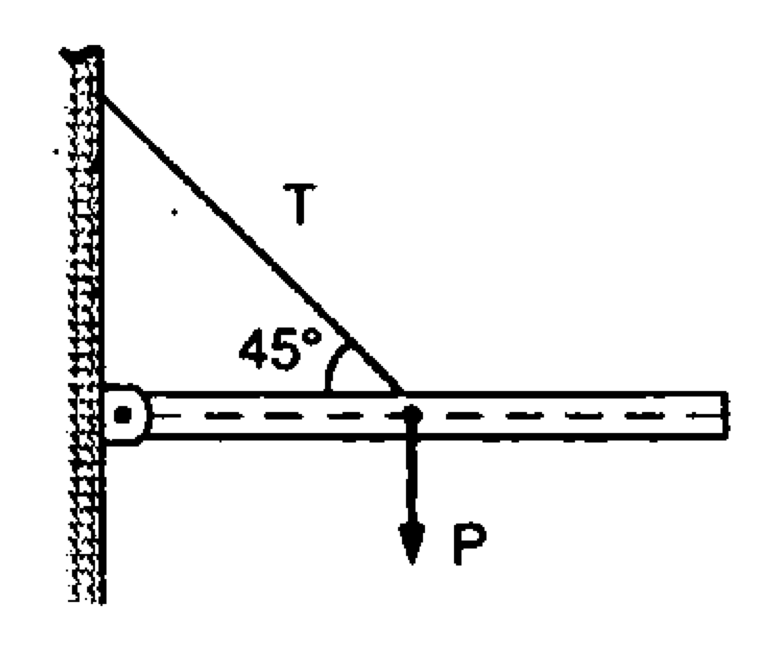
La mayor parte de los problemas de estática y gran número de problemas de dinámica se resuelven fácilmente haciendo el diagrama de cuerpo libre.

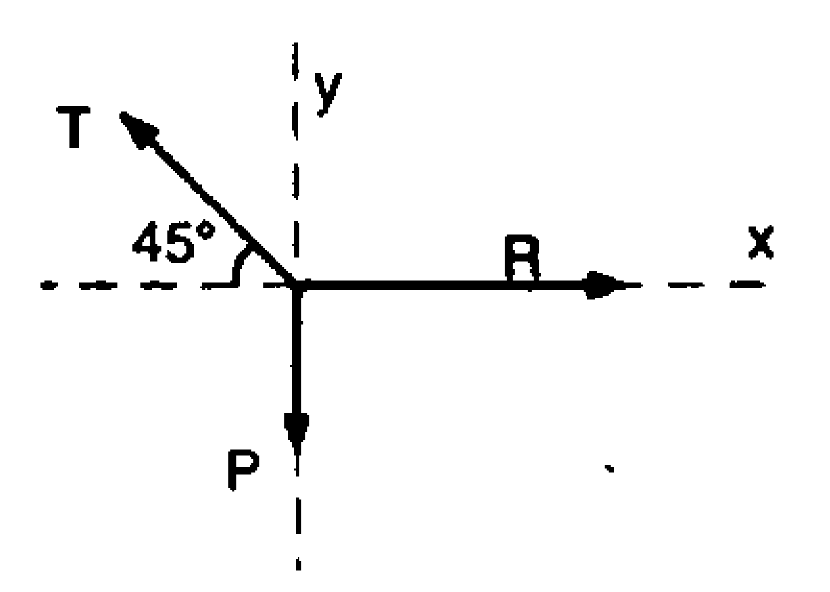
PROBLEMA 2. La barra de la figura pesa 30 N, articulada en la pared, permanece en reposo por medio de la cuerda que la sujeta desde su punto medio. Calcular:

a) La tensión de la cuerda.
b) La reacción del apoyo.

RESOLUCIÓN :

Todos las fuerzas que actúan sobre el cuerpo se trasladan a un sistema de ejes coordenados.





Luego se descomponen en sus componentes rectangulares:

T sen 45° y R sobre x
T cos 45° y P sobre y

Las ecuaciones de equilibrio:

$\Sigma F_x = 0$; $R - T\cos 45° = 0$ (1)

$\Sigma F_y = 0$; $T\,\text{sen}\,45° - P = 0$ (2)

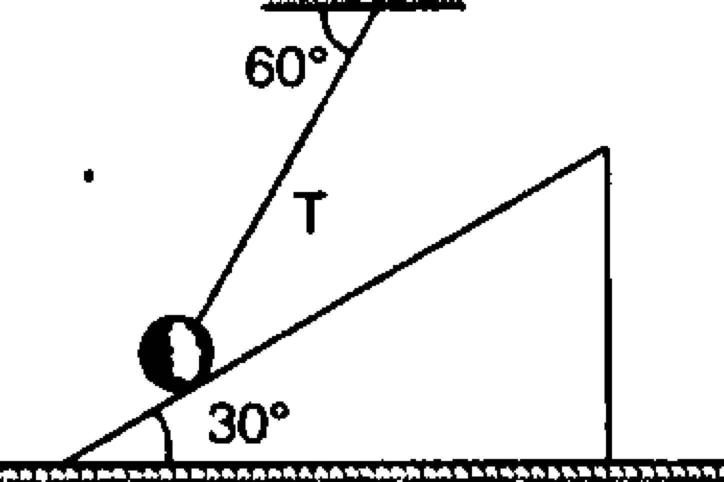
De (2): $T = \dfrac{P}{\text{sen}\,45°}$

Sustituyendo en (1): $\dfrac{P\cos 45°}{\text{sen}\,45°} = R$

de donde: $P = R = 30$ N

PROBLEMA 3. La esfera de la figura pesa 600 N y se mantiene en reposo en la posición presentada. Calcular:

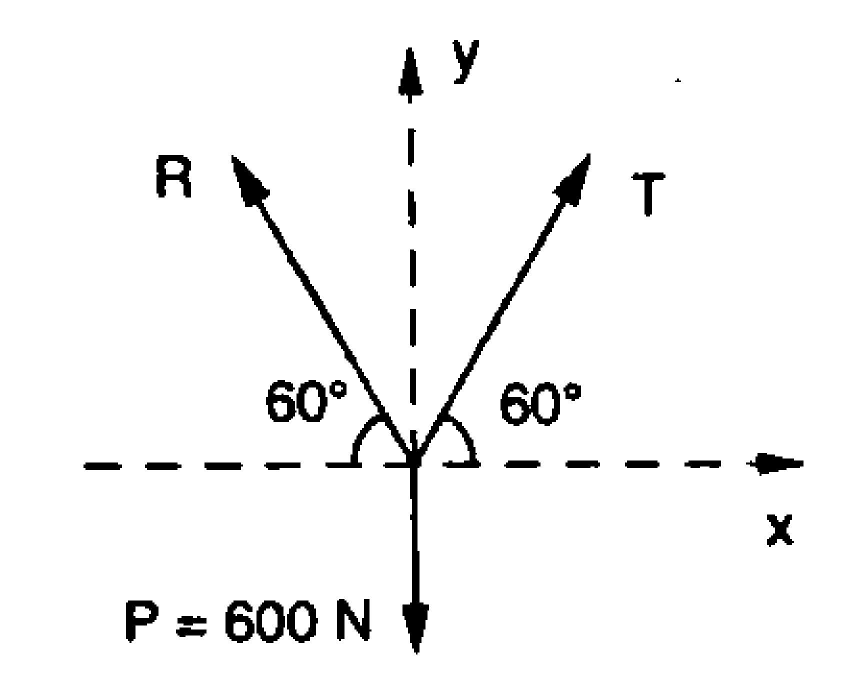
a) La tensión la cuerda.
b) La reacción (plano inclir do.



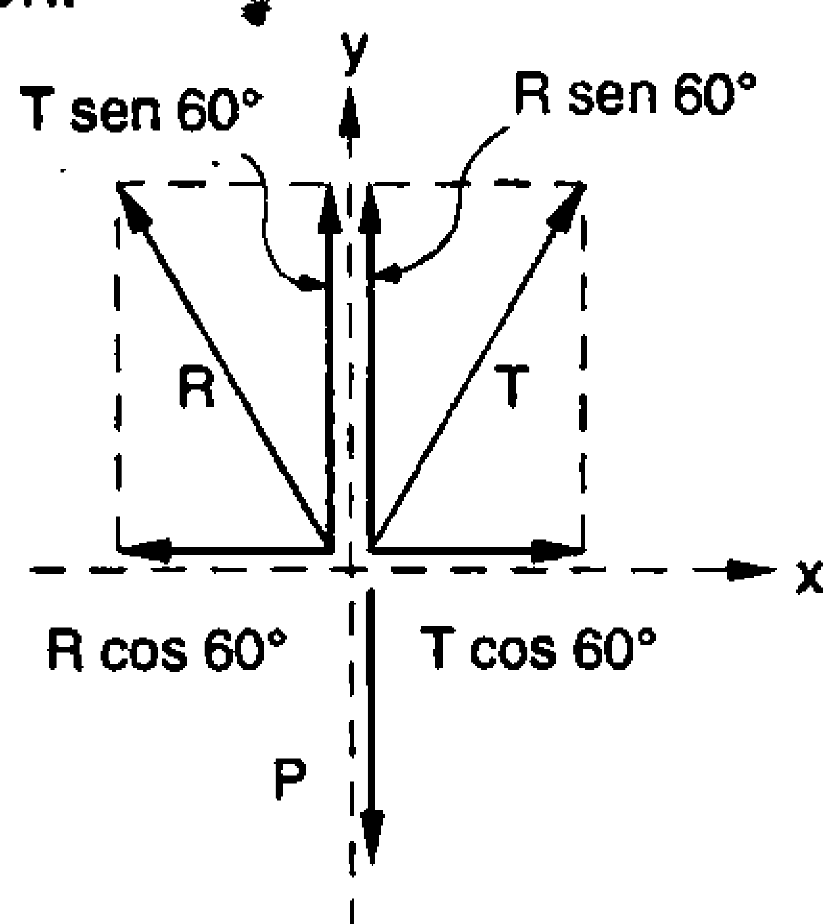
RESOLUCIÓN :

Sobre la esfera actúan 3 fuerzas, a las cuales las representamos en un sistema de ejes coordenados.

1. Diagrama de cuerpo libre:



2. Luego las componentes rectangulares son:



3. Ahora, las ecuaciones de equilibrio son:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$-R\cos 60° + T\cos 60° = 0$$

$$\therefore \quad R = T \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$R\,\text{sen}\,60° + T\,\text{sen}\,60° - P = 0$$

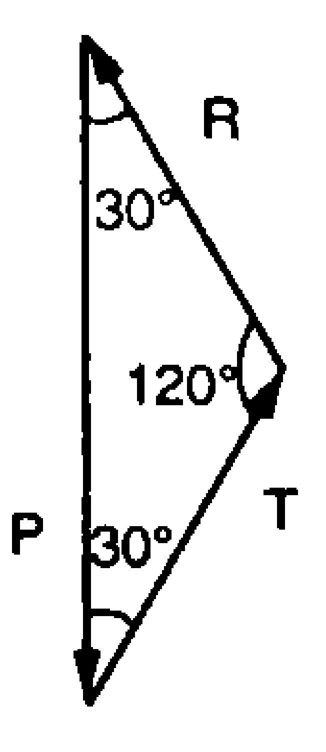
Pero $R = T \therefore T\,\text{sen}\,60° + T\,\text{sen}\,60° = P$

$2T\,\text{sen}\,60° = P$; de donde:

$T = 200\sqrt{3}$ N y $R = 200\sqrt{3}$ N

OTRO MÉTODO:

Por el polígono de fuerzas o Teorema de Lamy:



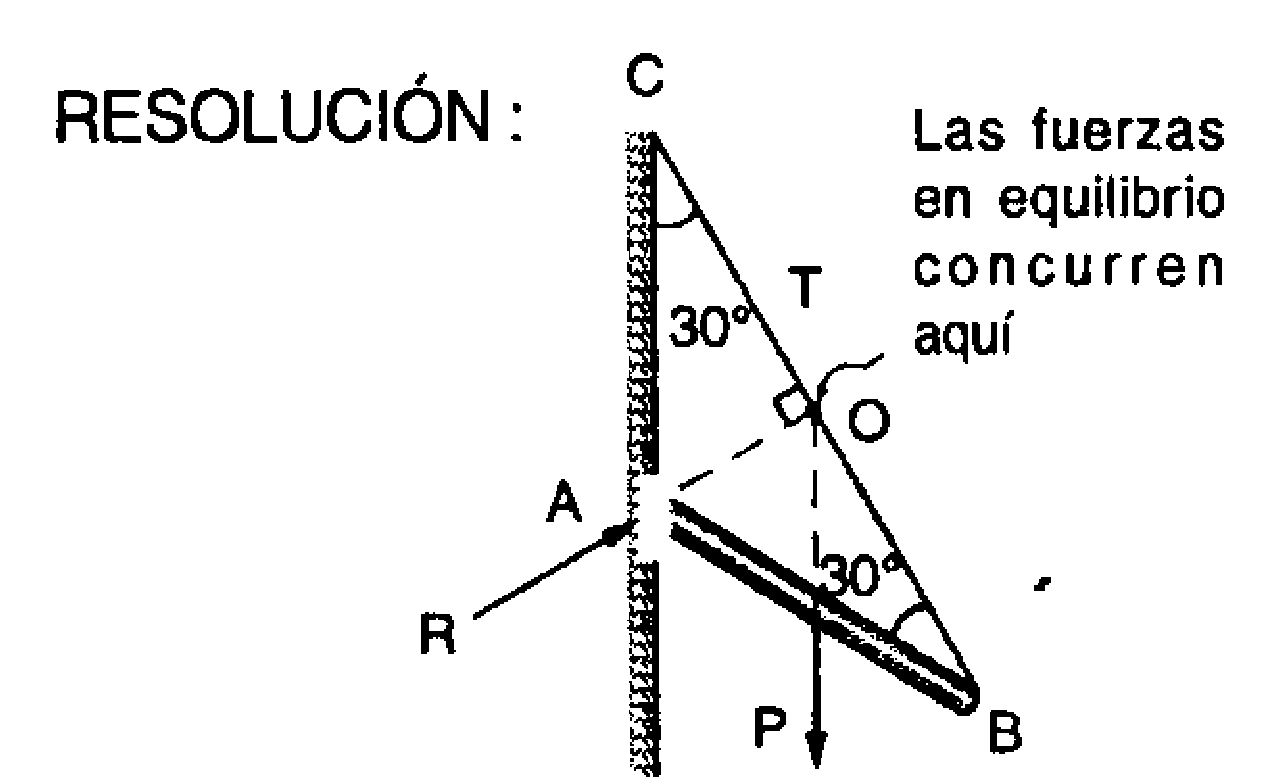
$$\frac{R}{\text{sen}\,30°} = \frac{P}{\text{sen}\,120°} \quad \therefore \quad R = 200\sqrt{3}\text{ N}$$

$$\frac{T}{\text{sen}\,30°} = \frac{P}{\text{sen}\,120°} \quad \therefore \quad T = 200\sqrt{3}\text{ N}$$

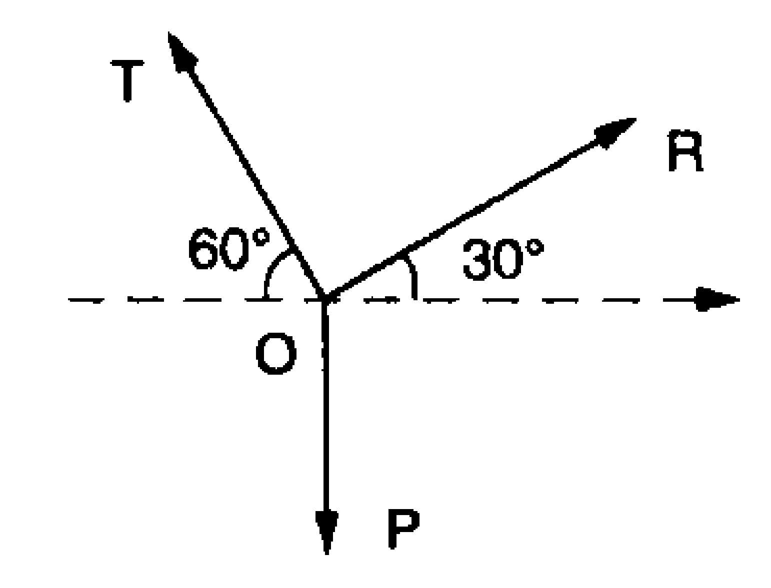
PROBLEMA 4. En la figura, la barra AB está en equilibri y pesa 15 N. Calcular la tensión que soporta la cuerda BC y la reacción de la pared sobre la barra en el punto de apoyo.

http://librosysolucionarios.net

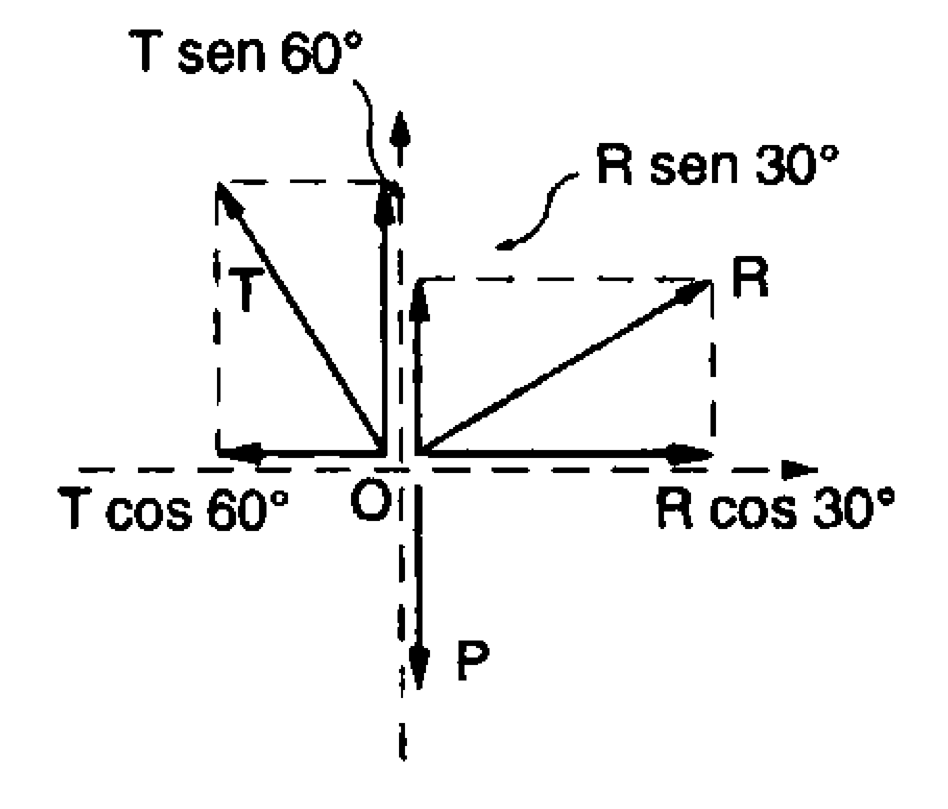
RESOLUCIÓN :



1. Realizamos el D.C.L. en O:



2. Las componentes rectangulares son:



3. Ecuaciones de equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad T = R\sqrt{3} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T \text{ sen } 60° + R \text{ sen } 30° - 15 \text{ N} = 0$$

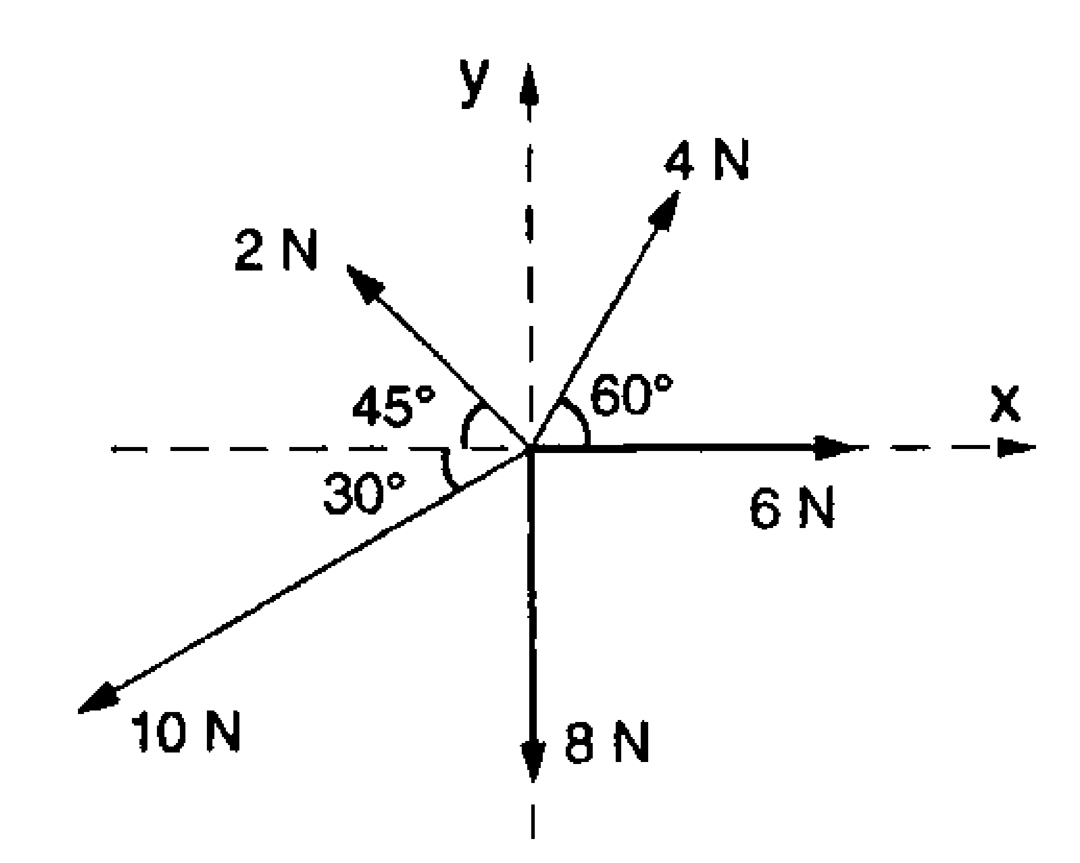
$$T\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = 15 \text{ N}$$

Sustituyendo T:

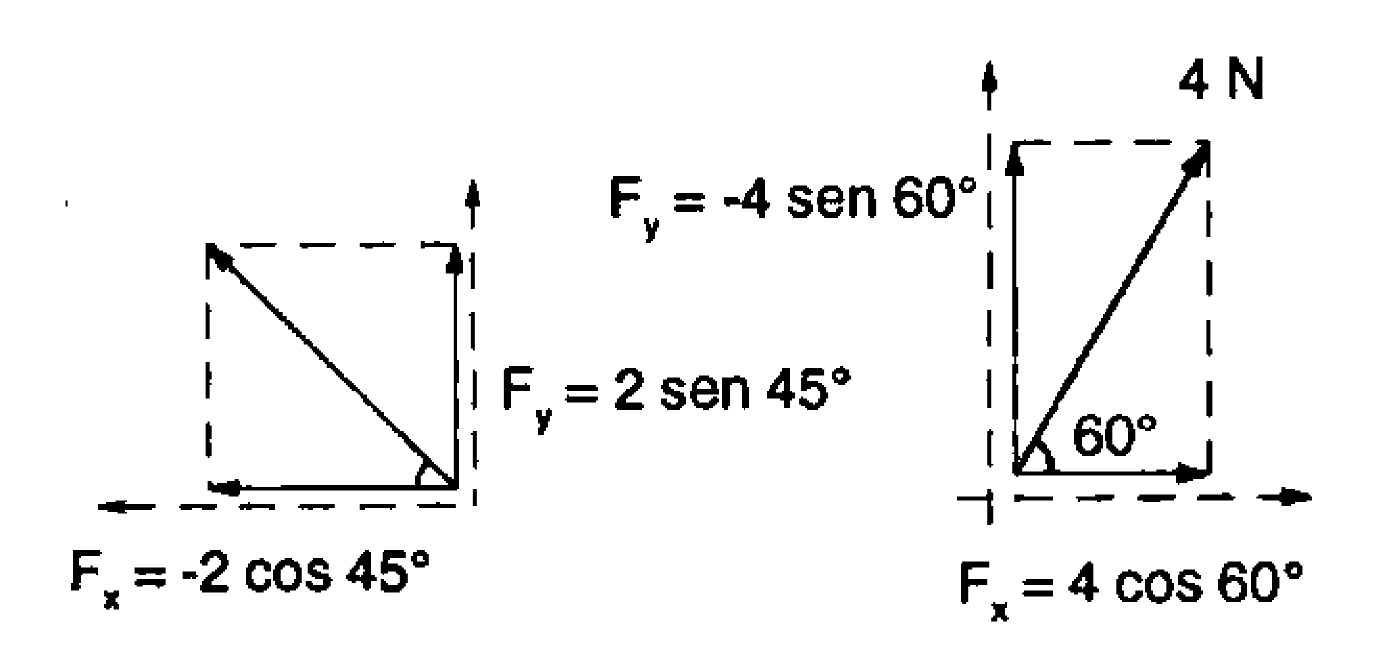
$$R\sqrt{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{R}{2} = 15 \text{ N} \quad \therefore \quad R = 7{,}5 \text{ N}$$

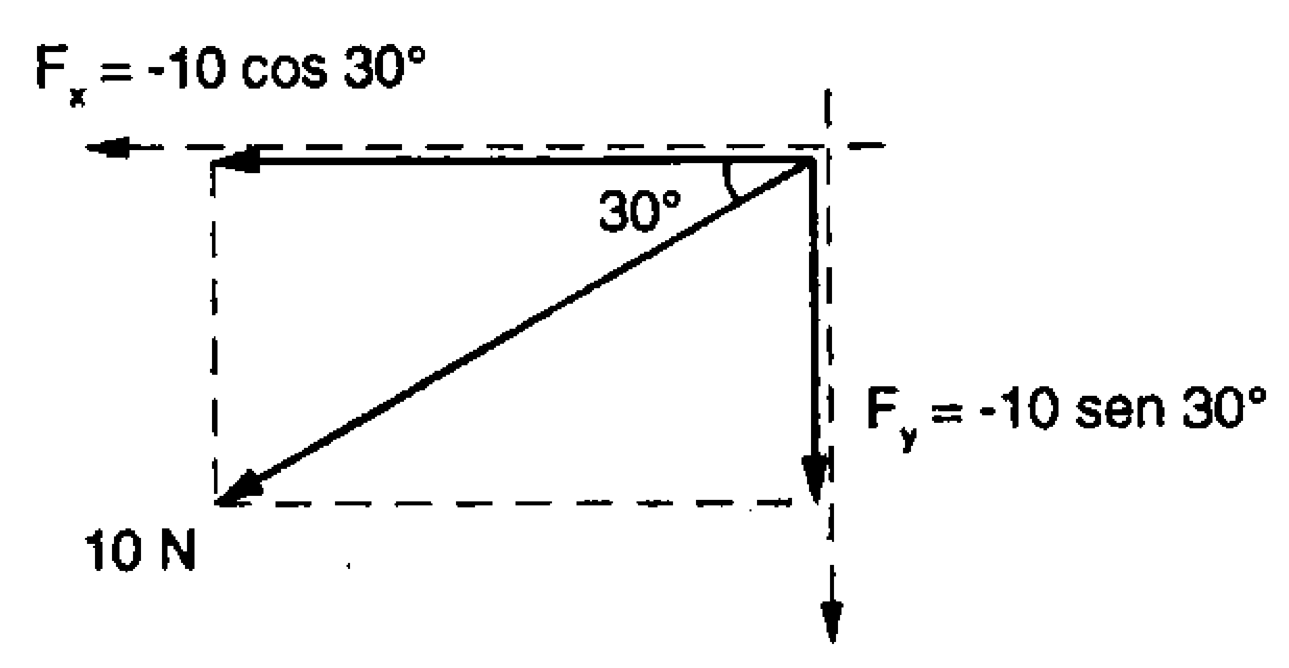
En (1): $T = 7{,}5\sqrt{3}$ N

PROBLEMA 5. Hallar la resultante y la dirección de las 5 fuerzas coplanares concurrentes.



RESOLUCIÓN : Descompongamos cada una de las fuerzas no acciales en sus componentes rectangulares





Cuadro de las componentes rectangulares de las fuerzas en equilibrio

Fuerza	F_x	F_y
2 N	-1,41 N	1,41 N
4 N	+2,00 N	3,46 N
6 N	+6,00 N	0,00 N
8 N	0,00 N	-8,00 N
10 N	-8,65 N	-5,00 N

Ahora: $\Sigma F_x = -2{,}06$ N

$\Sigma F_y = -8{,}13$ N

Cálculo del módulo:

$$R = \sqrt{(-2{,}06 \text{ N})^2 + (-8{,}13 \text{ N})^2}$$

$$R = 8{,}39 \text{ N}$$

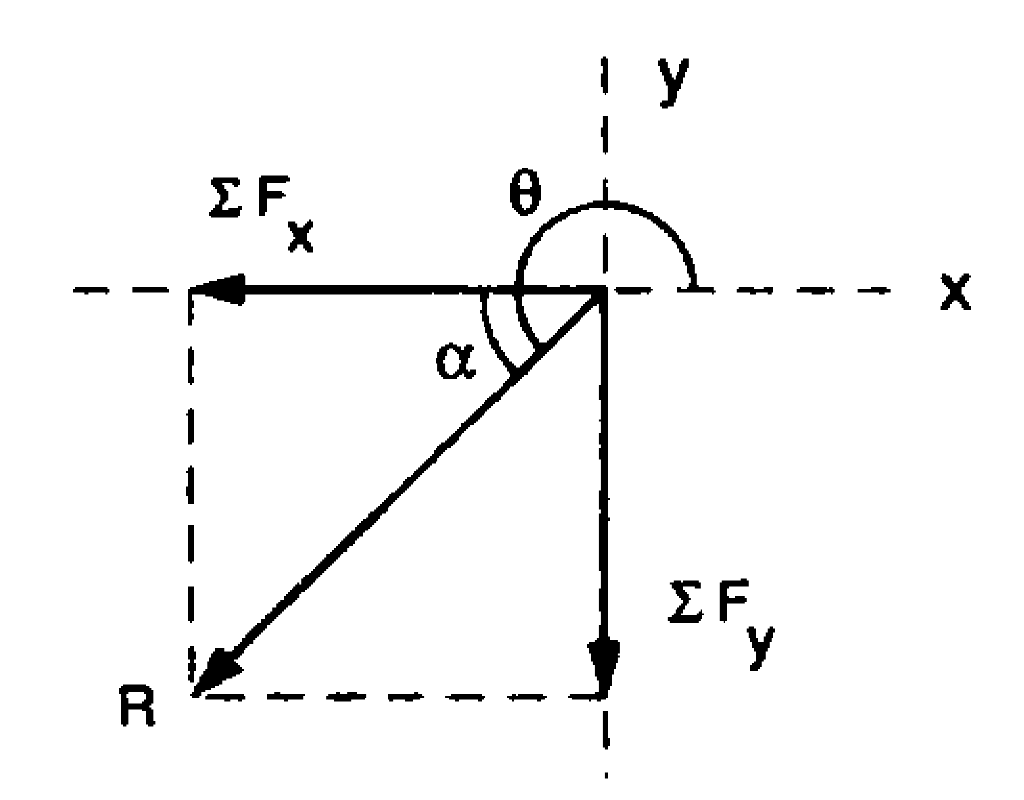
http://librosysolucionarios.net

Cálculo de la dirección:

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\Sigma F_y}{\Sigma F_x} = \frac{-8{,}13\text{ N}}{-2{,}06\text{ N}} = 3{,}94$$

$$\alpha = \text{arco tg } 3{,}94 = 75°46'53{,}4''$$

$$\theta = 180° + \alpha = 180° + 75°46'53{,}4''$$

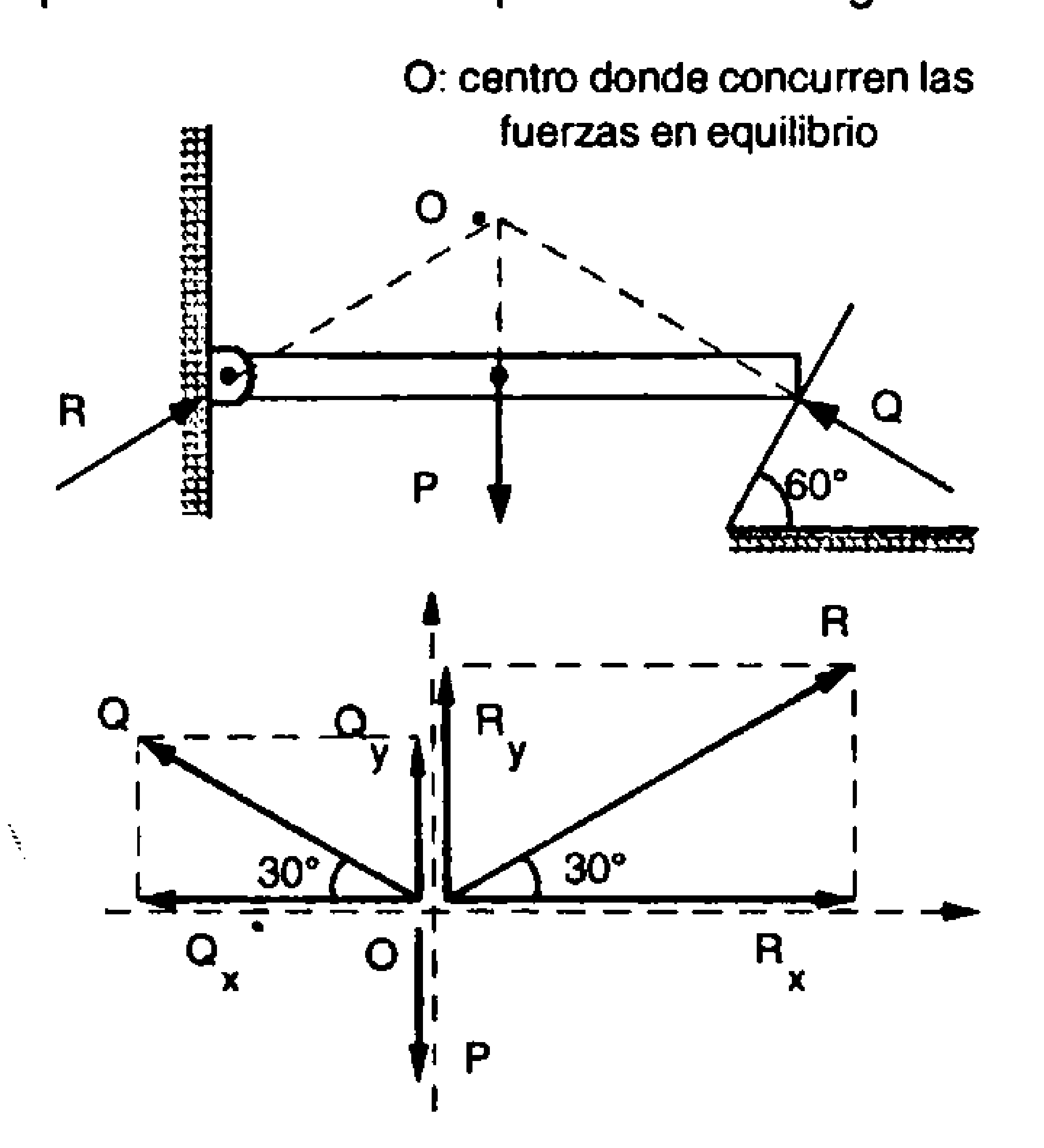


Rpta.: $\theta = 255°46'53{,}4''$

PROBLEMA 6. La barra horizontal de la figura pesa 30 N, y está apoyada sobre un plano inclinado de 60°. Hallar las reacciones en la articulación y en el plano.

RESOLUCIÓN :

Llevando las fuerzas que actúan sobre el cuerpo (diagrama de cuerpo libre) y descomponiendo en sus componentes rectangulares:



$\Sigma F_x = 0: \quad R_x - Q_x = 0$

ó sea: $R\cos 30° - Q\cos 30° = 0$

$\therefore\ Q = R$

$\Sigma F_y = 0: \quad Q_y + R_y = P$

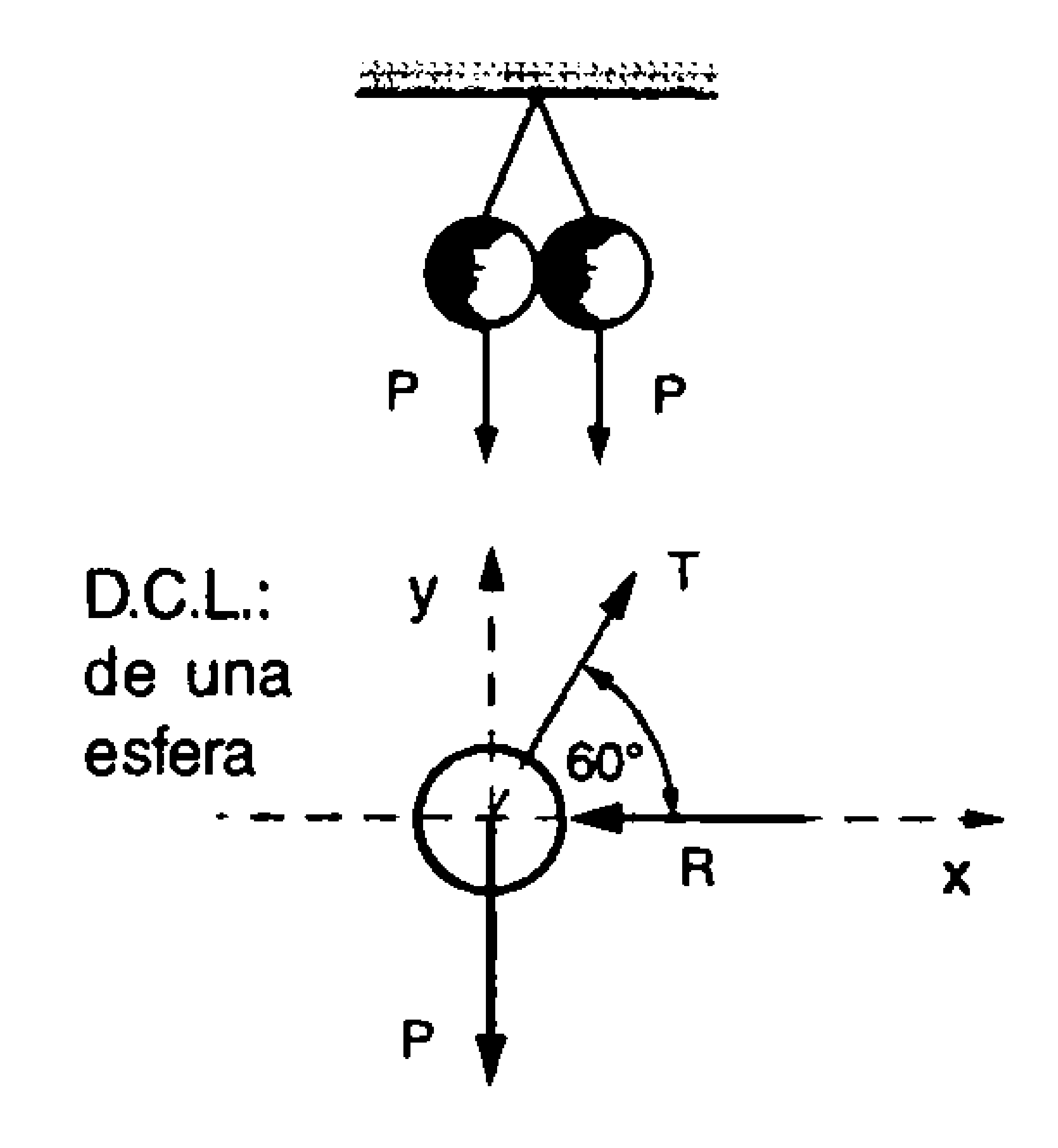
ó sea: $Q\,\text{sen}\,30° + R\,\text{sen}\,30° = P$

Pero $Q = R \ \therefore\ R = 30\text{ N}$

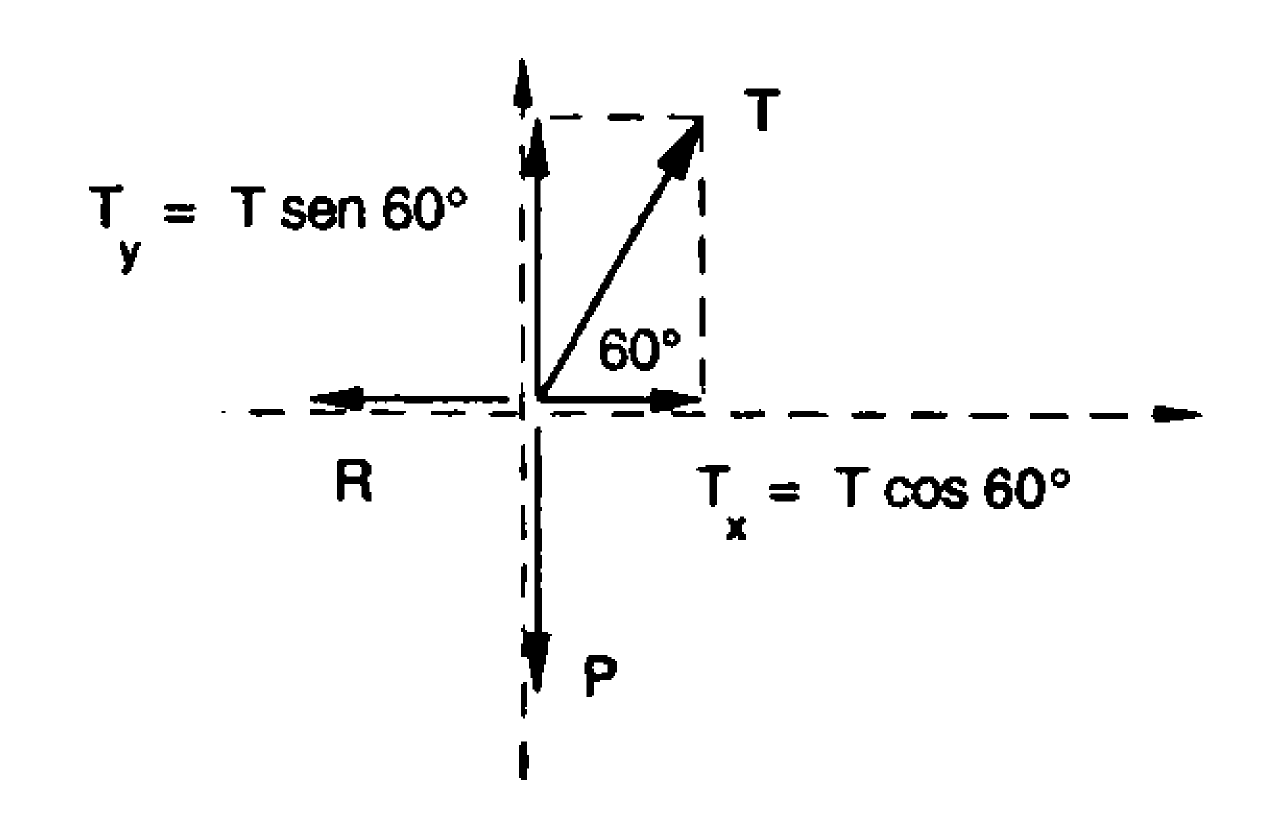
$Q = 30\text{ N}$

PROBLEMA 7. Las esferas de la figura son iguales, y pesan 15 N cada una, sabiendo que sus diámetros miden 20 cm y que las cuerdas que las sujetan tienen una longitud de 10 cm. Calcular la tensión de las cuerdas que las sujetan y la fuerza de contacto entre ellas.

RESOLUCIÓN :



Descomponiendo en sus componentes rectangulares



http://librosysolucionarios.net

$\Sigma F_x = 0: \quad T\cos 60° - R = 0$

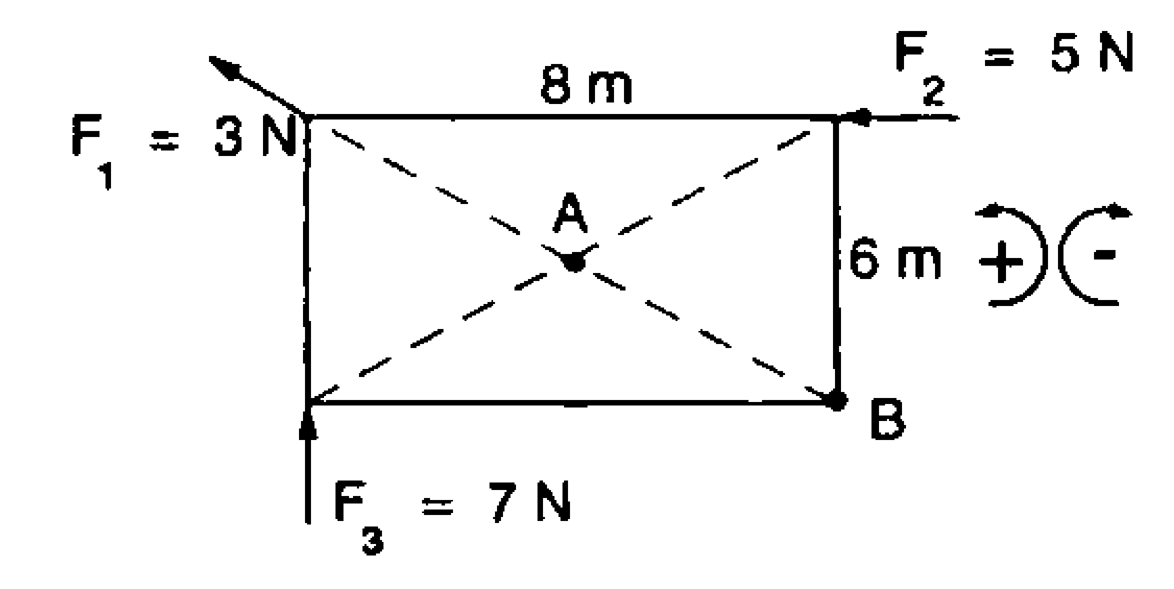
$\therefore \quad R = \dfrac{T}{2} \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0: \quad T\,\text{sen}\,60° - P = 0$

$\therefore \quad T = 10\sqrt{3}$

En (1): $R = 5\sqrt{3}\ N$

PROBLEMA 8. Calcular los momentos que producen las fuerzas de la figura con respecto al punto B.



RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$M = F \cdot d$

Con respecto a B: F_1 pasa por el centro de giro, luego:

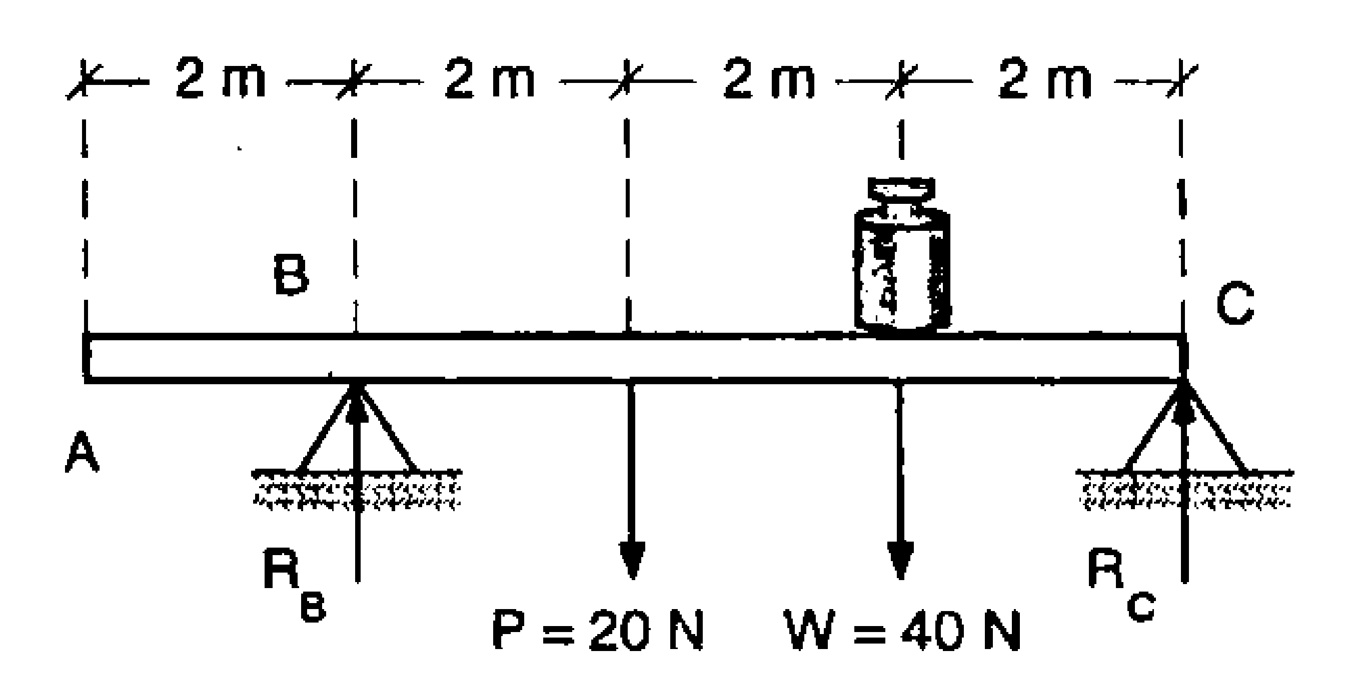
$M_{F_1} = 0$

$M_{F_2} = 5\ N \times 6\ m = 30\ N \times m$

$M_{F_3} = -7\ N \times 8\ m = -56\ N \times m$

$\therefore \quad M_B = 30\ N + (-56\ N) = -26\ N$

PROBLEMA 14. La barra de la figura pesa 20 N y permanece en posición horizontal sobre B y C. Hallar las reacciones en los puntos de apoyo. El block sobre la barra pesa 40 N.



RESOLUCIÓN :

Se toman los momentos con respecto a los puntos sobre los cuales pueden girar el sistema:

$\Sigma M_B = 0$

$R_C \times 6\ m - 40\ N \times 4\ m - 20\ N \times 2\ m = 0$

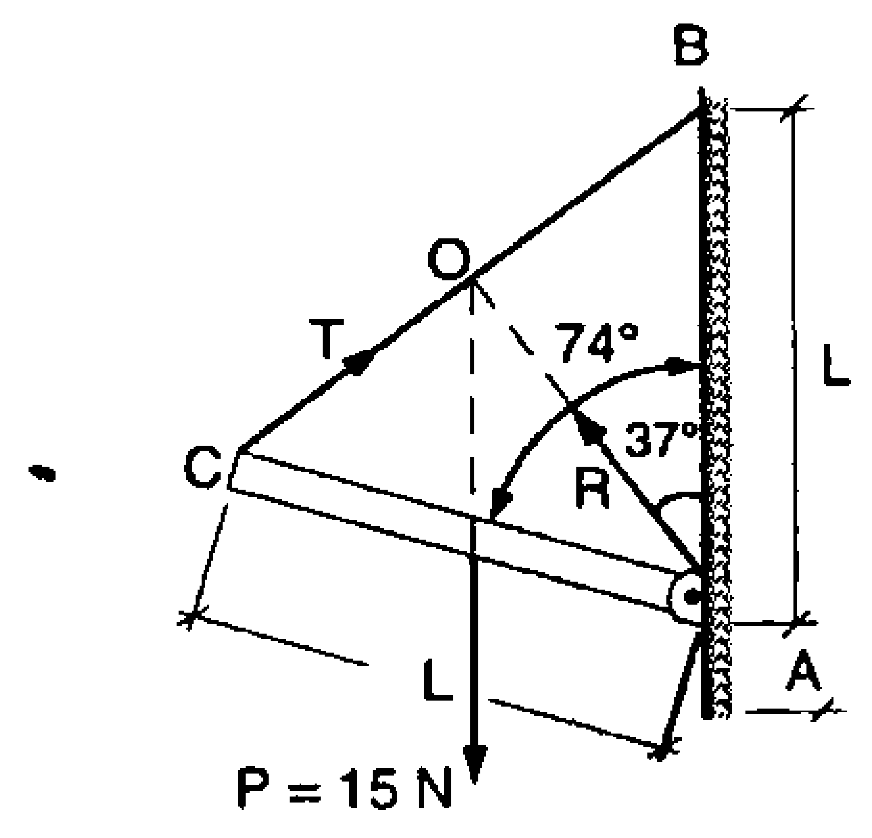
$R_C = 33{,}33\ N$

$\Sigma M_C = 0:$

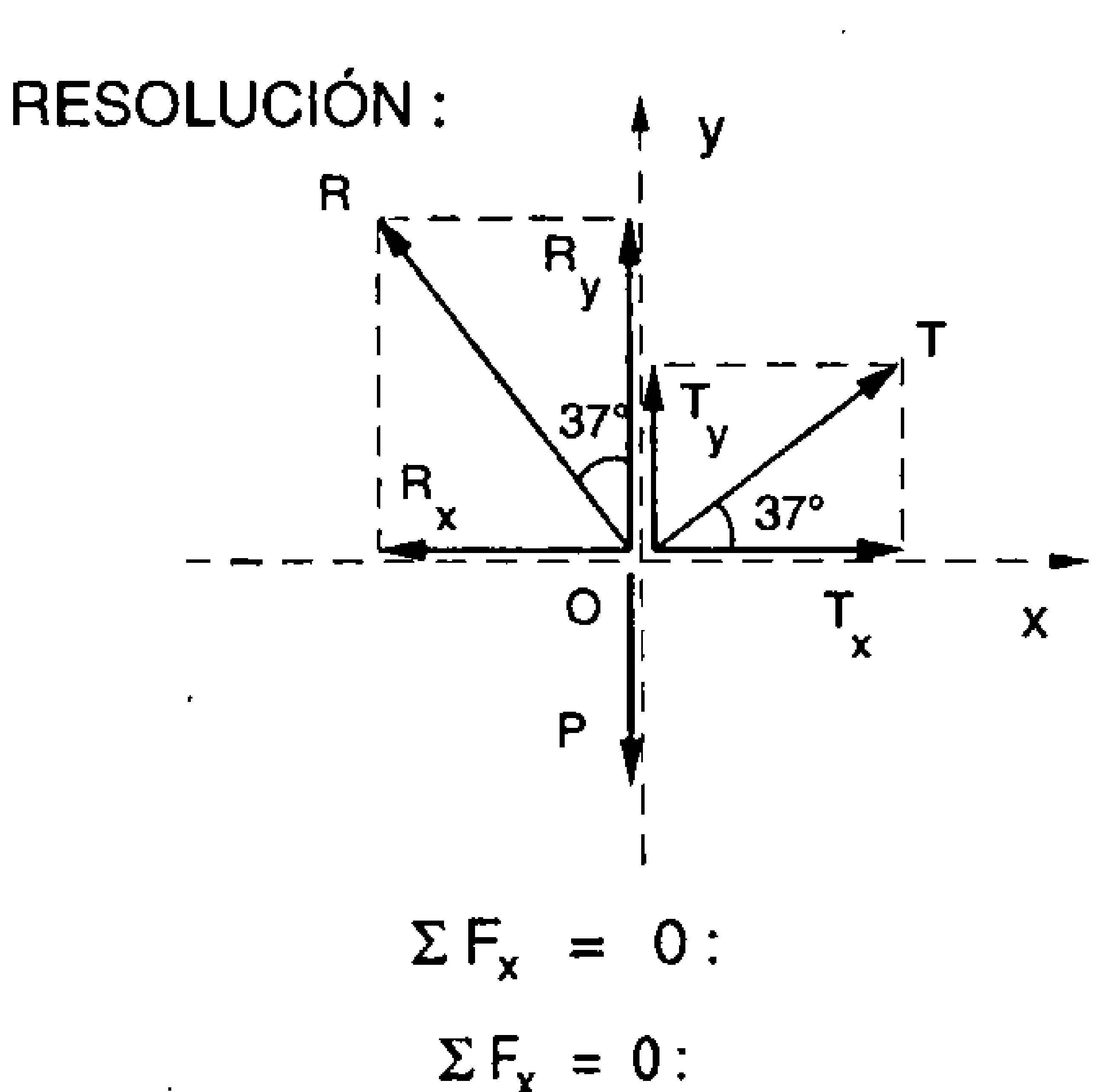
$-R_B \times 6\ m + 20\ N \times 4\ m + 40\ N \times 2\ m = 0$

$R_B = 26{,}67\ N$

PROBLEMA 15. ¿Qué fuerza hay que aplicar en la cuerda BC para que la barra articulada en A permanezca en equilibrio, sabiendo que pesa 15 N? ($AB = AC = L$) $\hat{A} = 74°$



RESOLUCIÓN :



$\Sigma F_x = 0:$

$\Sigma F_x = 0:$

$T\cos 37° - R\,\text{sen}\,37° = 0$

$$T\frac{4}{5} = R\frac{3}{5} \quad \therefore \quad T = \frac{3R}{4} \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$R\cos 37° + T\,\text{sen}\,37° - P = 0$$

$$R\frac{4}{5} + T\frac{3}{5} = 15$$

$$4R + 3T = 75$$

Sustituyendo en (1) valor de T dado:

$$4R + 3 \times \frac{3R}{4} = 75$$

$$R = 12\ \text{N}$$

Sustituyendo en (1): $T = 3 \times \dfrac{12\ \text{N}}{4}$

Rpta.: $T = 9\ \text{N}$

OTRO MÉTODO:

Para encontrar las fuerzas que pasan por A:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$T \times L\cos 37° - P \times \frac{L}{2}\,\text{sen}\,74° = 0$$

$$T\,L\cos 37° = P\,L\,\text{sen}\,37°\cos 37°$$

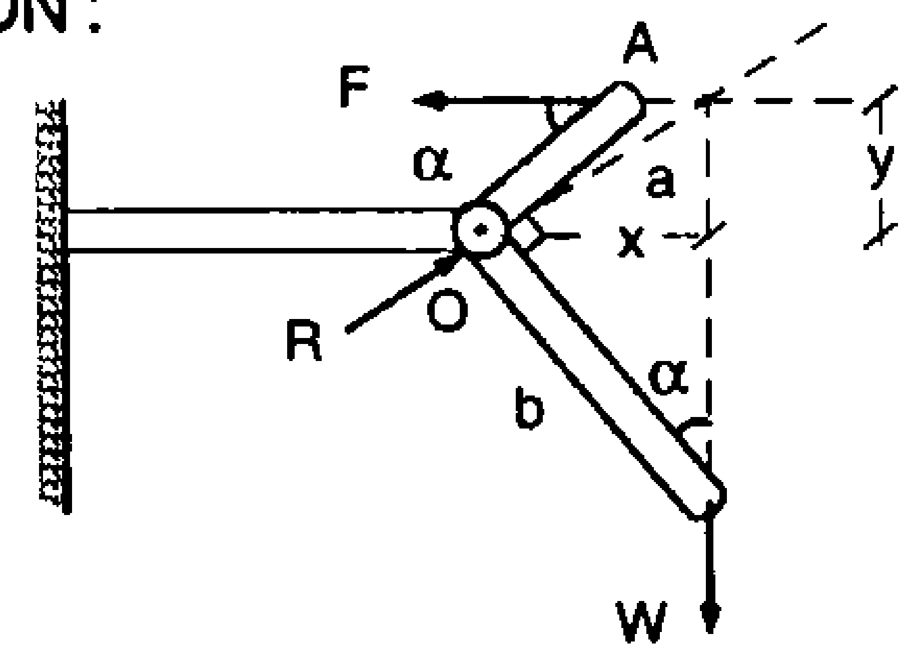
$$T \times \frac{4}{5} = P \times \frac{3}{5} \times \frac{4}{5}$$

$$T = 15\ \text{N} \times \frac{3}{5}$$

Rpta.: $T = 9\ \text{N}$

PROBLEMA 16. Si el material de la figura no pesa, ¿qué fuerza hay que aplicar en "A" para que no se produzca rotación alrededor de "O"? Las longitudes "a" y "b" son conocidas, lo mismo que el peso "W".


RESOLUCIÓN :



$$\Sigma M_O = 0$$

$$F \cdot y - W \cdot x = 0$$

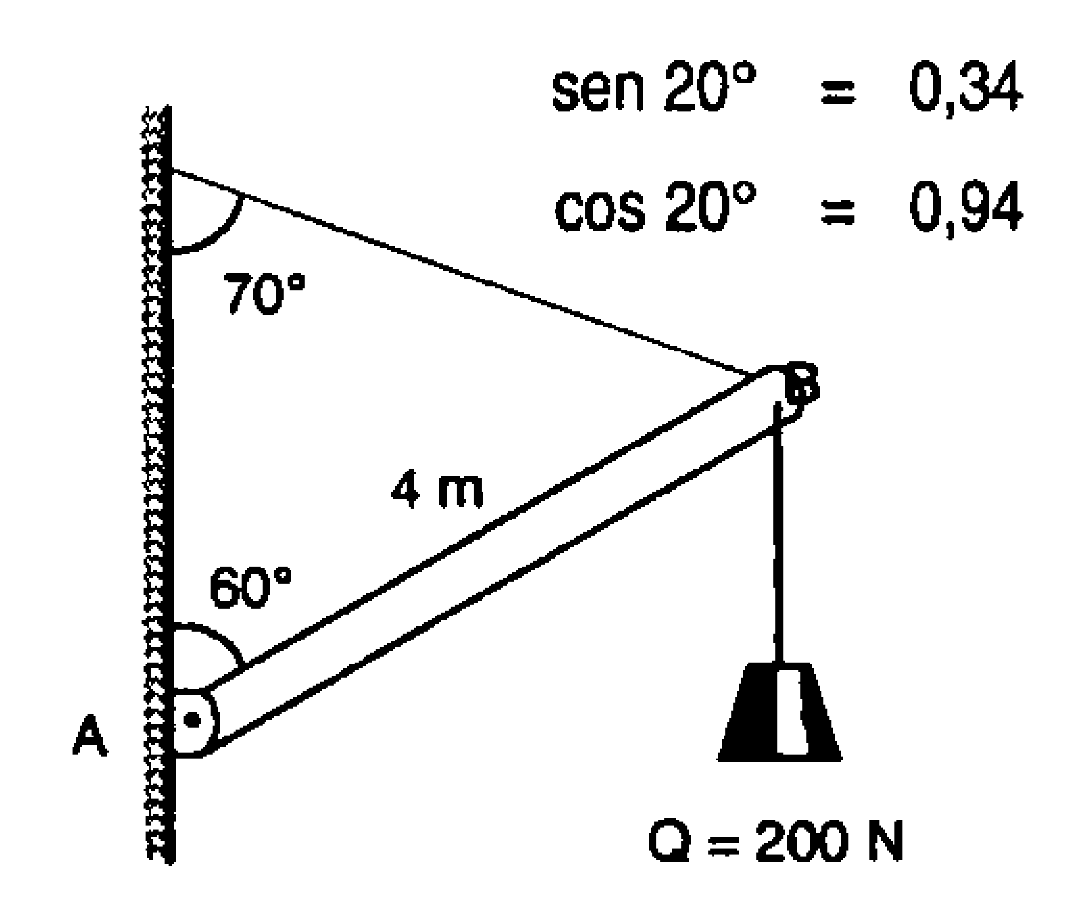
pero: $y = a\,\text{sen}\,\alpha$

$x = b\,\text{sen}\,\alpha$

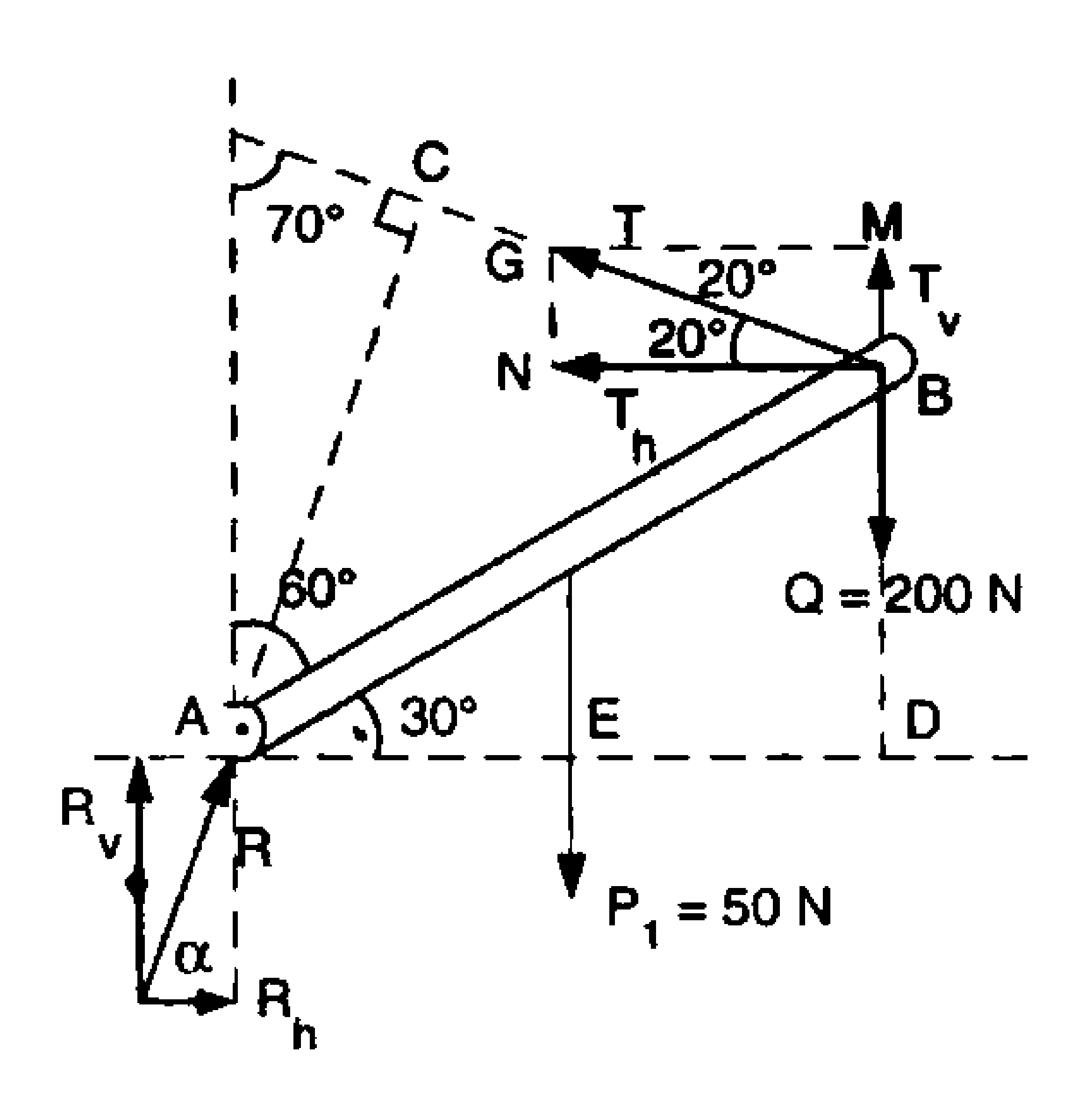
$$\therefore \quad F\,a\,\text{sen}\,\alpha = W\,b\,\text{sen}\,\alpha$$

de donde: $F = \dfrac{W\,b}{a}$

PROBLEMA 17. Una barra uniforme AB de 4 m de longitud y 50 N de peso está articulada en su parte inferior A, y su extremo B unido a la pared por medio de una cuerda. Del extremo B pende un peso de 200 N. La barra y la cuerda forman con la pared ángulos de 60° y 70° respectivamente. Calcular la tensión de la cuerda, la reacción R y su dirección aplicada en A.



RESOLUCIÓN :



En el triángulo rectángulo ABC:

$$AC = AB \text{ sen } 50°$$
$$AC = 4 \text{ m} \times 0{,}766$$
$$AC = 3{,}06 \text{ m}$$

Equilibrio de rotación: $\Sigma M_A = 0$

$$T \times AC - P_1 \times AE - Q \times AD = 0$$

Sustituyendo valores:

$$T \times 3{,}06 - 50 \times 2 \times \cos 30° -$$
$$- 200 \times 4 \times \cos 30° = 0$$

Rpta.: $T = 254{,}7 \text{ N}$ (I)

$$\Sigma F = 0$$

Equilibrio de traslación:

$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad R_h - T_h = 0$$
$$\therefore \quad R_h = T_h \quad (1)$$

Cálculo de T_h en el triángulo BNG:

$$T_h = T \cos 20° = 254{,}7 \text{ N} \times 0{,}94$$
$$T_h = 239{,}42 \text{ N}$$

y por (1) también: $R_h = 239{,}42 \text{ N}$

$$\Sigma F_y = 0:$$
$$R_v + T_v - 50 - 200 = 0$$
$$R_v = 250 - T_v \quad (2)$$

Cálculo de T_v en el triángulo rectángulo BMG:

$$T_v = T \text{ sen } 20°$$
$$T_v = 254{,}7 \text{ N} \times 0{,}34 = 86{,}6 \text{ N}$$

Sustituyendo en (2):

$$R_v = 250 \text{ N} - 86{,}6 \text{ N}$$
$$R_v = 163{,}47 \text{ N}$$
$$R = \sqrt{R_h^2 + R_v^2}$$

Sustituyendo valores:

$$R = \sqrt{(239{,}42)^2 + (163{,}4)^2}$$

Rpta.: $R = 290 \text{ N}$ (II)

Dirección de la reacción, en el triángulo ALH:

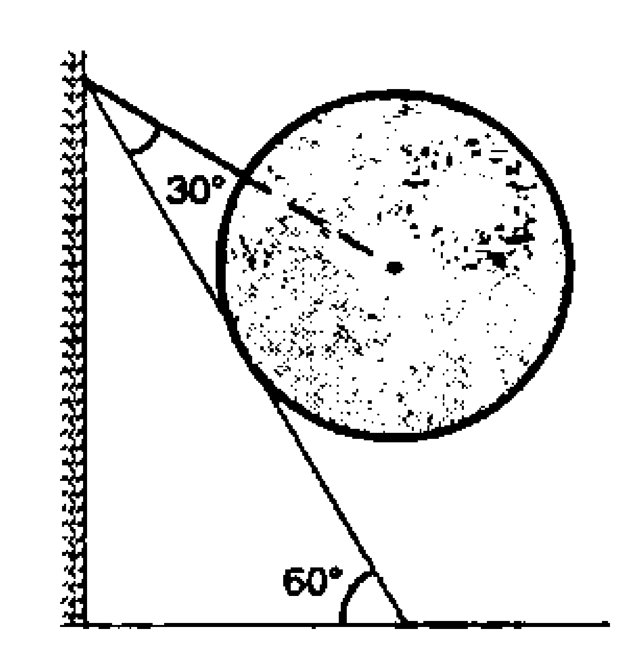
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{R_v}{R_h} = \frac{163}{239} = 0{,}682\,5$$

$$\alpha = \text{arc tg } 0{,}682\,5$$

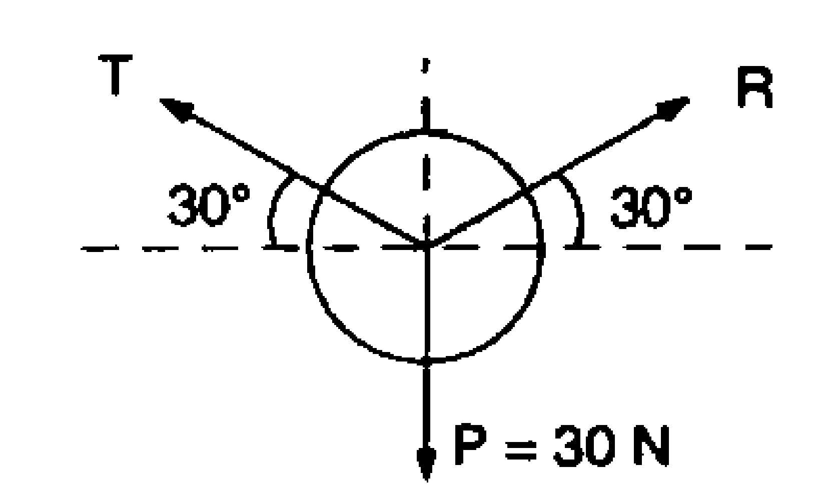
Rpta.: $\alpha = 34°18'46{,}3''$ (III)

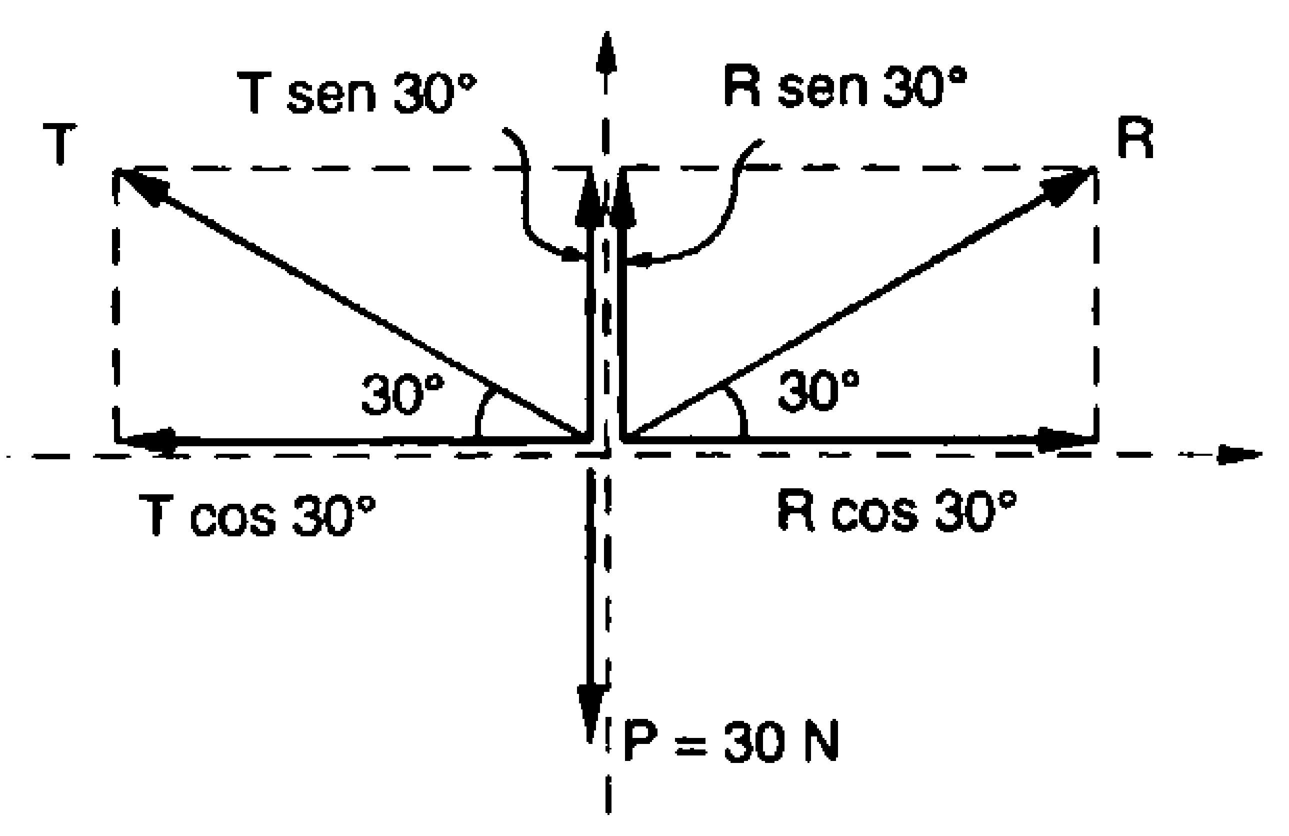
PROBLEMA 18. La esfera de la figura pesa 30 N y está en equilibrio. Calcular:

a) La tensión de la cuerda.
b) La reacción del apoyo.



RESOLUCIÓN :





Descomposición de las fuerzas en sus componentes rectangulares:

a) $\Sigma F_y = 0$

$$R \cos 30° - T \cos 30° = 0$$
$$R \cos 30° = T \cos 30°$$

Luego: $R = T$ (1)

http://librosysolucionarios.net

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T \text{ sen } 30° + R \text{ sen } 30° - P = 0$$

Pero como: $T = R$, se tiene:

$$2T \text{ sen } 30° - P = 0$$

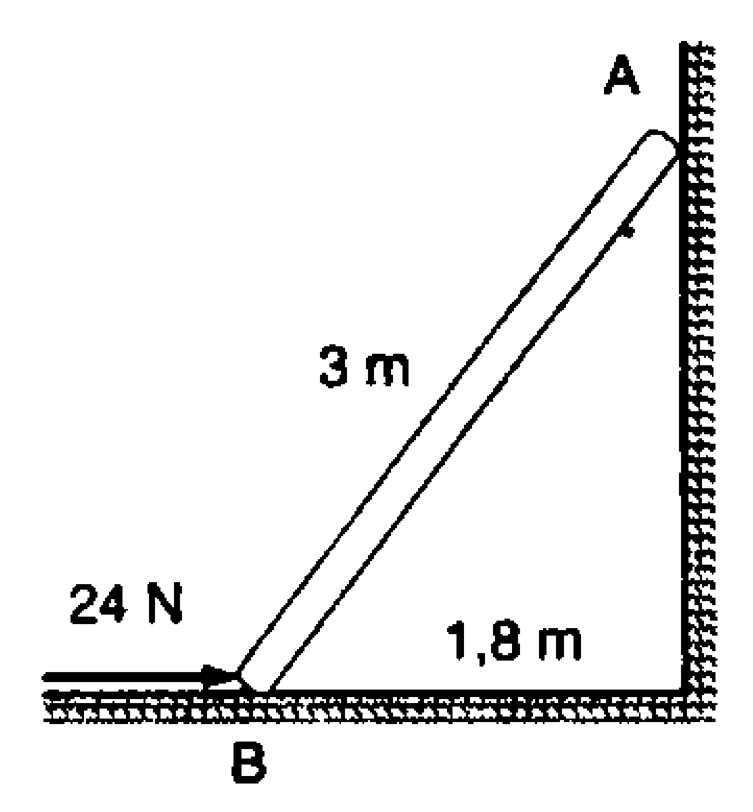
$$T = \frac{P}{2 \text{ sen } 30°} = \frac{30 \text{ N}}{2 \times \frac{1}{2}}$$

Rpta.: $T = 30$ N

b) Como $T = 30$ N, luego también:

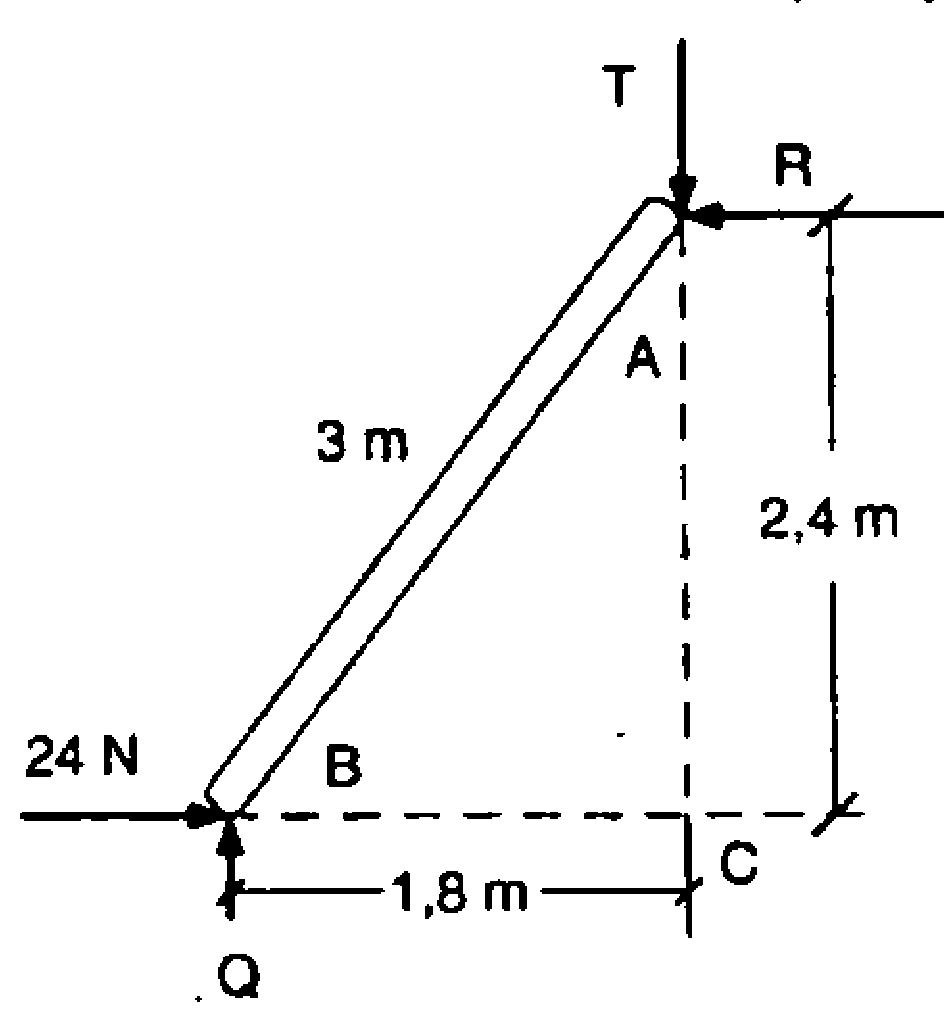
Rpta.: $R = 30$ N

PROBLEMA 19. La barra tiene peso despreciable, y el piso es liso, no hay rozamiento. Calcular la componente vertical de la reacción en A.



RESOLUCIÓN :

Debe observarse en el D.C.L. que hay sólo dos fuerzas horizontales, la que actúa en B y la que actúa en A; asimismo sólo dos fuerzas verticales, la que actúa en B y la que actúa en A; consecuentemente ambas parejas son iguale



Cálculo de R: $\Sigma F_x = 0$

$$24 \text{ N} - R = 0$$

De donde: $R = 24$ N

Cálculo de T: $\Sigma M_B = 0$

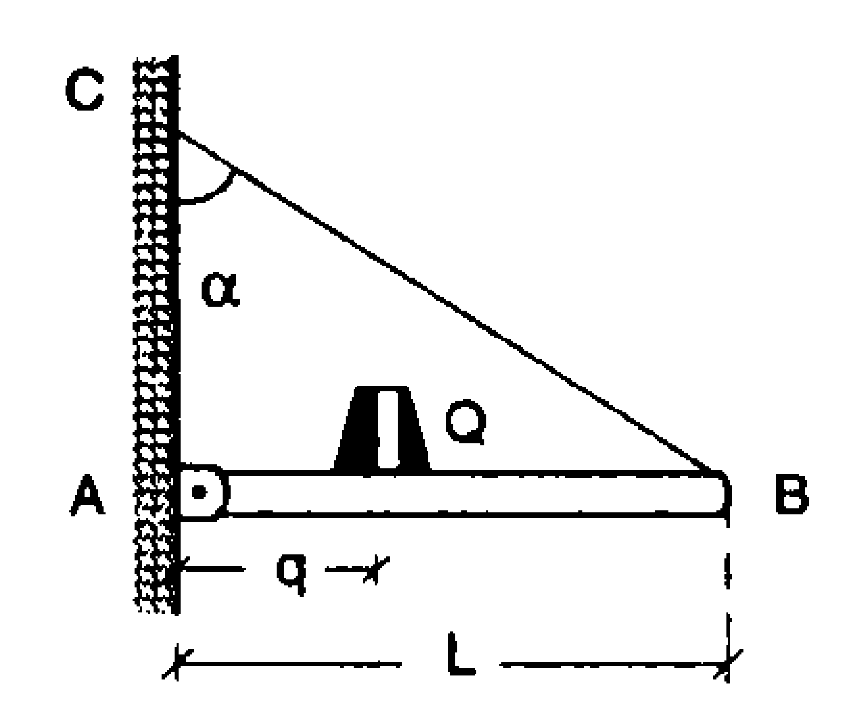
$$T \times 1{,}80 \text{ m} - R \times 2{,}4 \text{ m} = 0$$

$$T \times 1{,}80 \text{ m} - R \times 2{,}4 \text{ m} = 0$$

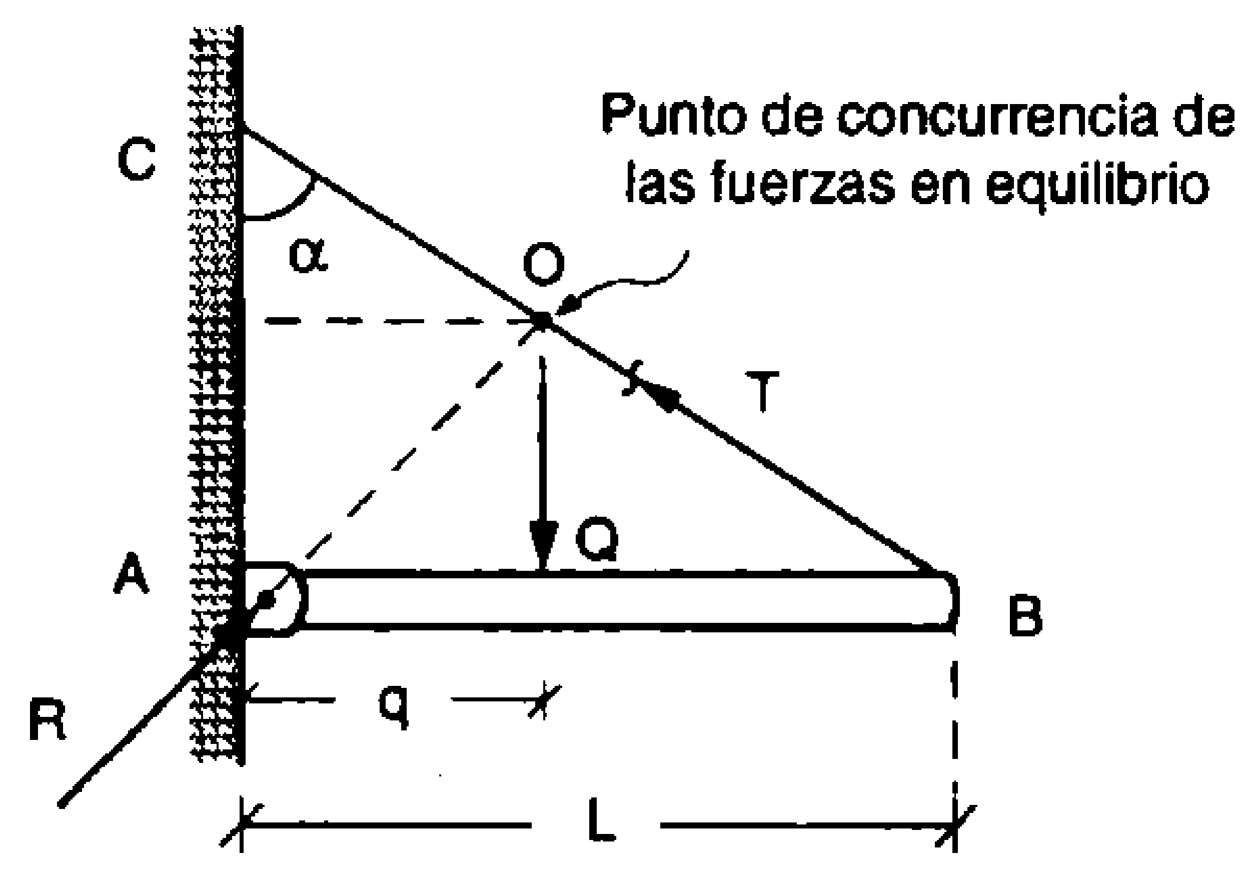
pero: $R = 24$ N , luego:

Rpta.: $T = 32$ N

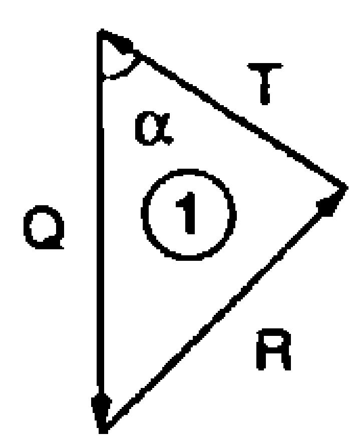
PROBLEMA 20. Una barra AB de longitud "L" y de peso despreciable, articulada en el punto "A" y sostenida en "B" por una cuerda que hace un ángulo "a" con la vertical. Un peso "Q" está sobre la barra a una distancia "q" del extremo "A". Calcular la tensión de la cuerda.



RESOLUCIÓN : D.C.L. de la barra



1er MÉTODO:



Los triángulos rectángulos ACM y el vectorial ① son semejantes, luego:

$$\frac{AC}{Q} = \frac{CO}{T}$$

de donde: $T = Q\,\frac{CO}{AC}$ (1)

pero: $CO = \frac{q}{\text{sen}\,\alpha}$

$AC = L\,\text{ctg}\,\alpha$

En (1): $T = Q\,\frac{\frac{q}{\text{sen}\,\alpha}}{L\,\text{ctg}\,\alpha}$

Rpta.: $T = \frac{Q \cdot q}{L}\sec\alpha$

SEGUNDO MÉTODO:

Tomando momentos con respecto al punto "A":

$$\Sigma M_A = 0$$

es decir: $Q \,.\, q = T \times AO$ (2)

pero: $AO = AC \,.\, \text{sen}\, a$

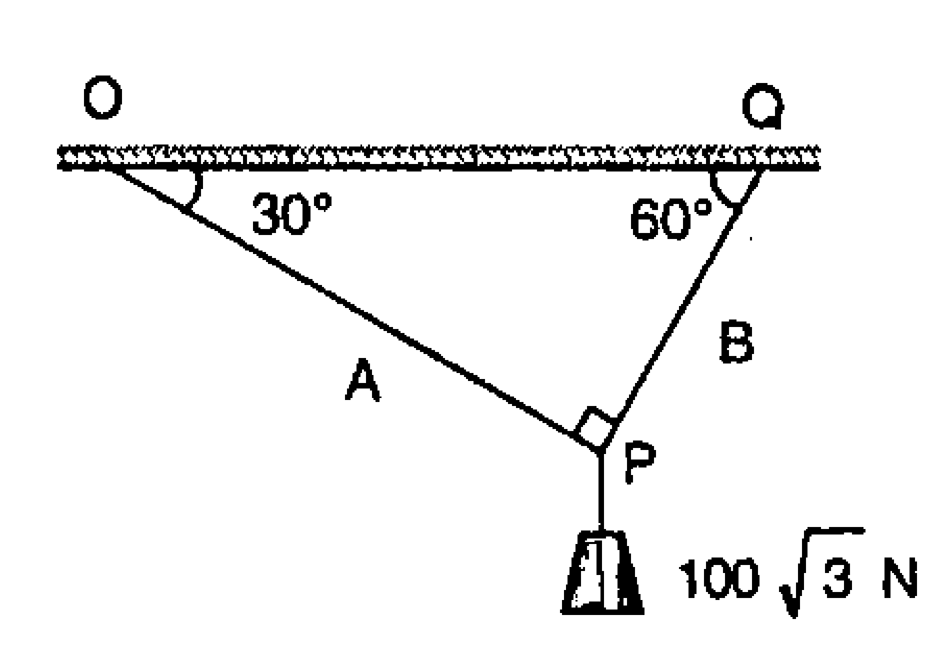
$AO = L\,\text{ctg}\,\alpha \,.\, \text{sen}\,\alpha$

de donde: $AO = L\cos a$

sustituyendo en (2): $Q \,.\, q = T\,L\cos\alpha$

Rpta.: $T = \frac{Q\,.\,q}{L}\sec\alpha$

PROBLEMA 21. Hallar las tensionesen las cuerdas A y B. El bloque pesa $100\sqrt{3}$ N y el sistema está en equilibrio

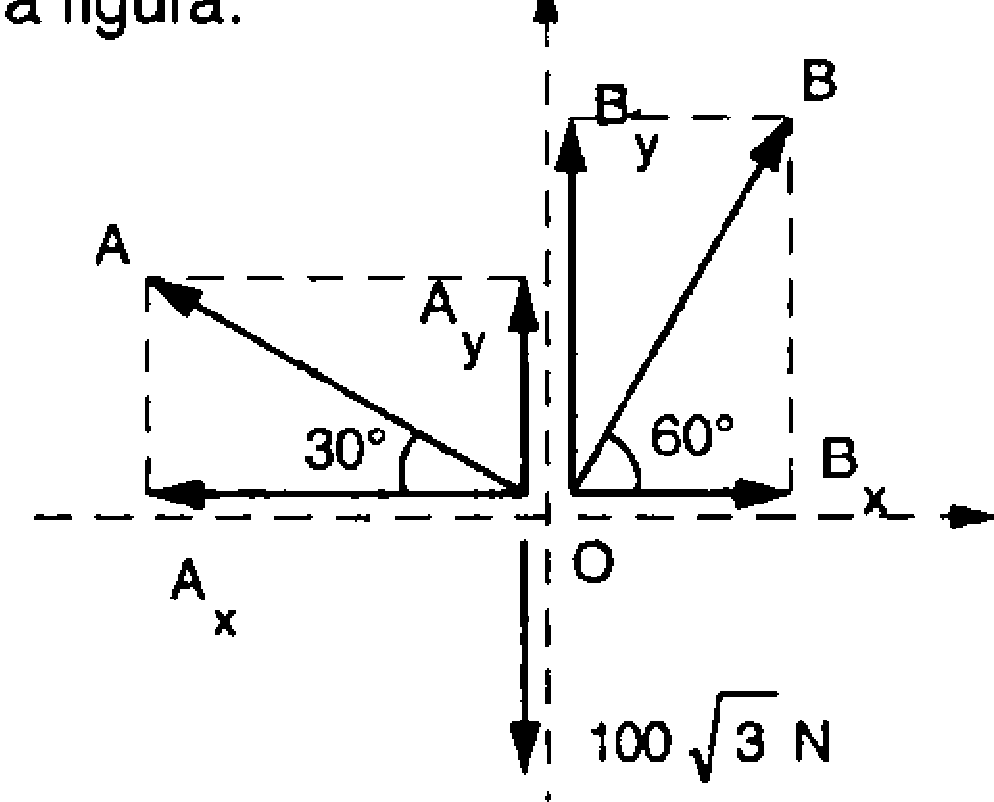


RESOLUCIÓN: Se descompone A y B en sus componentes rectangulares sobre los ejes "x" e "y", y luego aplicando la primera condición de equilibrio: El punto P se hace coincidir con el O del sistema rectangular.

a) $\Sigma F_x = 0: \quad A_x = B_x$

b) $\Sigma F_y = 0: \quad A_y + B_y = 100\sqrt{3}$

De la figura:



$A_x = A\cos 30° \;;\; A_y = A\,\text{sen}\,30°$

$B_x = B\cos 60° \;;\; B_y = B\,\text{sen}\,60°$

Como: $A_x = B_x$, sustituyendo datos:

$A\cos 30° = B\cos 60°$

$$A \times \frac{\sqrt{3}}{2} = B \times \frac{1}{2}$$

de donde: $A\sqrt{3} = B$ (1)

Como: $A_y - B_y = 100\sqrt{3}$

$$\Rightarrow \frac{A}{2} + B\,\frac{\sqrt{3}}{2} = 100\sqrt{3} \quad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{A}{2} + A\sqrt{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 100\sqrt{3}$$

de donde:

$\therefore \quad A = 50\sqrt{3}$ N (I)

Reemplazando en (1):

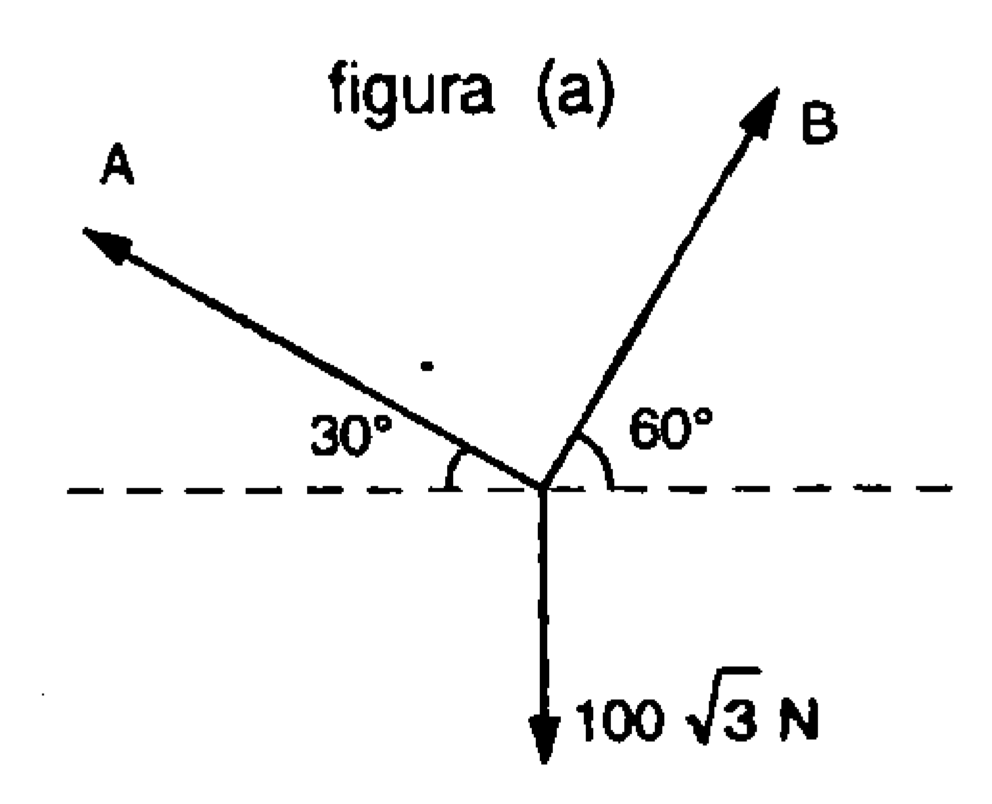
$B = 50\sqrt{3}\cdot\sqrt{3} = 150$ N (II)

$B = 150$ N

http://librosysolucionarios.net

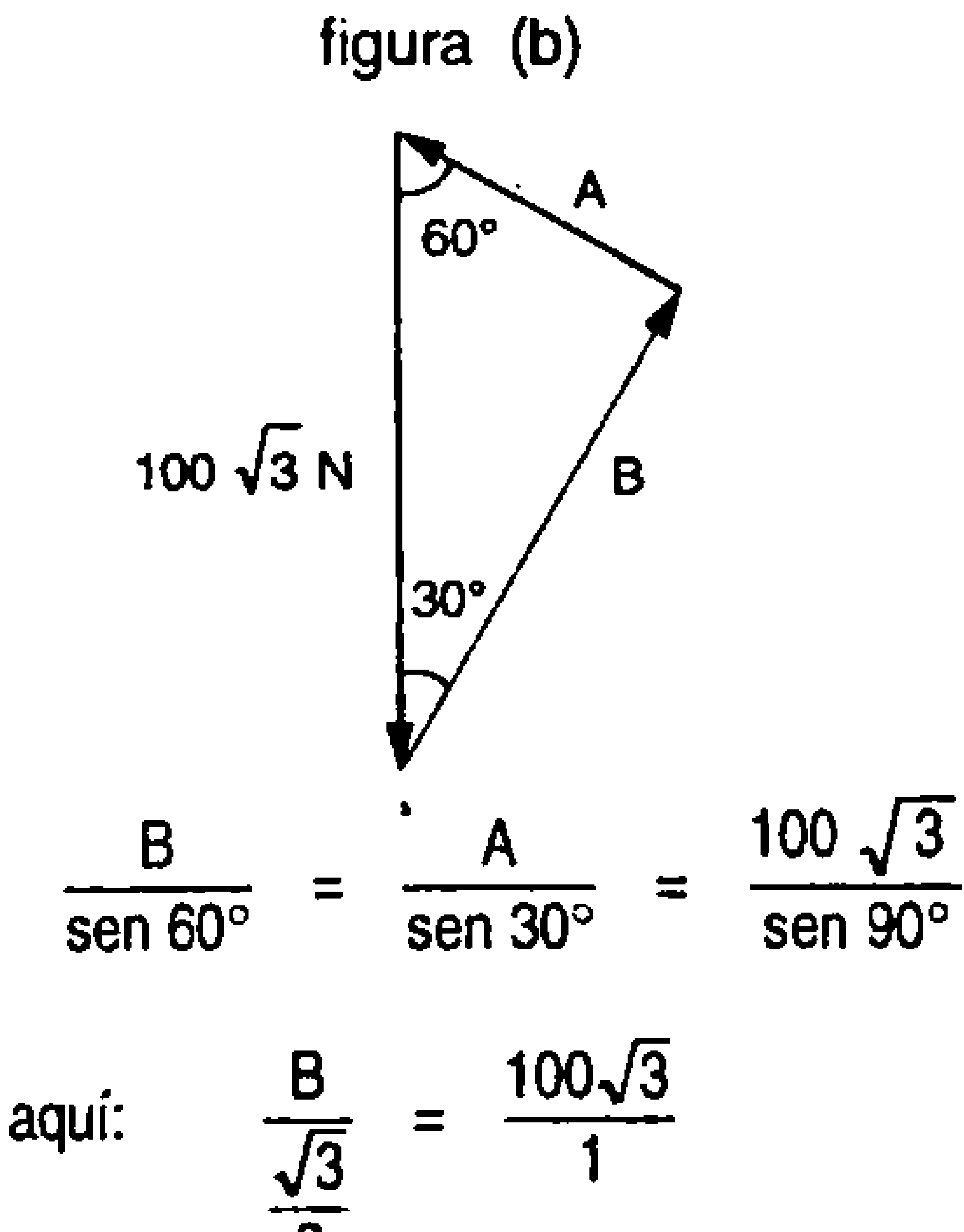
OTRA SOLUCIÓN:

Aplicando el Teorema de Lamy, ya sea para la figura (a) o la figura (b).



Para pasar de la figura (a) a la figura (b).

Aplicando el teorema de Lamy a la figura (b):



$$\frac{B}{\text{sen }60^\circ} = \frac{A}{\text{sen }30^\circ} = \frac{100\sqrt{3}}{\text{sen }90^\circ}$$

de aquí: $\dfrac{B}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \dfrac{100\sqrt{3}}{1}$

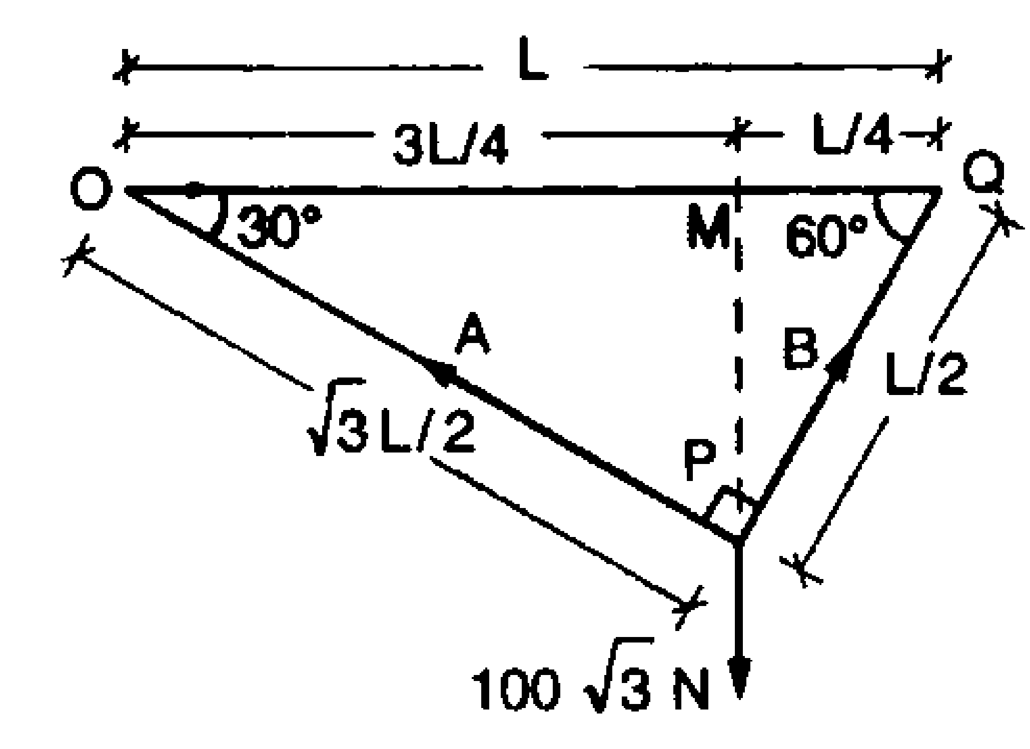
también: $\dfrac{A}{\frac{1}{2}} = \dfrac{100\sqrt{3}}{1}$

$$A = (100\sqrt{3})\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$\therefore \quad A = 50\sqrt{3}\text{ N}$$

OTRA SOLUCIÓN:

Aplicando la segunda condición de equilibrio: $(\Sigma M = 0)$, llamando "L" al lado OQ:



$$\Sigma M_O = 0:$$

$$100\sqrt{3}\times OM = B\times OP$$

$$100\sqrt{3}\times\frac{3}{4}L = B\times\frac{L}{2}\sqrt{3}$$

Rpta.: $B = \dfrac{600}{4} = 150\text{ N}$

$$\Sigma M_Q = 0:$$

$$100\sqrt{3}\times MQ = A\times PQ$$

$$100\sqrt{3}\times\frac{L}{4} = A\times\frac{L}{2}$$

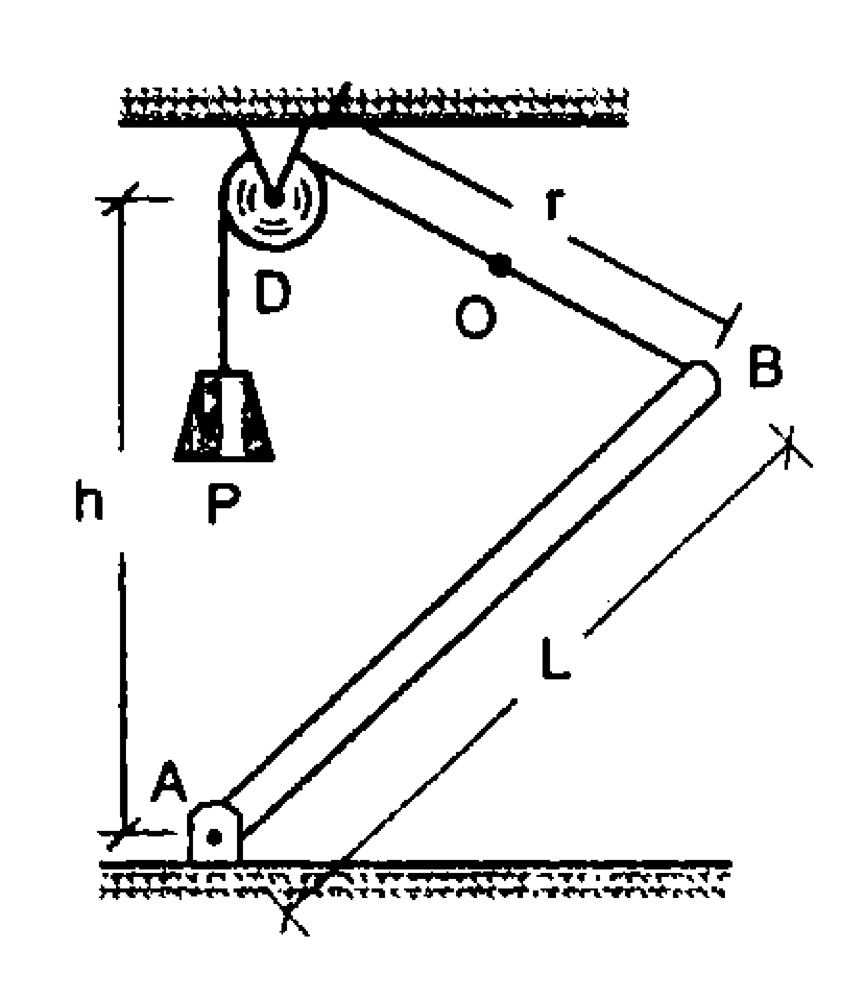
Rpta.: $A = 50\sqrt{3}\text{ N}$

La utilización de "L" no afecta al problema ya que se elimina.

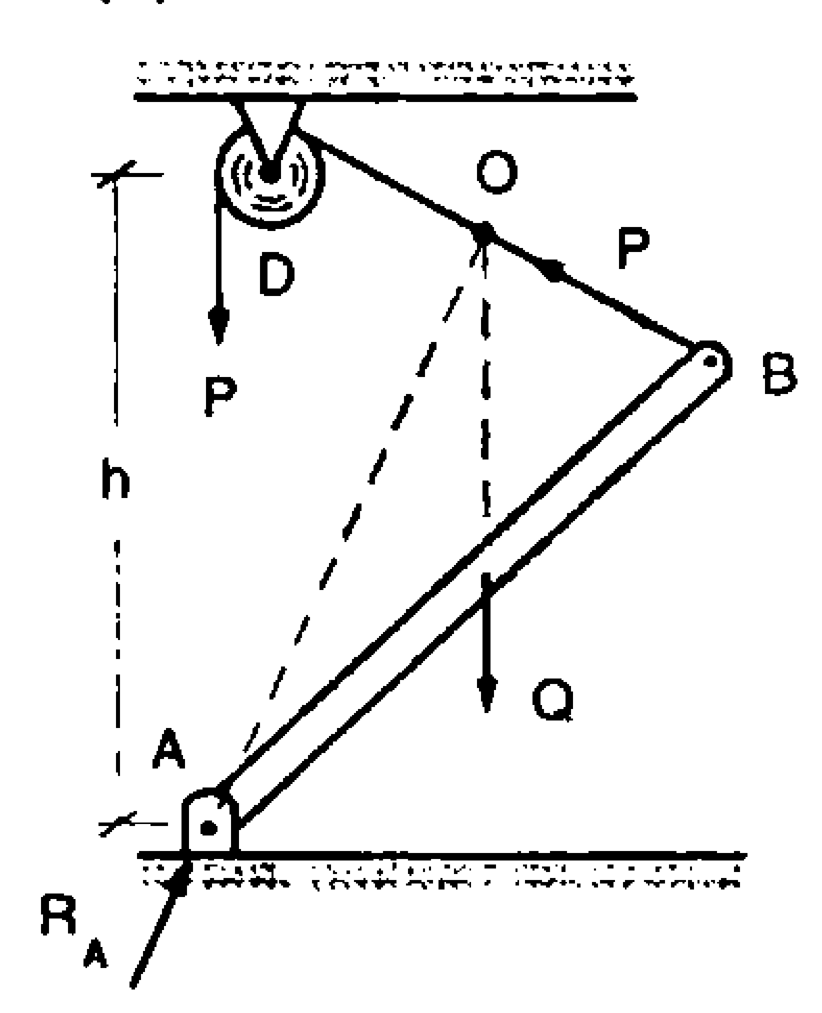
PROBLEMA 22. La barra AB de peso "Q" y longitud "L", está articulada en A y sostenida en B, como lo indica la figura. Suponiendo que la distancia "h" comprendida entre la articulación A y la polea "D" es mayor que la longitud "L" de la barra. Hallar la ecuación de equilibrio del sistema determinado por la longitud "r". Se desprecia las dimensiones de la polea.

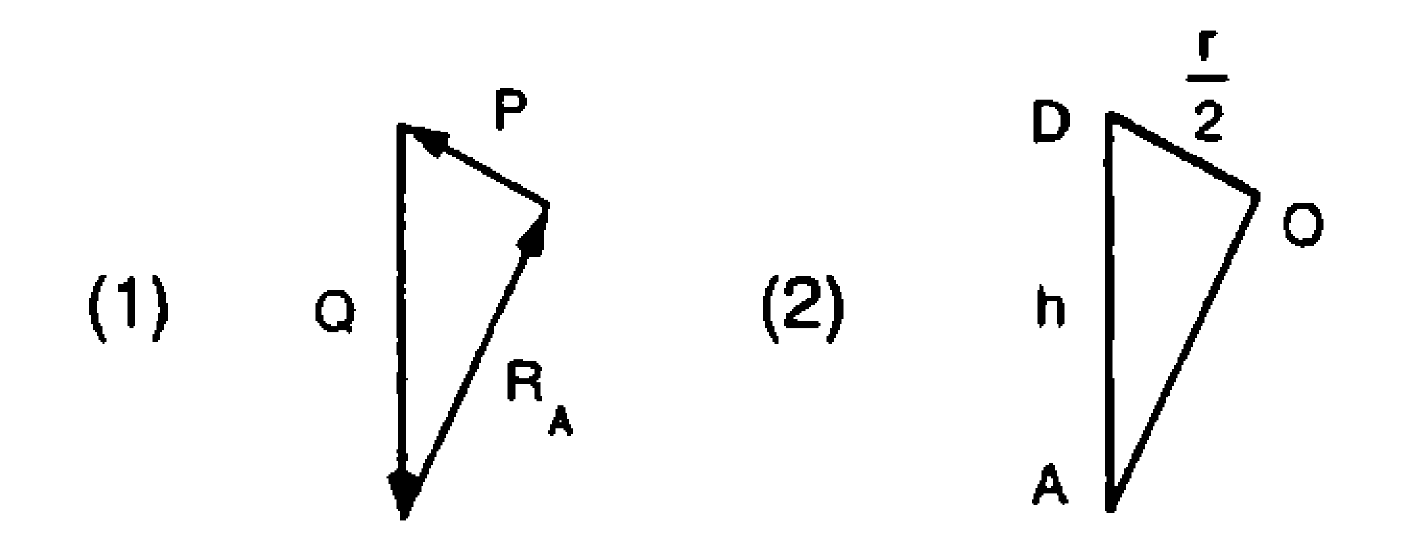
RESOLUCIÓN:

Cuando un sistema está en equilibrio, las fuerzas concurren a un punto. En el problema concurren al punto "O" que es el punto medio de BD, luego: DO = r / 2



Trazando el triángulo de fuerza (1) y aplicando semejanza con el triángulo geométrico (2):



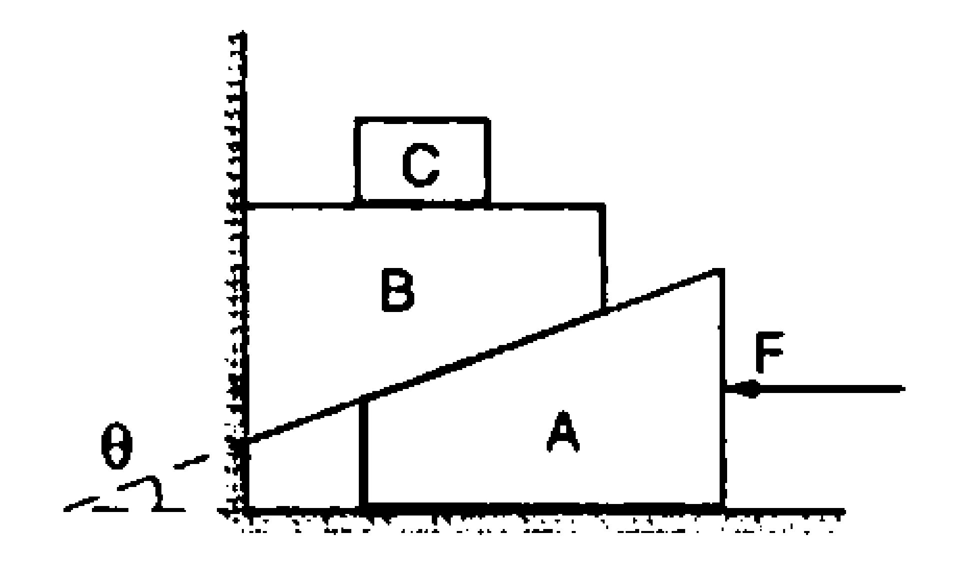


$$\frac{Q}{h} = \frac{P}{r/2} \quad \text{de donde:}$$

Rpta.: $$r = \frac{2\,h\,P}{Q}$$

PROBLEMA 23. En el sistema mostrado, si no hay rozamiento, y considerado en equilibrio, calcular "θ":

($F = 0{,}9$ lb , $B = 0{,}46\sqrt{3}$ lb, y $C = 0{,}44\sqrt{3}$ lb).



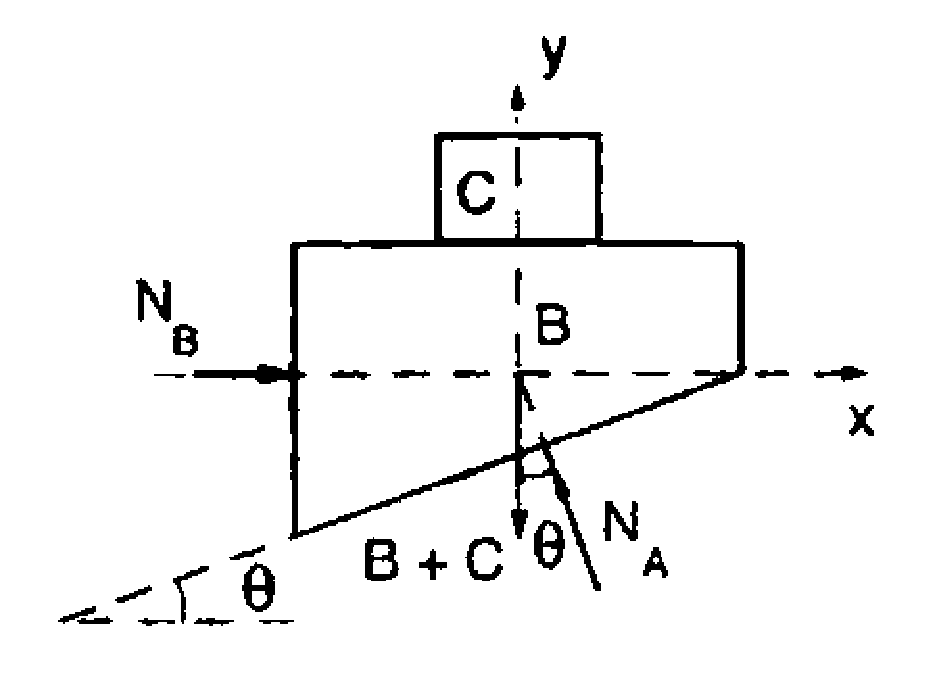
RESOLUCIÓN :

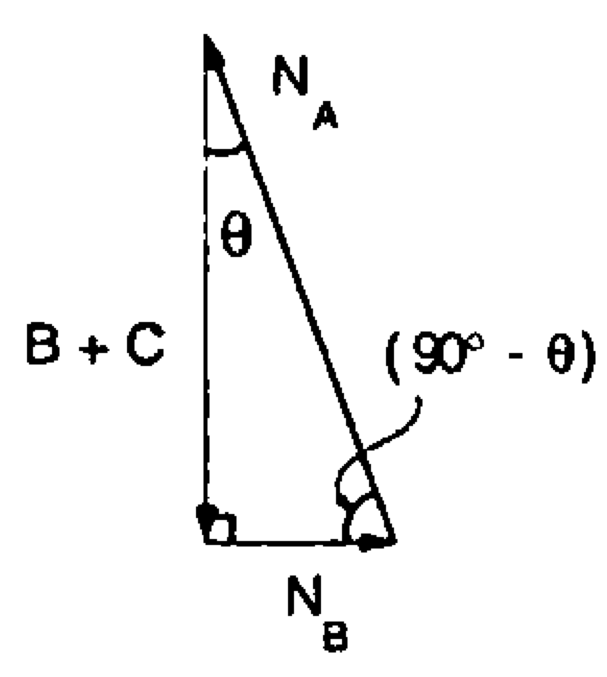
(I) Para el sistema total:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$\therefore \quad N_B = F \qquad (I)$$

(II) Para el sistema "B" y "C" :





Aplicando el Teorema de Lamy:

$$\frac{N_B}{\text{sen}\,\theta} = \frac{C + B}{\text{sen}\,(90° - \theta)} = \frac{N_A}{\text{sen}\,90°}$$

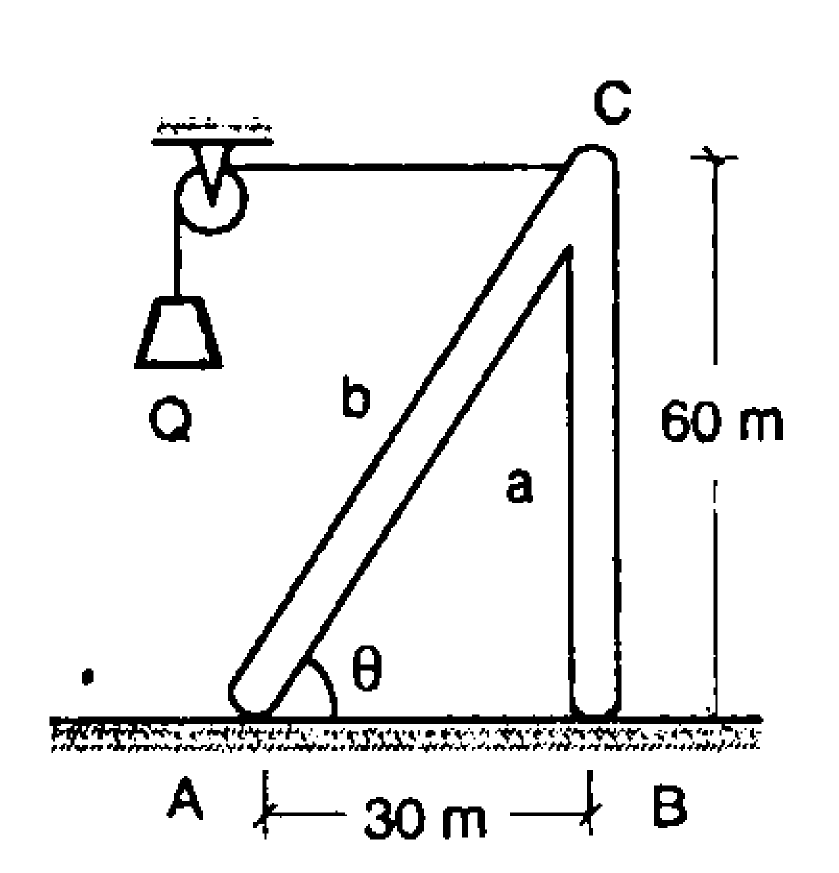
además: $\text{sen}\,(90° - \theta) = \cos\theta$

y: $C + B = 0{,}9\sqrt{3}\,\text{lb} \quad \therefore$

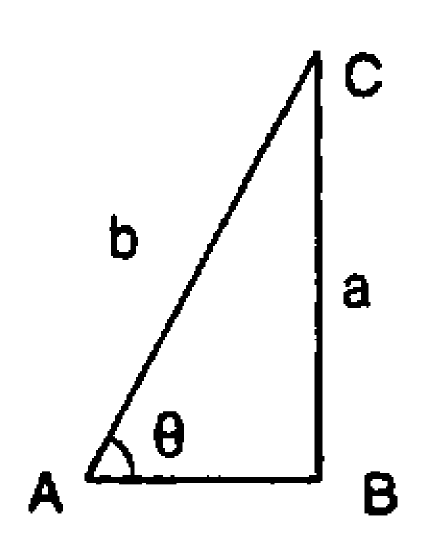
$$\frac{0{,}9\,\text{lb}}{\text{sen}\,\theta} = \frac{0{,}9\sqrt{3}\,\text{lb}}{\cos\theta} \Rightarrow \text{tg}\,\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

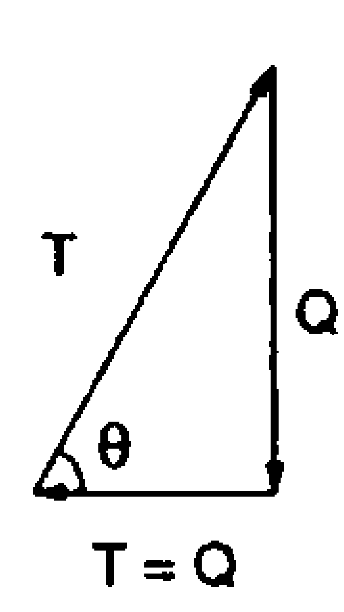
Rpta.: $\theta = 30°$

PROBLEMA 24. Calcular la relación "b/a" de los esfuerzos en las barras sin peso (ingrávidas), que se muestran en la figura . Q = 2 T



RESOLUCIÓN : Representamos un triángulo de fuerzas y otro de distancias





El triángulo ABC, de la figura y el triángulo vectorial son semejantes, luego:

$$\frac{b}{a} = \frac{AC}{BC} \qquad (I)$$

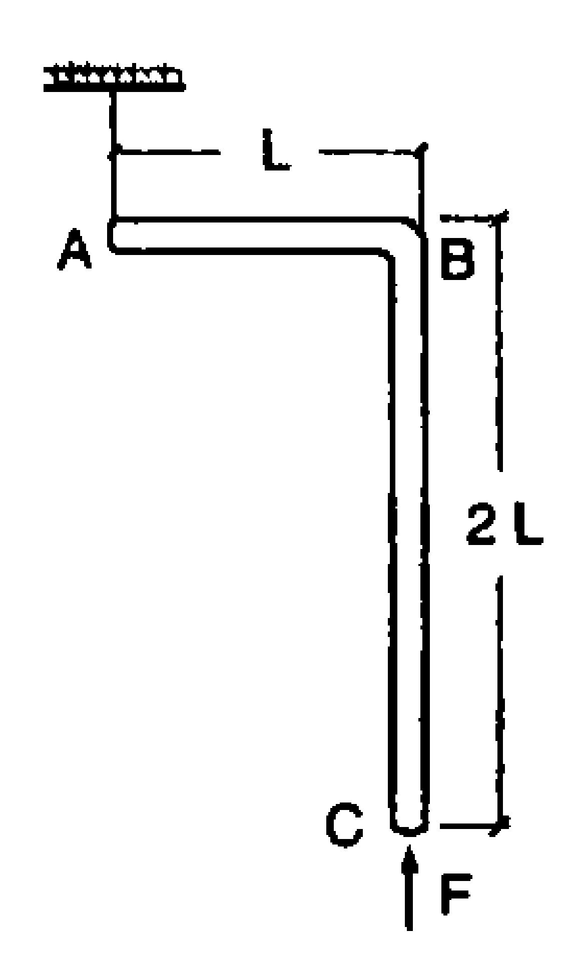
Calculando: $AC = 30\sqrt{5}$ m.

Sustituyendo valores en (I):

$$\frac{b}{a} = \frac{30\sqrt{5}\ m}{60\ m}$$

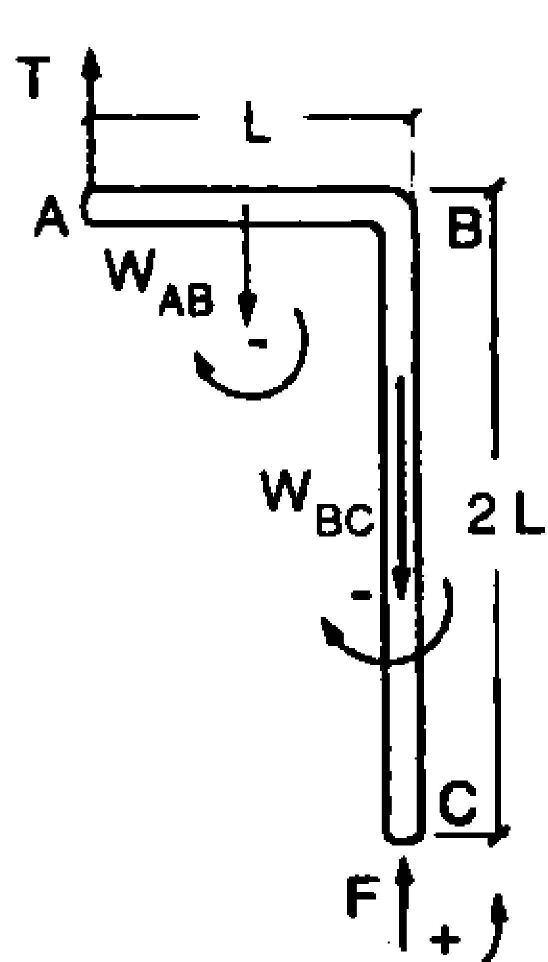
Rpta.: $\frac{b}{a} = \frac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA 25. Se tiene una barra ABC homogénea en forma de "L" de peso 3 W, tal como se muestra en la figura, suspendida mediante una cuerda del extremo A. Calcular el valor de la fuerza vertical F, necesaria para mantener e segmento BC en posición vertical. También calcular el valor de la tensión en la cuerda.



RESOLUCIÓN :

D.C.L. de la barra ABC:



Por la 1ra condición de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T + F = W_{AB} + W_{BC} = 3W$$

$$T = 3W - F \qquad (1)$$

De la 2da condición de equilibrio:

$$\Sigma M_A = 0$$

$$-W_{AB} \cdot \frac{L}{2} - W_{BC} \cdot L + F \cdot L = 0$$

$$\frac{W_{AB}}{2} + W_{BC} = F \qquad (2)$$

Por tratarse de una barra homogénea se cumple que las longitudes son proporcionales a los pesos; luego:

$$W_{AB} = W \quad y \quad W_{BC} = 2W$$

Sustituyendo en (2) : $F = \frac{5}{2}W$

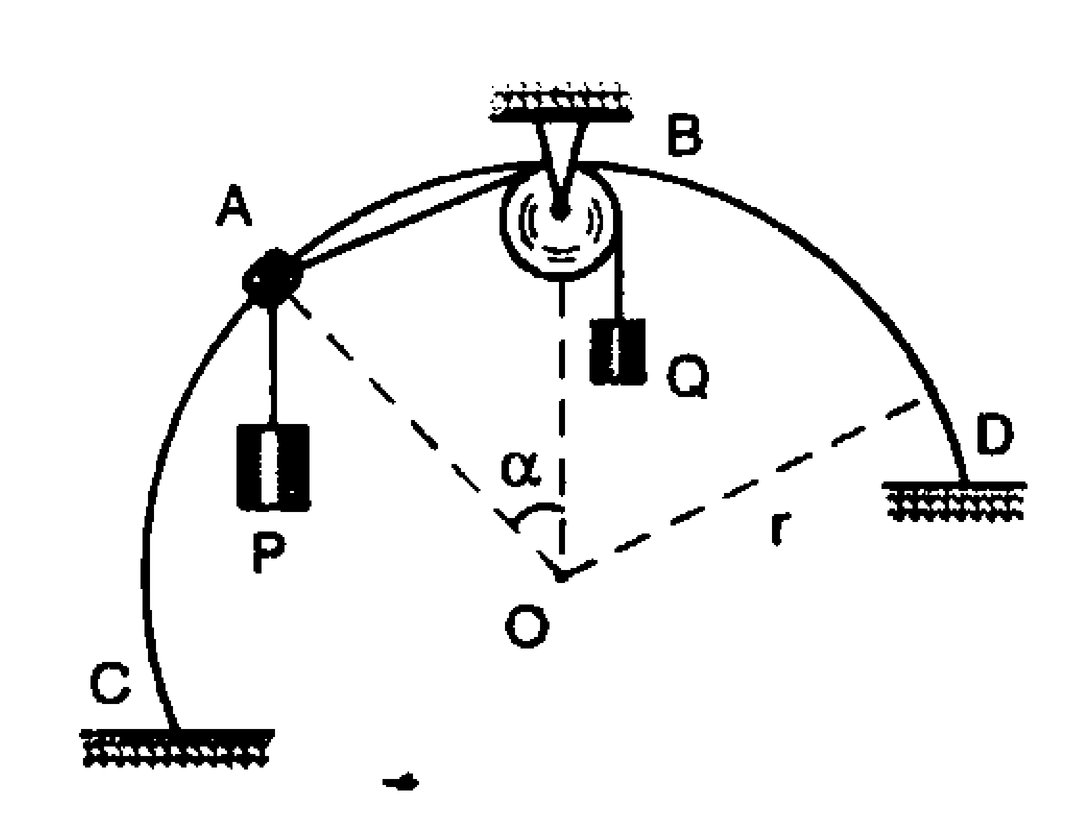
Sustituyendo en (1) : $T = \frac{W}{2}$

NOTA :

Cabe señalar que en general, un cuerpo en estado de equilibrio, siempre cumple o verifica las dos condiciones matemáticas del equilibrio:

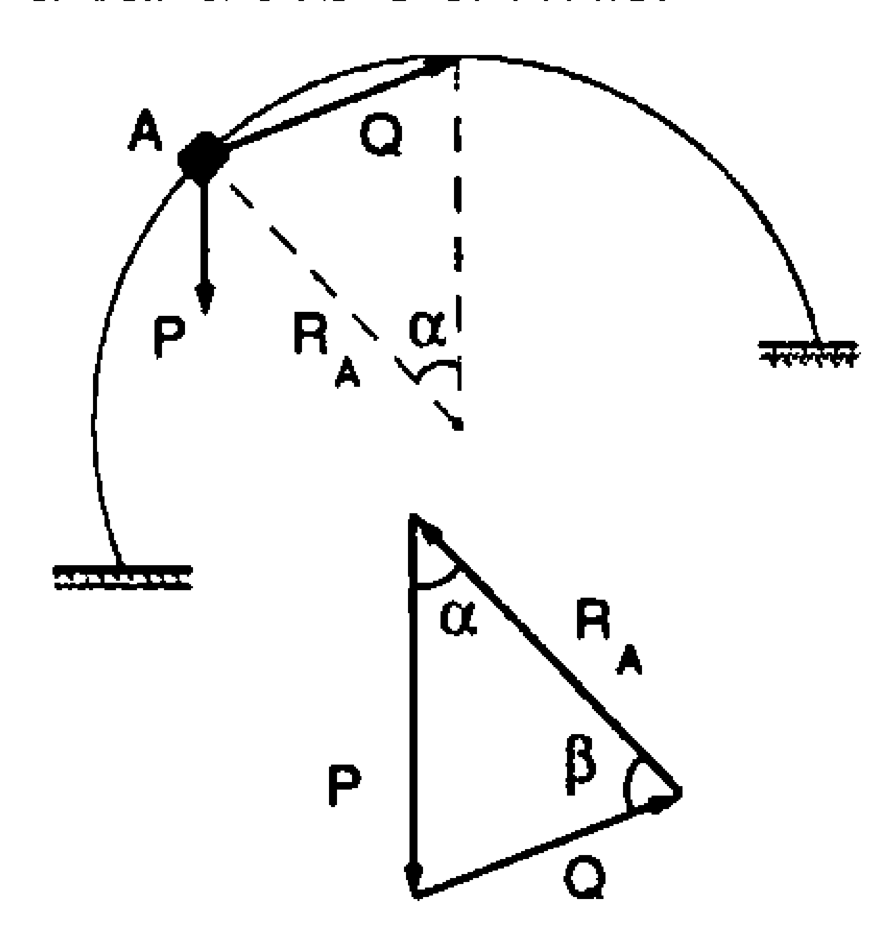
$$\Sigma F = 0 \quad ; \quad \Sigma M = 0$$

PROBLEMA 26. Un anillo "A" puede deslizar sin rozamiento a lo largo de una barra curva CD circular, de radio "r". Determinar la posición de equilibrio definida por el ángulo "a" si las cargas P y Q actúan en la forma indicada en la figura. No se tomarán en cuenta los rozamientos



RESOLUCIÓN :

Trazando el diagrama de cuerpo libre de A, con él se hará fácilmente el triángulo vectorial de las tres fuerzas (en este caso resulta un triángulo isósceles). R_A es la reacción de la barra sobre el anillo.



Basados en la Ley de senos o Teorema de Lamy:

$$\frac{Q}{\operatorname{sen}\alpha} = \frac{P}{\operatorname{sen}\beta} \qquad (1)$$

Pero, de acuerdo a la construcción:

$$\alpha + 2\beta = 180° \Rightarrow \alpha = 180° - 2\beta$$

$$\cos\frac{\alpha}{2} = \cos(90° - \beta)$$

de donde: $\cos\frac{\alpha}{2} = \operatorname{sen}\beta \qquad (2)$

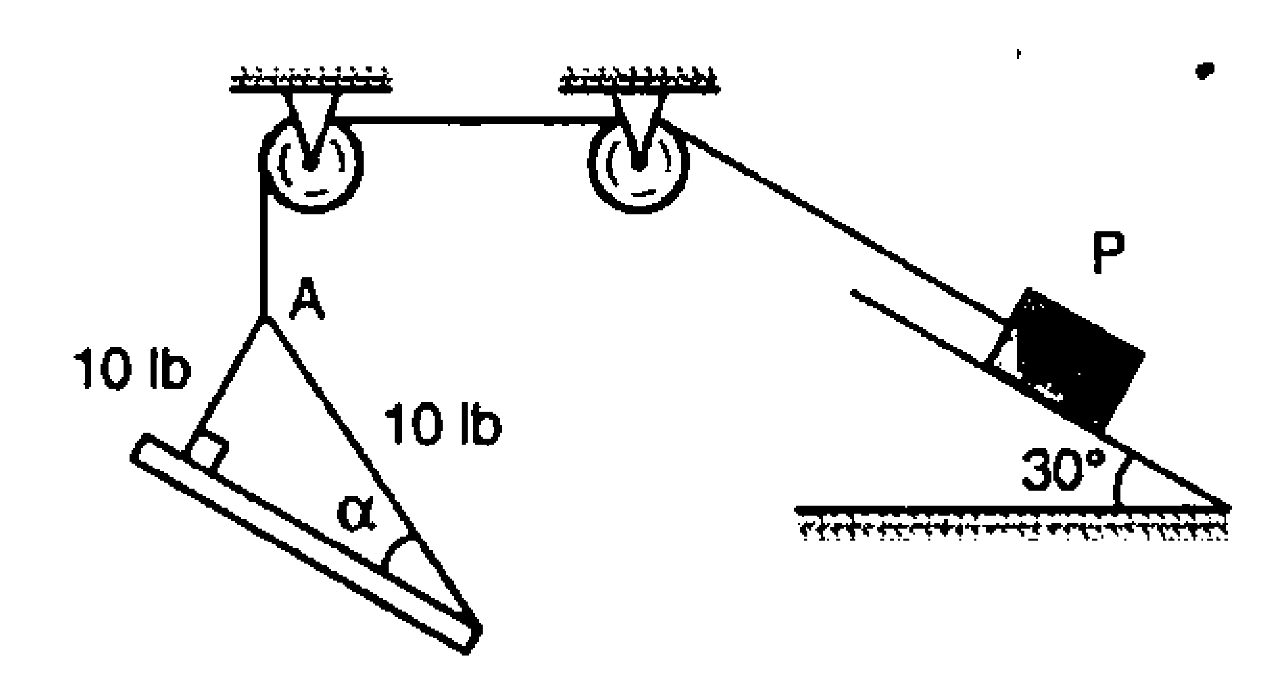
De (1) : $\dfrac{\operatorname{sen}\alpha}{\operatorname{sen}\beta} = \dfrac{Q}{P}$

Desarrollando $\operatorname{sen}\alpha$ y sustituyendo $\operatorname{sen}\beta$ por su valor:

$$\frac{2\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \frac{Q}{P}$$

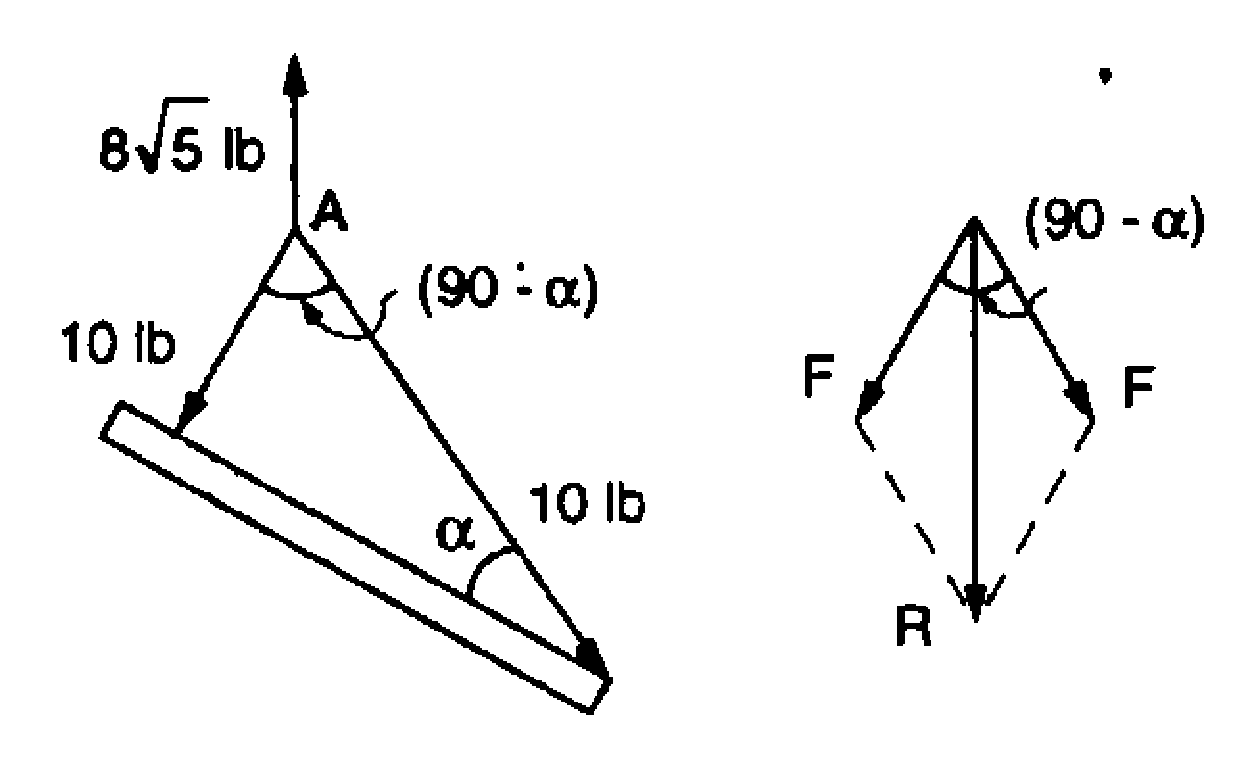
de donde: $\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \dfrac{Q}{2P} \Leftrightarrow Q < 2P$

PROBLEMA 27. Calcular el ángulo "a", si la tensión en los cables que soportan a la barra, que pesa $8\sqrt{5}$ lb, es 10 lb. También calcular el peso del bloque "P" para que haya equilibrio. No hay rozamiento.



RESOLUCIÓN :

Haciendo el diagrama del cuerpo libre del punto "A" y luego el paralelogramo con las fuerzas "P" y la resultante "R".



$$R^2 = F^2 + F^2 + 2FF\cos(90° - \alpha)$$

Sustituyendo datos:

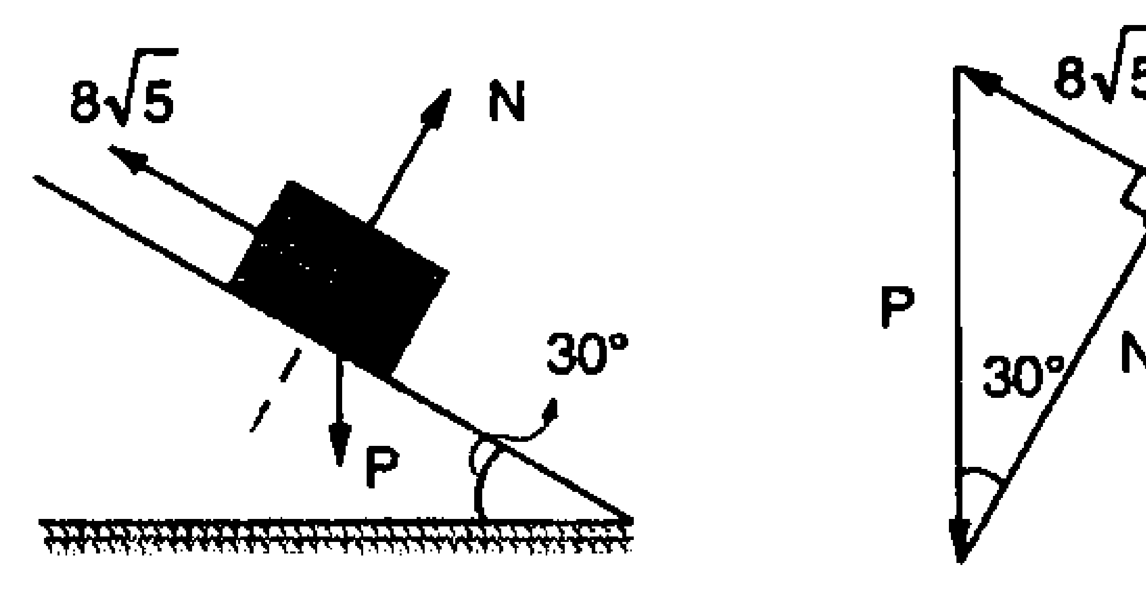
$$(8\sqrt{5})^2 = 10^2 + 10^2 + 2\times10\times10\operatorname{sen}\alpha$$

$$320 = 200 + 200\operatorname{sen}\alpha$$

De donde: $\dfrac{3}{5} = \operatorname{sen}\alpha$

Rpta.: $\alpha = 37°$

Cálculo del peso "P" del block, que sostiene el sistema en equilibrio:



Por el Teorema de Lamy:

$$\frac{P}{\operatorname{sen}90°} = \frac{8\sqrt{5}}{\operatorname{sen}30°}$$

De donde: $P = 16\sqrt{5}$ lb

http://librosysolucionarios.net

Convirtiendo a newtons:

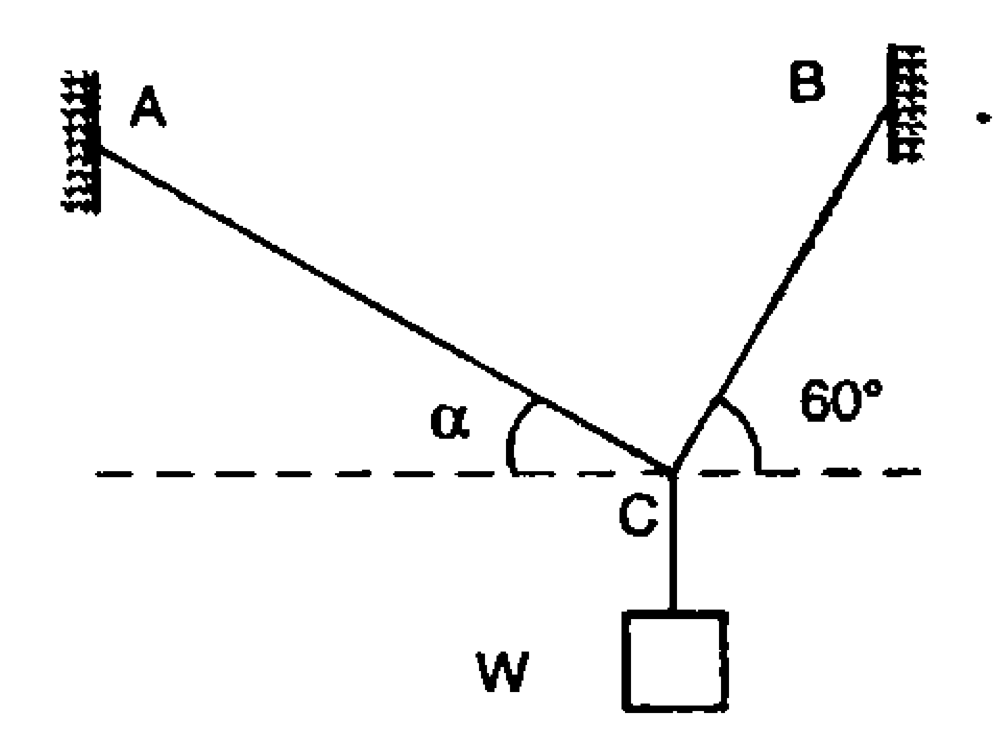
$$P = 16\sqrt{5} \times 4{,}448\text{ N}$$

$$P = 159{,}14\text{ N}$$

PROBLEMA 28. Un peso w está suspendido por los cables AC y BC:

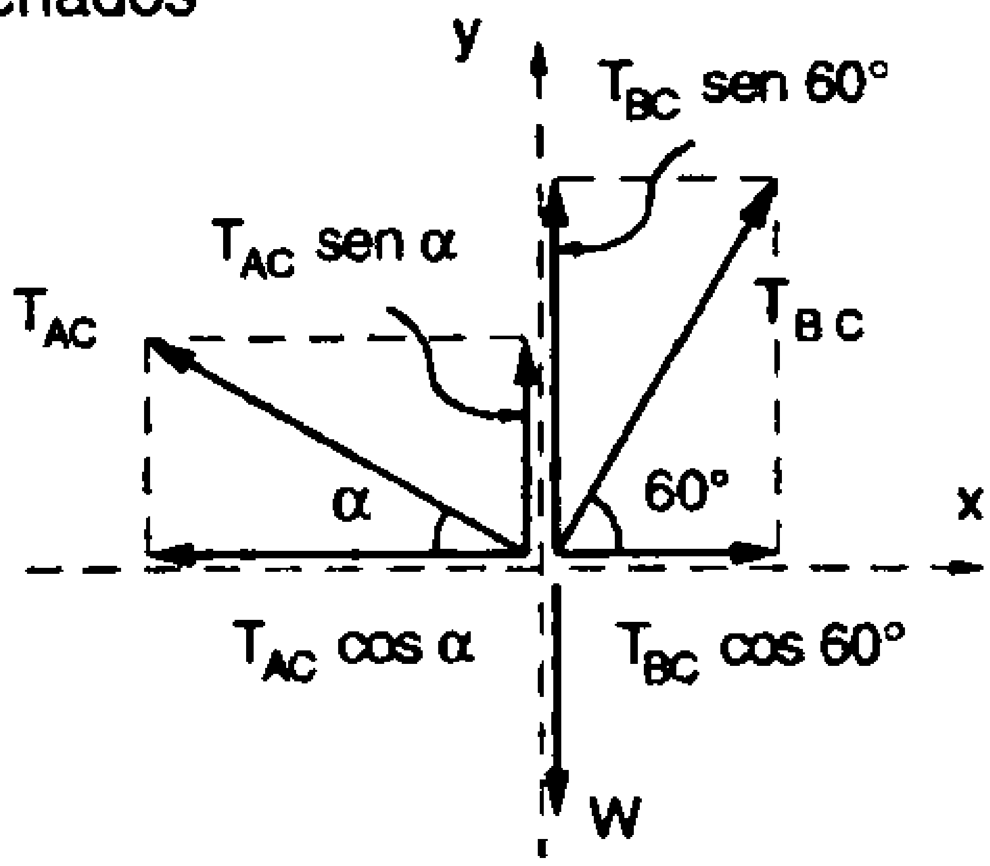
a) ¿Para qué valor de "a" la tensión en el cable AC es mínima?

b) ¿Cuáles son los valores correspondientes a las tensiones AC y BC?



RESOLUCIÓN :

Descomponiendo las fuerzas en sus componentes rectangulares en un sistema de ejes coordenados



$$\Sigma F_x = 0$$

$$-T_{AC}\cos\alpha + T_{BC}\cos 60° = 0$$

de donde: $T_{BC} = 2\,T_{AC}\cos\alpha$ (1)

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T_{AC}\,\text{sen}\,\alpha + T_{BC}\,\text{sen}\,60° - w = 0$$

$$\therefore \quad T_{BC} = \frac{2\,(w - T_{AC}\,\text{sen}\,\alpha)}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Igualando (1) con (2):

$$2\,T_{AC}\cos\alpha = \frac{2\,(w - T_{AC}\,\text{sen}\,\alpha)}{\sqrt{3}}$$

de donde: $T_{AC} = \dfrac{w}{\sqrt{3}\cos\alpha + \text{sen}\,\alpha}$ (3)

Trabajando con el denominador: multiplicando y dividiendo por 2, se tiene:

$$2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\alpha + \frac{1}{2}\,\text{sen}\,\alpha\right) \quad ; \quad \text{igual a:}$$

$$2\,(\text{sen}\,60°\cos\alpha + \cos 60°\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$2\,\text{sen}\,(60° + \alpha)$$

En (3): $T_{AC} = \dfrac{w}{2\,\text{sen}\,(60° + \alpha)}$ (4)

Ahora, para que T_{AC} sea mínimo, debe cumplirse que sen (60° + α) debe ser máximo, y el máximo valor del seno es 1, es decir:

$$\text{sen}\,(60° + \alpha) = 1$$

De donde: $60° + \alpha = 90°$

Rpta.: $\alpha = 30°$

Sustituyendo valores en (4):

Rpta.: $T_{AC} = \dfrac{w}{2}$

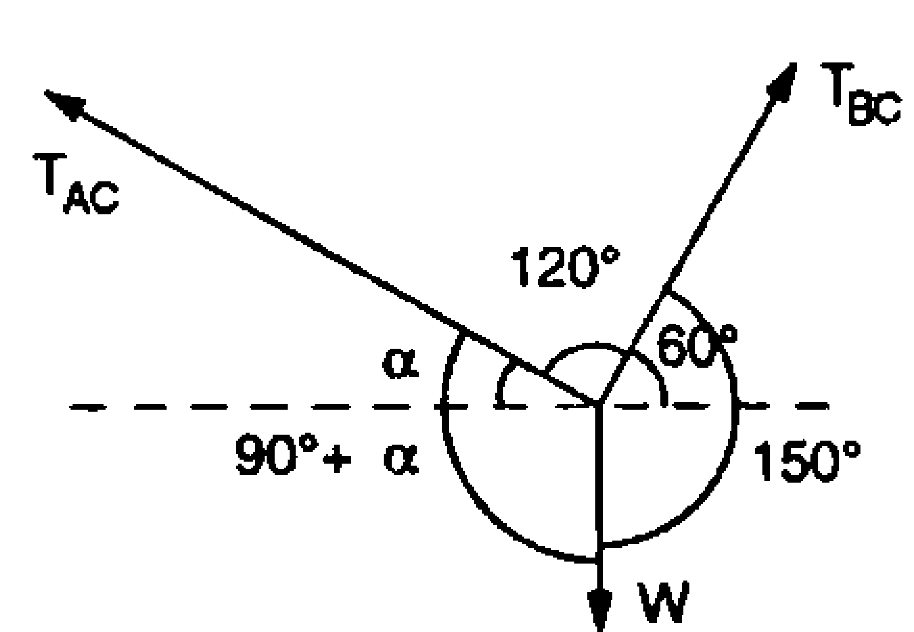
Sustituyendo valores en (1):

$$T_{BC} = 2 \times \frac{w}{2} \times \cos 30°$$

Rpta.: $T_{BC} = \dfrac{w\sqrt{3}}{2}$

OTRO MÉTODO:

Con el Teorema de Lamy:



http://librosysolucionarios.net

$$\frac{T_{AC}}{\text{sen }150°} = \frac{T_{BC}}{\text{sen }(90° + \alpha)} =$$

$$= \frac{W}{\text{sen }(120°-\alpha)} \qquad (1)$$

De donde: $$\frac{T_{AC}}{\text{sen }30°} = \frac{W}{\text{sen }(120°-\alpha)}$$

$$T_{AC} = \frac{W}{2\,\text{sen }(60° + \alpha)} \qquad (2)$$

Para que T_{AC} sea mínimo, sen (60° + a) debe ser máximo, es decir:

$$\text{sen }(60° + \alpha) = 1 \Rightarrow 60° + \alpha = 90°$$

Rpta.: $\alpha = 30°$

Sustituyendo en (2):

$$T_{AC} = \frac{W}{2\,\text{sen }(60° + 30°)}$$

Rpta.: $T_{AC} = \frac{W}{2}$

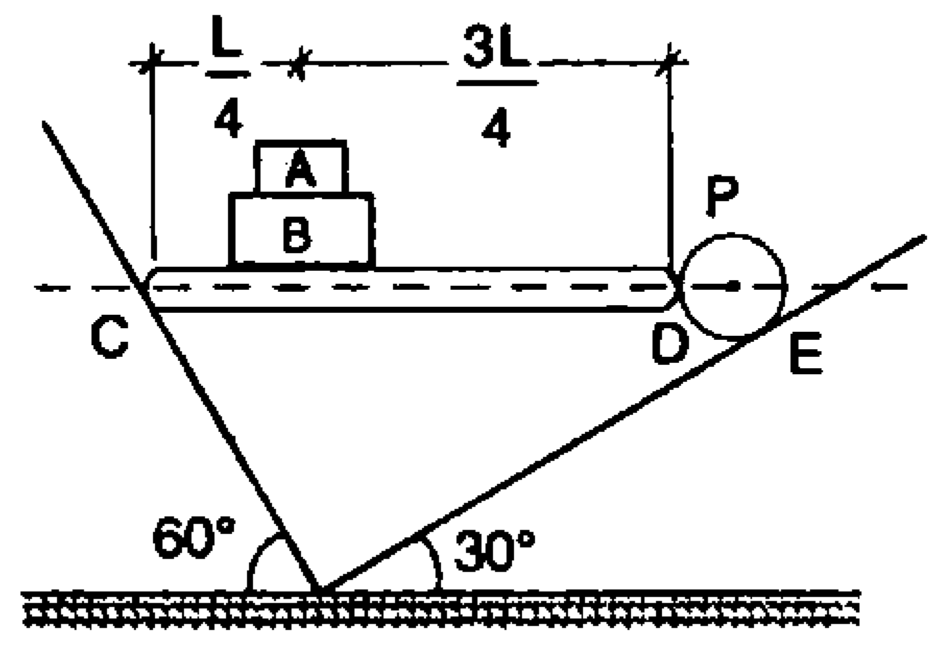
de (1): $$\frac{T_{AC}}{\text{sen }150°} = \frac{T_{BC}}{\text{sen }(90°+ \alpha)}$$

de donde: $$T_{BC} = T_{AC}\,\frac{\text{sen }(90°+\alpha)}{\text{sen }150°}$$

Sustituyendo valores y efectuando:

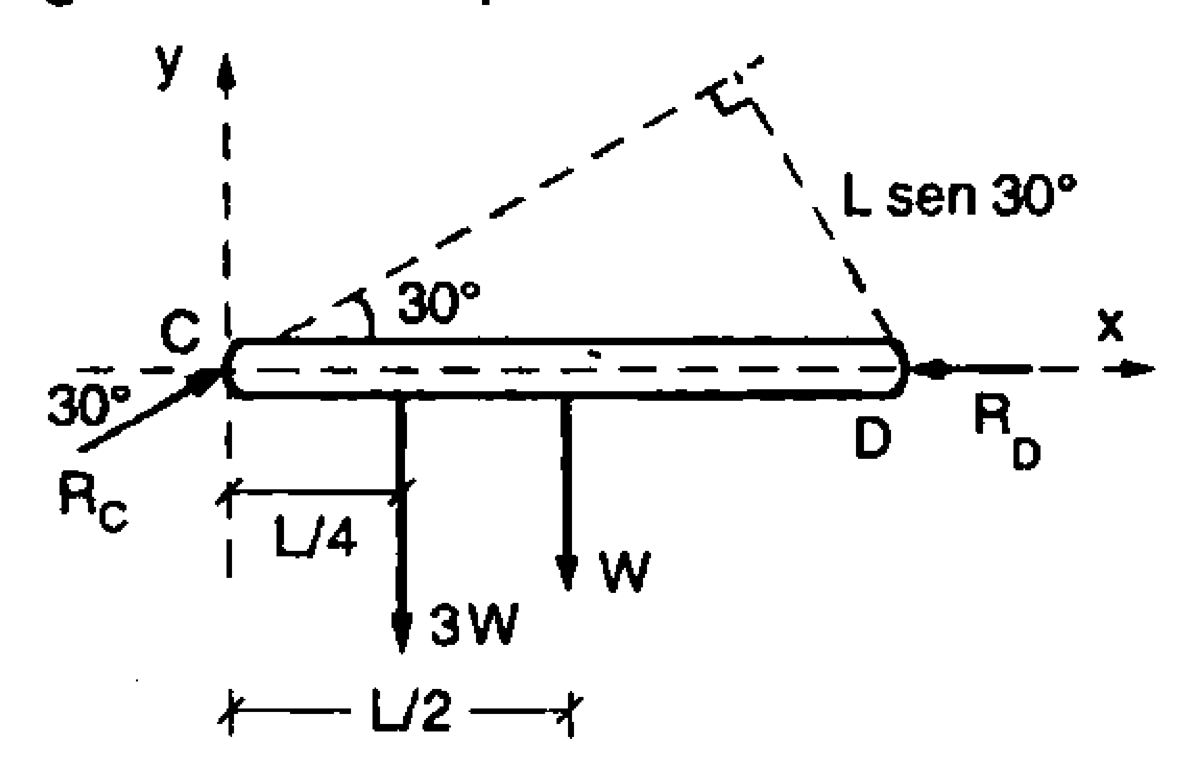
Rpta.: $T_{BC} = \frac{W\sqrt{3}}{2}$

PROBLEMA 29. Calcular el peso del cilindro "P" para que el sistema mostrado esté en equilibrio. Calcular también las reacciones en C, D y E. Además el peso de la barra es W y de los pesos A = W; B = 2 W.



RESOLUCIÓN : Cálculo de R_C y R_D :

Diagrama de cuerpo libre de la barra:



$$\Sigma M_D = 0$$

$$R_C \,.\, L\,\text{sen }30° = 3\,W \cdot \frac{3\,L}{4} + W \cdot \frac{L}{2}$$

Rpta.: $R_C = 5{,}5\,W$

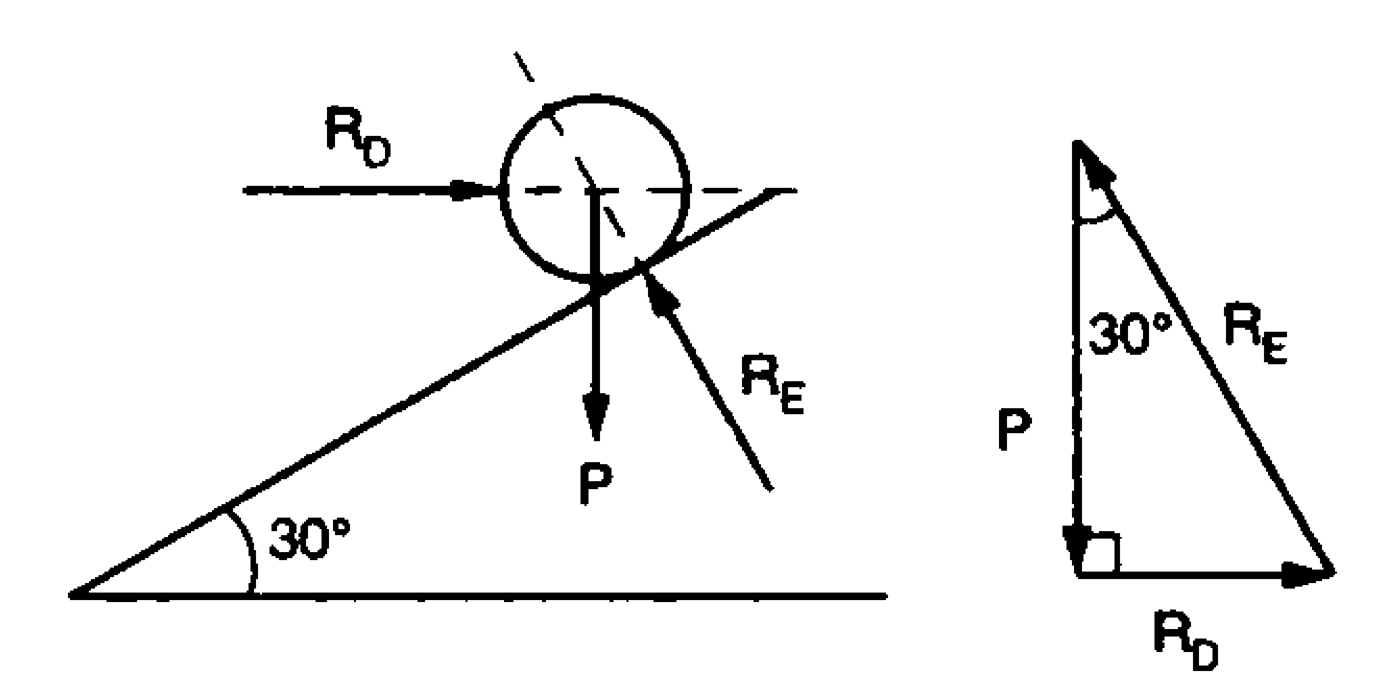
Cálculo de R_D: $\Sigma F_x = 0$

$$R_C \cos 30° = R_D$$

$$5{,}5\,W \cos 30° = R_D$$

Rpta.: $R_D = \frac{11\sqrt{3}}{4}\,W$

Cálculo del peso "**P**". Diagrama del cuerpo libre de P y el triángulo vectorial.



En el triángulo vectorial:

$$\frac{R_D}{\text{sen }30°} = \frac{P}{\text{sen }60°} = \frac{R_E}{\text{sen }90°} \qquad (1)$$

Sustituyendo valores: $$\frac{\frac{11\sqrt{3}}{4}\,W}{\frac{1}{2}} = \frac{P}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Rpta.: $P = \frac{33}{4}\,W$

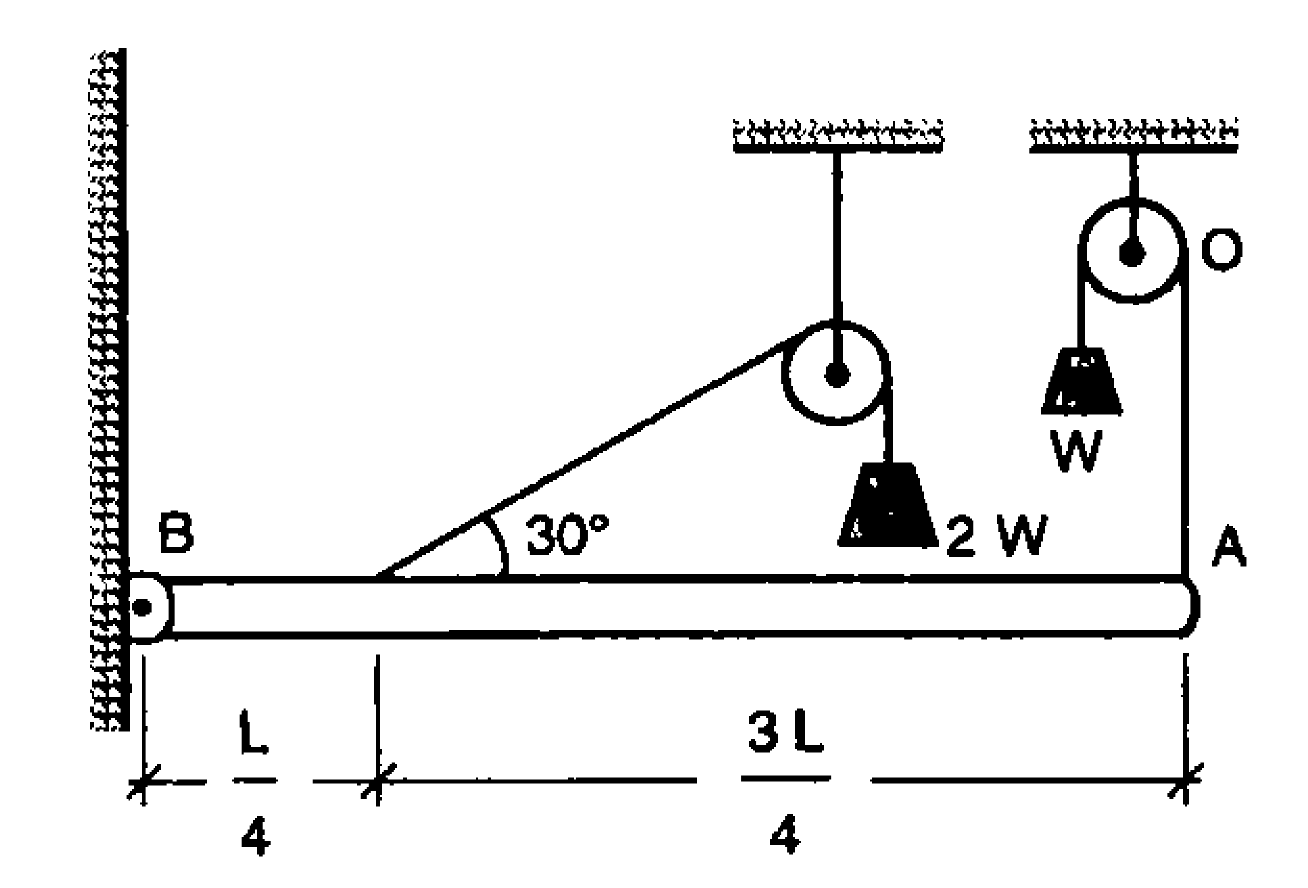
Cálculo de R_E:

de (1): $$\frac{R_D}{\text{sen }30°} = \frac{R_E}{\text{sen }90°}$$

$$\frac{\frac{11}{4}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{R_E}{1}\text{ , }\quad \text{de donde:}$$

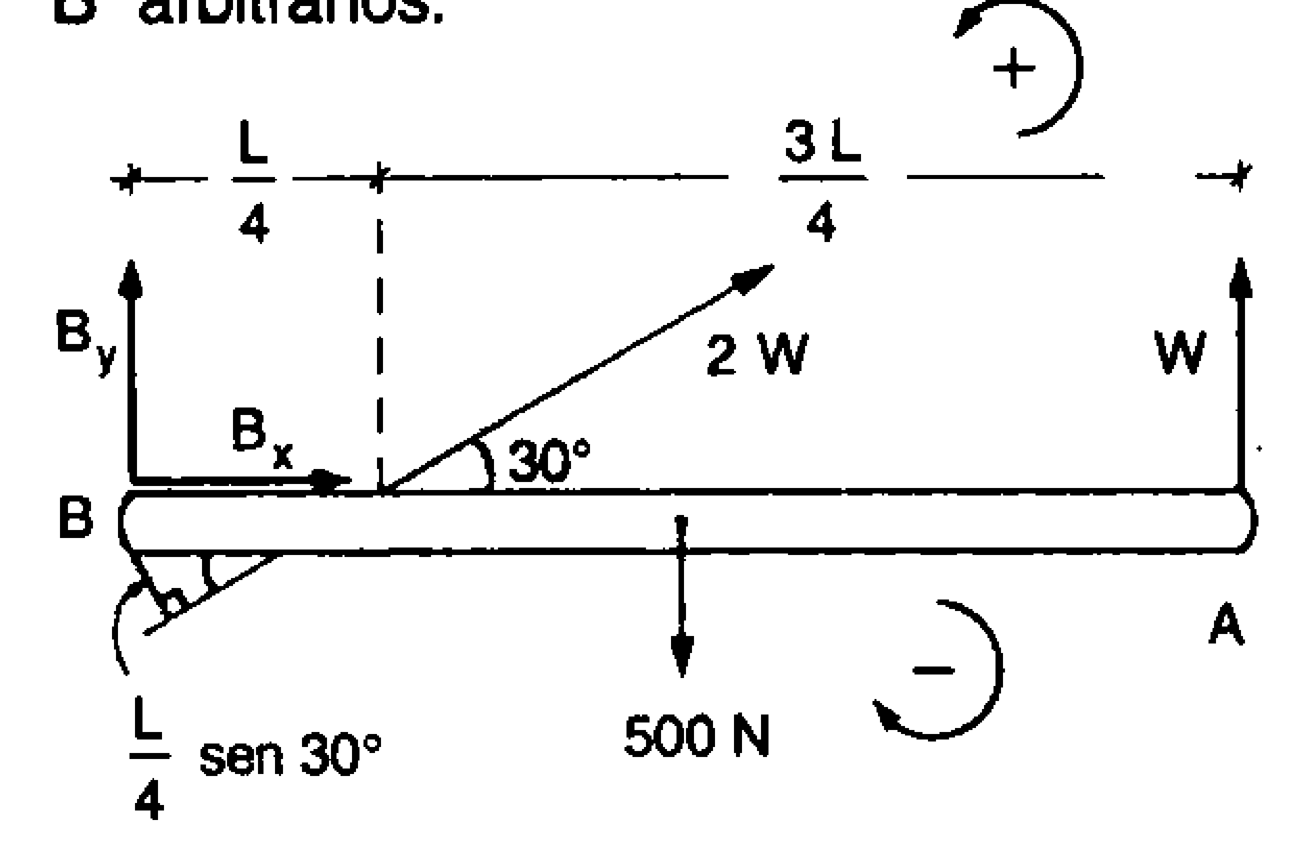
Rpta.: $R_E = \dfrac{11\sqrt{3}}{2}W$

PROBLEMA 30. Si el peso de una barra prismática y homogénea es 500 N. ¿Cuál es la tensión del cable OA y la reacción total en B?



RESOLUCIÓN :

En el D.C.L. de la barra se consideran los sentidos de las componentes de la reacción "B" arbitrarios.



Cálculo del valor de W :

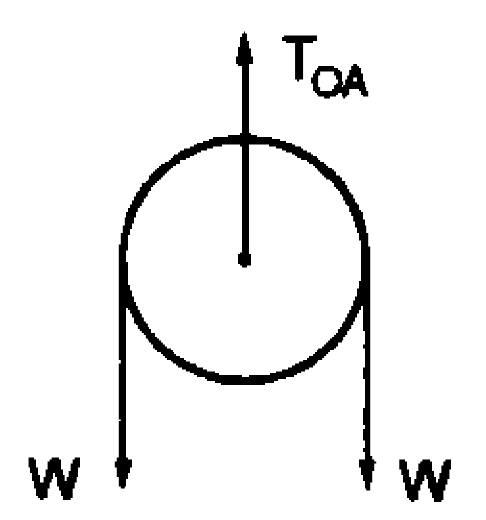
$$\Sigma M_B = 0$$

$$2W\cdot\frac{L}{4}\text{ sen }30° + W\cdot L = 500\,\frac{L}{2}$$

$$\frac{W}{4} + W = 250$$

$$\frac{5}{4}W = 250 \Rightarrow W = 200\text{ N}$$

Si se analiza la polea de la derecha para hallar "OA" se obtiene la figura:



$$T_{OA} = 2W$$

$$T_{OA} = 400\text{ N}$$

Para hallar la reacción en "B" se hallan primero B_x y B_y :

a) $$\Sigma F_x = 0$$

$$2W\cos 30° + B_x = 0$$

$$B_x = -2W\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$B_x = -200\sqrt{3}\text{ N}$$

NOTA:
El signo menos significa que B_x tiene un sentido contrario al que se ha elegido.

b) $$\Sigma F_y = 0$$

$$B_y + 2W\text{ sen }30° + W = 500$$

$$B_y + 2W\times\frac{1}{2} + W = 500$$

$$B_y = 500 - 2W = 500 - 2(200)$$

$$B_y = +100\text{ N}$$

NOTA:
El signo positivo concuerda con el sentido elegido.

$$\therefore\ R_B = \sqrt{(B_x)^2 + (B_y)^2}$$

$$R_B = \sqrt{(100)^2 + (-200\sqrt{3})^2}$$

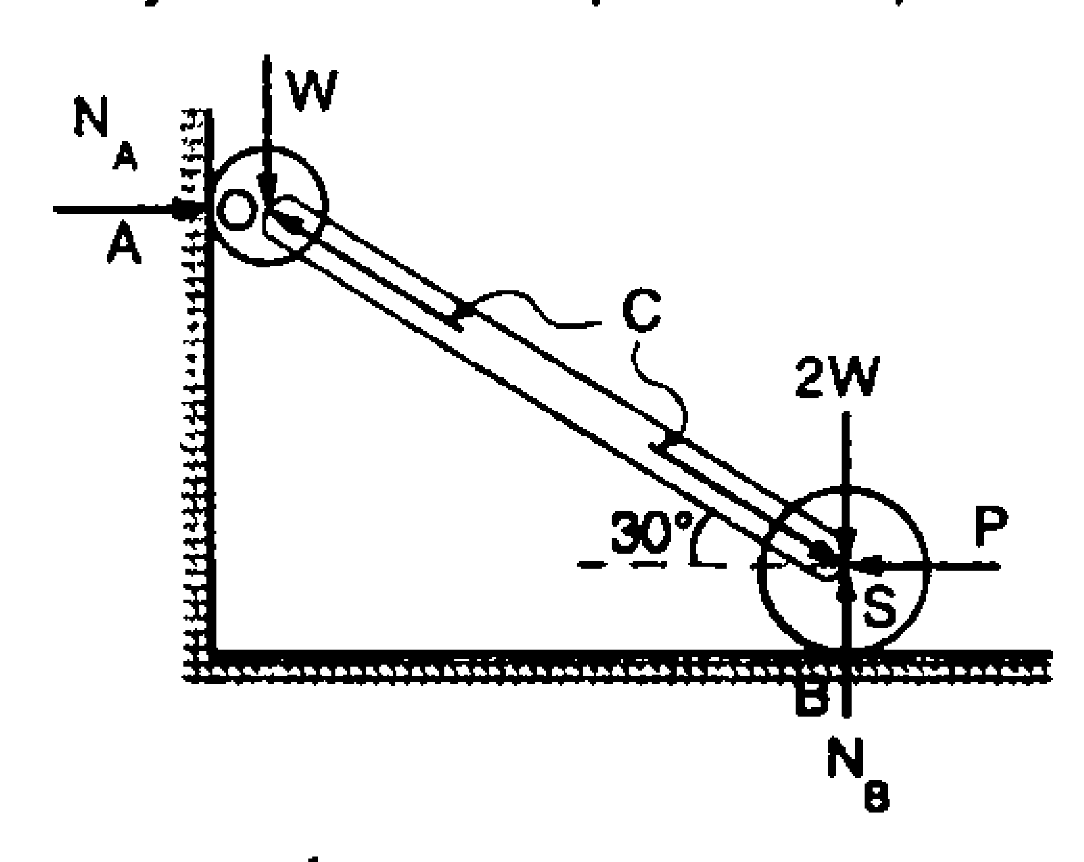
http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $R_B = 360{,}55\ N$

PROBLEMA 31. Para el siguiente sistema que se encuentra en equilibrio, hallar:

a) El valor de "P".
b) Las reacciones sobre "A" y "B" de la pared y el piso, si se sabe que no hay rozamiento.
c) La fuerza sobre la barra "OS" de peso despreciable.

(A y B esferas de pesos W y 2 W respectivamente y de radios despreciables).



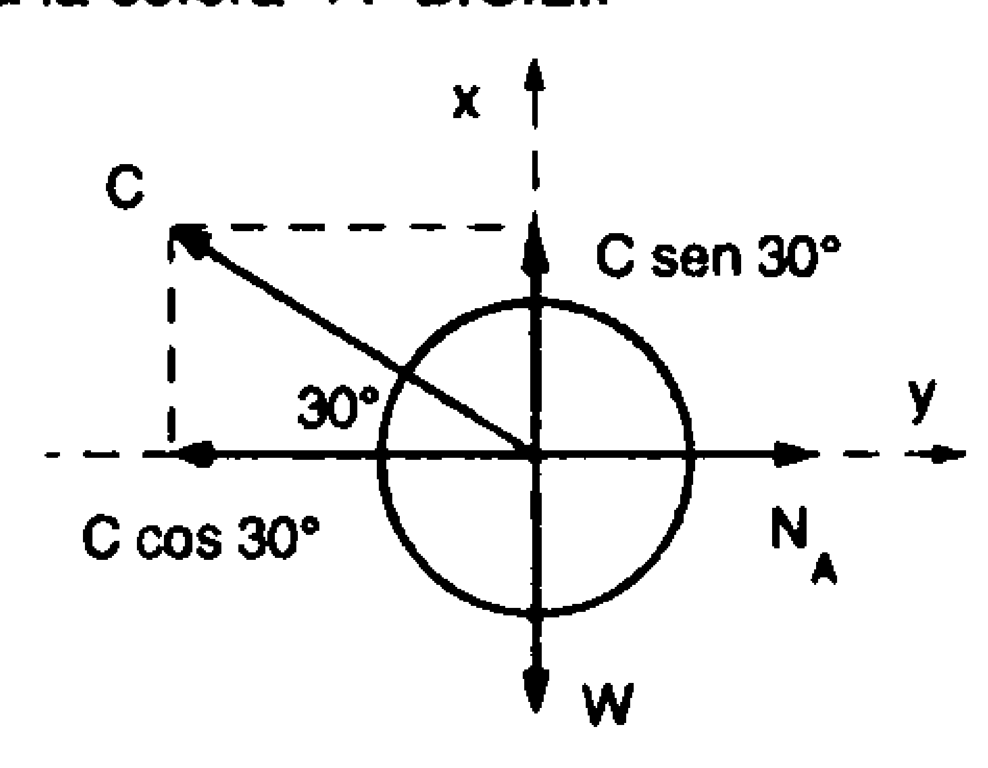
RESOLUCIÓN: Analizando el sistema completo, se tiene:

$$\Sigma F_y = 0:$$

Rpta.: $N_B = 3W$ (1)

$\Sigma F_x = 0: \quad P = N_A$ (2)

Para la esfera "A" D.C.L.:



"C" es la fuerza que ejerce la barra "OS" sobre la esfera "A"

$$\Sigma F_x = 0: \quad N_A = C \cos 30°$$

$$N_A = C\,\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\Sigma F_y = 0: \quad W = C \operatorname{sen} 30°$$

$$W = C \times \frac{1}{2} \quad \Rightarrow \quad C = 2W$$

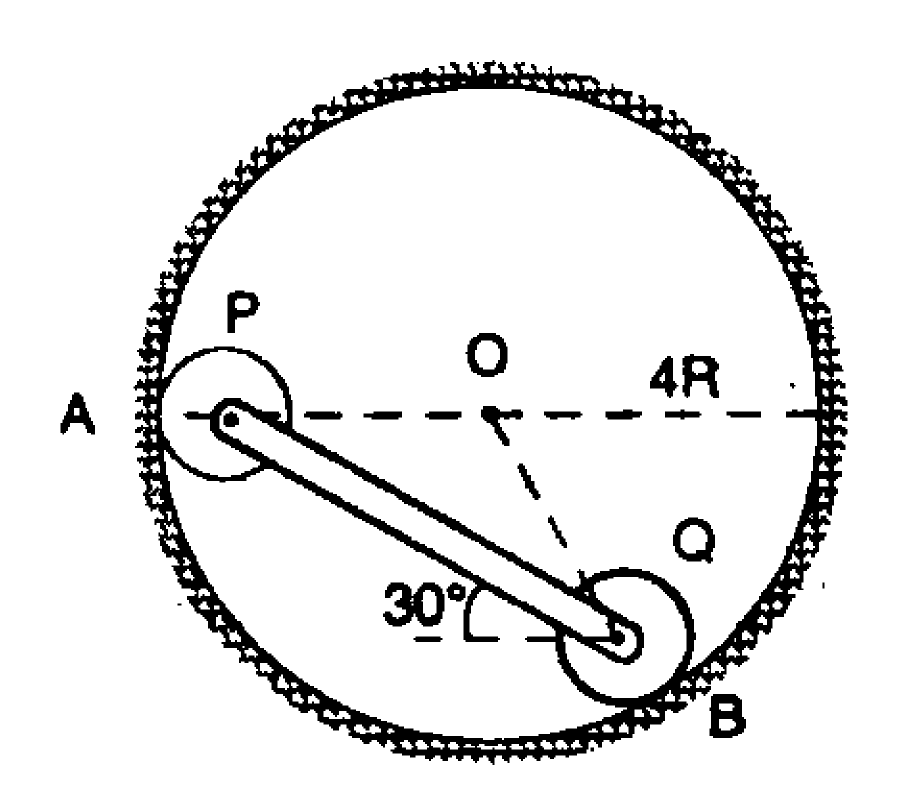
Luego: $N_A = 2W\,\frac{\sqrt{3}}{2}$

Rpta.: $N_A = W\sqrt{3}$

Regresando a (2): Rpta.: $P = W\sqrt{3}$

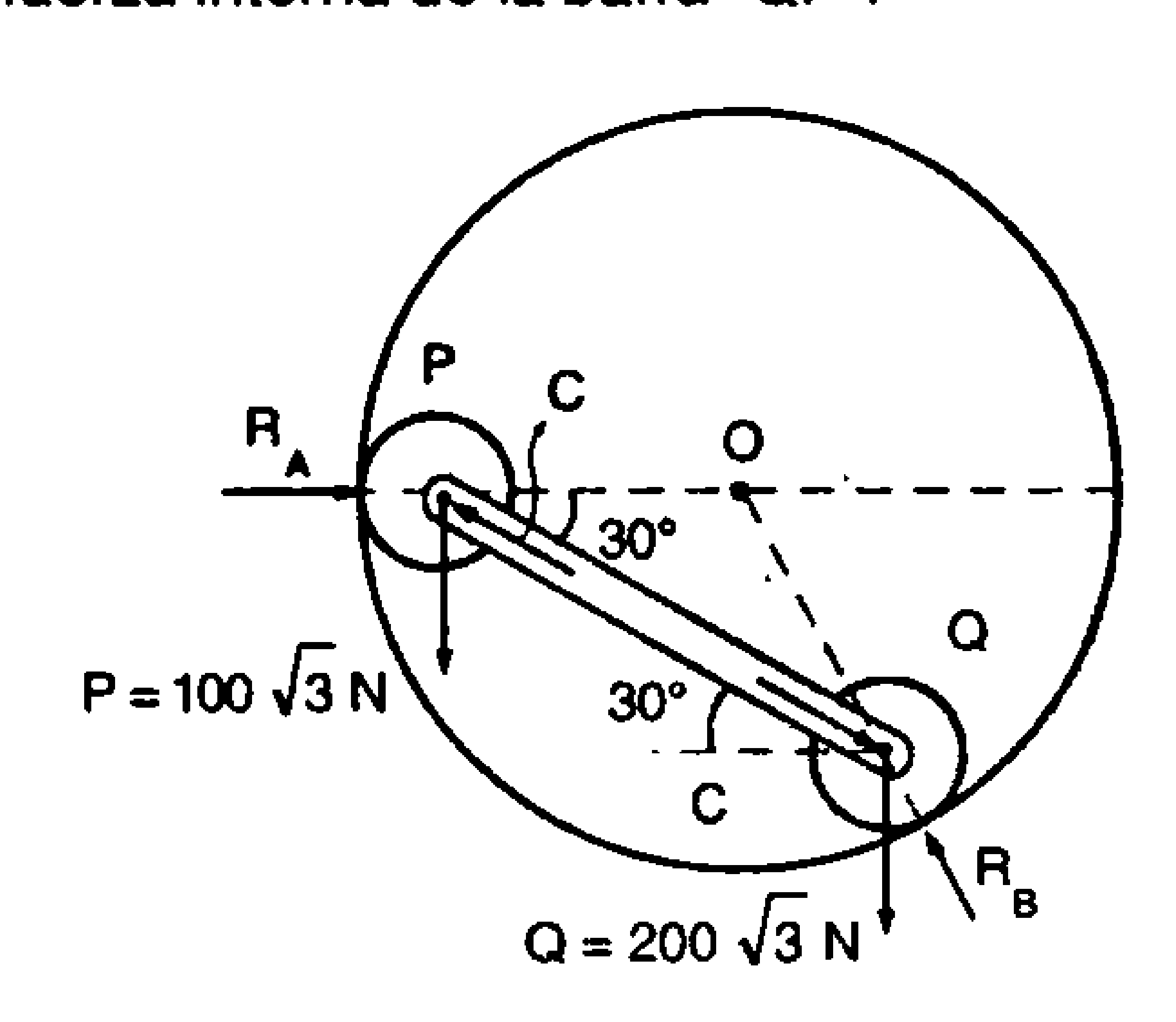
PROBLEMA 32. Dos rodillo "P" y "Q" de pesos $100\sqrt{3}$ N y $200\sqrt{3}$ N tienen el mismo radio R / 8 y se encuentran unidos por una barra PQ, de peso despreciable, y apoyados sobre un cilindro hueco de radio 4 R. Si se considera que no hay rozamiento, calcular:

a) Las reacciones en A y B
b) La fuerza que ejerce la barra sobre P y Q. (Radio de los rodillos R/8)

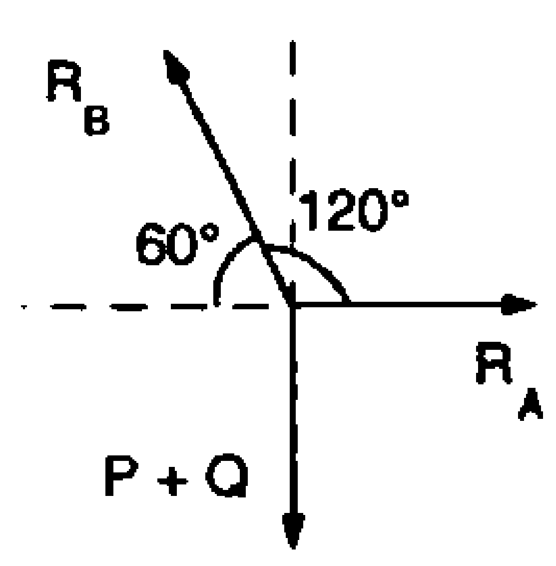


RESOLUCIÓN:

Diagrama del cuerpo libre del sistema. "C" fuerza interna de la barra "QP".



Sistema de fuerzas presentes:



Aplicando Teorema de Lamy:

$$\frac{R_A}{\text{sen } 150°} = \frac{R_B}{\text{sen } 90°} = \frac{300\sqrt{3}}{\text{sen } 120°} \qquad (I)$$

$$(\text{sen } 120° = \text{sen } 60° = \frac{\sqrt{3}}{2})$$

$$(\text{sen } 150° = \text{sen } 30° = \frac{1}{2})$$

De (I): $\frac{R_B}{1} = \frac{300\sqrt{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}$

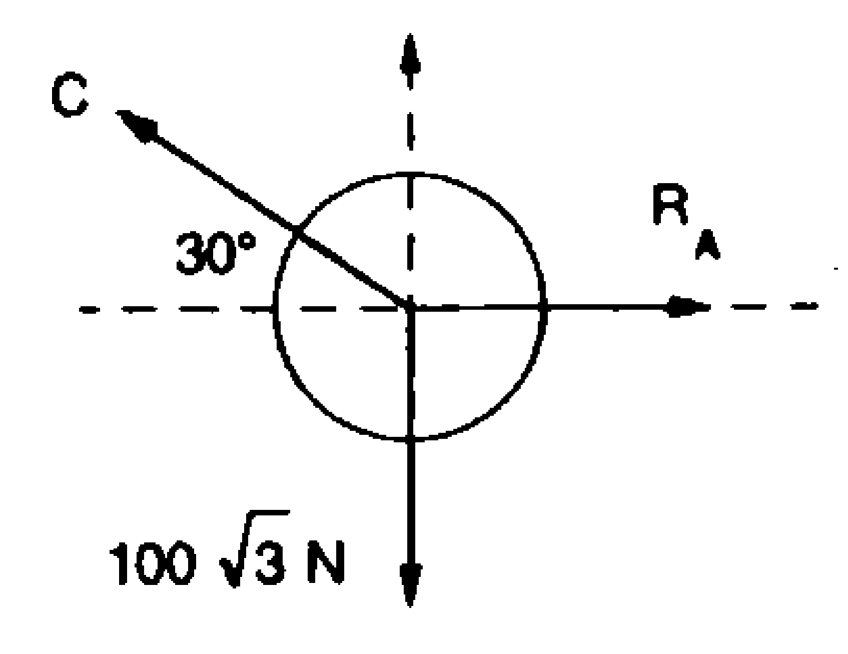
Rpta.: $R_B = 600\text{ N}$

De (I): $\frac{R_A}{\frac{1}{2}} = \frac{600\text{ N}}{1}$

Rpta.: $R_A = 300\text{ N}$

Cálculo de la fuerza interna "C" que soporta la barra QP.-

Diagrama de cuerpo libre del rodillo P:



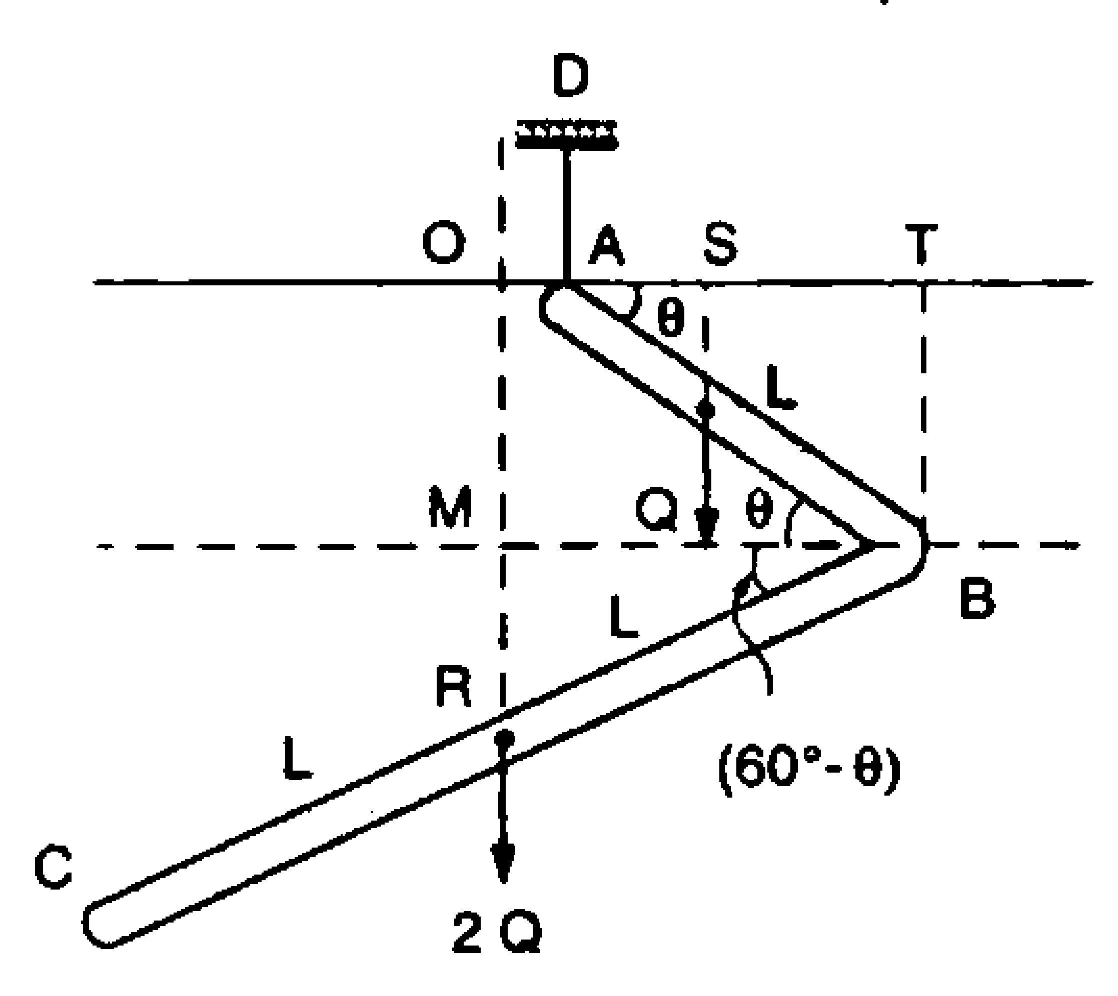
Aplicando Teorema de Lamy:

$$\frac{C}{\text{sen } 90°} = \frac{R_A}{\text{sen } 120°} = \frac{100\sqrt{3}}{\text{sen } 150°} \qquad (II)$$

De (II): $\frac{C}{\text{sen } 90°} = \frac{100\sqrt{3}}{\text{sen } 150°}$

de donde: Rpta.: $C = 200\sqrt{3}\text{ N}$

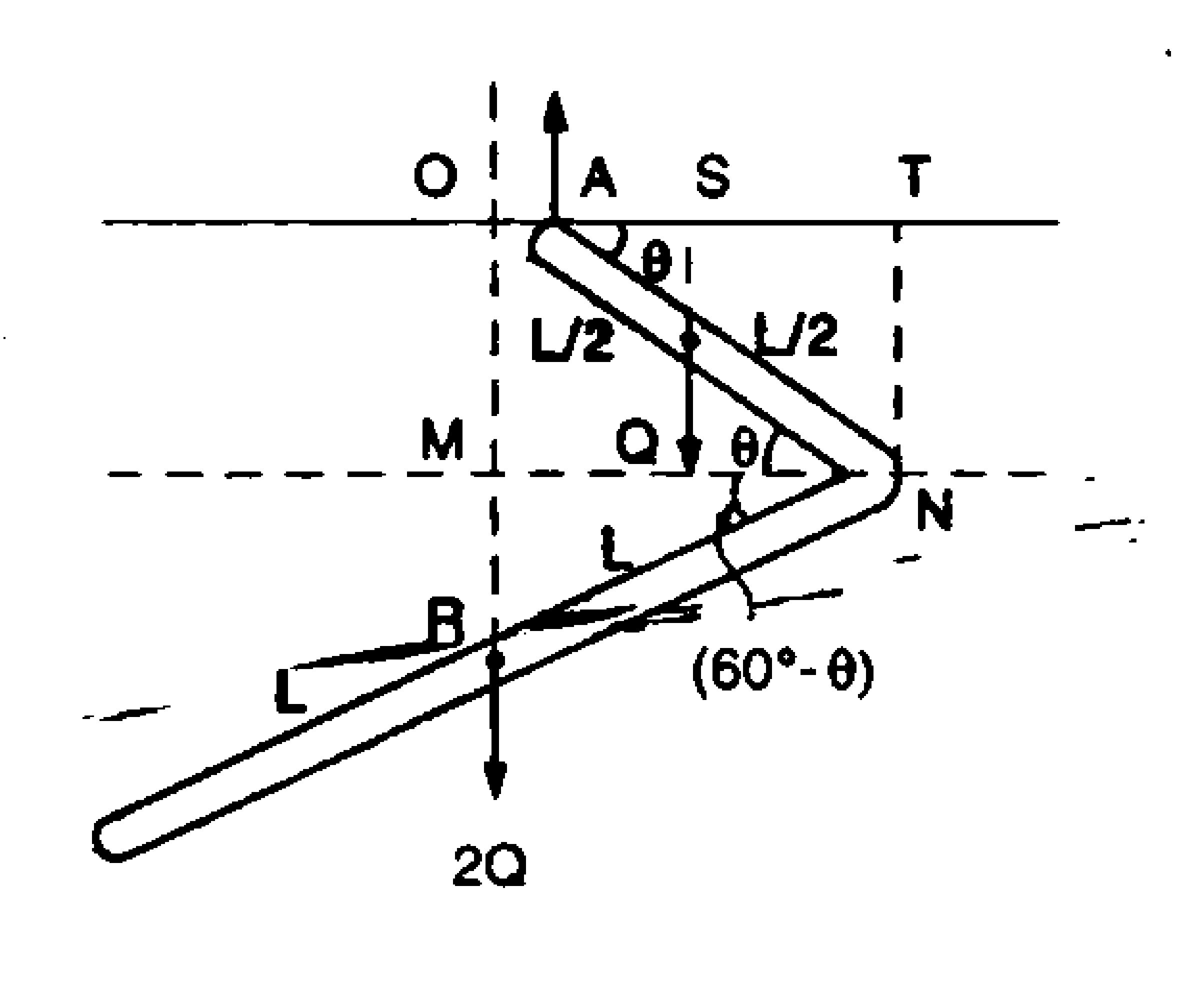
PROBLEMA 33. Dos barras "AB" y "BC" de pesos "Q" y "2 Q" y de longitudes "L" y "2 L" respectivamente, están unidas rígidamente en "B" y suspendidas mediante una cuerda "AD", tal como se indica en la figura. Determinar el valor del ángulo "θ", cuando el sistema está en equilibrio.



RESOLUCIÓN :

Trazando el diagrama libre se observa que:

$$OA = OT - AT \qquad (1)$$



$$\Sigma M_A = 0$$

$$2\,Q\,(OA) = Q\,(AS) \qquad (2)$$

Usando $OT = MN = L\cos(60° - \theta)$ en (1):

$$OA = L\cos(60° - \theta) - L\cos\theta$$

Pero: $AS = \frac{L}{2}\cos\theta$

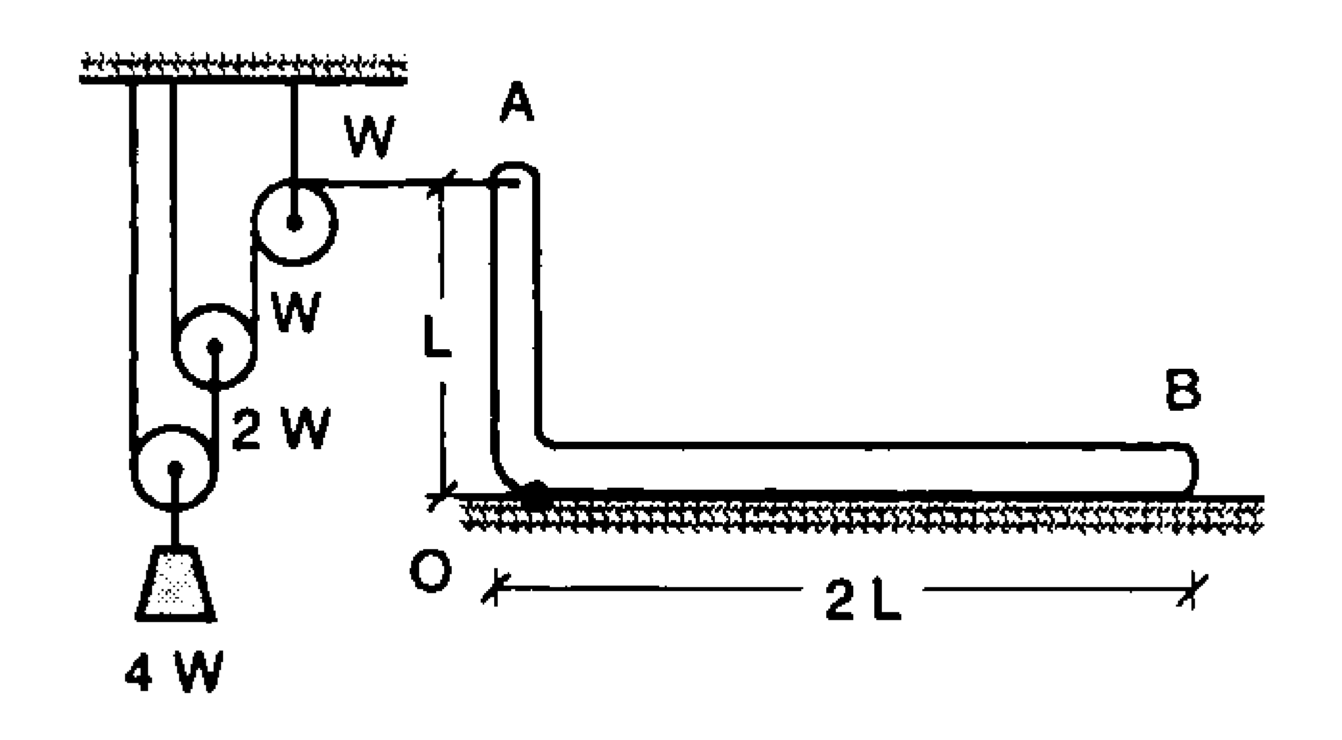
Reemplazando en (2) y efectuando:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Rpta.: $\theta = \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 40°53'36''$

PROBLEMA 34. En el sistema mostrado, calcular la reacción que el piso ofrece a la barra homogénea AOB, cuando ésta se encuentra a punto de volcar alrededor del punto "O", por acción del peso "4 W", si se sabe que cada unidad de longitud "L" le corresponde un peso 36 N.

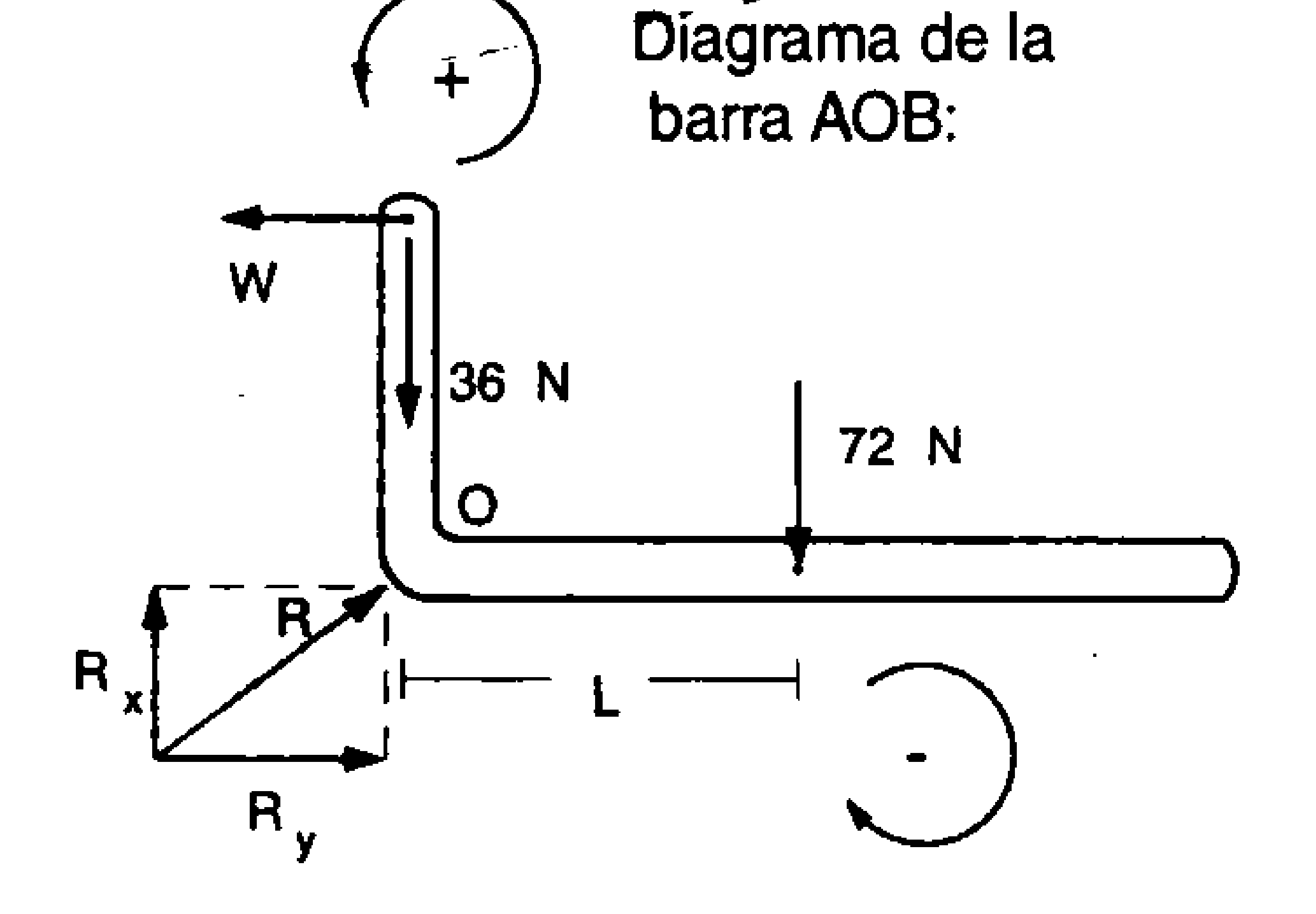
RESOLUCIÓN :



a) $\Sigma M_O = 0$:

$72\,L = W\,L \quad \therefore \quad W = 72\,N$

Diagrama de la barra AOB:



b) $\Sigma F_x = 0$:

$R_x = W = 72\,N \qquad (2)$

$\Sigma F_y = 0$:

$R_y = 72\,N + 36\,N$

$R_y = 108\,N \qquad (3)$

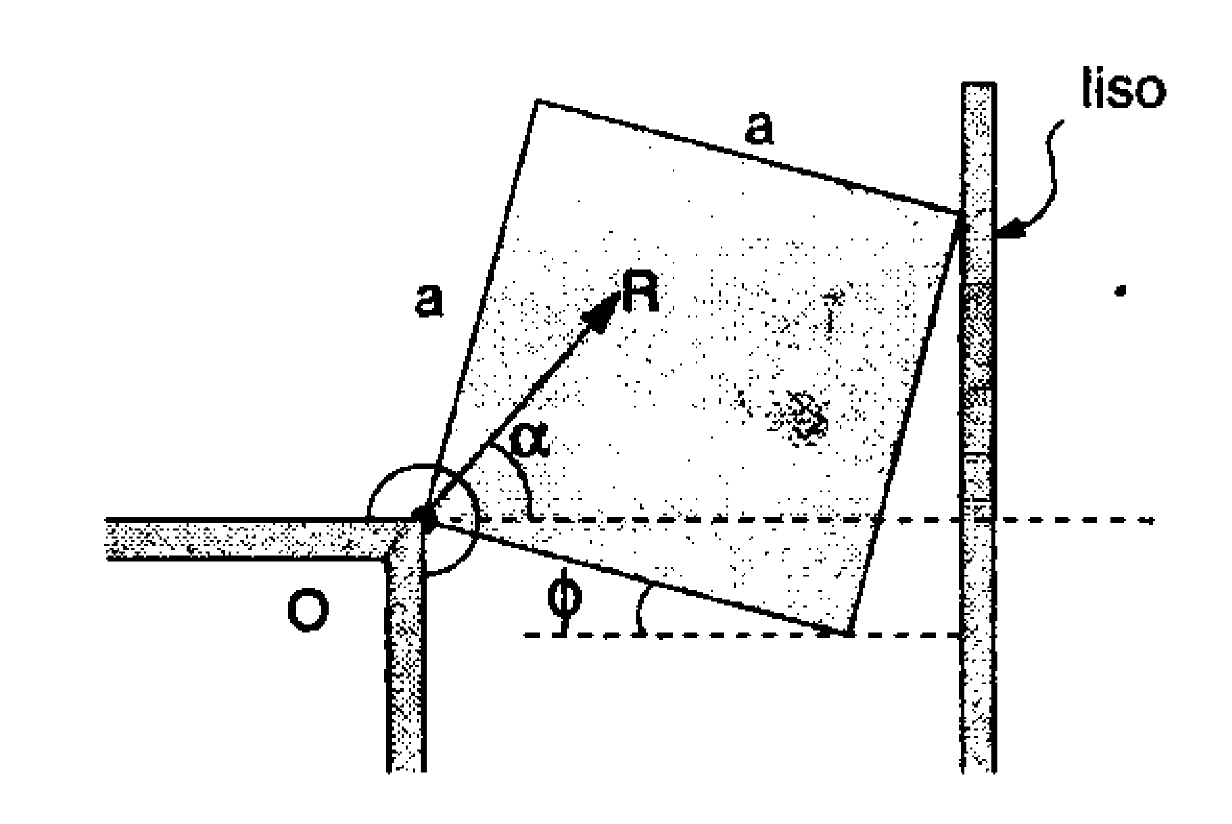
Cálculo de la reacción "R" :

$$R = \sqrt{(R_x)^2 + (R_y)^2} \qquad (4)$$

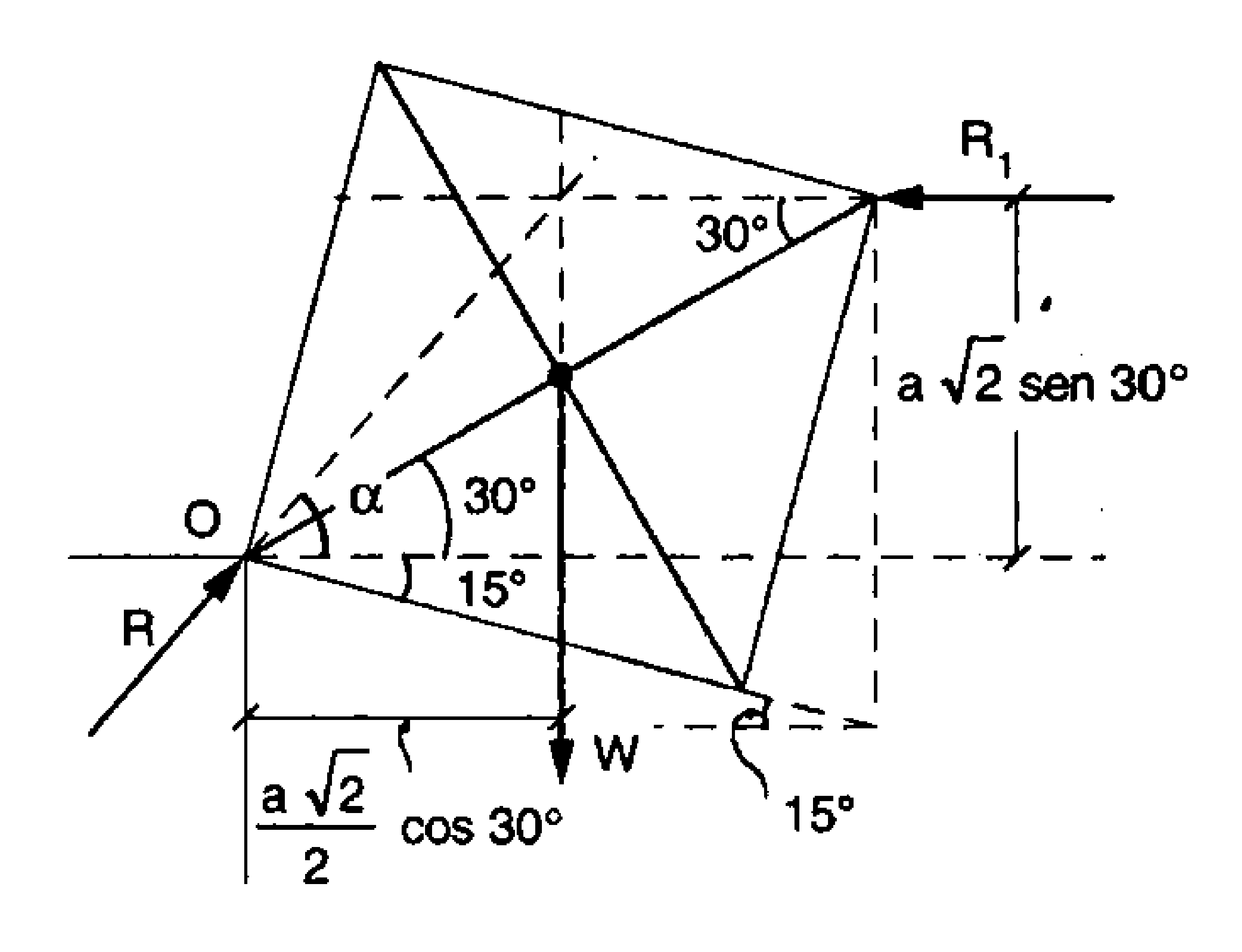
Sustituyendo (2) y (3) en (4) :

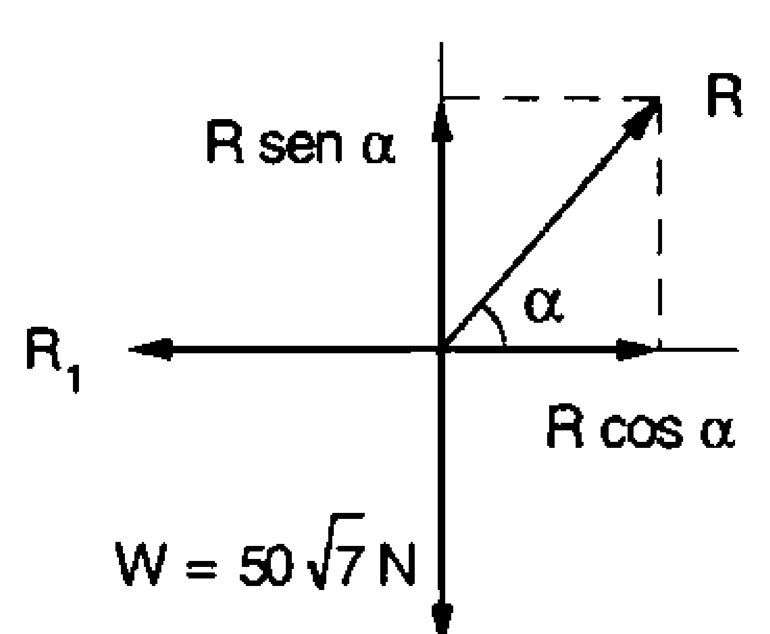
Rpta.: $R = 130\,N$

PROBLEMA 35. Una placa cuadrada de peso $50\sqrt{7}$ N está articulada en uno de sus vértices y descansa en una pared vertical, tal como se indica en la figura. Determinar el valor de la reacción "R" en la articulación y su dirección con respecto a la hori-zontal. ($\phi = 15°$)



RESOLUCIÓN : si $\phi = 15°$





a) De la figura se tiene:

$\Sigma F_x = 0: \quad R_1 = R\cos\alpha \quad (1)$

$\Sigma F_y = 0: \quad W = R\,\text{sen}\,\alpha \quad (2)$

Dividiendo (1) entre (2) :

$$\frac{R_1}{W} = \text{ctg}\,\alpha \quad (3)$$

b) $\Sigma M_O = 0$

$$R_1 \cdot a\sqrt{2}\,\text{sen}\,30° = W \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2}\cos 30°$$

$$R_1 \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = W \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\frac{R_1}{W} = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad (4)$$

Igualando (3) y (4):

$$\text{cgt}\,\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2} \quad \text{ó} \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

Cálculo de R: se calcula sen α.

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\text{tg}\,\alpha}{\sqrt{1+\text{tg}^2\alpha}}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\sqrt{1+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2}}$$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{\frac{2\sqrt{3}}{3}}{\frac{\sqrt{21}}{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{3}\sqrt{7}}$$

Rpta.: $\text{sen}\,\alpha = \frac{2}{\sqrt{7}} \Rightarrow \alpha = 49°$

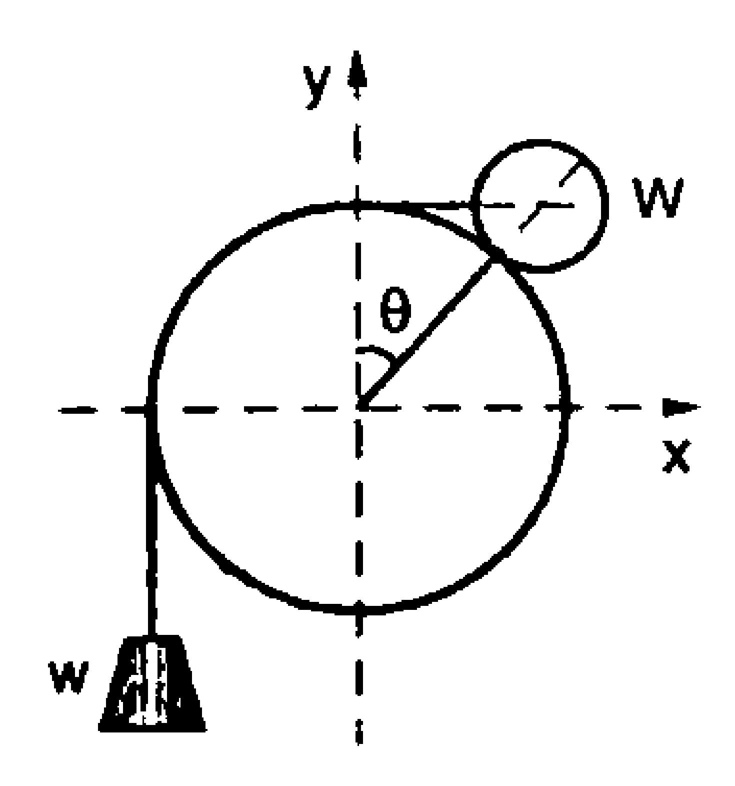
Sustituyendo valores en (2) :

$50\sqrt{7}\,N = R\,\frac{2}{\sqrt{7}}$ de donde:

Rpta.: $R = 175\,N$

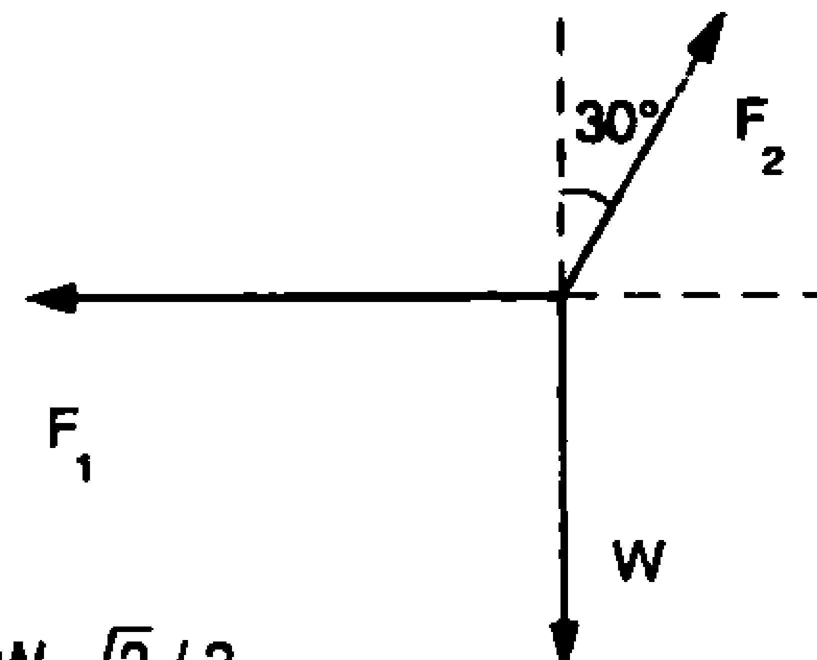
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el ángulo θ de equilibrio de la figura adjunta.



Rpta.: $\text{tg}\,\theta = \frac{w}{W}$

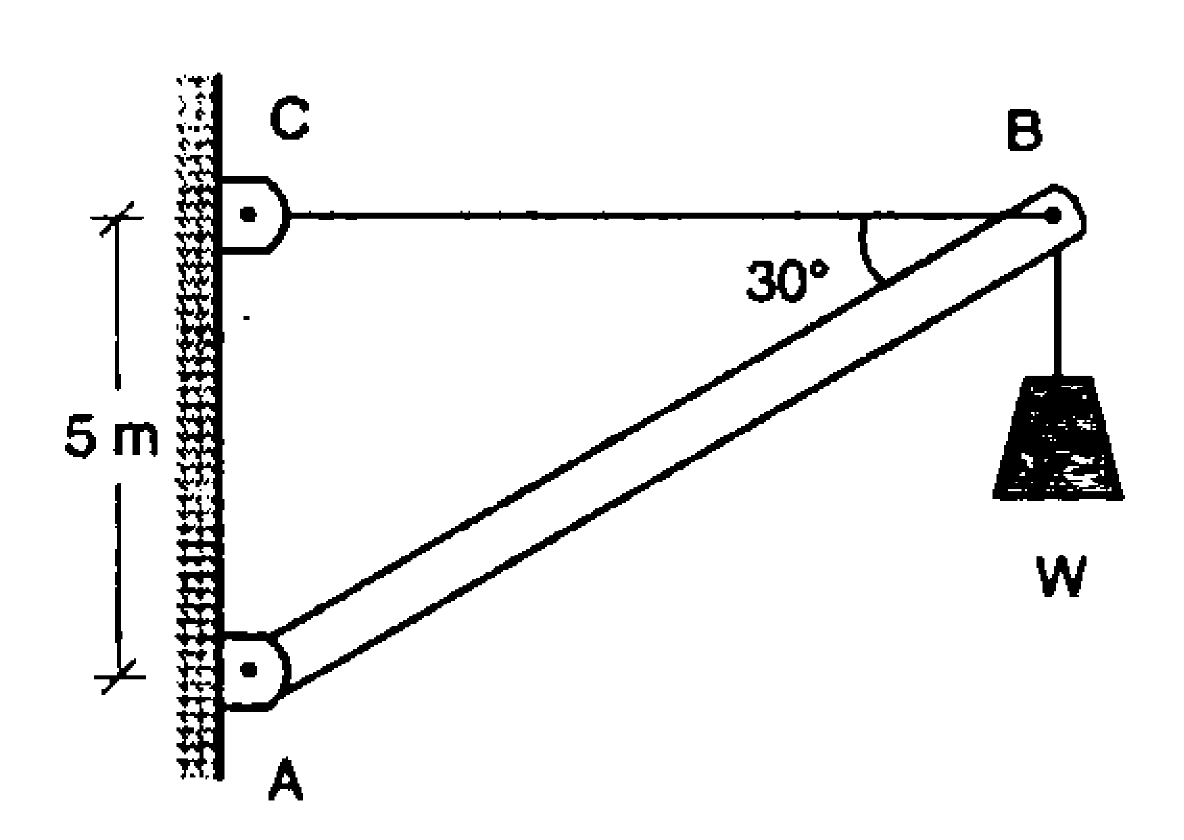
2. Calcular F_1 y F_2 en la figura adjunta



Rpta.: $F_1 = W\sqrt{3}/3$

$F_2 = 2W\sqrt{3}/3$

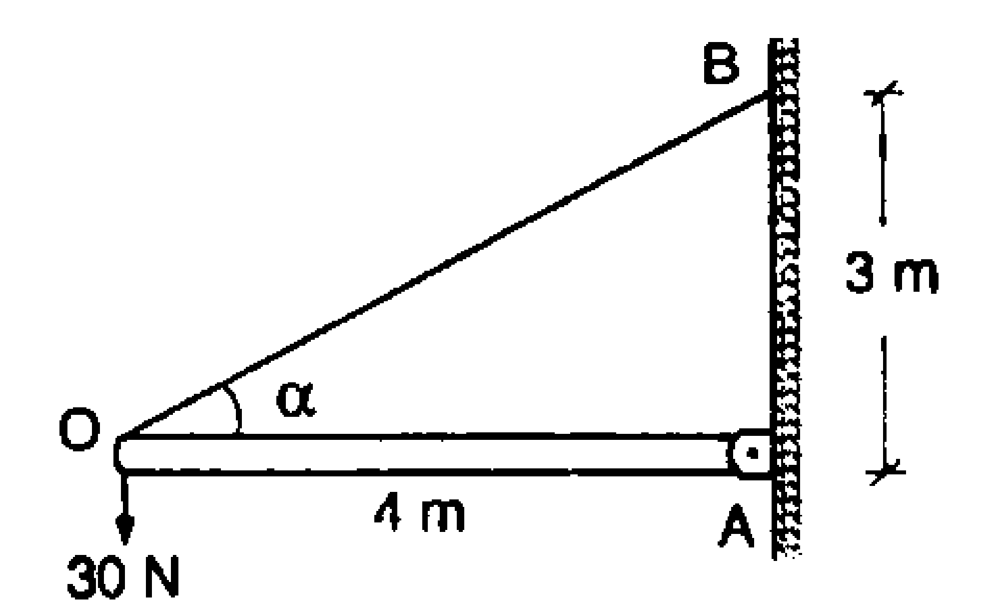
3. En la figura mostrada, AB es una barra rígida de peso despreciable y CB un cable. Si W = 2 000 N, ¿cuál es el valor de la reacción del pasador, o pin, en A y cuál es la tensión del cable?



Rpta.: A = 4 000 N
T = 3 460 N

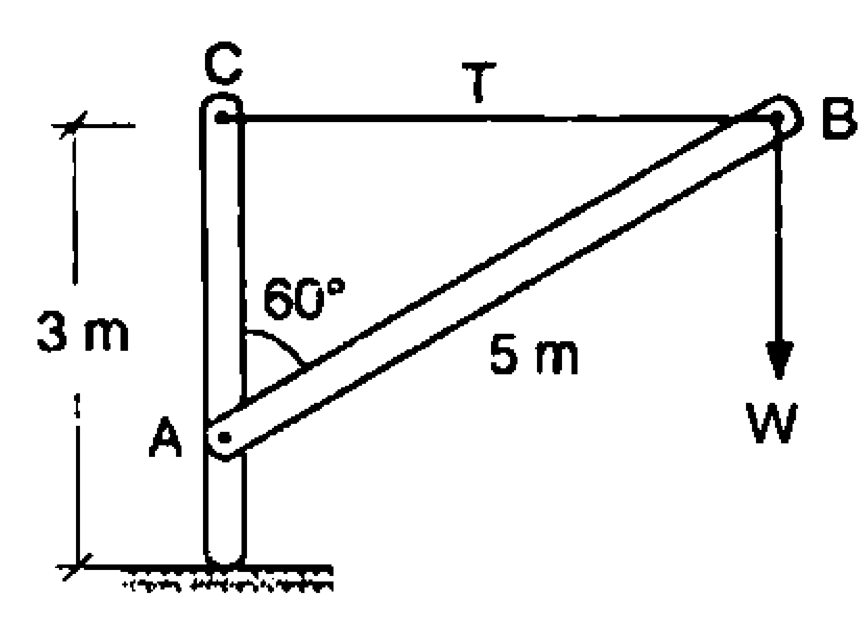
4. Calcular la tensión de la cuerda OB y la reacción R_A de la barra OA.

http://librosysolucionarios.net



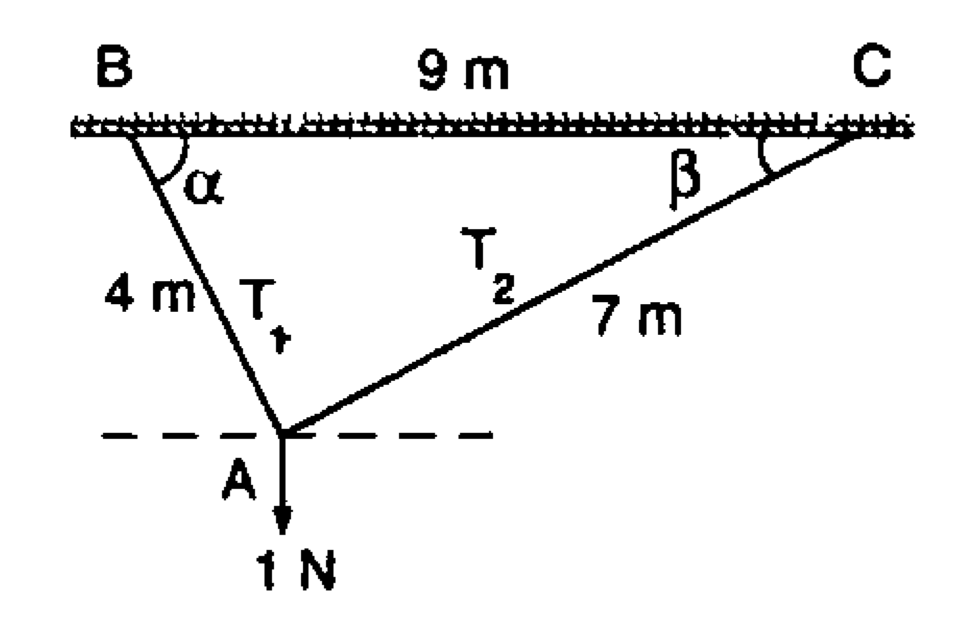
Rpta.: T = 50 N ; R_A = 40 N

5. Calcular la tensión en el cable CB y la fuerza de compresión sobre la barra AB de peso despreciable.



Rpta.: T = $\sqrt{3}$ w ; P_{AB} = 2 w

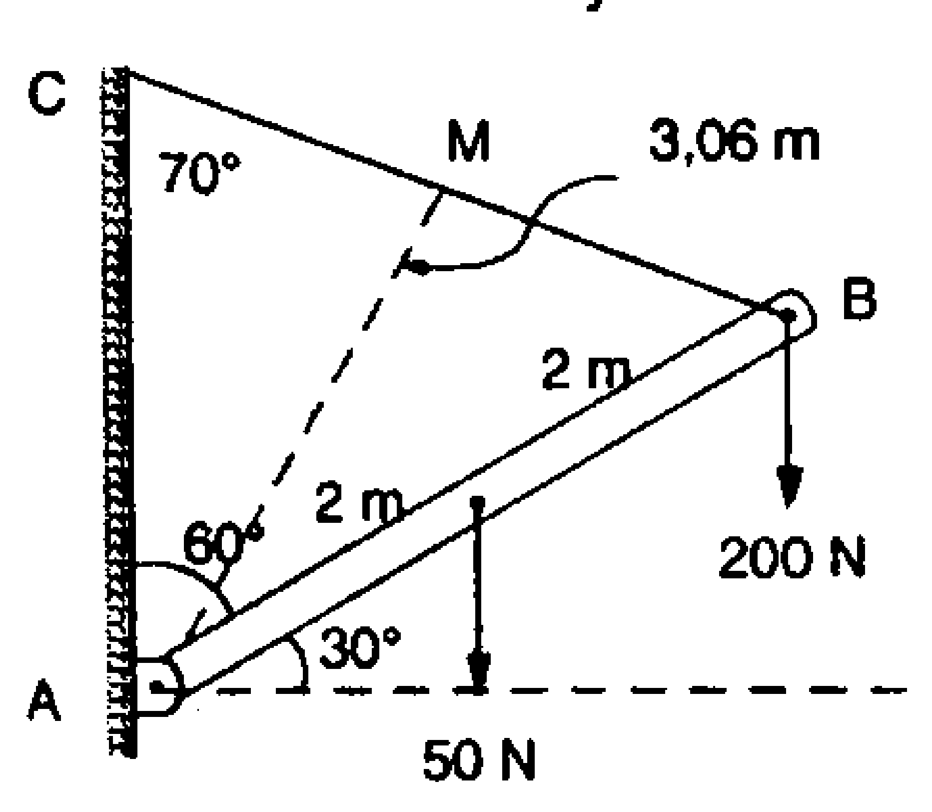
6. Calcular la tensión en los cables AB y AC de la figura. (sugerencia: calcular α y β por ley de cosenos).



Rpta.: T_1 = 0,95 N

T_2 = 0,70 N

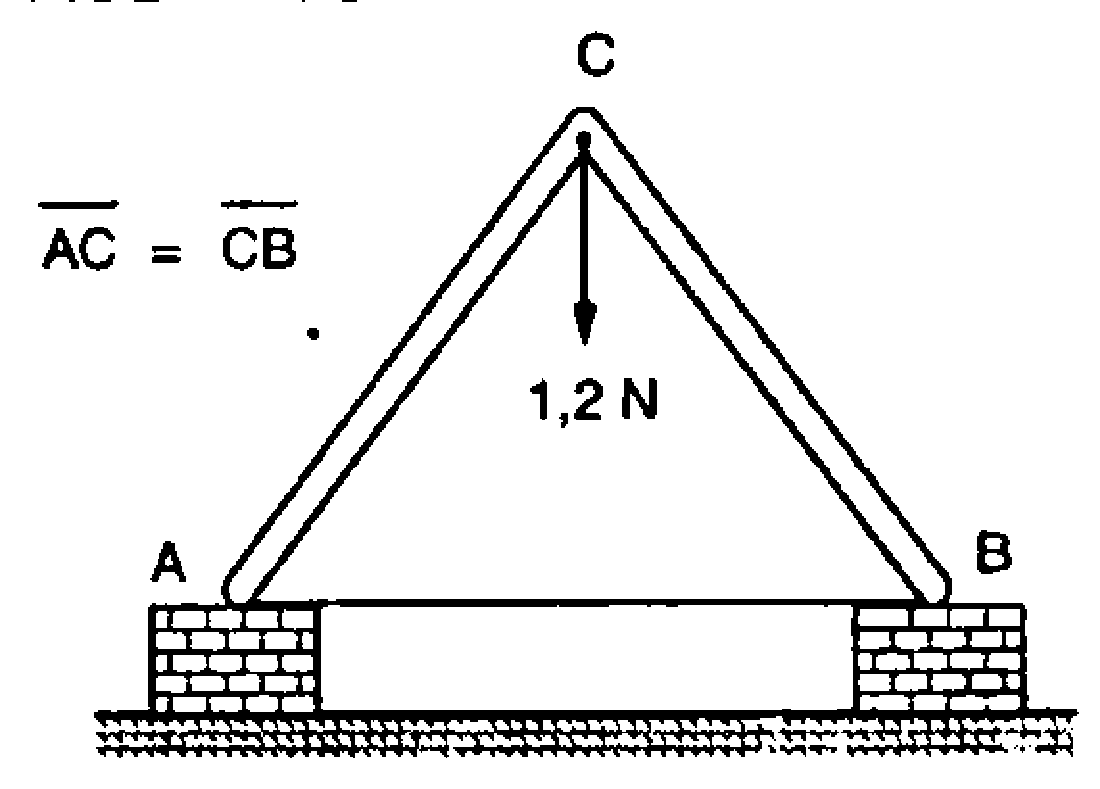
7. Hallar la tensión en CB y la reacción en A.



Rpta.: T = 254,7 N

R_A = 289 N

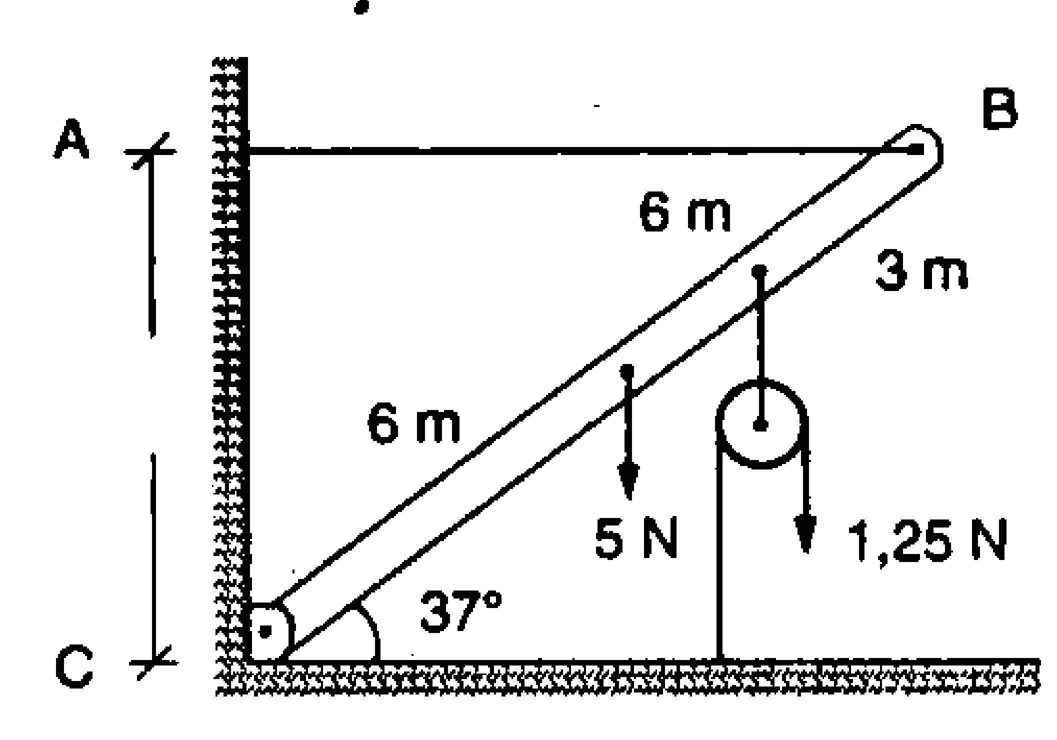
8. Calcular las presiones sobre los muros A y B y la tensión sobre el cable AB. ACB = 70°



Rpta.: T = 0,42 N

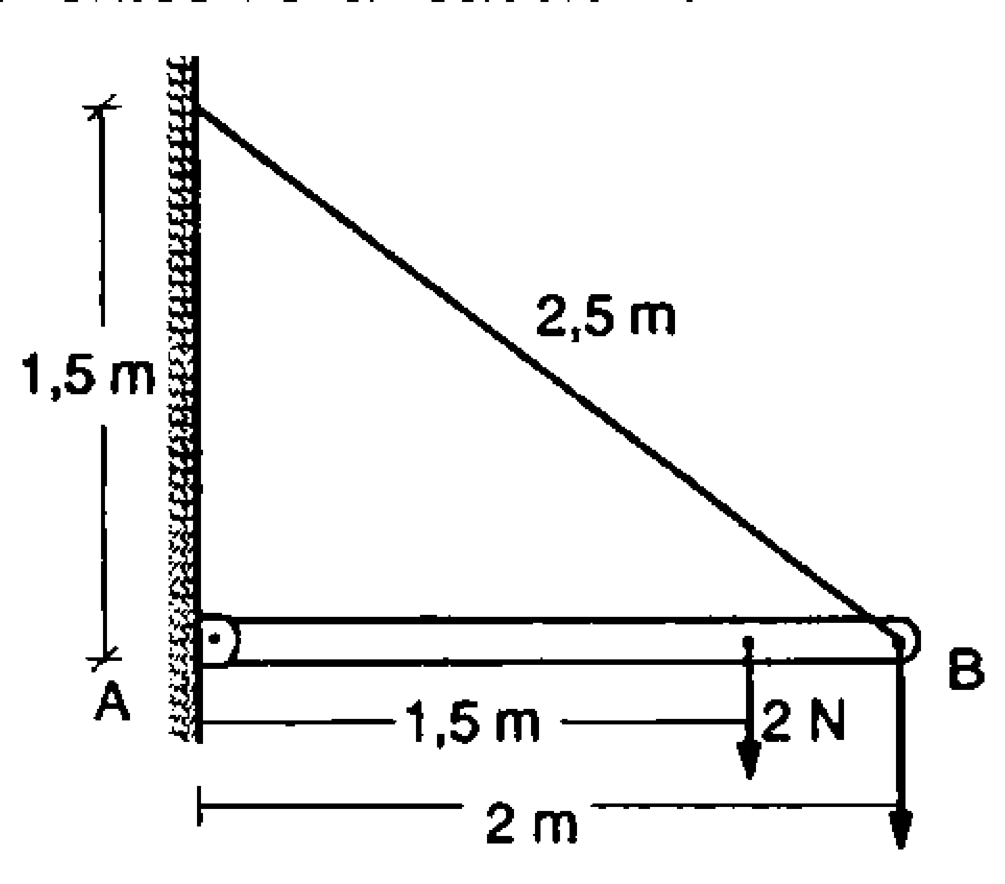
R_A = R_B = 0,73 N

9. Calcular la tensión de la cuerda AB que soporta la columna inclinada mostrada en la figura.



Rpta.: 6 N

10. Hallar la tensión en el cable y las componentes de la reacción en A.

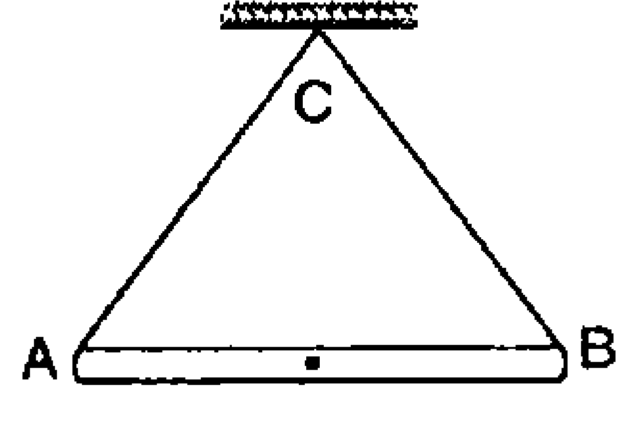


Rpta.: T = 2,5 N

http://librosysolucionarios.net

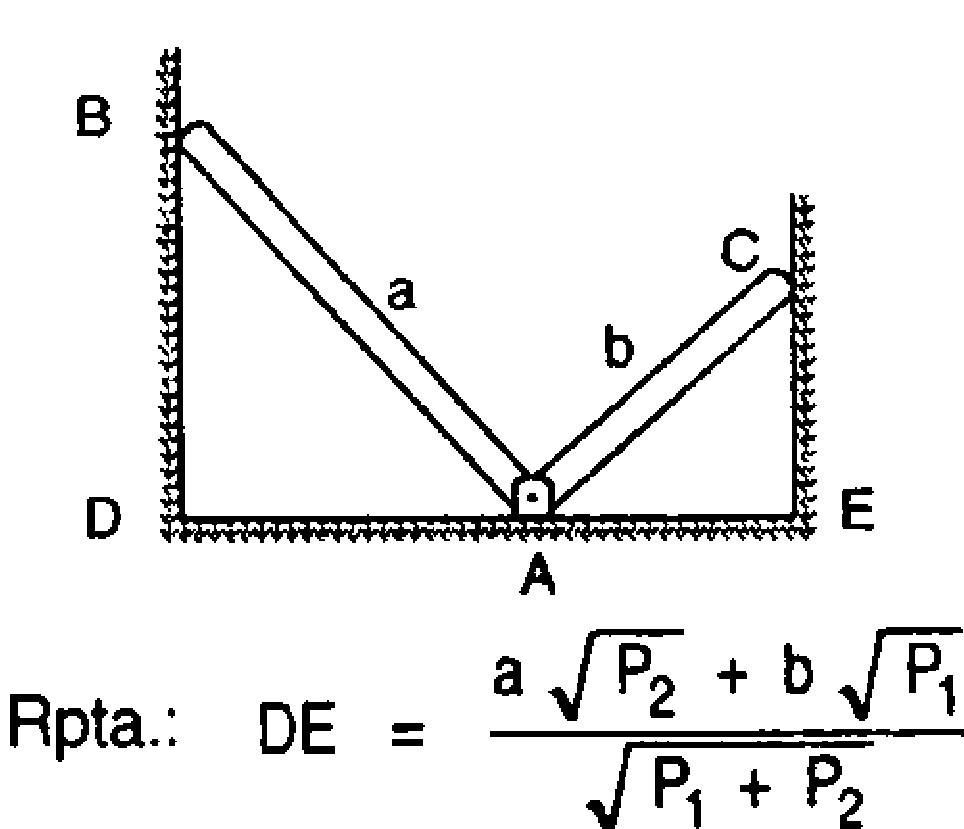
$R_{A_y} = 0{,}5\ N \quad ; \quad R_{A_x} = 1{,}5\ N$

11. La barra homogénea de 16 N y 1,2 m de largo, pende del punto C por medio de dos cables AC y BC, de 1 m de largo cada uno. Determinar las tensiones de los cables.



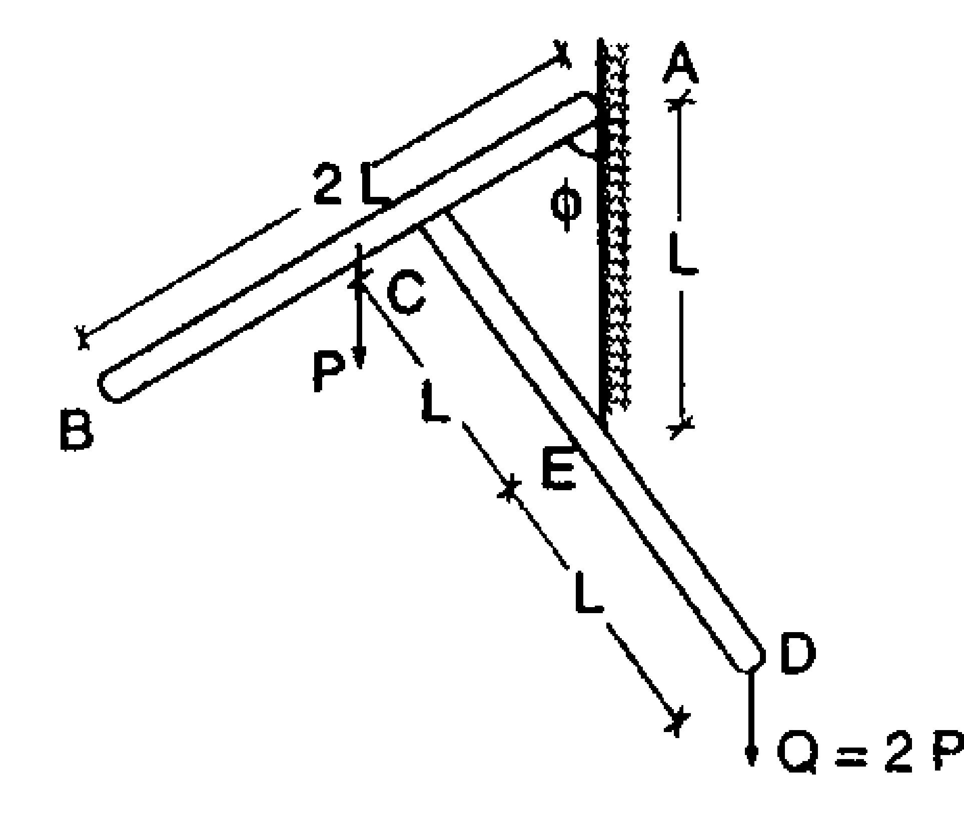
Rpta.: $T_{AC} = T_{BC} = 10\ N$

12. Dos barras homogéneas AB y AC se apoyan sobre un piso horizontal liso en el punto A y los otros extremos sobre planos verticales lisos. Determinar la distancia DE entre los muros cuando las barras están en equilibrio formando entre sí un ángulo de 90°, si se sabe que: AB = a, AC = b, el peso de AB es P_1, el peso de AC es P_2.



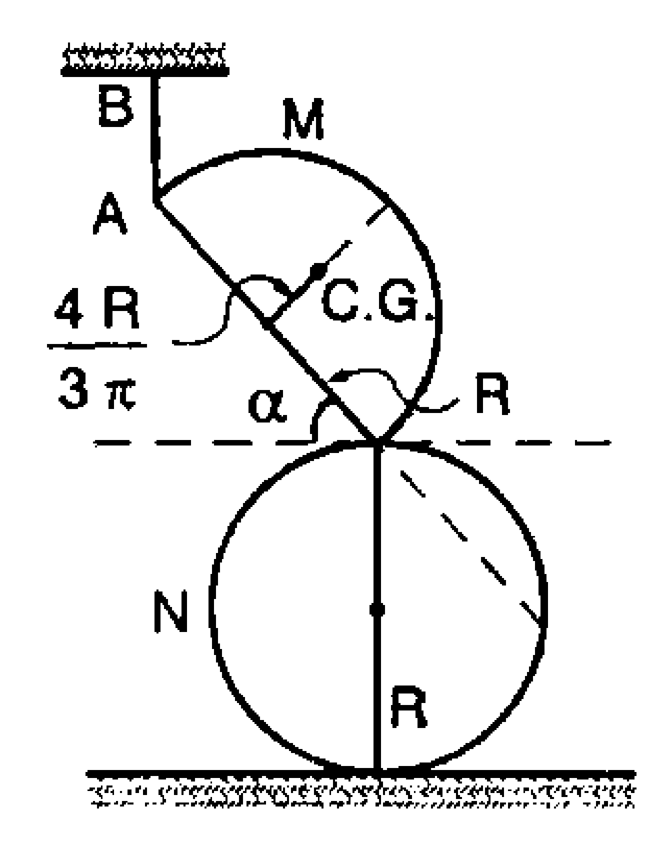
Rpta.: $$DE = \frac{a\sqrt{P_2} + b\sqrt{P_1}}{\sqrt{P_1 + P_2}}$$

13. Una barra AB homogénea, de 2L de longitud y de un peso "P" puede girar alrededor de un eje horizontal en el extremo "A" de la barra. Esta se apoya sobre una barra homogénea CD de la misma longitud 2L, que puede girar alrededor de un eje horizontal que pasa por su punto medio E. Los puntos A y E se encuentran en la misma vertical separados una distancia AE = L. Una carga Q = 2P está suspendida en el extremo D. Determinar la magnitud del ángulo "f" formado por la barra AB con la vertical en el estado de equilibrio. El rozamiento se desprecia.



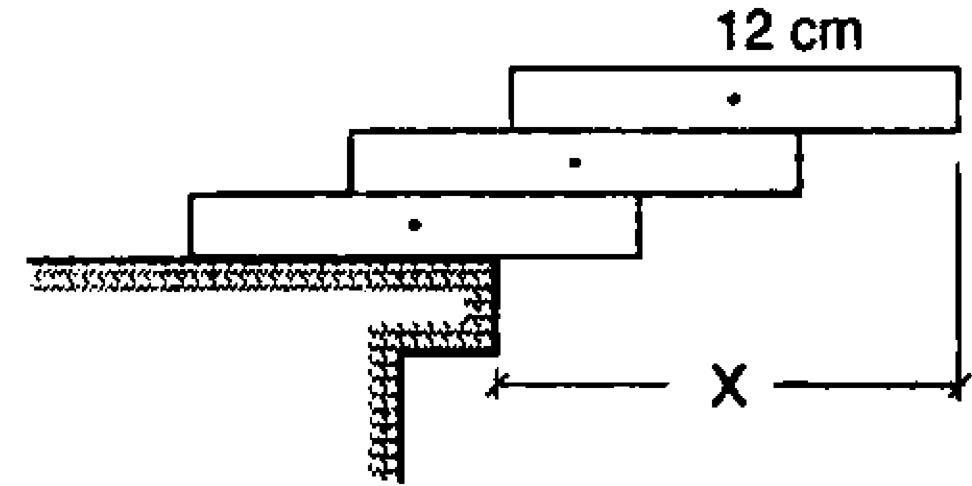
Rpta.: $\phi = 82°\ 49'\ 9{,}3''$

14. En el siguiente sistema en equilibrio, determinar la tensión en la cuerda. (Despreciar todo efecto de rozamiento y no tomar en cuenta el espesor de la plancha semicircular "M") Peso de la plancha semicircular M = W. Peso de la esfera N = W/2.



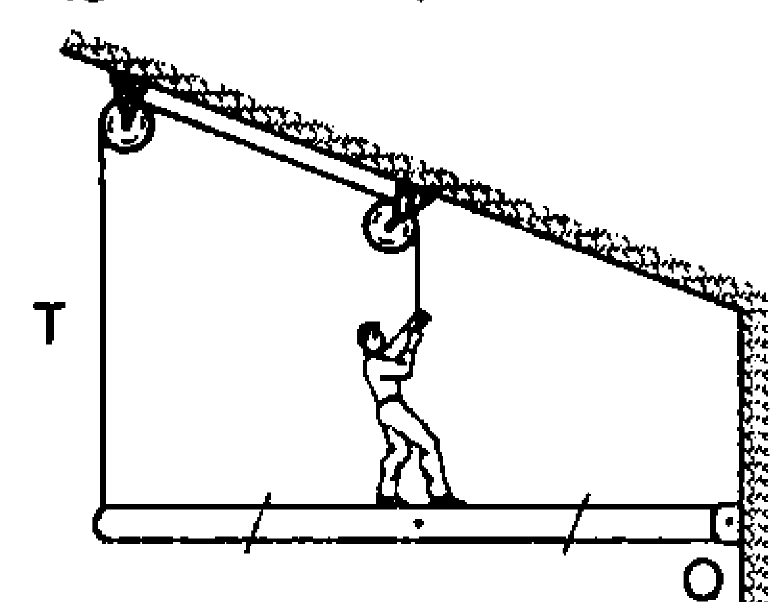
Rpta.: $$T = \frac{W}{2}\left(1 - \frac{4}{3\pi}\,\text{tg}\,\alpha\right)$$

15. Calcular el máximo voladizo para tres tablas homogéneas, cada una de 12 cm de largo (posición crítica).



Rpta.: X = 11cm

16. Una persona de 600 N se encuentra en el punto medio de una barra homogénea, articulada en "O" tal como se muestra en la figura. La tensión en la cuerda equivale a 2/3 del peso de la persona. Halle el peso de la barra horizontal, si el sistema permanece en equilibrio. ($g = 10\ m/s^2$)



Rpta.: 600 N

http://librosysolucionarios.net

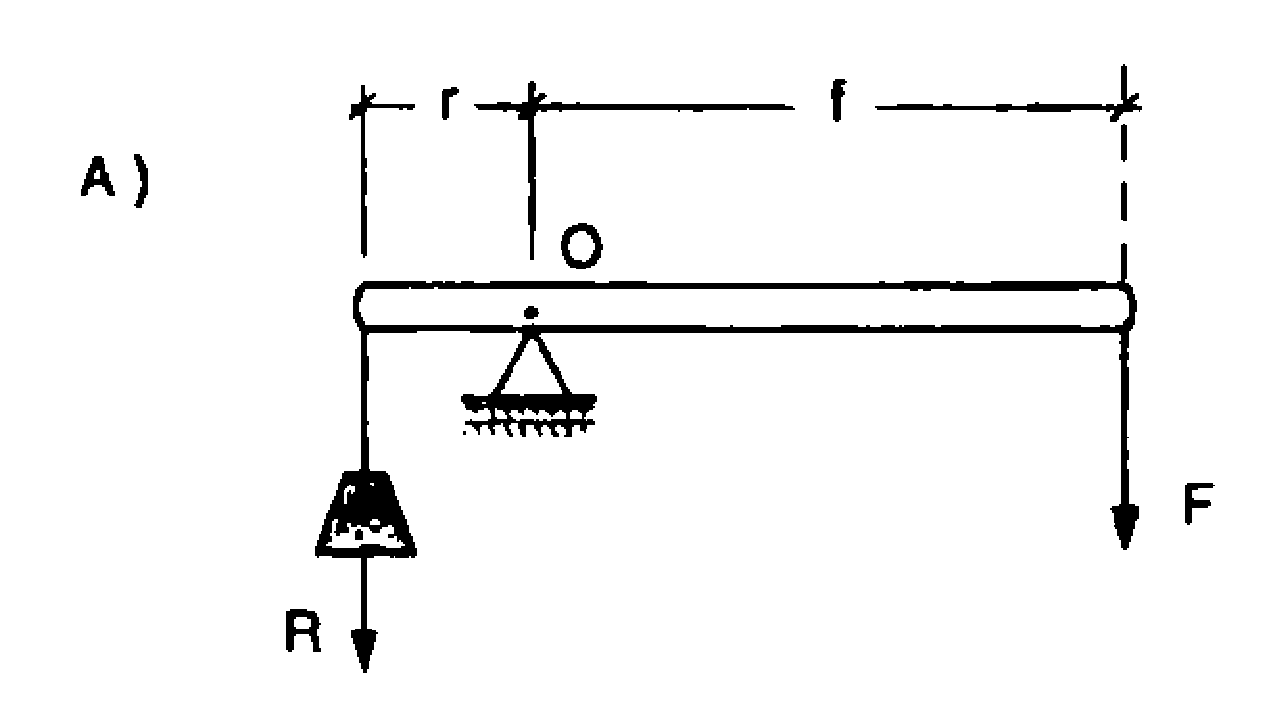
MÁQUINAS SIMPLES

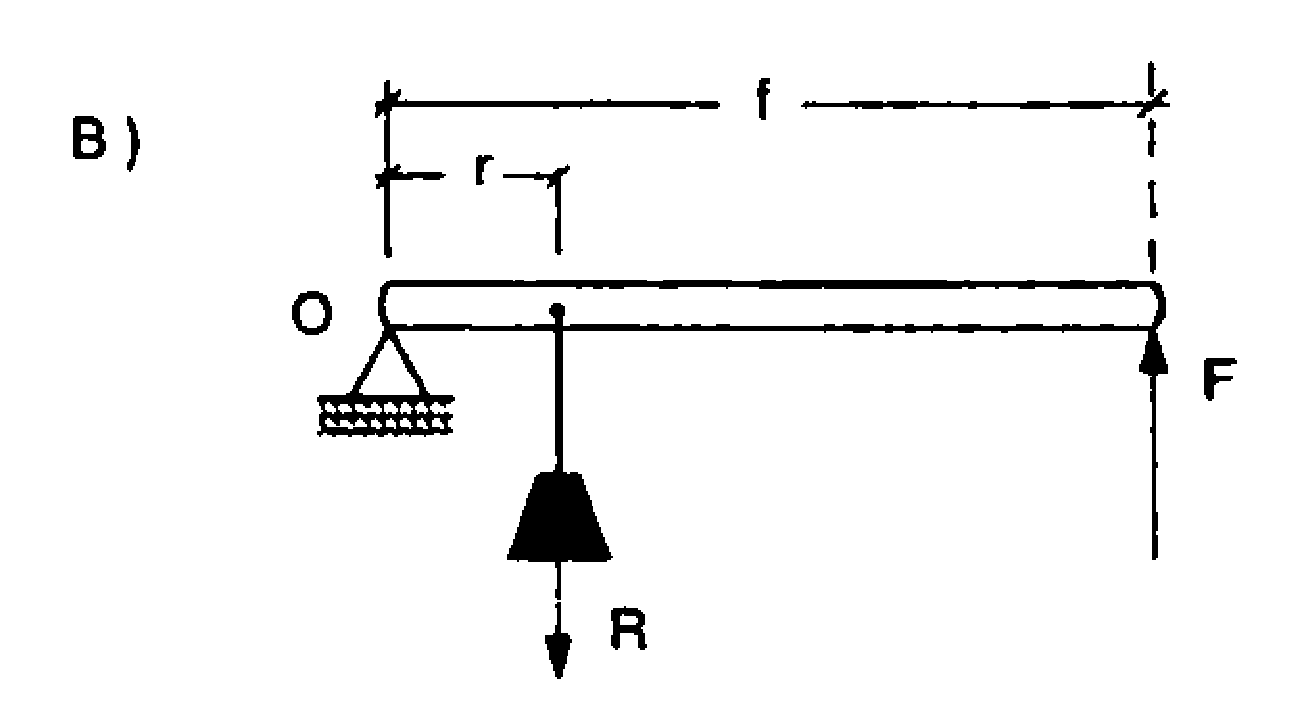
Son dispositivos simples y mecánicos que sirven para multiplicar la fuerza.

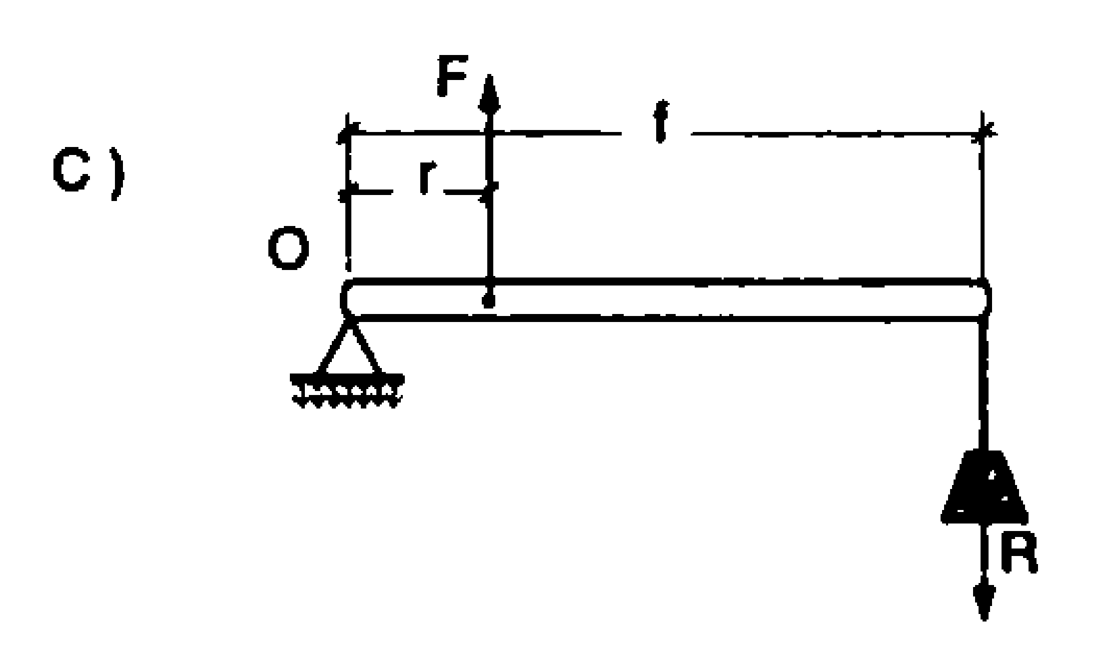
LA PALANCA

Es una barra rígida, sometida a dos esfuerzos y apoyada en un punto. Los esfuerzos que soporta son: La resistencia "R" y la Fuerza "F".

Según la posición de la resistencia, fuerza y punto de apoyo, las palancas pueden ser: A) Interapoyantes, B) Interresistentes y C) Interpotentes.







ECUACIÓN DE EQUILIBRIO DE LA PALANCA

Tanto la resistencia "R" como la fuerza "F" constituyen una cupla de momento con respecto al punto de apoyo "O". La condición para que haya equilibrio es que: (llamando negativo a la tendencia al giro en un sentido, positivo al contrario se tiene)

$$\Sigma M_O = 0$$

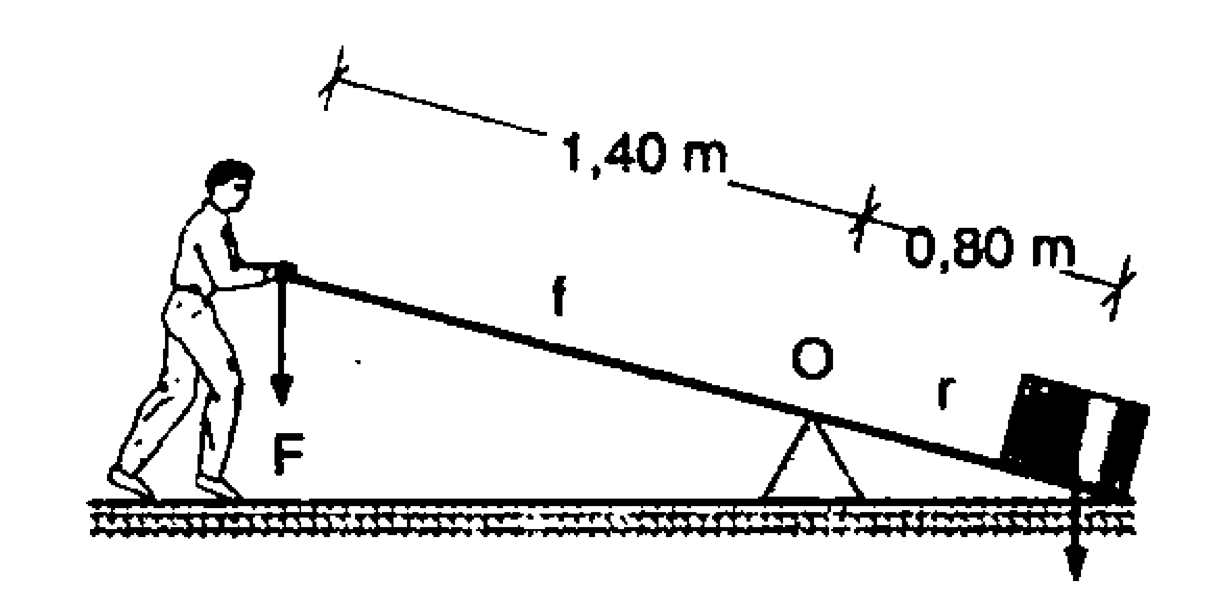
es decir: $R \cdot r - F \cdot f = 0$

$$\therefore \quad \boxed{R \cdot r = F \cdot f}$$

Donde:

F : Fuerza
R : Resistencia
f : Brazo de fuerza
r : Brazo de la resistencia

Ejemplo : Calcular la fuerza necesaria para mover el bloque de la figura adjunta.



RESOLUCIÓN : Recordando que:

$$F \cdot f = R \cdot r \quad ; \quad \text{de donde:}$$

$$F = R\frac{r}{f} = 100\,N\,\frac{0{,}8\,m}{1{,}4\,m}$$

Rpta.: $F = 57{,}14\ N$

NOTA: De la ecuación de la palanca, despejando R:

$$\boxed{R = F\frac{f}{r}}$$

La relación $\frac{f}{r}$ se llama "factor de multiplicación de la palanca".

EL TORNO O CABRESTANTE

Es una palanca interapoyante, la constituye un cilindro de radio "r", al cual se le en-

http://librosysolucionarios.net

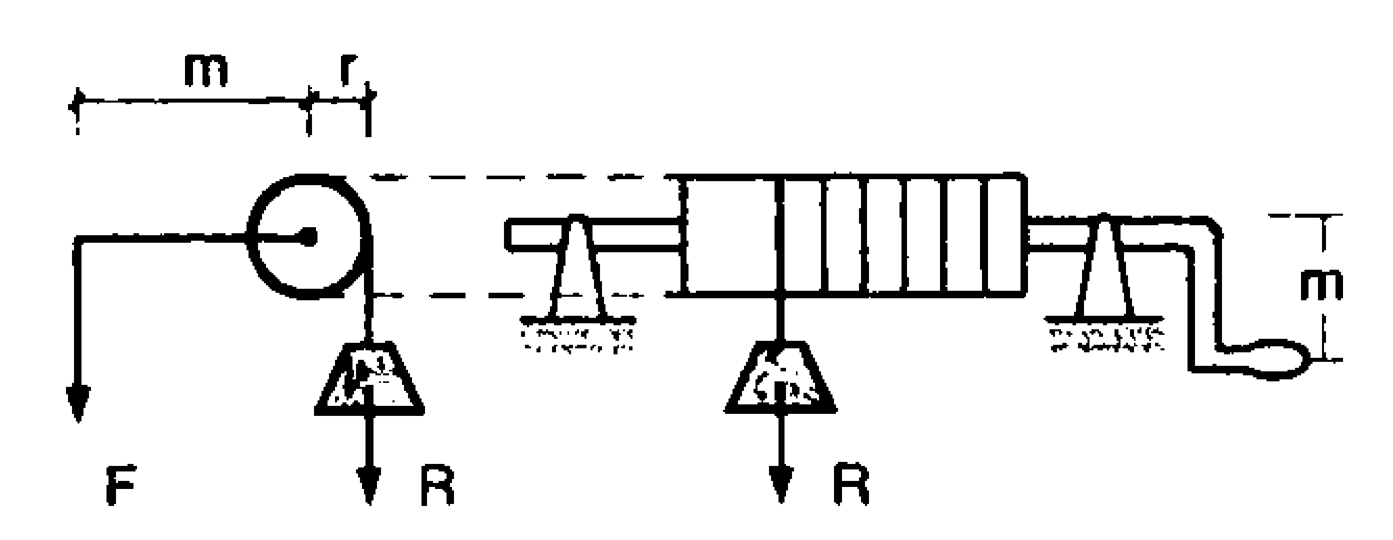
rolla una cuerda. El cilindro está conectado a una manija por su eje, la manija tiene un brazo "m". La condición de equilibrio es igual que la palanca.

$$\Sigma M_O = 0$$

$$R . r - F . m = 0$$

de donde: $\boxed{R . r = F . m}$

R : Resistencia
F : Fuerza
r : Radio del cilindro
m : Brazo de la manija



Ejemplo : Se quiere sacar 20 litros de agua de un pozo artesiano con un torno de las siguientes características: radio de cilindro 20 cm, brazo de la manija o manivela 30 cm. Calcular la fuerza necesaria.

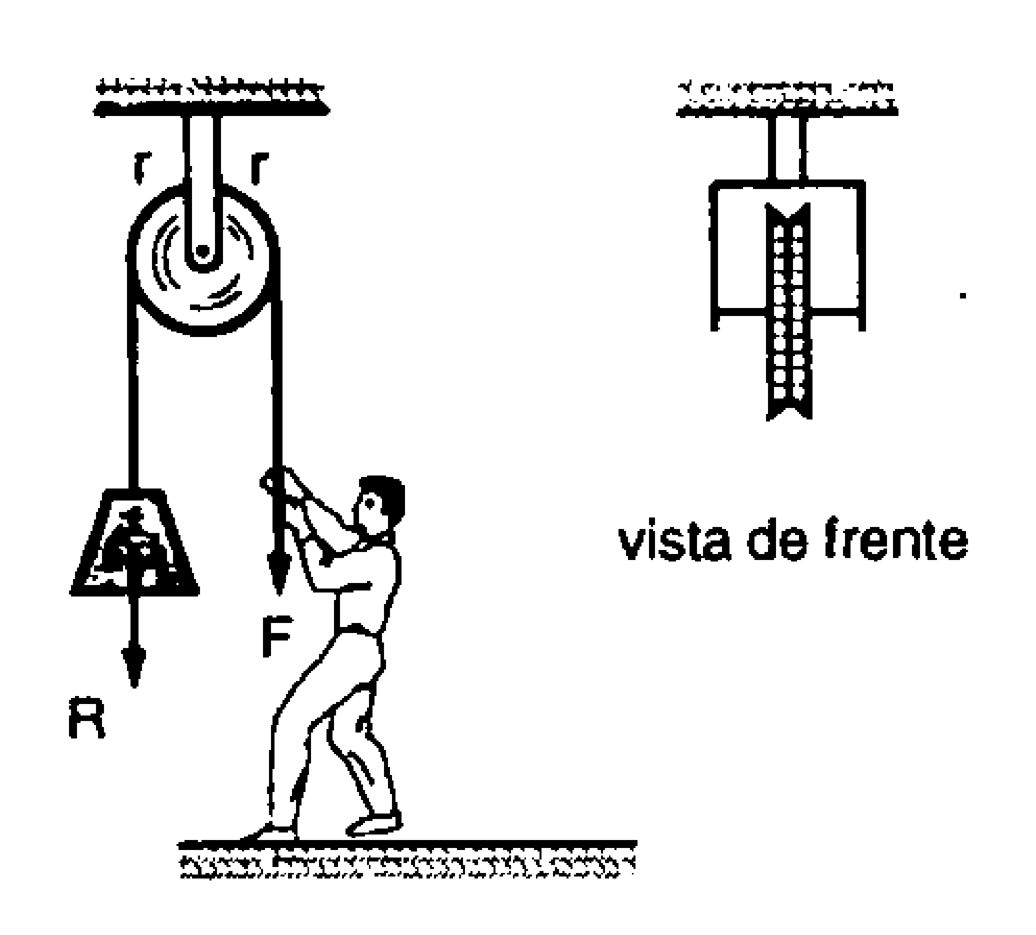
RESOLUCIÓN : $R r = F m$

$$F = R \frac{r}{m} = 20 \text{ N} \times \frac{0{,}2 \text{ m}}{0{,}3 \text{ m}}$$

Rpta.: $F = 13{,}33 \text{ N}$

LA POLEA FIJA

Es un rueda acanalada que gira alrededor de un eje fijo que pasa por su centro.
La polea fija no ahorra esfuerzos, sólo cambia la dirección de la fuerza que se aplica, ya que siendo una palanca interapoyante, como toda palanca:



$$\Sigma M_O = 0,$$

es decir: $R r - F r = 0$

$\therefore$ $\boxed{R = F}$

LA POLEA MÓVIL

Es una rueda acanalada de cuyo eje de giro, que pasa por su centro, pende un peso. Puede ser: de fuerzas paralelas y de fuerzas no paralelas.

1. Polea móvil de fuerzas paralelas:

Como muestra la figura, las cuerdas que sostienen la polea están paralelas. Como es una palanca interapoyante la ecuación de equilibrio es $\Sigma F_y = 0$, y como son paralelas se tiene:

$$F + F - R = 0$$

$\therefore$ $\boxed{F = \frac{R}{2}}$

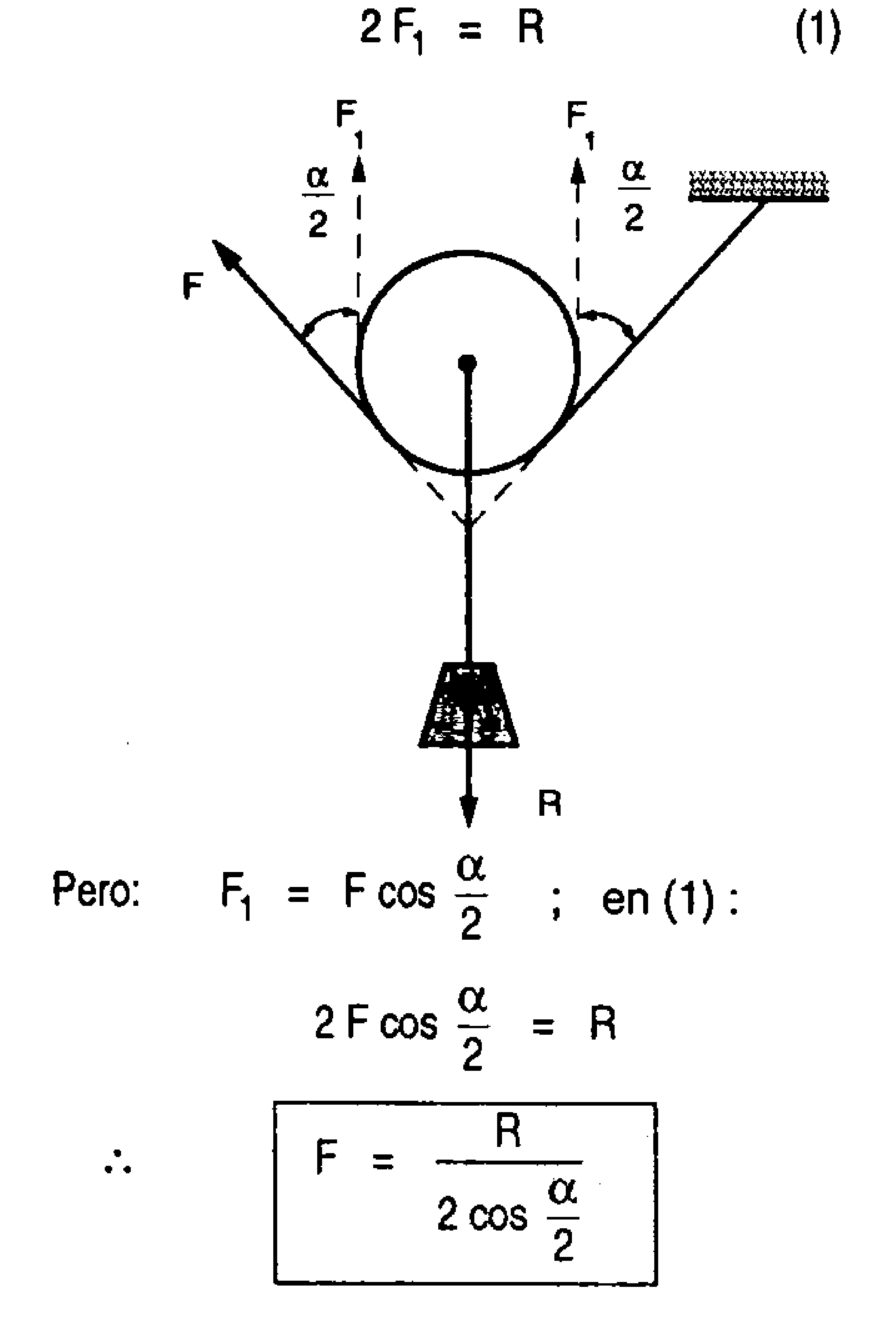
Lo que quiere decir que la tensión de la cuerda con la que hace fuerzas es la mitad de la resistencia o peso, que se quiere levantar.

2. Polea móvil de fuerzas no paralelas:

Como se observa en la figura, las prolongaciones de la cuerda que sostiene el peso se encuentran en un punto de la dirección de la resistencia.
La condición de equilibrio es $\Sigma F_y = 0$,
es decir:

http://librosysolucionarios.net

$$2F_1 = R \qquad (1)$$



Pero: $F_1 = F\cos\frac{\alpha}{2}$; en (1) :

$$2F\cos\frac{\alpha}{2} = R$$

$$\therefore \quad \boxed{F = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}}$$

Ejemplo: Las prolongaciones de unacuerda que sostiene una polea móvil forman un ángulo de 60°, ¿Cuál será la fuerza que debe hacerse para levantar un peso de 30 N ?

RESOLUCIÓN :

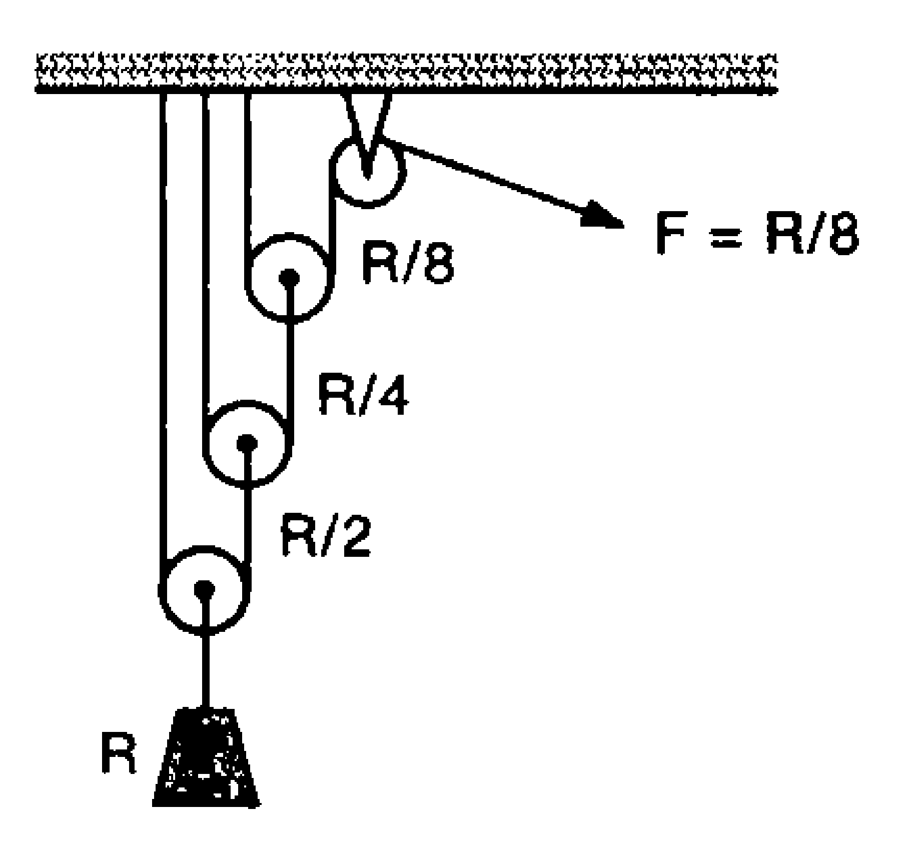
Sabiendo que: $F = \dfrac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}}$

$$F = \frac{30\text{ N}}{2\cos\frac{60^\circ}{2}} = \frac{30\text{ N}}{2\cos 30^\circ} = \frac{30\text{ N}}{2\,\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

Rpta.: $F = 17,32\text{ N}$

EL POLIPASTO

En un sistema de poleas hay tres clases: 1) aparejo potencial o trocla, 2) aparejo factorial o motón y 3) aparejo diferencial o tecle.



1. Aparejo Potencial o Trocla:

Es el conjunto de una polea fija y varias poleas móviles. La primera polea móvil de abajo, reduce a la mitad la fuerza necesaria para levantar la resistencia; la segunda de abajo reduce a la cuarta parte, la tercera a la octava, etc, es decir: en general, según el número de poleas móviles, la fuerza necesaria para levantar un peso se reduce a la resistencia dividida entre 2 elevado a una potencia igual al número de poleas móviles:

$$\boxed{F = \frac{R}{2^n}}$$

F : Fuerza aplicada.
R : Resistencia a vencer o peso que levantar.
n : Número de poleas móviles.

Ejemplo: ¿Cuál será el número de poleas móviles que se necesita para levantar un peso de 112 N con una fuerza de 7 N?

RESOLUCIÓN : sabiendo que: $F = \dfrac{R}{2^n}$

$$\therefore \quad 2^n = \frac{R}{F} = \frac{112\text{ N}}{7\text{ N}} = 16 \; ;$$

o sea: $2^n = 16 = 2^4$

Rpta.: $n = 4$

2. Aparejo Factorial o Motón:

Es un conjunto de poleas móviles y un conjunto de poleas fijas. Puede ser n_1 el

número de poleas móviles y n_2 el número de poleas fijas lo que quiere decir que el número total de poleas será n:

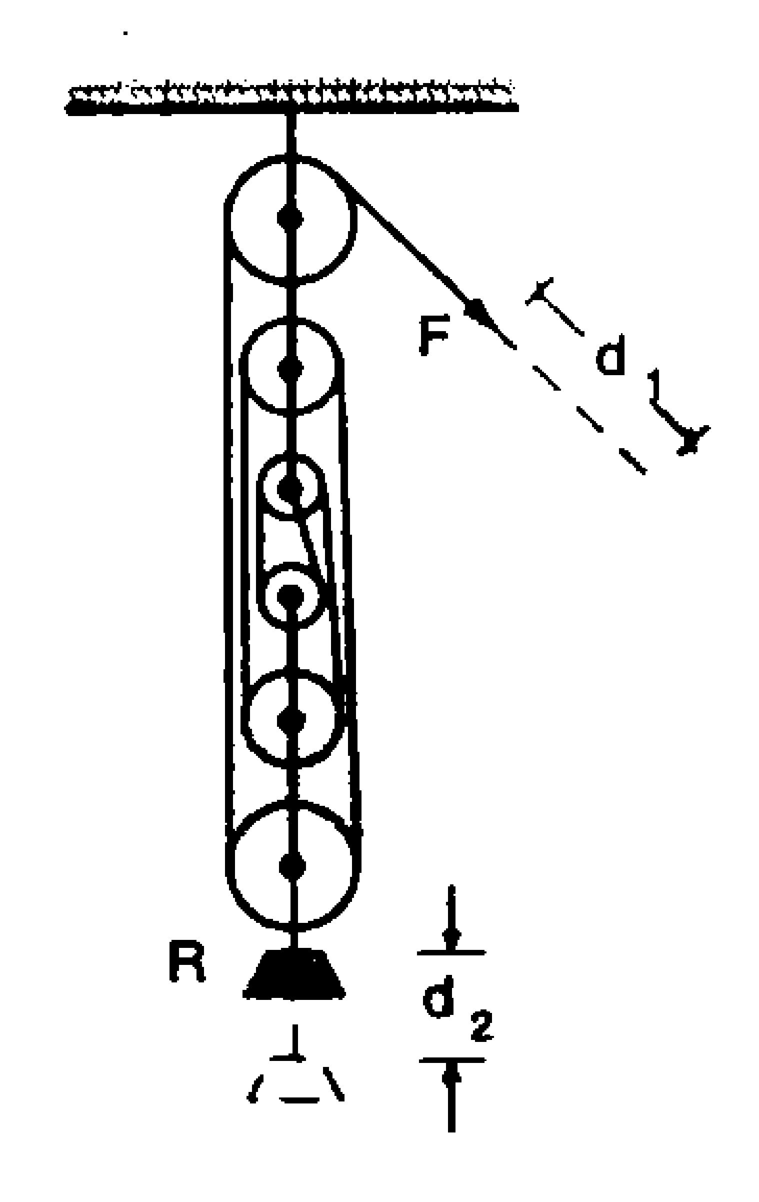
$$n_1 + n_2 = n$$

Pero resulta que el número de poleas móviles y fijas tiene que ser el mismo, es decir:

$$n_1 = n_2$$

Si la fuerza "F" se desplaza una distancia d_1, la resistencia "R" sube una distancia d_2. El trabajo realizado por "F" ha sido transmitido a la resistencia "R", luego igualando trabajos:

$$F \cdot d_1 = R \cdot d_2$$



Pero $\quad d_1 = n \cdot d_2$

$$\therefore \quad F \cdot n \cdot d_2 = R \cdot d_2$$

$$\boxed{F = \frac{R}{n}}$$

Donde:

F : Fuerza requerida para equilibrar R.
R : Resistencia, o peso que se quiere levantar.
n : Número total de poleas entre fijas y móviles.

Ejemplo: ¿Cuántas poleas son necesarias, en un aparejo factorial o motón, entre fijas y móviles, para ahorrar 1/6 de esfuerzo con respecto al peso de 120 N que se quiere levantar?

RESOLUCIÓN :

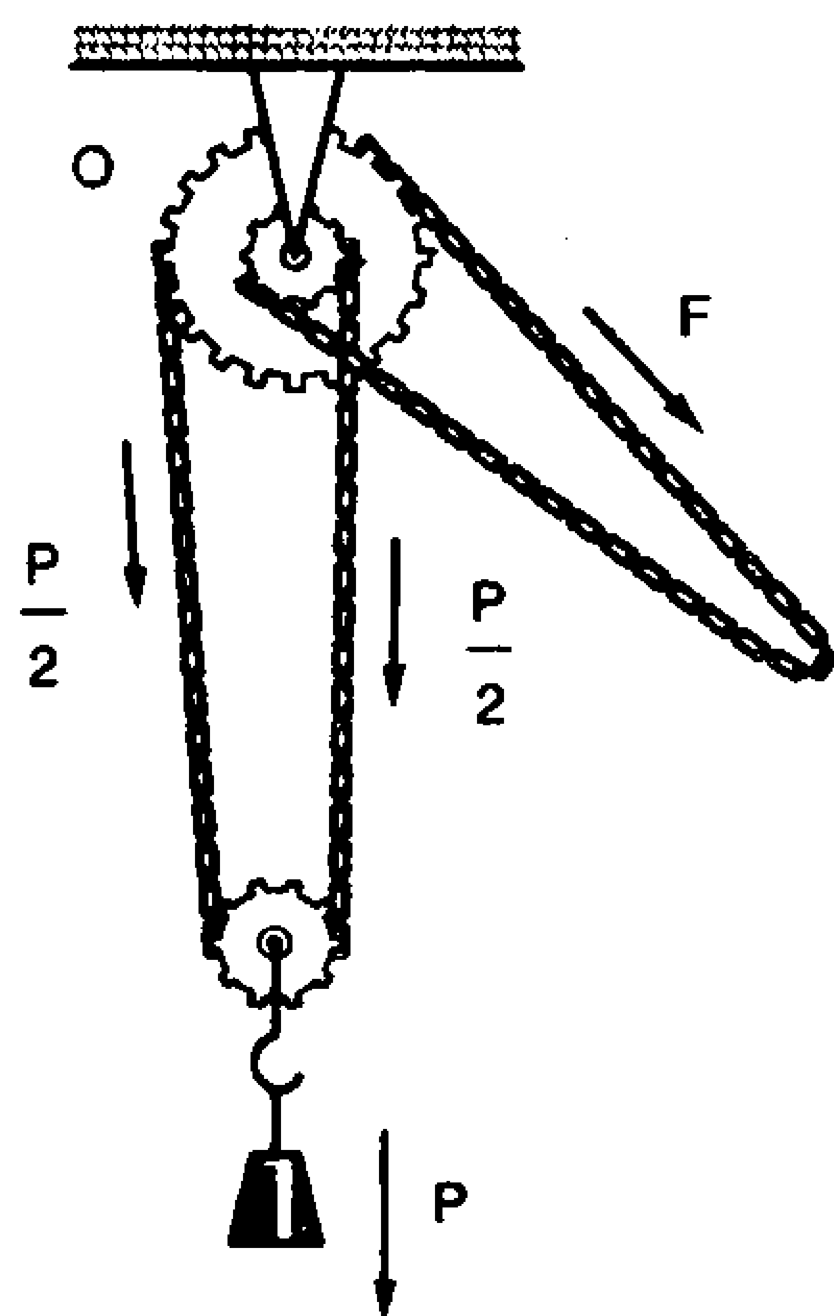
Sabiendo que: $F = \frac{R}{n} \Rightarrow n = \frac{R}{F}$

Pero: $F = \frac{1}{6}R \Rightarrow n = \frac{R}{\frac{1}{6}R}$

Rpta.: $n = 6$

3. Aparejo Diferencial o Tecle:

Consta de un polea fija con dos radios distintos (R y r) y con perímetros engranados; en realidad se trata de dos poleas soldadas en sus caras laterales; además, consta de una polea móvil, también con perímetro engranado, ésta polea es la que soporta la carga "P"



La condición de equilibrio ideal se obtiene tomando momentos con respecto al eje de giro "O" de la polea fija.

$$\Sigma M_O = 0$$

$$FR + \frac{P}{2}r - \frac{P}{2}R = 0$$

$$\therefore \quad F = \frac{P(R - r)}{2R}$$

http://librosysolucionarios.net

Aquí no se considera los rozamientos.

Ejemplo: ¿Cuál será el esfuerzo necesario para levantar un auto que pesa 1 200 N, con un tecle cuyos radios de sus poleas fijas son 15 cm y 8 cm?

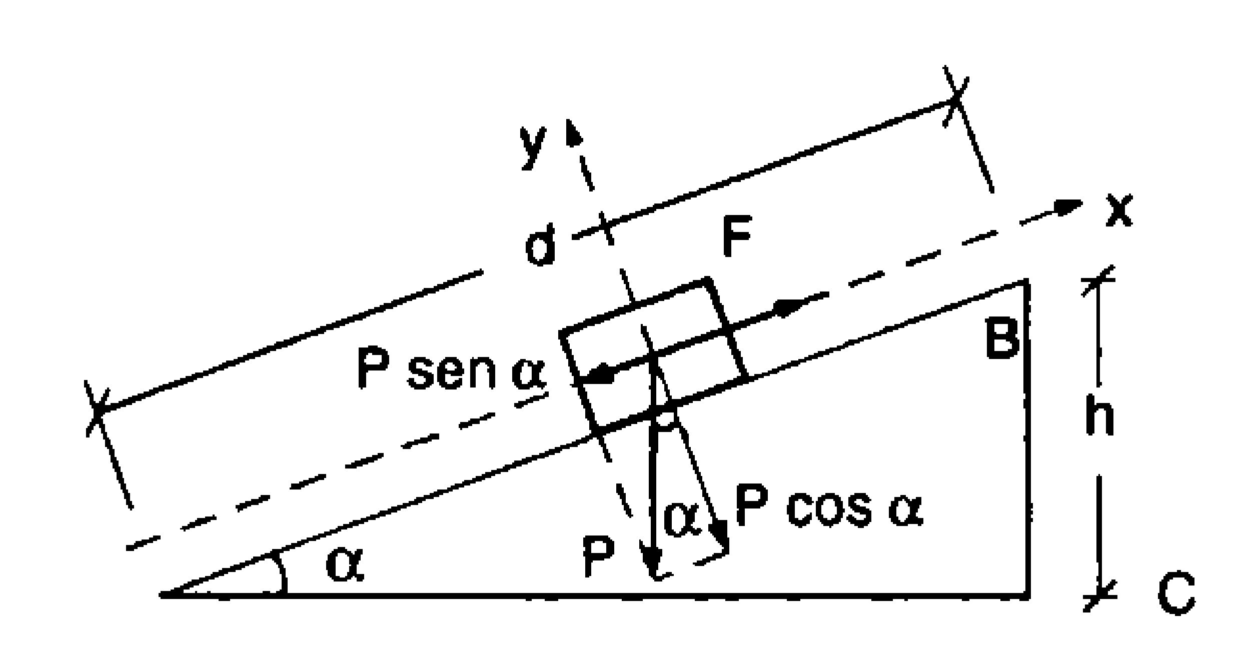
RESOLUCIÓN : $F = \frac{P(R - r)}{2R}$

$$F = \frac{1\,200\text{ N }(15\text{ cm} - 8\text{ cm})}{2 \times 15\text{ cm}}$$

Rpta.: $F = 280\text{ N}$

PLANO INCLINADO

Como su nombre lo indica, es un plano inclinado, formando un ángulo determinado "α" con la horizontal, a lo largo del cual se desplaza un móvil. La condición de equilibrio se obtiene igualando las fuerzas paralelas al plano inclinado, conforme se muestra en la figura. Sea "P" el peso del bloque sobre el plano inclinado, y "α" el ángulo que este plano forma con la horizontal, "d" la longitud del plano y "h" su altura mayor. $\Sigma F_x = 0$.



$$F = P \text{ sen a}$$

pero, de la figura: $\text{sen } \alpha = \frac{h}{d}$

luego, reemplazando: $F = P \times \frac{h}{d}$

$$\therefore \boxed{\frac{F}{P} = \frac{h}{d}}$$

Ejemplo: Calcular la fuerza necesaria para subir un cuerpo a lo largo de un plano inclinado de 8m de largo y 3 m de alto; el cuerpo sube sin rozamiento y pesa 300 N.

RESOLUCIÓN : $d = 8\text{ m}$

$F = ?$ $P = 300\text{ N}$

$h = 3\text{ m}$

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{d}$$

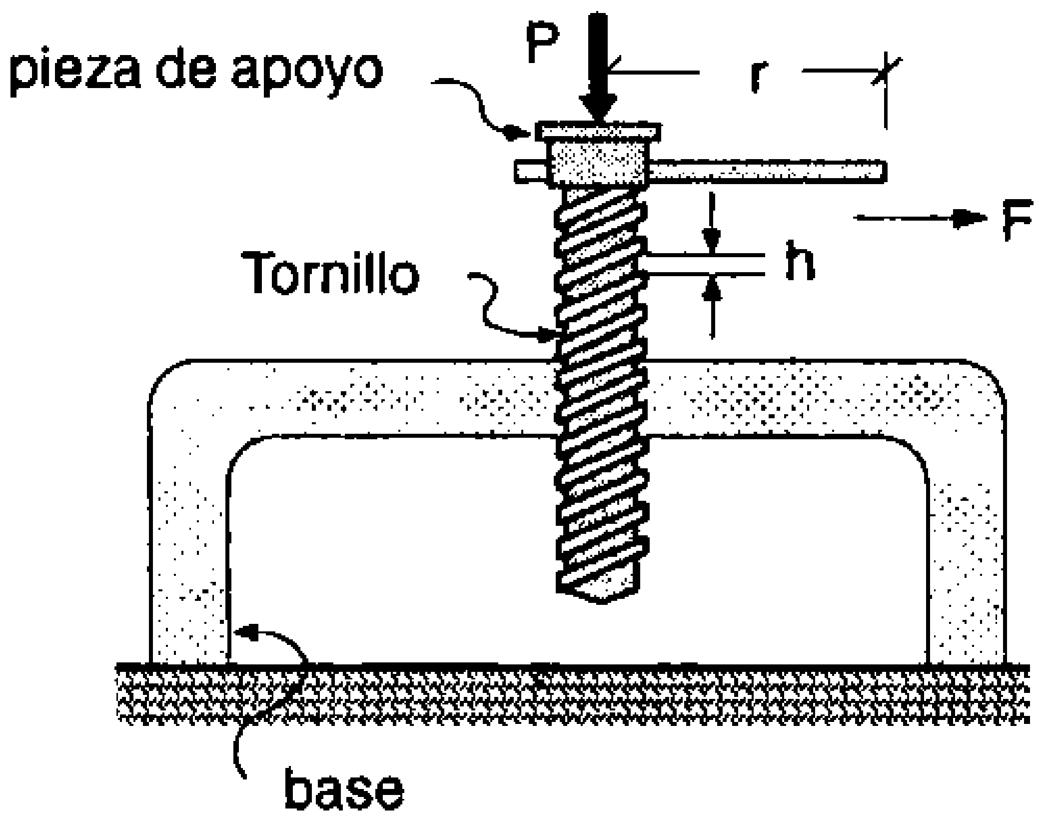
Despejando F y reemplazando datos:

$$F = P \times \frac{h}{d} = \frac{300\text{ N} \times 3\text{ m}}{8\text{ m}}$$

Rpta.: $F = 112{,}5\text{ N}$

TORNILLO, GATO O CRIC

Es una máquina simple que consiste en planos inclinados desarrollados (enrollados) alrededor de un eje cilíndrico. La fuerza "F" que se aplica sobre una barra perpendicular a un eje cilíndrico es a su vez perpendicular a la barra y origina un movimiento circunferencial.



La ecuación de equilibrio es igual a la del plano inclinado, ya que cada espira o "hilo" es un plano inclinado.

$$\boxed{\frac{F}{P} = \frac{h}{2\pi r}}$$

F : Fuerza horizontal aplicada a la palanca.
P : Peso que se quiere levantar.
h : Carrera o distancia entre hilos.
r : Longitud de la palanca.
$2\pi r$: Longitud de la circunferencia de la palanca de radio r.

Ejemplo: ¿Cuál debe ser la longitud de una palanca, que aplicada a un gato

http://librosysolucionarios.net

de 8 mm de carrera y con una fuerza de 10 N, levanta un peso de 800 N?

RESOLUCIÓN : $\frac{F}{P} = \frac{h}{2\pi r}$

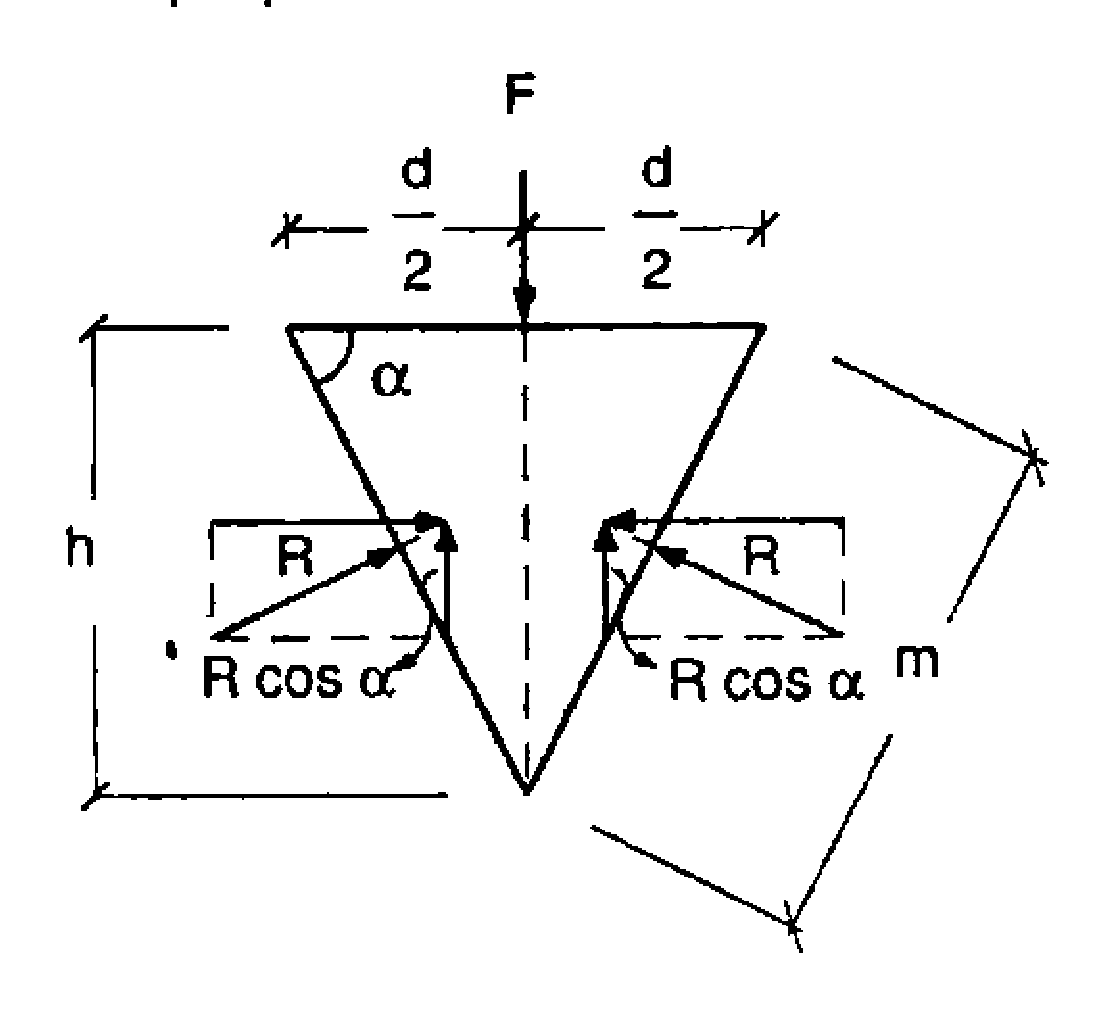
$$r = \frac{Ph}{2\pi F} = \frac{800\ N \times 0{,}8\ cm}{2 \times 3{,}14 \times 10\ N}$$

Rpta.: $r = 10{,}19\ cm = 0{,}101\ 9\ m$

CUÑA

Es una pieza mecánica que puede tener la forma de un cono o de un prisma triangular.

Sea "h" la altura de la cuña, "d" la longitud de su diámetro o de su base rectangular y "α" el ángulo que hace la base con la generatriz cuya longitud es "m". La ecuación de equilibrio se obtiene igualando fuerzas verticales. Debe tenerse presente que la resistencia es perpendicular a las caras de la cuña.



Del gráfico, se observa: $F = 2\ R \cos a$

Pero: $\cos\alpha = \frac{d/2}{m}$; luego:

$$F = R \times \frac{d}{m}$$

Pero: $m = \sqrt{\left(\frac{d}{2}\right)^2 + h^2} = \frac{\sqrt{d^2 + 4h^2}}{2}$

$$\therefore \quad F = \frac{2\ R\ d}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}$$

Ejemplo: ¿Cuál debe ser la relación de la altura y la base de una cuña para ahorrar 1/8 de fuerza, con relación a la resistencia?

RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$F = \frac{2\ R\ d}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}$$

Sustituyendo valores:

$$\frac{1}{8} R = \frac{2Rd}{\sqrt{d^2 + 4h^2}}$$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$\frac{1}{64} = \frac{4\ d^2}{d^2 + 4h^2}$$

de donde: Rpta.: $\frac{h}{d} = 7{,}98 \approx 8$

VENTAJAS Y RENDIMIENTO MECÁNICO

Ventaja Mecánica Actual o Real:

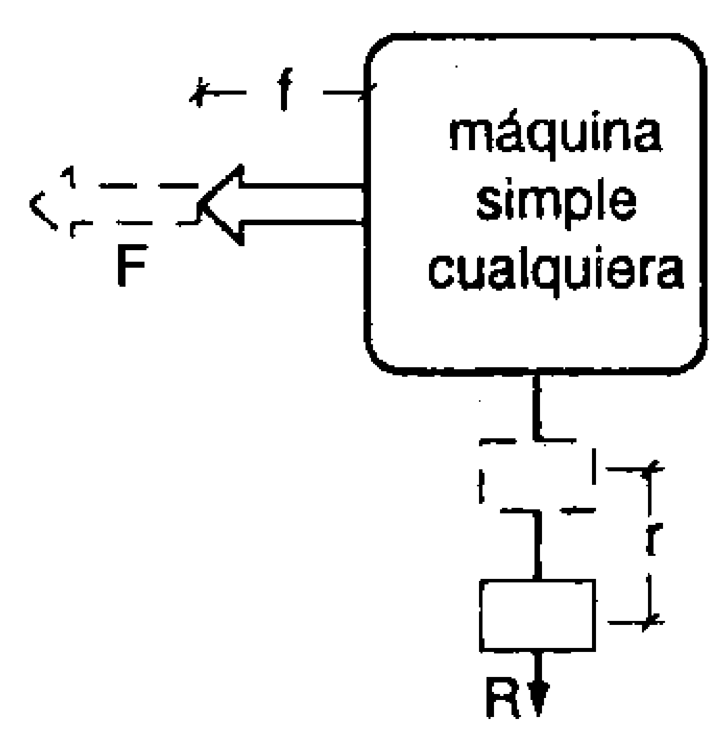
Es el factor de multiplicación de la fuerza de una máquina, se expresa así:

$$V_A = \frac{R}{F} \qquad (I)$$

R : Peso o resistencia que vencer.
F : Fuerza real para vencer a R.

Como: $\frac{R}{F} = \frac{m}{d}$,

la ventaja será mayor cuanto mayor sea "m" con respecto a "d".



http://librosysolucionarios.net

Ventaja Mecánica Ideal:

El trabajo comunicado a una máquina es F.f ,mientras que el trabajo realizado por la máquina es R.r , mas el trabajo perdido por el rozamiento o fricción dentro de la máquina W_f , es decir:

$$Ff = Rr + W_f$$

Cuando no hay pérdida de trabajo por rozamiento o fricción $W_f = 0$, entonces:la ventaja mecánica ideal (V_I) de una máquina es:

$$V_I = \frac{f}{r} \qquad (II)$$

V_I : Ventaja ideal.

f : Distancia recorrida por la fuerza.

r : Distancia recorrida por la carga.

Rendimiento Mecánico:

Se define como la relación entre el trabajo entregado por la máquina y el trabajo recibido; en otras palabras, la relación entre el trabajo útil y el trabajo motor.

$$Re = \frac{T_u}{T_m} \qquad (III)$$

Pero: $T_m = F.f$ y $T_u = R.r$

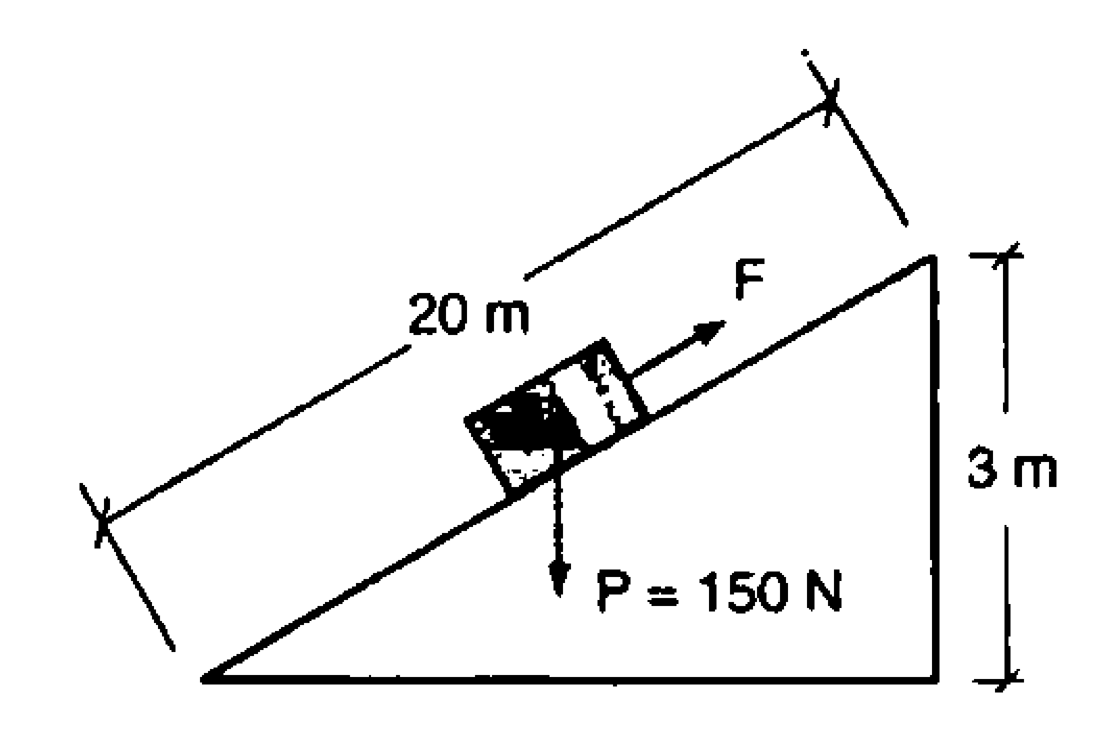
Sustituyendo en (III) :

$$Re = \frac{V_A}{V_I} \qquad (IV)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Por un plano inclinado de 20 m de longitud y 3 m de altura se quiere subir, deslizando sobre el plano, un peso de 160 N, sin fricción. Calcular:

a) La ventaja mecánica ideal del plano.
b) La ventaja mecánica actual con una fuerza de 50 N.
c) El rendimiento mecánico.



RESOLUCIÓN :

Cálculo de la fuerza necesaria para mantener en equilibrio. Aplicando la condición de equilibrio del plano inclinado:

$$\frac{F}{P} = \frac{h}{d}$$

$$F = P \cdot \frac{h}{d} = 150\,N \cdot \frac{3\,m}{20\,m} = 22{,}5\,N$$

a) Cálculo de la ventaja mecánica ideal

$$V_I = \frac{\text{distancia "f" recorrida por la fuerza}}{\text{distancia "r" recorrida por la carga}}$$

$$V_I = \frac{20\,m}{3\,m}$$

Rpta.: $V_I = 6{,}67$

b) Cálculo de la ventaja mecánica actual:

$$V_A = \frac{\text{carga o resistencia}}{\text{fuerza motríz}} = \frac{150\,N}{50\,N}$$

Rpta.: $V_A = 3$

c) Cálculo del rendimiento mecánico:

$$Re = \frac{V_A}{V_I} = \frac{3}{6{,}67}$$

Rpta.: Re = 0,45 ó 45%

PROBLEMA 2. Con una polea o aparejo diferencial cuyos radios de la polea fija son 12 y 10 pulgadas, se quiere levantar un peso de 1 500 lbf. Calcular la fuerza necesaria si el rendimiento es de 80%

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN :

Cálculo de la fuerza ideal: "F_i" necesaria para levantar las 1 500 lbf suponiendo que no hay rozamiento, es decir suponiendo que el rendimiento es 100%.

R = 12" F = ?

P = 1 500 lb f

r = 10"

Rend = 80%

$$F_I = \frac{P(R-r)}{2R}$$

$$F_I = \frac{1\,500 \text{ lbf } (12 \text{ pulg} - 10 \text{ pulg})}{2 \times 12 \text{ pulg}}$$

$$F_I = 125 \text{ lbf}$$

Cálculo de la ventaja ideal V_I

$$V_I = \frac{P}{F_I} = \frac{1\,500 \text{ lbf}}{125 \text{ lbf}} = 12$$

Pero lo real es que hay rozamiento y por consiguiente su rendimiento, es 80%, lo que quiere decir que la fuerza real será mayor que 125 lbf.

Recordando que: $R_e = \frac{V_A}{V_I}$

$$V_A = \frac{1\,500 \text{ lbf}}{F} \quad \text{y} \quad V_I = 12$$

$$\therefore \quad 0{,}80 = \frac{1\,500 \text{ lbf}}{12F}$$

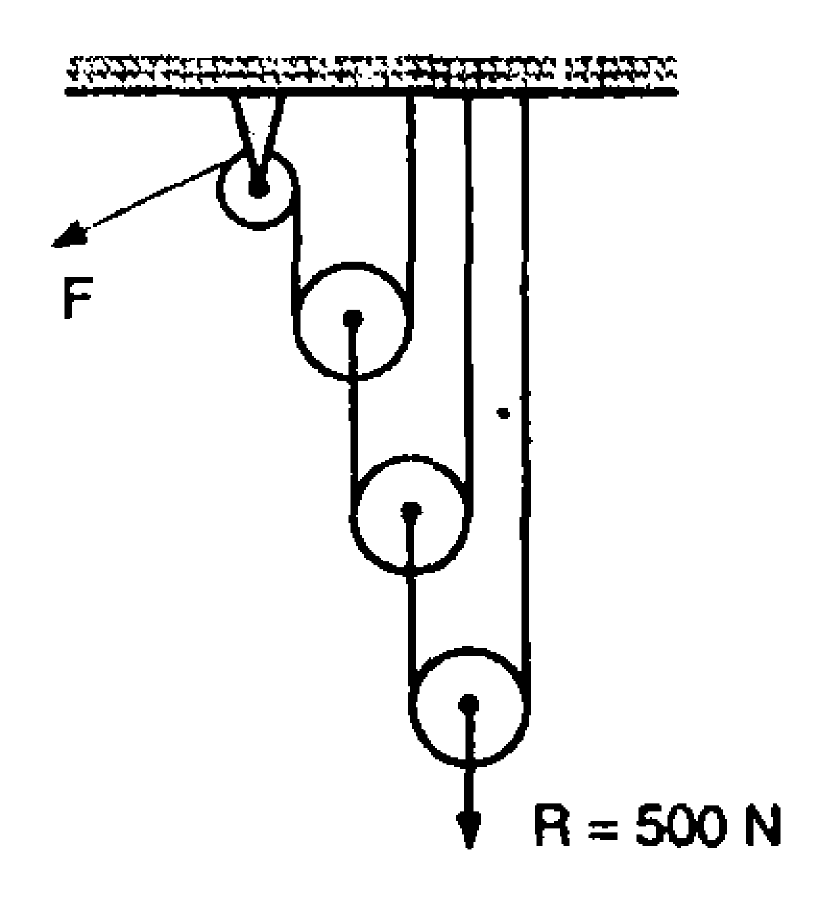
de donde: $F = 156{,}25$ lbf

convirtiendo a newton:

$$F = 156{,}25 \text{ lbf} \times 4{,}448 \text{ N/lbf}$$

Rpta.: F = 695 N

PROBLEMA 3. La figura que a continuación se muestra es un aparejo potencial. Calcular la fuerza que se necesitaría para levantar el peso que se indica.

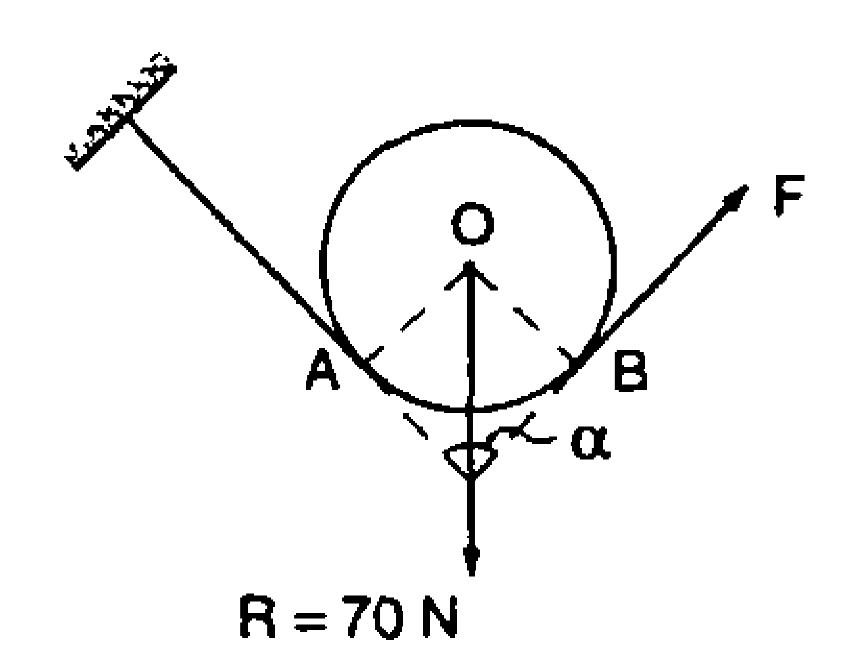


RESOLUCIÓN : $F = \frac{R}{2^n}$

$$F = \frac{500 \text{ N}}{2^3} = \frac{500 \text{ N}}{8}$$

Rpta.: F = 62,5 N

PROBLEMA 4. De una polea acanalada de 25 cm de diámetro cuelga un peso de 70 N. Una cuerda fija por un extremo la rodea en los 4/10 de su perímetro. Calcular la fuerza "F" necesaria, para mantener el sistema en equilibrio, que debe aplicarse en el otro extremo de la cuerda.



RESOLUCIÓN: Recordando que:

$$F = \frac{R}{2\cos\frac{\alpha}{2}} \qquad (I)$$

Cálculo del ángulo central AOB, el cual tiene la medida del arco AB, luego bastará calcular el arco AB:

$$\text{arco AB} = \frac{4}{10} \times 360° = 144°$$

Los ángulos AOB y "α" tienen sus lados respectivamente perpendiculares, uno es agu-

http://librosysolucionarios.net

do y el otro obtuso, luego son suplementarios, es decir:

$$\alpha + 144° = 180°$$

de donde: $\alpha = 36°$

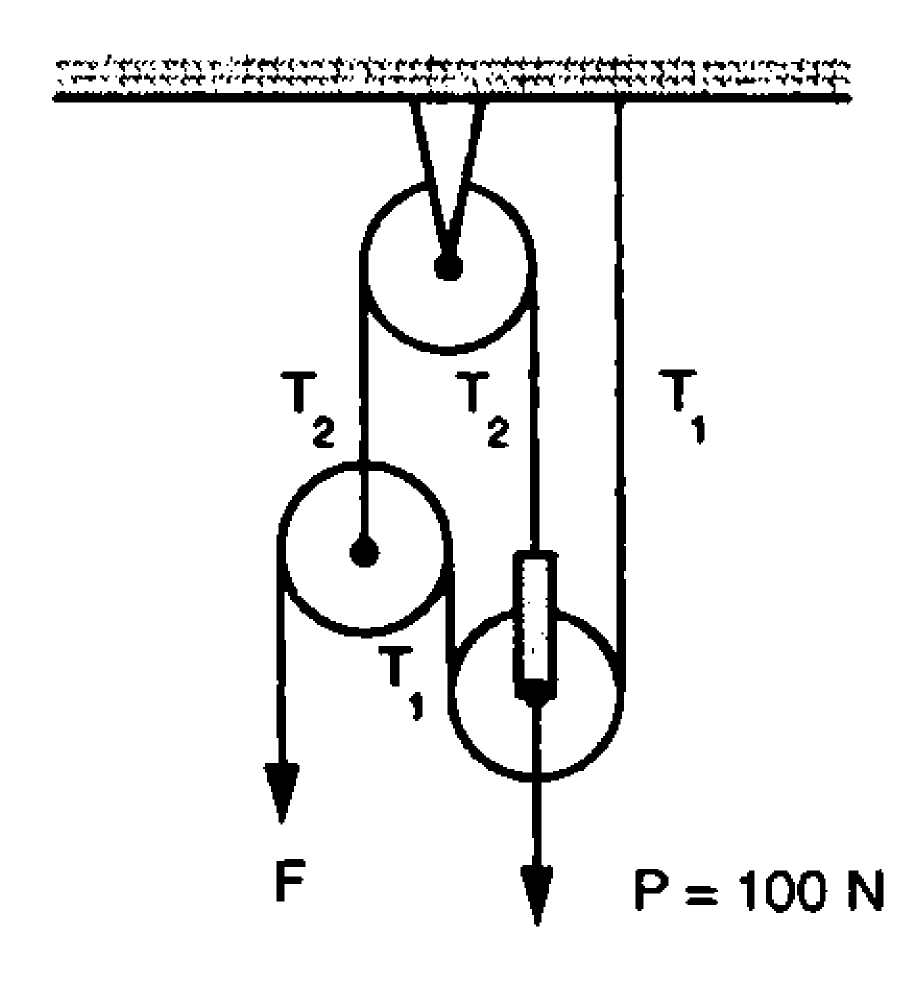
sustituyendo valores en (I) :

$$F = \frac{70\ N}{2\cos\frac{36°}{2}} \quad ; \quad \cos\frac{36°}{2} = 0{,}95$$

$$\therefore \quad F = \frac{70\ N}{2 \times 0{,}95}$$

Rpta.: $F = 36{,}84\ N$

PROBLEMA 5. Calcular la fuerza necesaria para levantar un peso de 100 N con el polipasto mostrado en la figura.



RESOLUCIÓN :

Observando detenidamente la figura resulta que:

$$F = T_1$$

porque se trata de la misma cuerda que pasa por las dos poleas móviles.

Por otro lado:

$$T_2 = F + T_1 \quad ó \quad T_2 = 2F$$

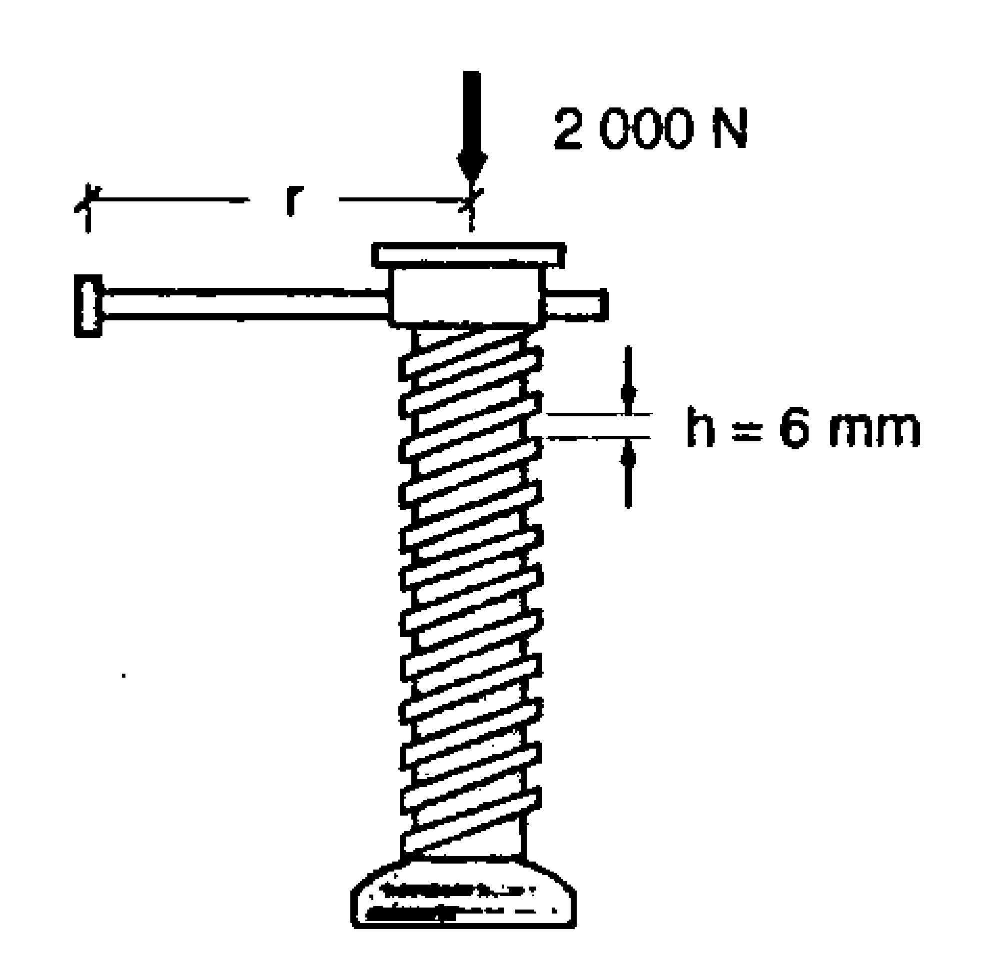
Ahora: el peso de los 100 N está soportado por $T_2 + T_1 + T_1$, luego:

$$100\ N = T_2 + T_1 + T_1 = T_2 + 2T_1$$

sustituyendo por F: $100\ N = 2F + 2F = 4F$

Rpta.: $F = 25\ N$

PROBLEMA 6. Un gato mecánico tiene un tornillo de 6 mm de paso, y un brazo de palanca de 50 cm. Calcular la fuerza necesaria para levantar un peso de 2 000 N si su rendimiento es del 45%.



RESOLUCIÓN : $h = 6\ mm$

$F = ?$ $r = 50\ cm$

$P = 2\,000\ N$

$R = 45\%$

recordando que: $\frac{F}{P} = \frac{h}{2\pi r}$

$$F = \frac{h P}{2\pi r}$$

sustituyendo valores:

$$F = \frac{0{,}6\ cm \times 2\,000\ N}{2 \times 3{,}14 \times 50\ cm} = 3{,}8\ N$$

Pero como el rendimiento es sólo del 45%, la fuerza real que tendrá que aplicarse será mayor:

$$F = 3{,}8 \times \frac{100}{45}$$

Rpta.: $F = 8{,}44\ N$

OTRO MÉTODO :

Por definición de rendimiento mecánico "R", se tiene:

$$R = \frac{\text{trabajo entregado por la máquina}}{\text{trabajo recibido por la máquina}} \quad (I)$$

trabajo entregado $= P \times h$

$$= 2\,000 \text{ N} \times 6 \text{ mm} \qquad (a)$$

trabajo recibido $= F \times 2\pi d$

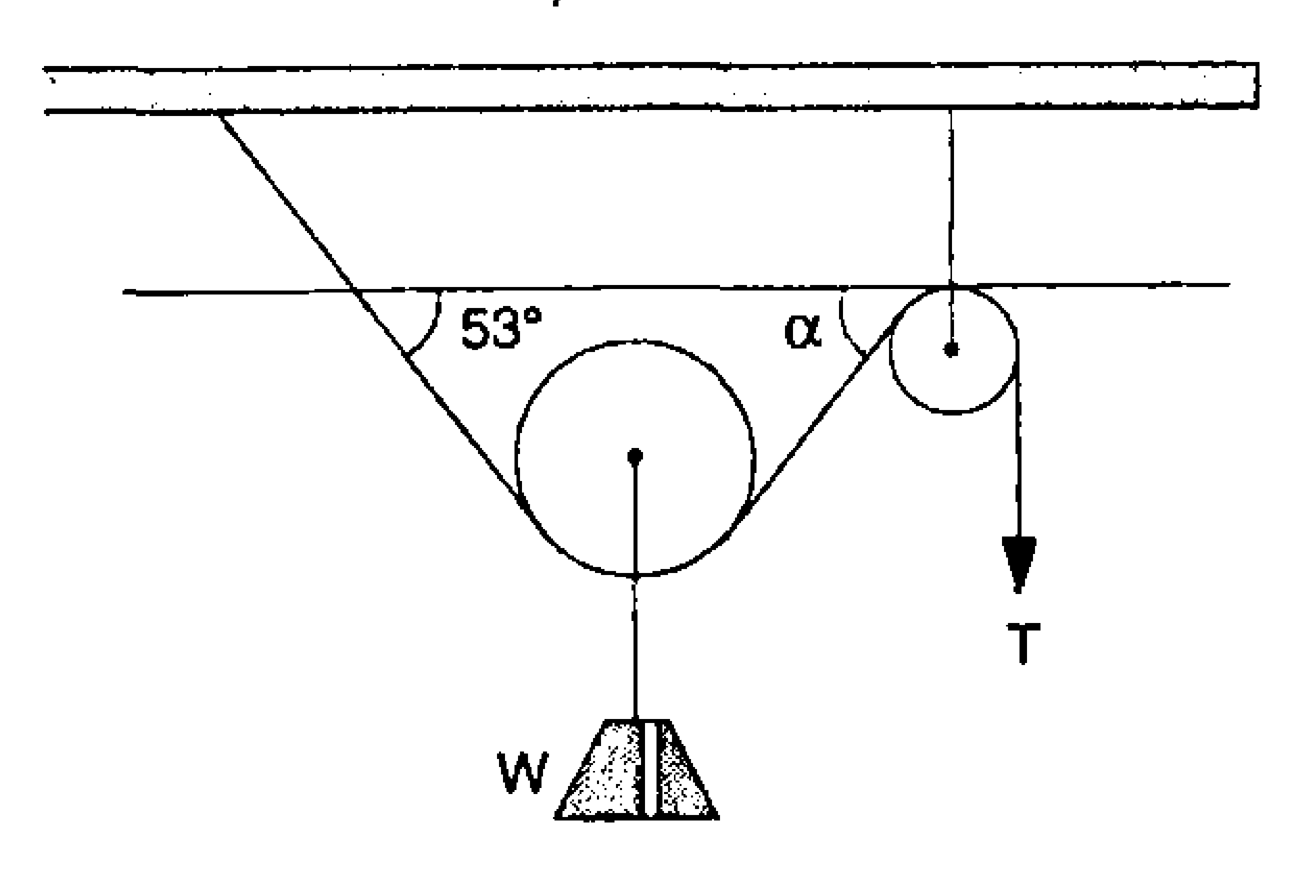
$$= F \times 2 \times 3{,}14 \times 500 \text{ mm} \qquad (b)$$

sustituyendo valores en (I):

$$0{,}45 = \frac{2\,000 \text{ N} \times 6 \text{ mm}}{F \times 2 \times 3{,}14 \times 500 \text{ mm}}$$

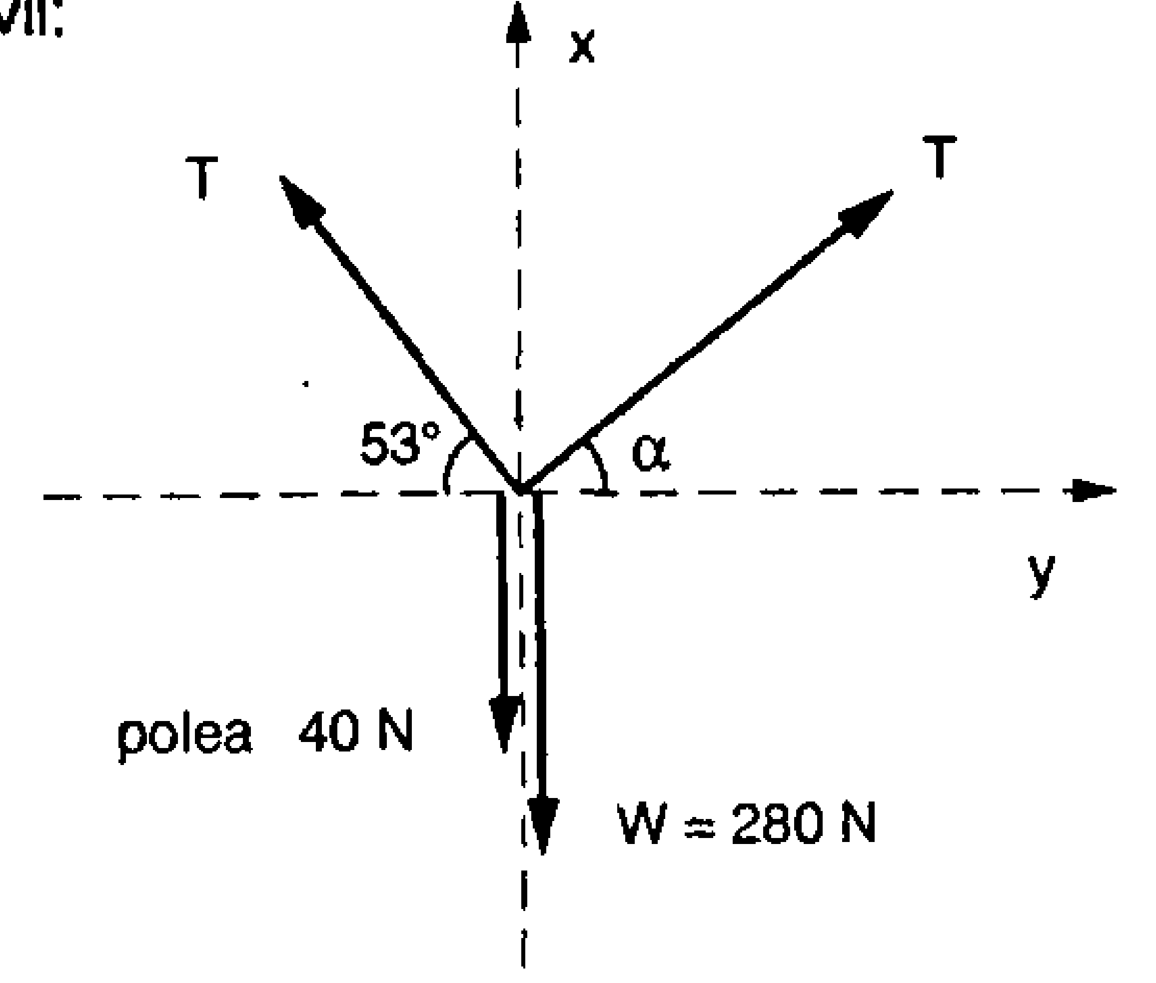
Rpta.: $F = 8{,}49$ N

PROBLEMA 7. Del sistema mostrado en la figura se sabe que el bloque W pesa 280 N y las poleas pesan 40 N cada una. Determine la relación de la tensión T y el peso W (T/W) si se sabe que el sistema está en equilibrio..



RESOLUCIÓN :

Como no se consideran pérdidas en las poleas por efecto del rozamiento, la tensión T es constante a lo largo de la cuerda; haciendo el diagrama de cuerpo libre de la polea móvil:



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T \cos 53° = T \cos \alpha$$

$$\therefore \quad \alpha = 53° \qquad (I)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T \operatorname{sen} 53° + T \operatorname{sen} \alpha = (40 + 280)\text{ N} \qquad (II)$$

Reemplazando (I) en (II) se tiene:

$$T \operatorname{sen} 53° + T \operatorname{sen} 53° = 320 \text{ N}$$

$$2T \times \frac{4}{5} = 320 \text{ N} \quad ; \quad T = 200 \text{ N}$$

$$\therefore \quad \frac{T}{W} = \frac{200}{280}$$

Rpta.: $\dfrac{T}{W} = \dfrac{5}{7}$

PROBLEMA 8. Si la eficiencia de una máquina simple es 0,76 y la potencia es de 104 k W ; de terminar la potencia de pérdidas.

RESOLUCIÓN :

Sean: P_u : potencia útil
P_e : potencia entregada

$$Re = \frac{P_u}{P_e} = 0{,}76$$

entonces:

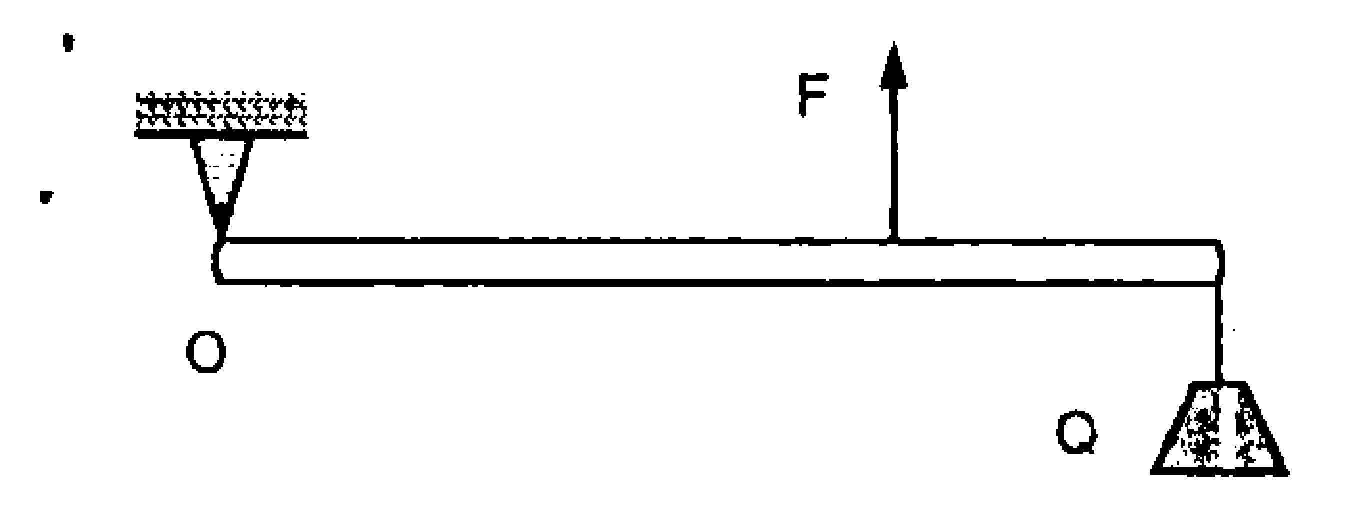
$$P_e = \frac{P_u}{R_e} = \frac{104 \text{ k W}}{0{,}76} = 136{,}84 \text{ k W}$$

Potencia perdida $= P_e - P_u = 136{,}84\text{kW} -$
$- 104\text{kW} = 32{,}84\text{kW}$

Potencia perdida = 32,84 kW

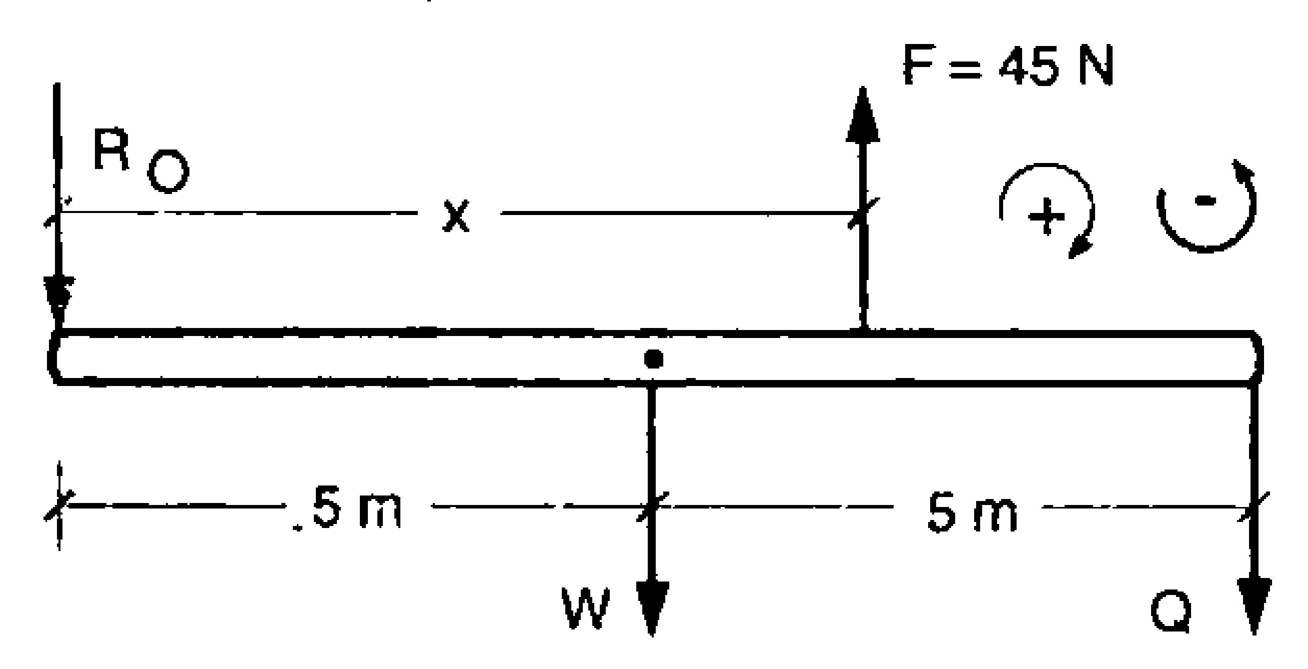
PROBLEMA 9. Se tiene una barra homogénea de 10 m de longitud y de 8 N de peso, como se muestra en la figura; determinar 1) la distancia a la cual se coloca la fuerza F, para que el sistema esté en reposo, y 2) la reacción en el punto O.

$$F = 45 \text{ N} \quad ; \quad Q = 24 \text{ N}$$



RESOLUCIÓN :

2) Aplicando la primera y segunda condición de equilibrio, en el D.C.L.



$$\Sigma F_y = 0$$

$$R_O + W + Q - F = 0$$

$$R_O = F - (W + Q) = (45 - 32)$$

$$R_O = 13\,N$$

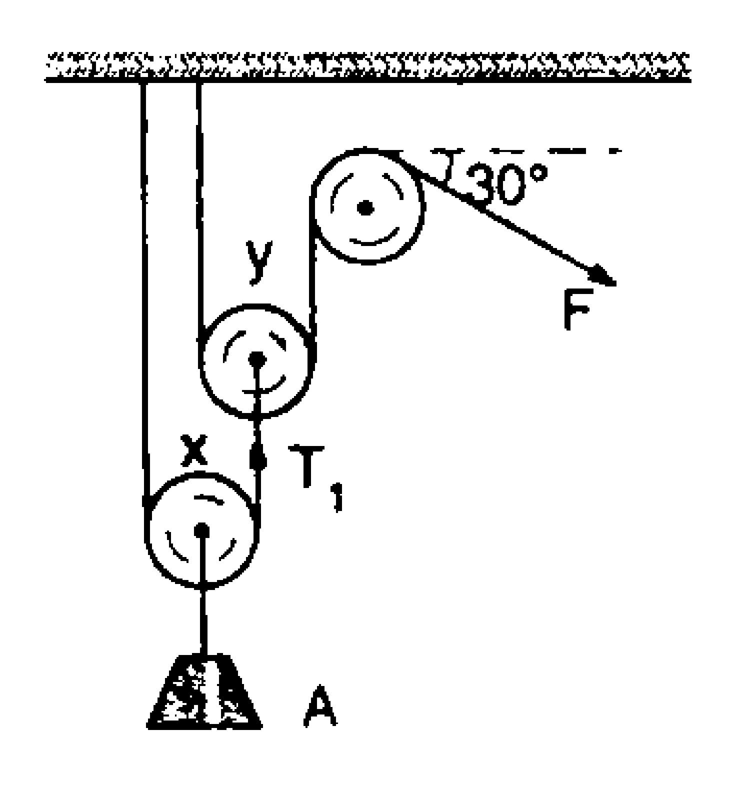
1) $$\Sigma M_O = 0$$

$$45x - 8(5) - 24(10) = 0$$

$$45x = 40 + 240$$

$$x = 6{,}22\,m$$

PROBLEMA 10. ¿Cuál es el rendimiento del polipasto, si se utiliza una fuerza F para levantar con velocidad constante al bloque A de 60 N; si cada polea pesa 4 N y no se consideran rozamientos?



RESOLUCIÓN :

Rendimiento: R = ?

$$R = \frac{F\,(\text{teórica})}{F\,(\text{real})} \times 100 \qquad (I)$$

$$F\,(\text{teórica}) = \frac{A}{2^n}$$

Sustituyendo valores:

$$F\,(\text{teórica}) = \frac{60\,N}{2^2} = 15\,N \qquad (a)$$

Cálculo de F (real):

En la polea x: $2T_1 = (60 + 4)\,N$

$$T_1 = 32\,N$$

En la polea y:

$$2F\,(\text{real}) = 4\,N + T_1 = (4 + 32)\,N$$

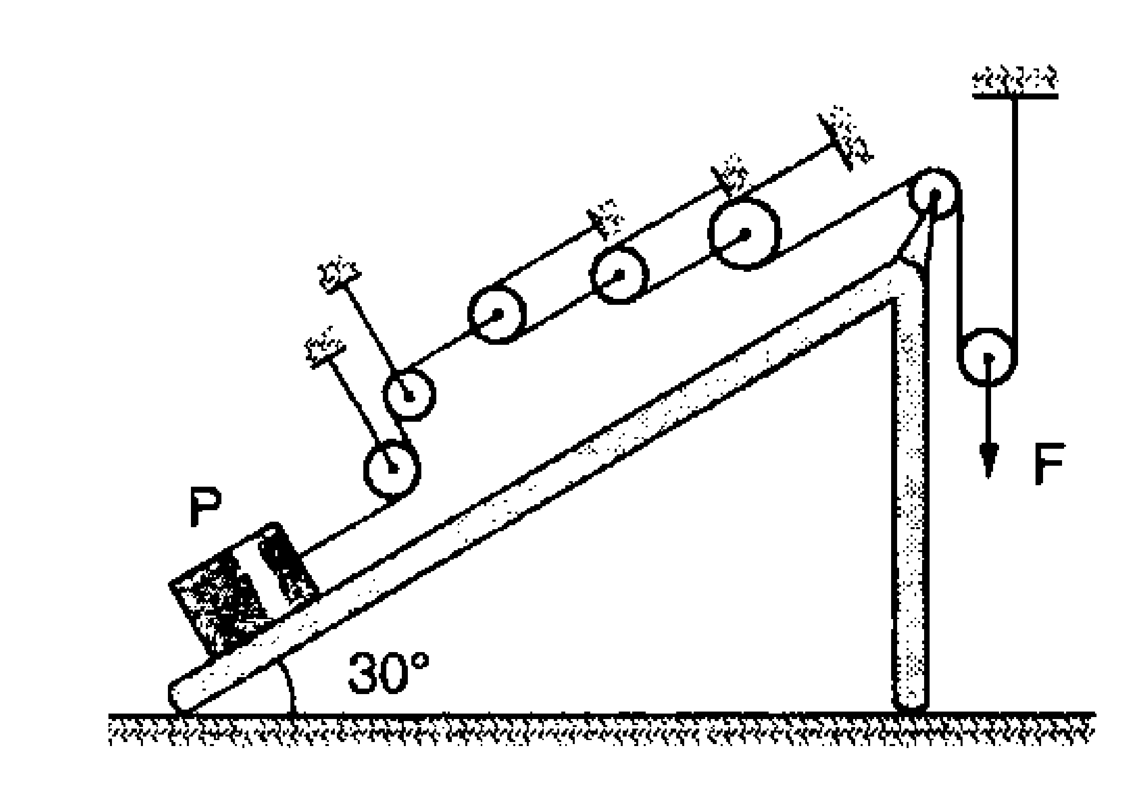
$$F\,(\text{real}) = 18\,N \qquad (b)$$

reemplazando (a) y (b) en (I):

$$R = \frac{15}{18} \times 100\%$$

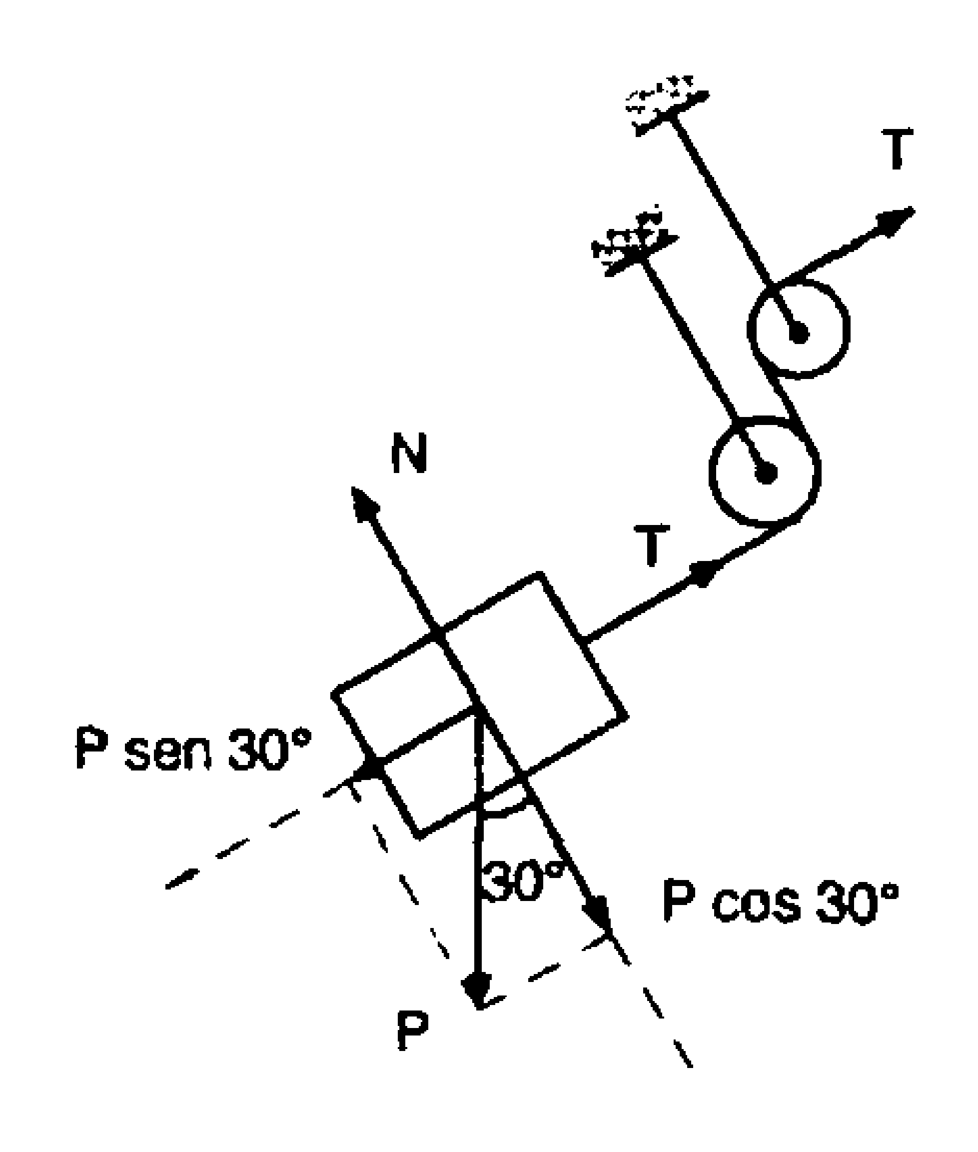
Rpta.: R = 83,33%

PROBLEMA 11. Determinar el valor de la fuerza F, para que e bloque de peso P conectado al polipasto, como se muestra en la figura; suba por el plano inclinado con una velocidad de 3/2 m/s (despreciar el peso de las poleas).



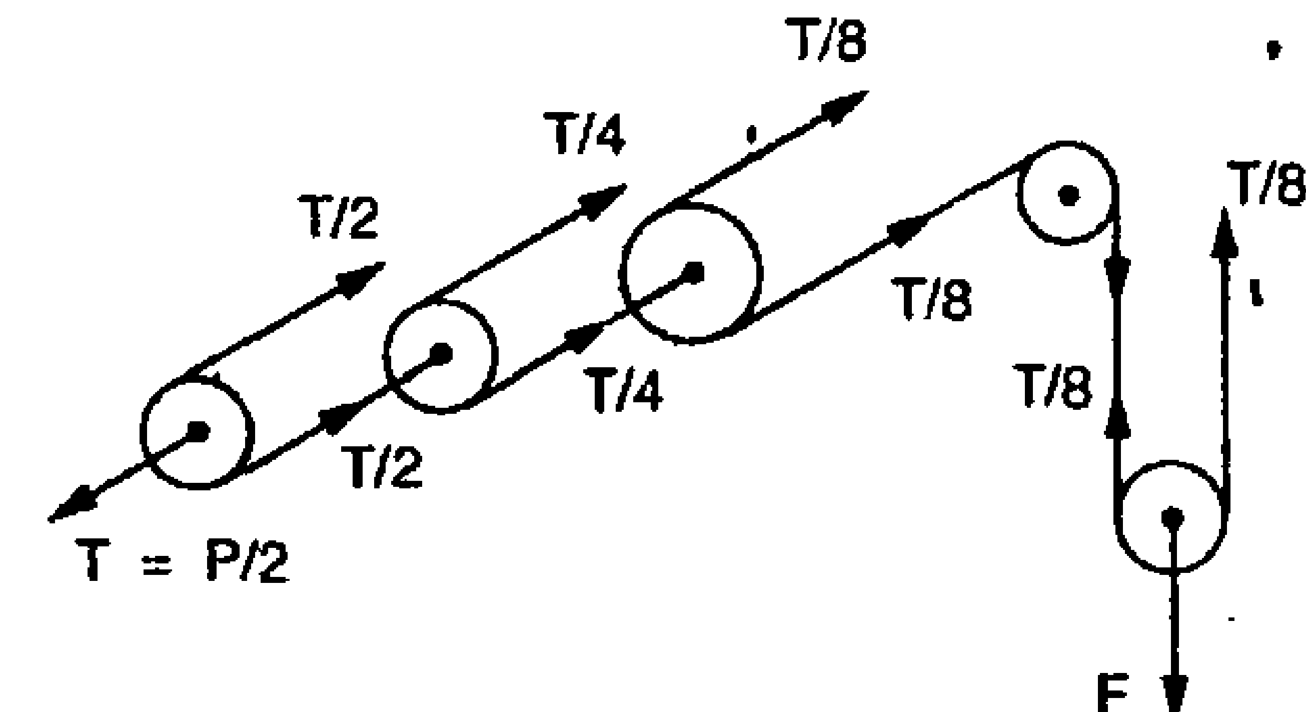
RESOLUCIÓN :

Se tiene velocidad constante de 3/2 m/s a = 0. Haciendo el diagrama de cuerpo libre del bloque P:



$N = P\cos 30°$, $T = P \operatorname{sen} 30°$

En las poleas:



Se observa que:

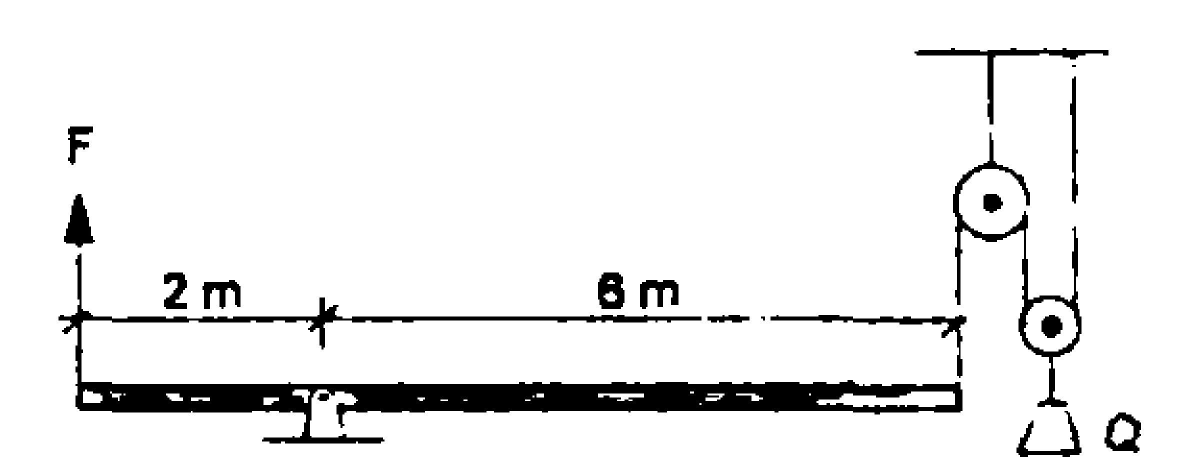
$$F = \frac{T}{8} + \frac{T}{8} = \frac{T}{4} \qquad (I)$$

pero: $T = P \operatorname{sen} 30°$ $\therefore$ $T = \frac{P}{2}$

sustituyendo en (I): Rpta.: $F = \frac{P}{8}$

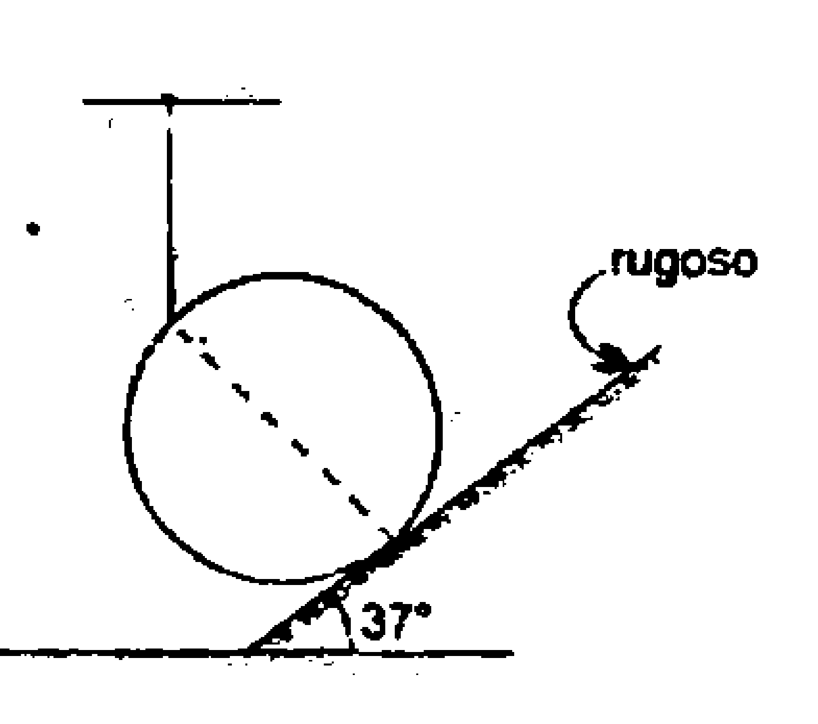
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor de la fuerza F que se debe aplicar para que la barra permanezca horizontal. Además Q = 60 N



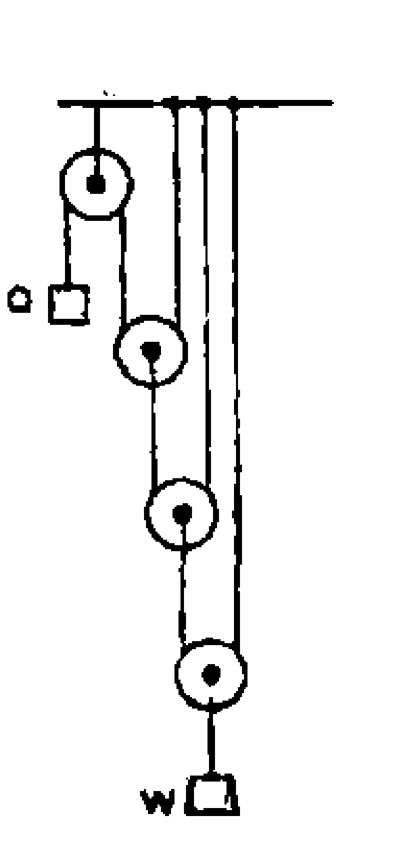
Rpta. : F = 90 N

2. Calcular la tensión en la cuerda si la esfera de 100 M permanece en reposo.



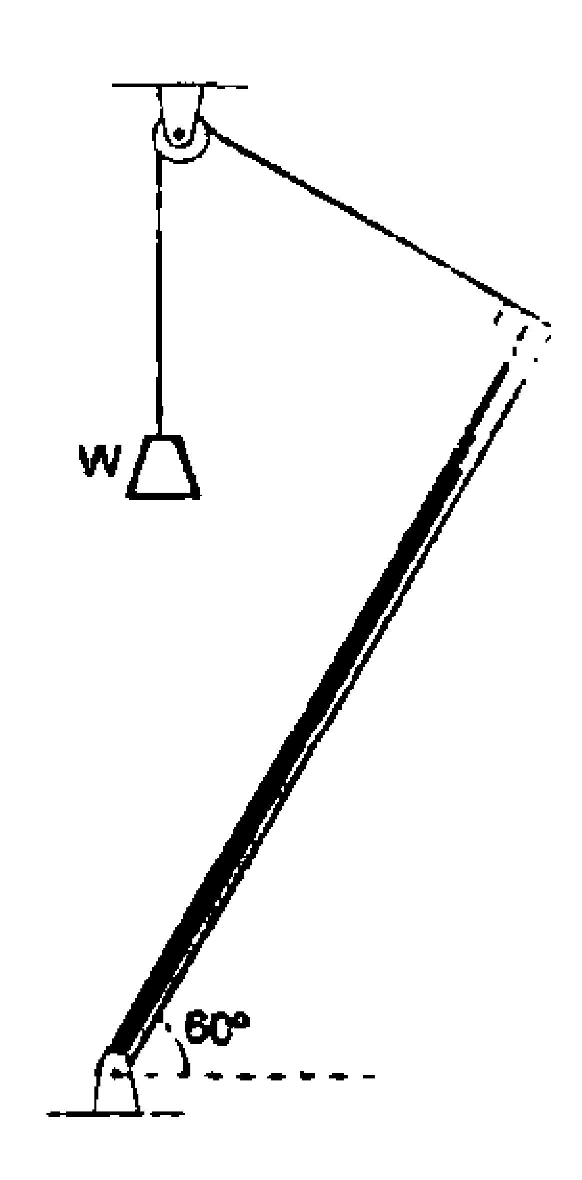
Rpta. : T = 50 N

3. Calcular el valor del peso Q si W = 50 N. El conjunto se encuentra en equilibrio.



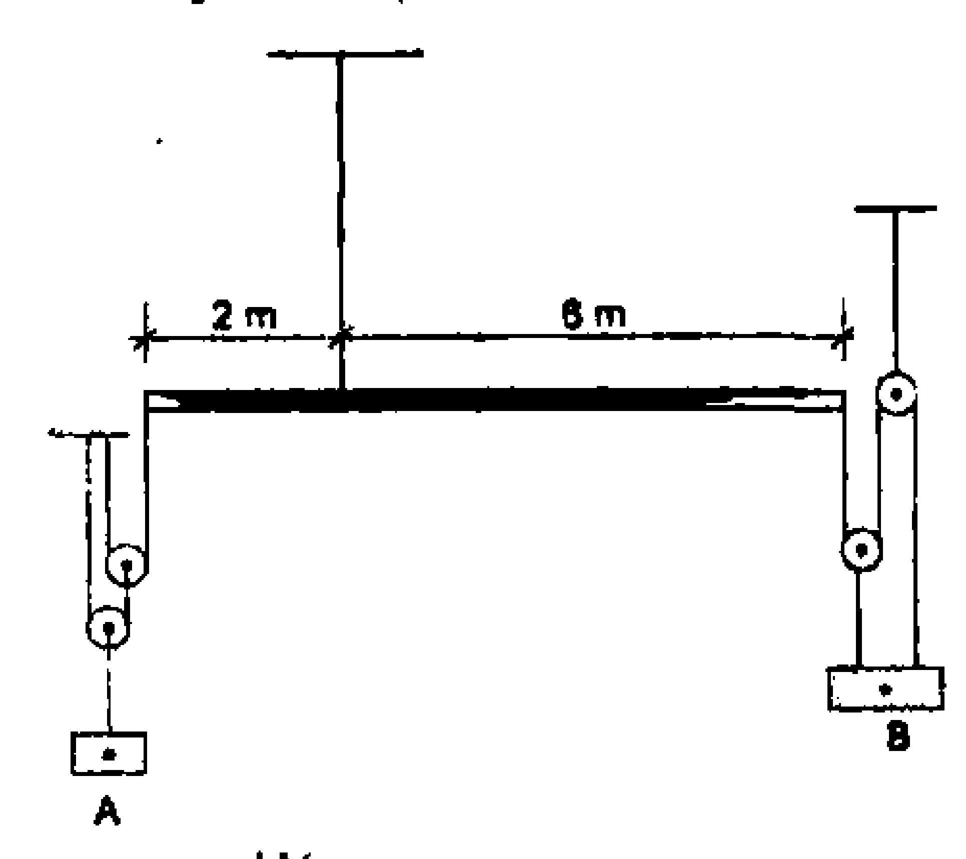
Rpta. : Q = 6,25 N

4. Calcular el peso de la barra homogénea, si W = 80 N. El sistema permanece en equililbrio.



Rpta. : $W_{BARRA} = 320$ N

5. Calcular la relación entre los pesos A y B para que la barra ideal permanezca horizontal y en equilibrio.



Rpta. : $\frac{W_A}{W_B} = 4$

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 6

DINÁMICA

Es la parte de la Mecánica que estudia los movimientos acelerados de los cuerpos, considerando en el análisis a las fuerzas.

INERCIA

Es una propiedad de la materia que se manifiesta como la tendencia a conservar el estado de reposo o el estado de movimiento rectilíneo uniforme.

Recordando el principio de Inercia:

PRIMERA LEY DE NEWTON

a. Todos los cuerpos en reposo, tienden a seguir en reposo, mientras no haya una fuerza resultante mayor, que afecte y modifique este estado.

b. Todos los cuerpos en movimiento tienden a seguir en movimiento, mientras no haya una fuerza que modifique dicho estado.

FUERZA

Es todo aquello que modifica el estado de reposo o estado de movimiento de un cuerpo. **Toda fuerza aparece como resultado de la interacción de dos cuerpos.**

CONCEPTO DE MASA Y PESO

MASA : Es una magnitud física escalar que nos expresa la medida de inercia que posee un cuerpo. También nos indica la cantidad de materia que tiene un cuerpo.

PESO : Es una cantidad vectorial que nos indica la fuerza vertical que ejerce un cuerpo cualquiera sobre su apoyo o la tensión que provoca sobre una cuerda cuando está suspendido, debido a la fuerza de gravedad. Recordemos que la fuerza de gravedad es la fuerza de atracción que ejerce la Tierra sobre los cuerpos ubicados en sus inmediaciones. Numéricamente coinciden el peso y la fuerza de la gravedad pero representan efectos diferentes.

La masa del cuerpo es constante e invariable, el peso es variable. Así por ejemplo: en los polos un cuerpo pesa "P" y la gravedad es "g"; a 45° de latitud, el cuerpo pesa "P_1" y la gravedad es "g_1"; en el ecuador pesa "P_2" y la gravedad "g_2", etc. (siempre a nivel del mar), pero la masa siempre es la misma.

Cuando estos diferentes pesos del mismo cuerpo se dividen entre el valor de la gravedad del lugar donde se pesa, los cocientes siempre son iguales, así:

$$\frac{P}{g} = \frac{P_1}{g_1} = \frac{P_2}{g_2} = \ldots\ldots\ldots\ldots = k$$

Este cociente es constante y define la masa del cuerpo. Luego en general:

$$\boxed{m = \frac{P}{g}}$$

http://librosysolucionarios.net

Donde: m : masa, en kg

P : Peso, en N

g : Aceleración de la gravedad, en m/s^2

RECOMENDACIÓN:

Para resolver problemas de Dinámica se recomienda descomponer todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo en sus componentes rectangulares, sobre un sistema de ejes rectangulares trazados convenientemente.

UNIDAD DE MASA: "kg"

La unidad SI de masa es el kilogramo "kg" su valor dimensional es:

Recordando que: $1\ N = 1\ kg \cdot \frac{m}{s^2}$

de aquí se tiene que: $1\ kg = \frac{N}{\frac{m}{s^2}}$

UNIDAD DE FUERZA Y UNIDAD DE PESO: NEWTON "N"

La unidad SI, tanto de peso como de fuerza, es el newton "N".

Ejemplo: ¿Cuál es la masa de un hombre que pesa 700 N?

RESOLUCIÓN : $m = \frac{P}{g}$

$$m = \frac{700\ N}{9{,}8\ m/s^2} = 7{,}14\ \frac{N}{m/s^2}$$

$m = 71{,}4$ kg ; es la masa del hombre.

Ejemplo: Un individuo tiene una masa de 71,4 kg. Cuál será su peso:

a) En la Luna, $g_1 = 1{,}67\ m/s^2$
b) En el Sol, $g_1 = 274{,}70\ m/s^2$

RESOLUCIÓN :

$$m = \frac{P}{g}\ ,\ \text{de donde:}\ \ P = m \cdot g$$

En la Luna:

$$P_1 = 71{,}4\ kg \times 1{,}67\ \frac{m}{s^2}$$

$$P_1 = 119{,}2\ N$$

En el Sol:

$$P_2 = 71{,}4\ kg \times 274{,}4\ \frac{m}{s^2}$$

$$P_2 = 71{,}4\ \frac{N}{\frac{m}{s^2}} \times 274{,}4\ \frac{m}{s^2}$$

$$P_2 = 19\,592{,}16\ N$$

UNIDAD DE MASA: KILOGRAMO (kg)

Esta es una magnitud escalar. Es la "masa" de un cuerpo llamado kilogramo patrón que está depositado en Francia (masa de 1 dm^3 de agua pura a 4°C)

Ejemplo: La masa de un cuerpo es de 60 kg. ¿Cuál es su peso?

RESOLUCIÓN : $P = m \cdot g$

$$P = 60\ kg \times 9{,}81\ \frac{m}{s^2}$$

$$P = 588{,}6\left(kg \times \frac{m}{s^2}\right)\ ;\ \text{ó:}$$

$$P = 588{,}6\ N$$

Ejemplo: El peso de un cuerpo es de 600 N, ¿Cuál es su masa?

RESOLUCIÓN: $P = m \cdot g$

$$m = \frac{600\ N}{9{,}8\ m/s^2}$$

$$m = 61{,}22\ kg$$

Ejemplo: Hallar los pesos en newton que generan las siguientes masas:

a) 40 kg ; b) 30 kg

RESOLUCIÓN : $P = m \cdot g$

http://librosysolucionarios.net

a) $P = 40\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 = 392{,}4\,N$

b) $P = 30\,kg \times 9{,}81\,m/s^2 = 294{,}3\,N$

SEGUNDA LEY DE NEWTON

Se le conoce como la ley fundamental de la Mecánica y establece que:
"La aceleración que experimenta un cuerpo bajo la acción de una fuerza resultante, es directamente proporcional a dicha fuerza e inversamente proporcional a su masa".

Los vectores aceleración y fuerza resultantes son codirigidos.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_R}{m}$$

De aquí se desprende que:

$$\vec{F}_R = m \cdot \vec{a}$$

Donde:

$\vec{F}_R$: Fuerza resultante, en **N**

m : Masa del cuerpo, en kg

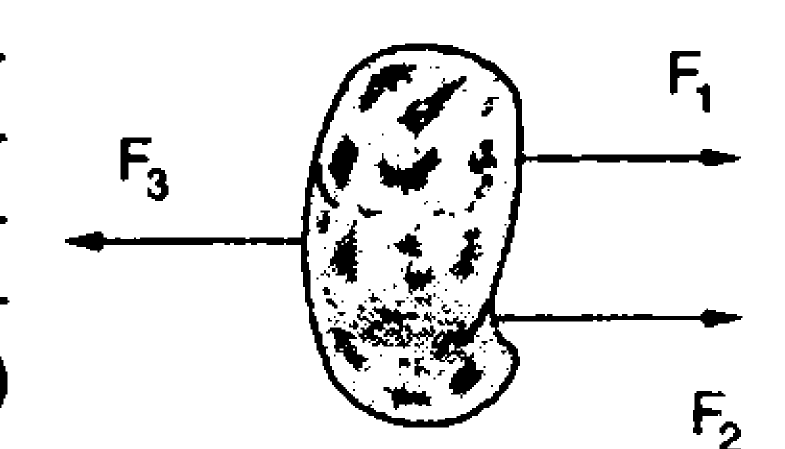
$\vec{a}$: Aceleración del cuerpo, en m/s^2

Como hay casos en que una masa está afectada de una serie de fuerzas entonces se tiene que:

$$\Sigma \vec{F} = m \cdot \vec{a}$$

CASOS QUE SE PUEDEN PRESENTAR

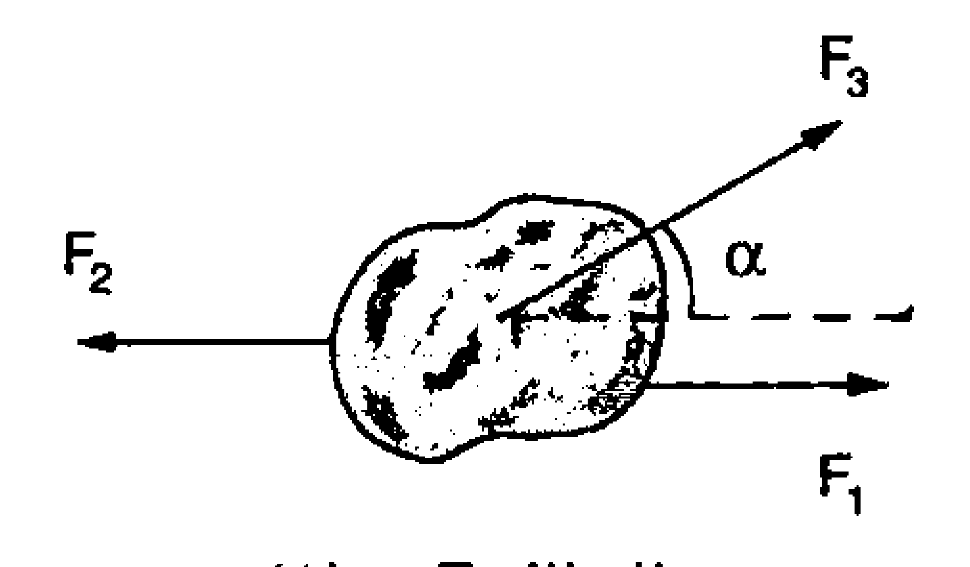
a) Cuando las todas las fuerzas son horizontales (paralelas al eje X)



$$\Sigma F_x = m \cdot a_x$$

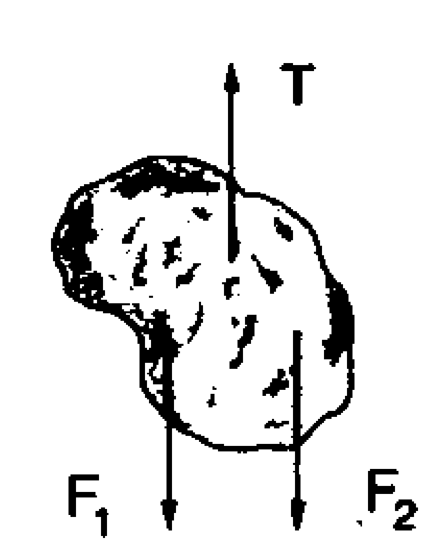
Es decir: $F_1 + F_2 - F_3 = m \cdot a_x$

b) Cuando algunas fuerzas forman un determinado ángulo con la horizontal:



$$F_1 + F_3 \cos\alpha - F_2 = m \cdot a_x$$

c) Cuando todas las fuerzas son verticales (paralelas al eje Y)



$$\Sigma F_Y = m \cdot a_Y$$

$$T - F_1 - F_2 = m \cdot a_Y$$

UNIDAD DE FUERZA NEWTON "N"

Es la fuerza que hay que aplicar a una masa de 1 kg para provocarle una aceleración de módulo 1 m/s^2

Ejemplo: Sobre un cuerpo de 10 kg se aplica una fuerza de 15 N. ¿Cuál es su aceleración?

RESOLUCIÓN : $a = \dfrac{F}{m}$

$$a = \frac{15\,N}{10\,kg} = \frac{15\,N}{10\,\frac{N}{m/s^2}} = 1{,}5\,m/s^2$$

Ejemplo: A una masa de 4 kg se le aplica una fuerza de 20 N. Calcular su aceleración.

RESOLUCIÓN :

Sabiendo que: $a = \dfrac{F}{m}$

$$a = \frac{20\,N}{4\,kg} = \frac{20\,N}{4\,\frac{N}{m/s^2}} = 5\,m/s^2$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo: ¿Cuál es la fuerza que aplicada a una masa de 200 kg le produce una aceleración de 15 m/s^2 ?

RESOLUCIÓN : $F = m \cdot a$

$$F = 200\,kg \times 15\,m/s^2$$

$$F = 200\,\frac{N}{m/s^2} \times 15\,m/s^2$$

$$F = 3\,000\,N$$

Ejemplo: Calcular el peso de una persona de 70 kg de masa, en los siguientes lugares:

a) En los polos: $g_1 = 9{,}83\ m/s^2$
b) En la latitud 45°: $g_2 = 9{,}80\ m/s^2$
c) En el ecuador: $g_3 = 9{,}78\ m/s^2$

RESOLUCIÓN :

a) $P_1 = m \cdot g_1$

$$P_1 = 70\,kg \times 9{,}83\,m/s^2$$

$$P_1 = 70\,\frac{N}{m/s^2} \times 9{,}83\,m/s^2$$

$$P_1 = 688{,}1\,N$$

b) $P_2 = m \cdot g_2$

$$P_2 = 70\,kg \times 9{,}80\,m/s^2$$

$$P_2 = 70 \cdot \frac{N}{m/s^2} \cdot 9{,}8\,m/s^2$$

$$P_2 = 686\,N$$

c) $P_3 = m \cdot g_3$

$$P_3 = 70\,kg \times 9{,}78\,m/s^2$$

$$P_3 = 684{,}6\,N$$

EL NEWTON "N" COMO UNIDAD DE FUERZA

Es la fuerza que aplicada a 1 kg de masa le imprime la aceleración de 1 m/s^2.

Se sabe que: $F = m \cdot a$

$$F = 1\,kg \cdot 1\,\frac{m}{s^2} = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$F = 1\ \text{newton}$$

$$\therefore \boxed{1\ \text{newton} = 1\,N = 1\,kg \cdot \frac{m}{s^2}}$$

Ejemplo: ¿Cuántos newton de fuerza se necesitan para acelerar con 8 m/s^2 a una masa de 30 kg?

RESOLUCIÓN : $F = m \cdot a$
$F = 30 \cdot 8$
$F = 240\,N$

Ejemplo: Calcular la fuerza que se necesita para cargar una masa de 100 kg en los siguientes lugares:
a) En la Luna ($g = 1{,}67\ m/s^2$)
b) En el Sol ($g = 274{,}70\ m/s^2$)

RESOLUCIÓN : La fuerza que se requiere para cargar esta masa en la Luna o en el Sol equivale a lo que pesa esta masa en la Luna o en el Sol y que es proporcional a la aceleración de la gravedad que existe en cada uno de estos astros.

a) $P_1 = m \cdot g_1 = 100 \cdot 1{,}67$

$P_1 = 167\,N$

Luego $F_1 = 167\,N$

b) $P_2 = m \cdot g_2 = 100 \cdot 274{,}70$

$P_2 = 27\,470\,N$

Luego $F_2 = 27\,470\,N$

LA DINA COMO UNIDAD PEQUEÑA DE FUERZA "din"

Es la fuerza que le comunica a una masa de 1 g una aceleración de módulo 1 cm/s^2.

$$\boxed{1\ din = 1g \cdot \frac{cm}{s^2}}$$

Ejemplo: Calcular la fuerza en dinas,

http://librosysolucionarios.net

para acelerar a 40 cm/s^2 a una masa de 800 g.

RESOLUCIÓN: $F = m \cdot a$

$F = 800 \cdot 40 \text{ g} \cdot cm/s^2$

$F = 32 \cdot 10^3 \text{ din}$

Ejemplo: Calcular la masa de un cuerpo, sabiendo que al aplicarle una fuerza de 1 000 din se le imprime una aceleración de 30 cm/s^2.

RESOLUCIÓN:

$$F = m \cdot a \quad \Rightarrow \quad m = \frac{F}{a}$$

$$m = \frac{1\,000 \text{ din}}{30 \text{ cm}/s^2} = \frac{1\,000 \text{ g} \cdot \frac{cm}{s^2}}{30 \frac{cm}{s^2}} = 33{,}3 \text{ g}$$

EQUIVALENCIA ENTRE NEWTON Y DINA

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ din}$$

DEMOSTRACIÓN:

Sabemos que: $1 \text{ N} = 1 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}$

$$1 \text{ N} = 1\,000 \text{ g} \cdot 100 \frac{cm}{s^2}$$

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ g} \cdot \frac{cm}{s^2}$$

Pero por definición: $1 \text{ g} \cdot \frac{cm}{s^2} = 1 \text{ din}$

luego: $1 \text{ N} = 10^5 \text{ din}$ l.q.q.d.

UNIDADES DE MEDIDA SI

UNIDADES DE BASE	NOMBRE DE LA UNIDAD	SIMB
Longitud	metro	m
Fuerza y Peso	newton dina	N din
Masa	kilogramo	kg
Tiempo	segundo	s

SLUG: Unidad técnica de masa del Sistema Inglés

$$1 \text{ slug} = 32{,}2 \text{ lb . masa}$$

NOTA: A pesar que en el cuadro se menciona como unidad de fuerza y unidad de peso la DINA "din", el SI no la considera como tal, sin embargo es importante reiterar que:

$$1 \text{ N} = 10^5 \text{ din}$$

Ejemplo: A una masa de 1 200 kg se le ha desplazado 400 m en10 s. ¿Cuál fue la fuerza empleada?

RESOLUCIÓN: $F = m \cdot a$ (I)

Cálculo de "a":

$$d = \frac{1}{2} a t^2 \quad \therefore \quad a = \frac{2d}{t^2}$$

sustituyendo en (I):

$$F = \frac{2 \cdot m \cdot d}{t^2} = \frac{2 \cdot 1\,200 \text{ kg} \cdot 400 \text{ m}}{100 \text{ s}^2}$$

$$F = 9\,600 \text{ kg} \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$F = 9{,}6 \cdot 10^3 \text{ N}$$

Como ejercicio de transformación de unidades se va a calcular esta misma respuesta en dinas.

$$F = 9{,}6 \times 10^3 \times 10^5 \text{ din}$$

$$F = 9{,}6 \times 10^8 \text{ din}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo: A un cuerpo de 50 kg de masa se le aplica una fuerza de 10 N ¿Cuál será su velocidad al terminar el 8vo. segundo?

RESOLUCIÓN : $F = m \cdot a \qquad (I)$

pero: $a = \frac{\Delta V}{t} = \frac{V_f - V_o}{t} \; ; \; V_o = 0$

$\therefore \qquad F = m \frac{V_f}{t} \; ;$

de donde: $V_f = \frac{F \cdot t}{m}$

$$V_f = \frac{10\,N \cdot 8\,s}{50\,kg} = \frac{8\,N \cdot s}{5\,kg}$$

$$V_f = \frac{8\,N \cdot s}{5\,\frac{N}{m/s^2}} = 1{,}6\,\frac{m}{s}$$

FUERZA DE GRAVEDAD

Se llama así a la fuerza con que la Tierra atrae a los cuerpos que están en sus inmediaciones; esta fuerza se puede calcular con la fórmula de la gravitación universal, pero en la práctica se usa:

$$\boxed{F_g = m \cdot g}$$

Vamos a demostrar la verdad de esta fórmula. Sea un cuerpo de masa "m" en las inmediaciones de la Tierra:

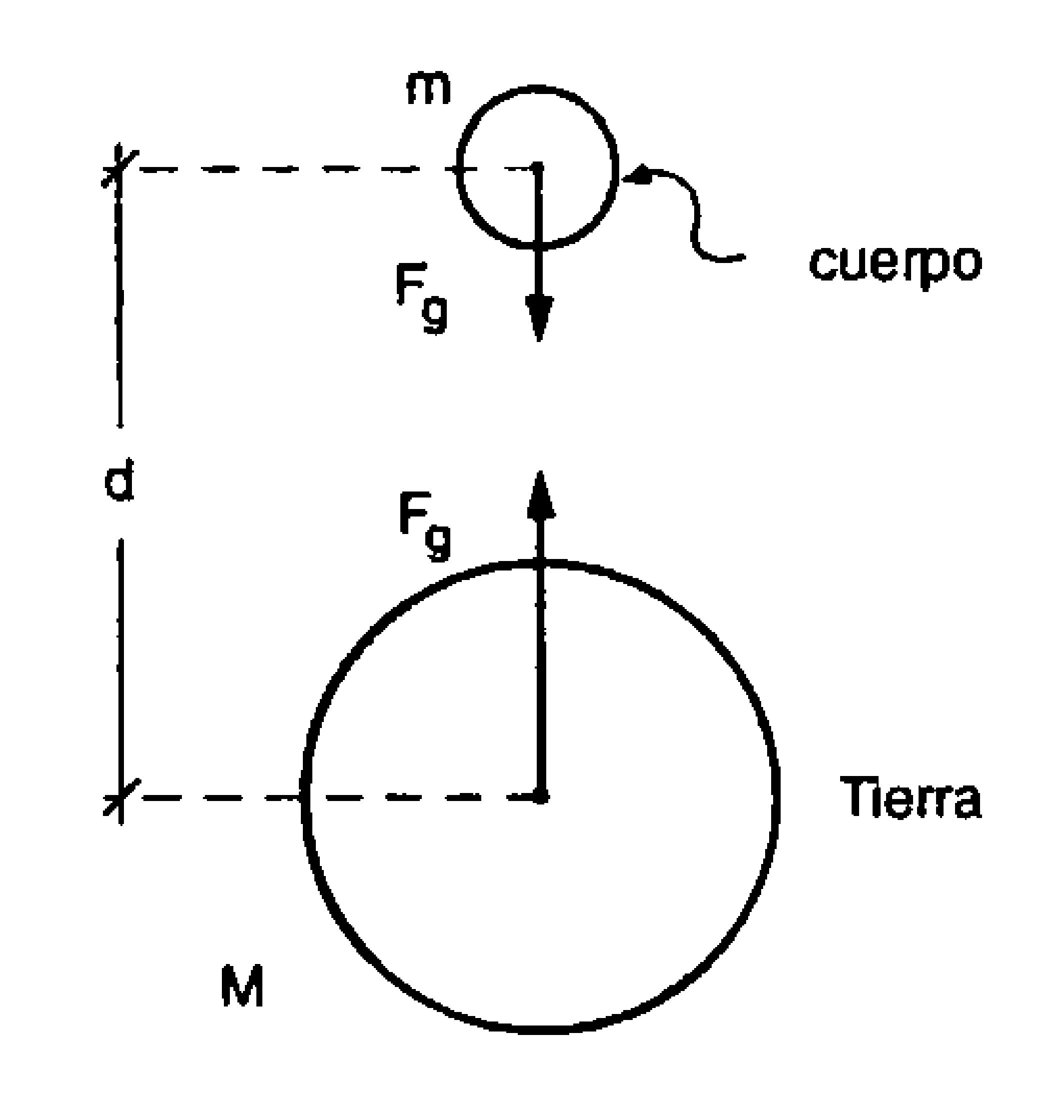
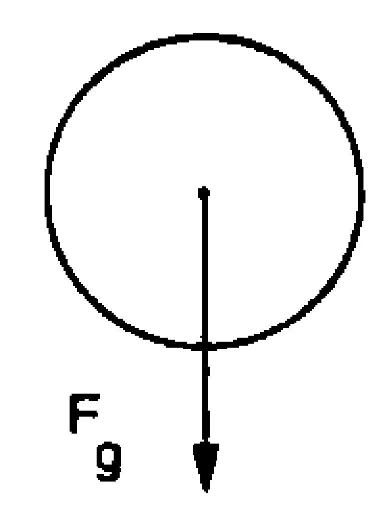


Diagrama del cuerpo libre:



Sabemos que: $\Sigma F_y = m \cdot a_y$

pero, en este caso:

ΣF_y = Fuerza de gravedad = F_g , y

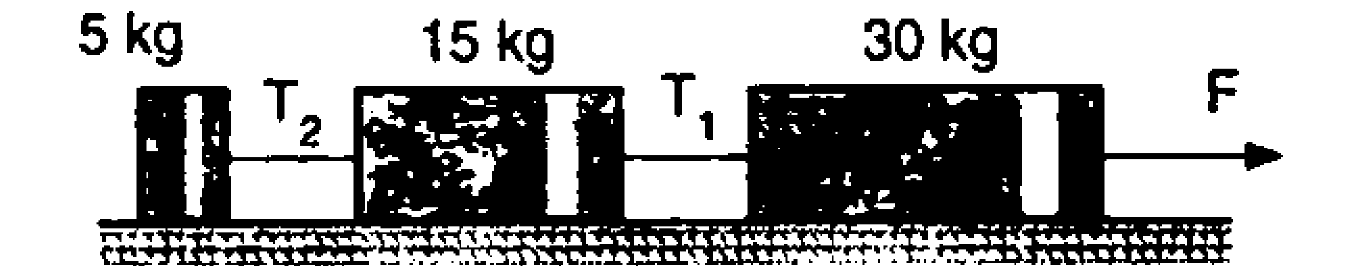
a_y = Aceleración de la gravedad = g

$\therefore$ Reemplazando: $F_g = m \cdot g$ l.q.q.d.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Los bloques de la figura avanzan sobre un piso horizontal, sin rozamiento. Si la fuerza horizontal aplicada sobre el primero es de 150 N, hallar:

a) La aceleración con que se mueven los bloques, y
b) Las tensiones en las cuerdas que los unen.



RESOLUCIÓN :

Todos se desplazan con la misma aceleración

a) $F = M_1 a + M_2 a + M_3 a$

$F = a(M_1 + M_2 + M_3)$

$$a = \frac{F}{M_1 + M_2 + M_3} = \frac{150\,N}{50\,kg}$$

$$a = 3\,\frac{N}{kg} = 3\,\frac{kg}{kg}\,\frac{m}{s^2}$$

http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $a = 3\,m/s^2$

b) $T_2 = M_3 \cdot a$

$T_2 = 5\,kg \cdot 3\,m/s^2 = 15\,N$

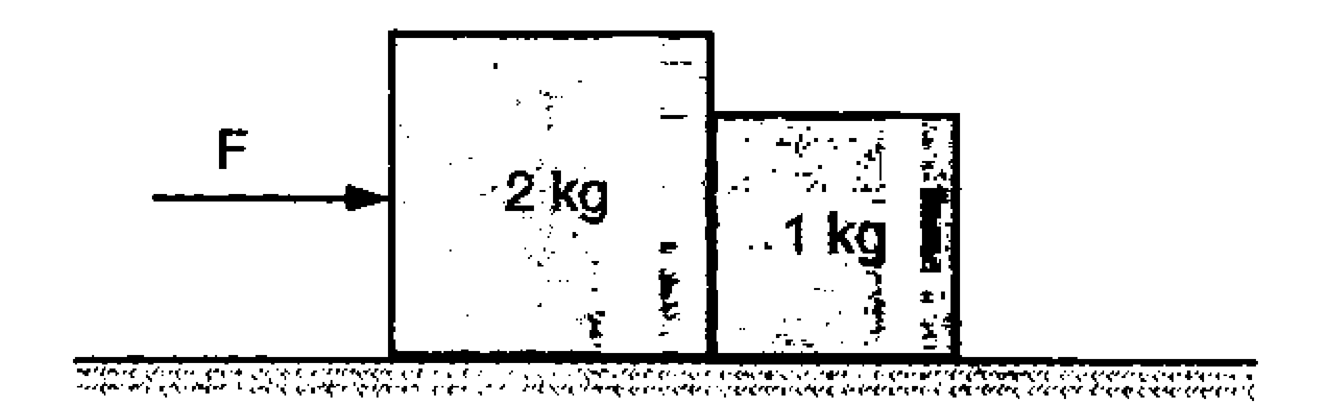
$T_1 = (M_2 + M_3)\,a$

$T_1 = (20\,kg) \cdot 3\,m/s^2$

De donde:

Rpta.: $T_1 = 60\,N$

PROBLEMA 2. Hallar: a) La aceleración. b) La fuerza de contacto con que se unen los bloques de la figura. No hay rozamiento. F = 6 N



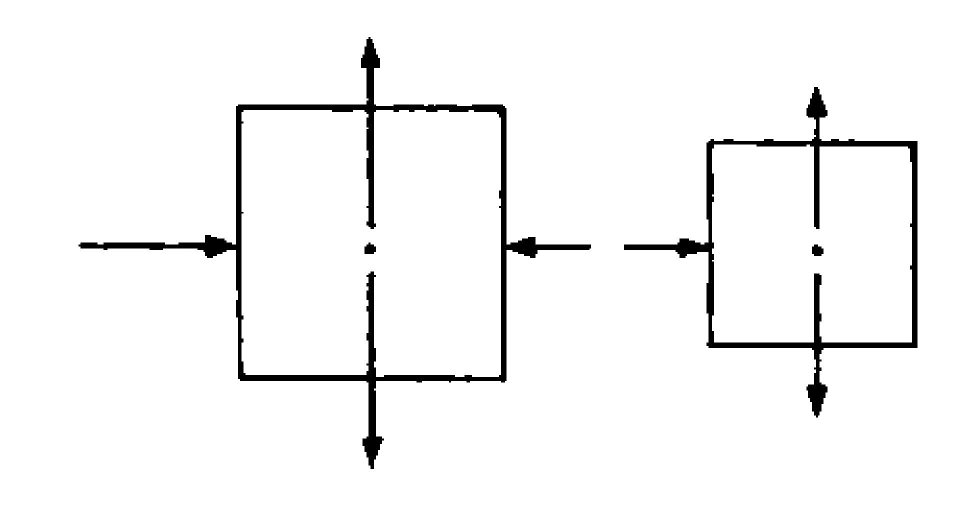
RESOLUCIÓN :

a) Aceleración del conjunto con 6 N

$$F = m \cdot a \quad \therefore \quad a = \frac{F}{m}$$

$$a = \frac{6\,N}{3\,kg} = 2\,\frac{kg}{kg} \cdot \frac{m}{s^2}$$

Rpta.: $a = 2\,\frac{m}{s^2}$



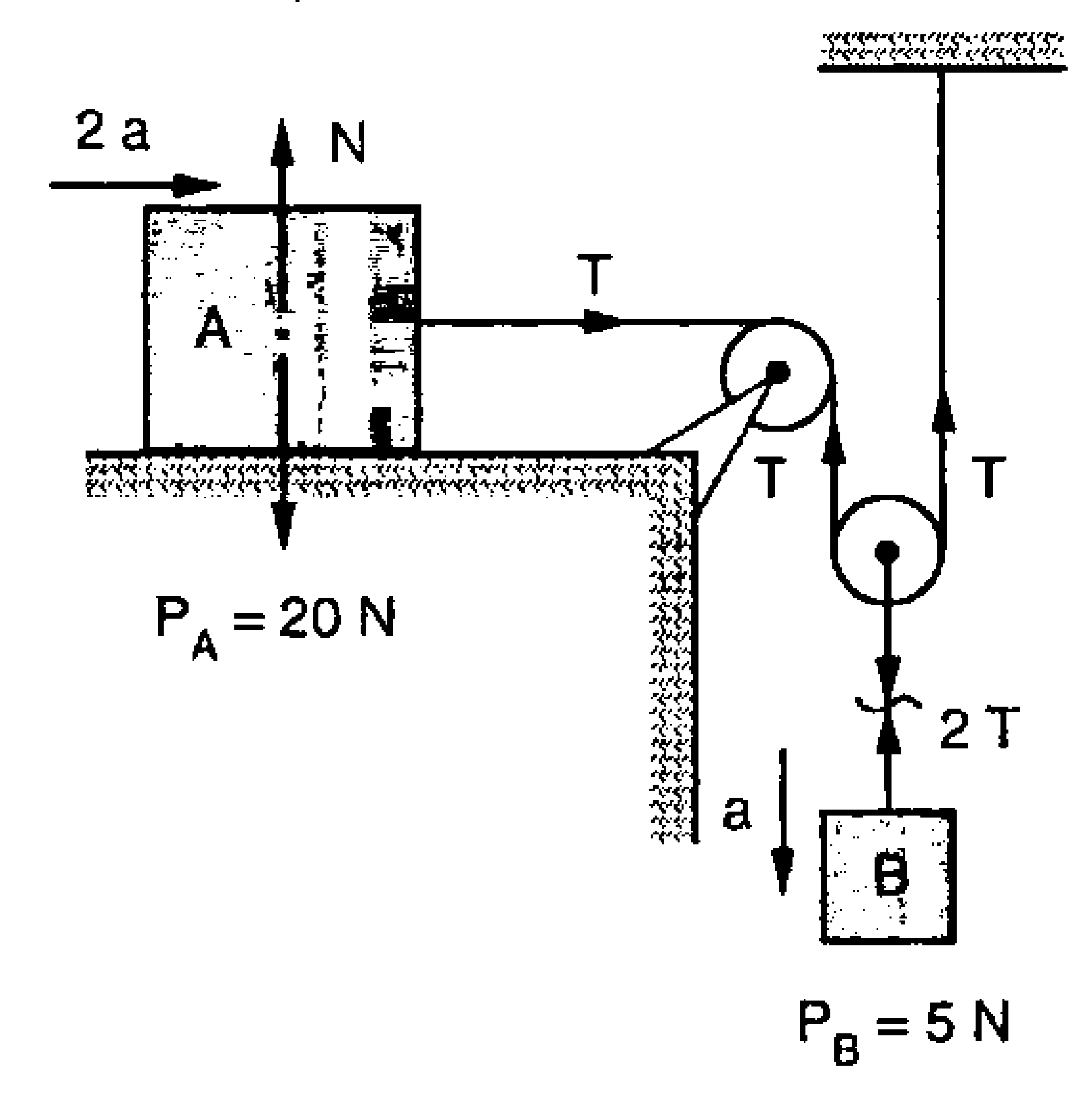
Para el cuerpo (1): $\Sigma F_x = M_1 \,.\, a$

$$F - F_C = M_1 \,.\, a$$

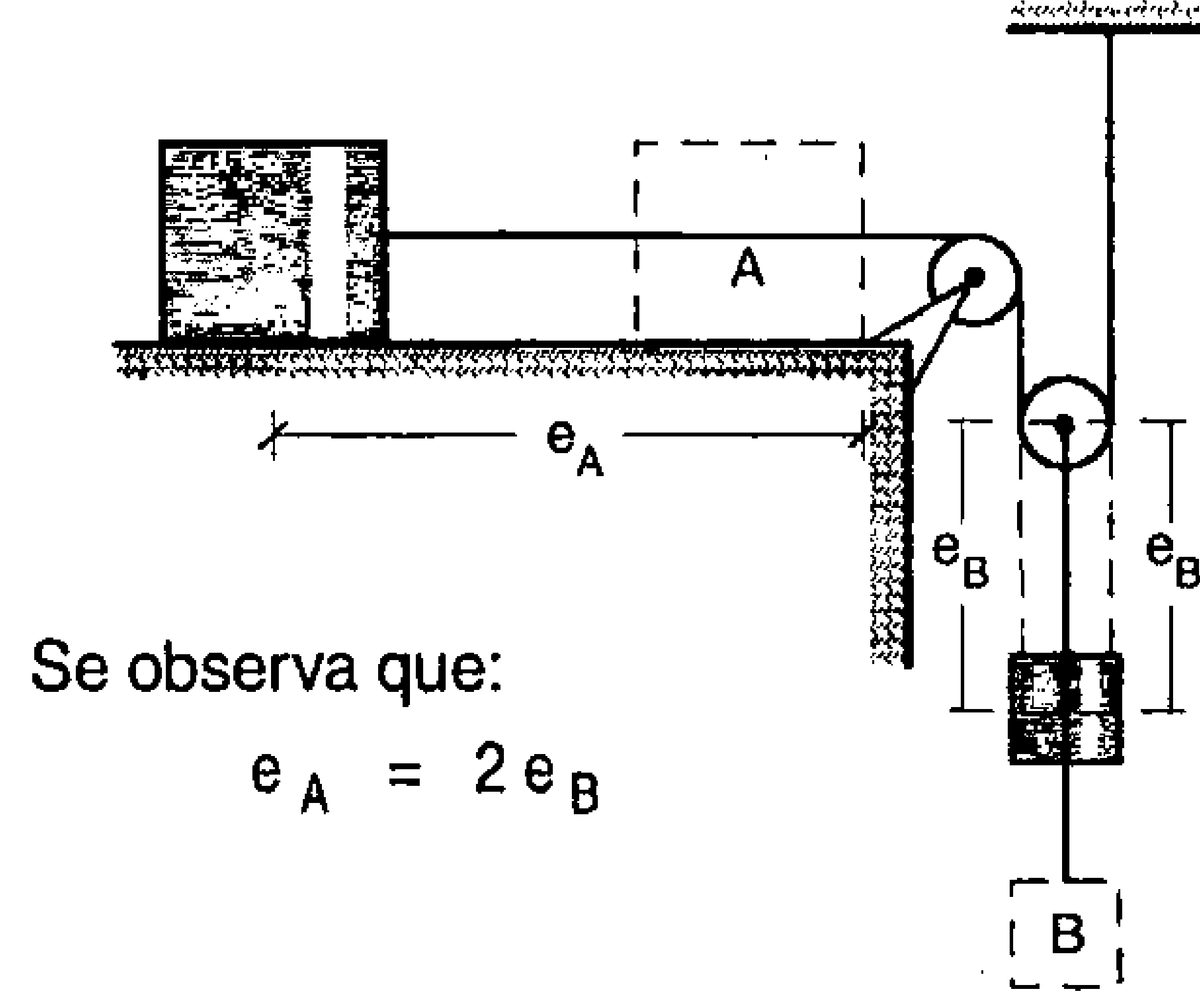
$$F_C = F - M_1 \cdot a = 6\,N - 2\,kg \cdot 2\,\frac{m}{s^2}$$

Rpta. : $F_C = 6\,N - 4\,N = 2\,n$

PROBLEMA 3. ¿Qué aceleración tiene cada uno de los bloques A y B de la figura, sabiendo que no hay rozamiento? Calcular también la tensión de la cuerda en la parte horizontal.



RESOLUCIÓN : Con un gráfico se ayuda mejor para demostrar que en la parte horizontal la aceleración es el doble que en la parte vertical de la cuerda.



Se observa que:

$$e_A = 2\,e_B$$

Por cinemática:

$$\frac{1}{2}\,a_A\,t^2 = 2\,\frac{1}{2}\,a_B\,t^2$$

de donde: $a_A = 2\,a_B$

Por consiguiente:

a) Para el bloque A:

$$\Sigma F_x = M_A \,.\, 2a$$

$$T = M_A \,.\, 2a$$

http://librosysolucionarios.net

Multiplicando por 2:

$$2T = 4M_A \cdot a \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = M_B \cdot a$$

$$P_B - 2T = M_B \cdot a \qquad (2)$$

Sumando (1) + (2):

$$P_B = a(4M_A + M_B)\text{ ; de donde:}$$

$$a = \frac{P_B}{4M_A + M_B} = \frac{P_B}{\frac{4P_A}{g} + \frac{P_B}{g}}$$

$$a = \frac{P_B}{4P_A + P_B} \cdot g$$

Sustituyendo datos:

$$a = \frac{5\,N}{85\,N} \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2}$$

$$a = 0{,}58\,\frac{m}{s^2} \quad \text{(Para B)}$$

$$2a = 1{,}16\,\frac{m}{s^2} \quad \text{(Para A)}$$

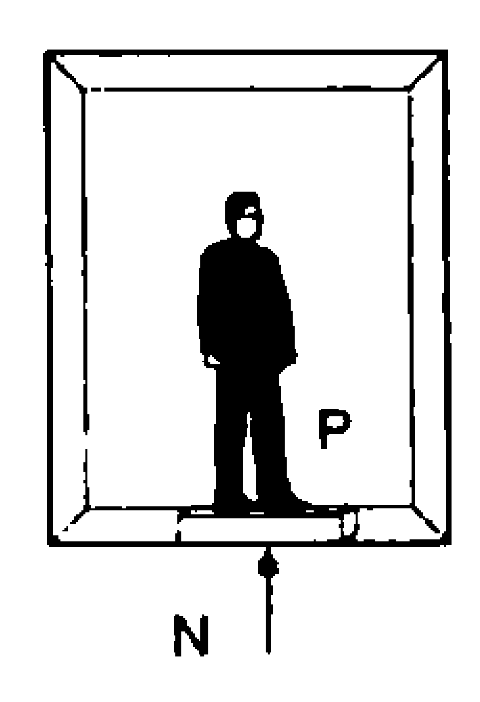
b) Cálculo de la tensión:

$$T = m_A \cdot a_A = \frac{P_A}{g} \cdot (2a)$$

Rpta.: $T = \frac{20}{9{,}8} \cdot (1{,}16) = 2{,}37\,N$

PROBLEMA 4. Si una persona que pesa 700 N está parada sobre una balanza que descansa en el piso de un ascensor que asciende con una aceleración 2 m/s² ¿Qué lectura marca la balanza?

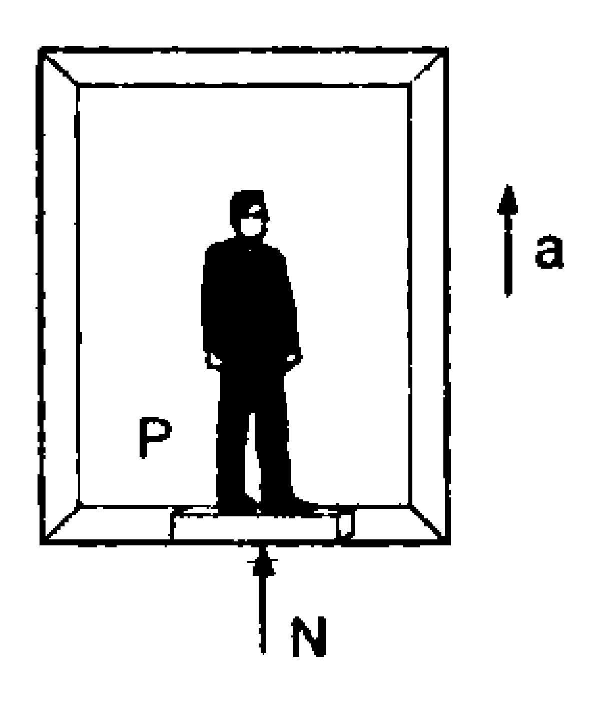
RESOLUCIÓN : En el reposo: $P = N$



Asciende por que hay una diferencia:

$$\Sigma F_y = M \cdot a$$

Ahora $N > P$ (en movimiento)



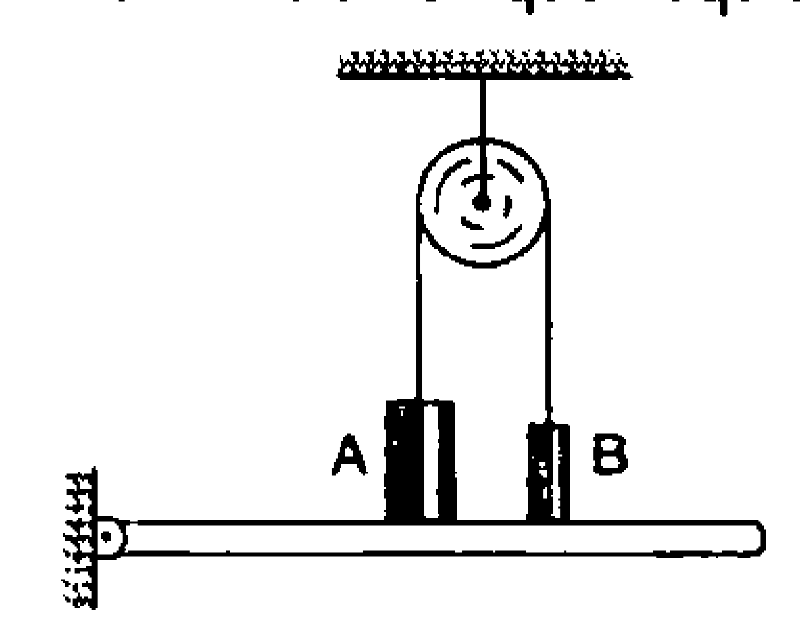
$$\therefore\ N - P = M \cdot a \Rightarrow N = M \cdot a + P$$

$$N = \frac{700\,N}{9{,}8\,m/s^2} \cdot 2\,m/s^2 + 700\,N$$

$$N = 142{,}8\,N + 700\,N = 842{,}8\,N$$

Rpta.: La balanza marcará 842,8 N

PROBLEMA 5. Los bloques A y B de la figura son de 40 N y 20 N respectivamente y se encuentran inicialmente en reposo sobre un apoyo. Al quitarle el apoyo, ¿cuál será la aceleración que adquiere A?



RESOLUCIÓN :

El cuerpo A descenderá y el cuerpo B ascenderá, con la misma velocidad y aceleración. ambos.

Para: $\Sigma F_y = m \cdot a$, se tiene:

$$W_A - W_B = (m_A + m_B)\,a$$

sustituyendo datos:

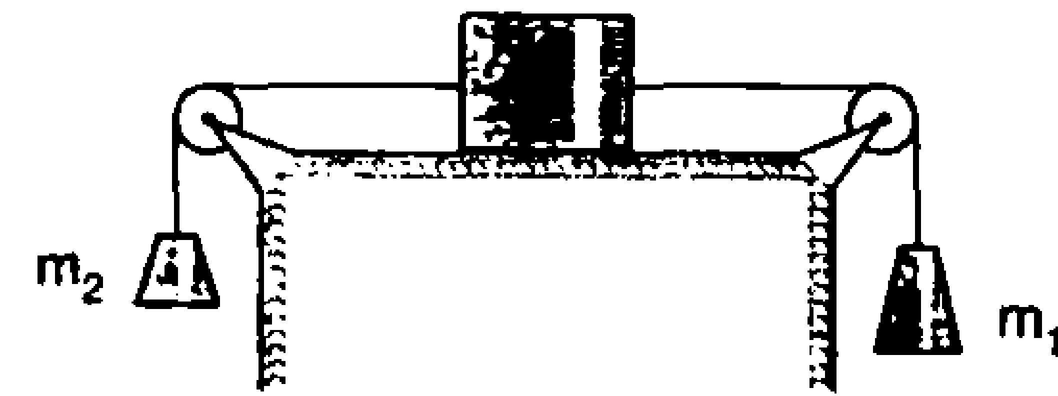
$$40\,N - 20\,N = \frac{60\,N}{9{,}8\,m/s^2} \cdot a$$

de donde: Rpta.: $a = 3{,}27\,m/s^2$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 6. ¿Con qué aceleración se mueven los bloques de la figura donde no hay rozamiento?

$m_1 = 5\,kg$; $m_2 = 3\,kg$; $m_3 = 8\,kg$



RESOLUCIÓN : $\Sigma F = m\,.\,a$ (I)

Donde: $\Sigma F = w_1 - w_2$

o sea: $\Sigma F = m_1 g - m_2 g$ (1)

y: $m = m_1 + m_2 + m_3$ (2)

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

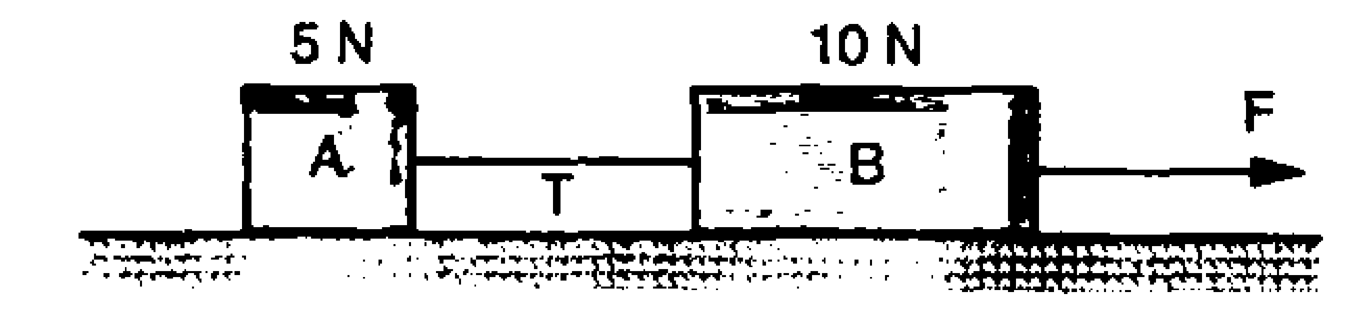
$$m_1 g - m_2 g = (m_1 + m_2 + m_3)\,a$$

de donde: $$a = \frac{(m_1 - m_2)\,g}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$a = \frac{(5\,kg - 3\,kg)\,9{,}8\,m/s^2}{5\,kg + 3\,kg + 8\,kg}$$

Rpta.: $a = 1{,}225\ m/s^2$

PROBLEMA 7. En la figura, si la tensión de la cuerda AB es de 2,5 N y no hay rozamiento, hallar el valor de ia fuerza F en dinas.



RESOLUCIÓN :

Sabiendo que : $\Sigma F = m\,.\,a$

Para A : $T = m_A\,.\,a$

$$2{,}5\,N = \frac{5\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}\cdot a$$

de donde : $a = 4{,}9\,\frac{m}{s^2}$

Para el peso B : $\Sigma F = m\,.\,a$

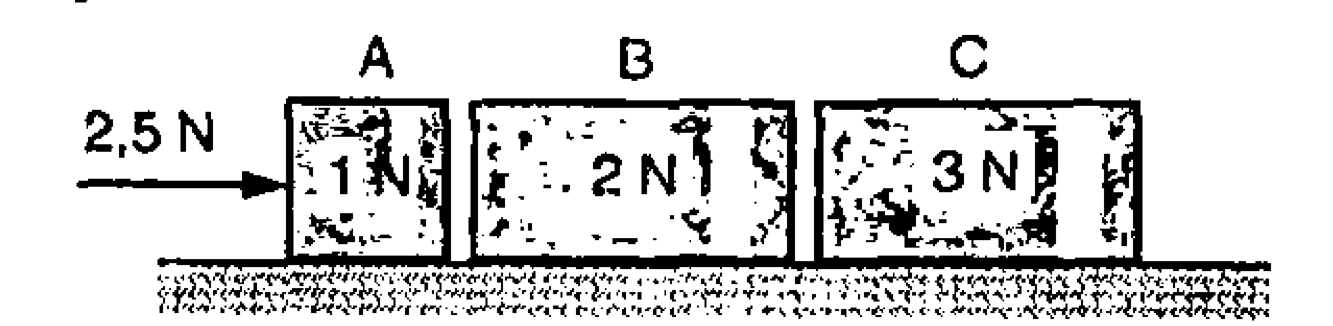
$F - T = m_B\,.\,a$

$$F - 2{,}5\,N = \frac{10\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}\cdot 4{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

$F = 7{,}5\,N$; a dinas:

Rpta.: $F = 7{,}5 \times 10^5$ dinas

PROBLEMA 8. ¿Con qué fuerza se empuja el bloque "C" ? No hay rozamiento.



RESOLUCIÓN : $\Sigma F = m\,.\,a$

$$F = (M_A + M_B + M_C)\,a$$

$$2{,}5\,N = \left(\frac{1\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} + \frac{2\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} + \frac{3\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}\right)\cdot a$$

de donde : $a = 4{,}9\,m/s^2$

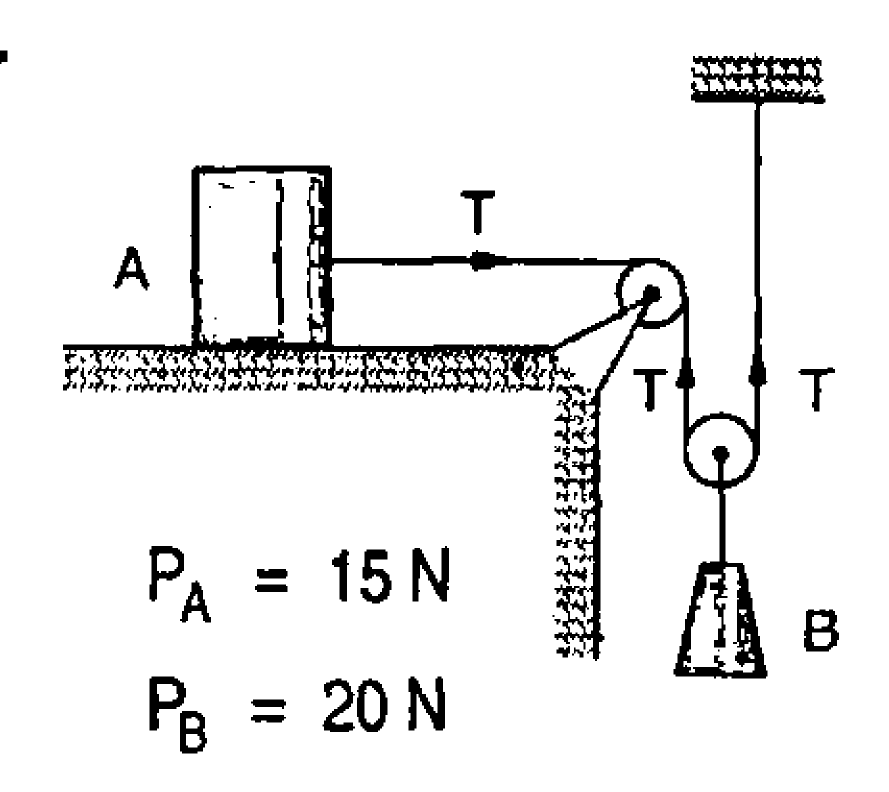
Cálculo de la fuerza para el bloque C :

$$F_C = m_C\,.\,a$$

$$F_C = \frac{2\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}}\cdot 4{,}9\,\frac{m}{s^2}$$

Rpta.: $F_C = 1\,N$

PROBLEMA 9. Calcular la tensión de la cuerda que une la poleas, sabiendo que no hay rozamiento. (Despreciar el peso de las poleas)



$P_A = 15\,N$

$P_B = 20\,N$

RESOLUCIÓN : Téngase presente que la tensión en la cuerda vertical es igual en sus dos porciones, sea T la tensión:

Para el bloque A : $\Sigma F_x = m_A \cdot a$

$$T = \frac{15\,N}{9{,}8\,m/s^2} \cdot a \qquad (1)$$

Para el bloque B : $\Sigma F_y = m_B \cdot \frac{a}{2}$

$$20\,N - 2T = m_B \cdot \frac{a}{2}$$

$$20\,N - \frac{2 \times 15\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} \cdot a = \frac{20\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} \cdot \frac{a}{2}$$

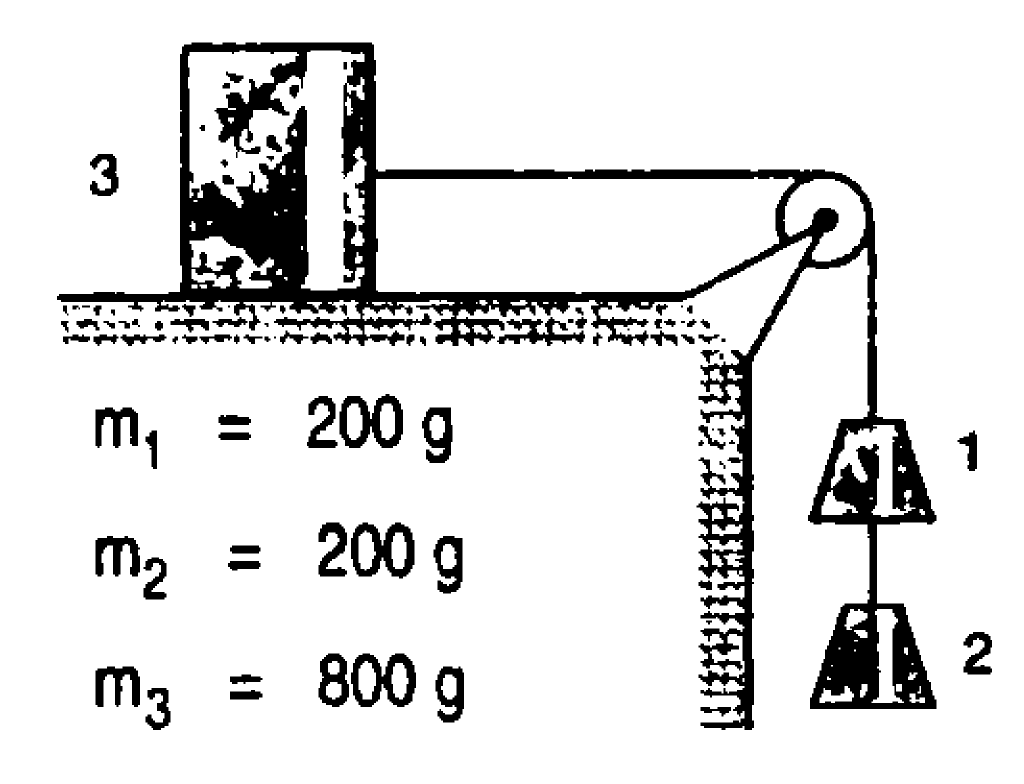
de donde: $a = \frac{9{,}8}{2}\,\frac{m}{s^2}$

sustituyendo en (1) :

$$T = \frac{15\,N}{9{,}8\,\frac{m}{s^2}} \cdot \frac{9{,}8}{2}\,\frac{m}{s^2}$$

Rpta.: $T = 7{,}5\,N$

PROBLEMA 10. Hallar la aceleración con que se mueven los bloques de la figura. Considere que no existe rozamiento.



RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$\Sigma F = m \cdot a \qquad (I)$$

Las fuerzas que harán mover el sistema son los pesos de las dos masas de 200 g y la masa total que estará en movimiento con aceleración "a" serán las tres masas del sistema. luego:

$$\Sigma F_y = m_1 g + m_2 g$$

$$\Sigma F_y = (m_1 + m_2)\,g$$

$$\Sigma F_y = (400\,g)\;980\,\frac{cm}{s^2}$$

$$\Sigma F_y = 392 \cdot 10^3\,g \cdot \frac{cm}{s^2} \qquad (1)$$

Por otro lado: $m = 200\,g + 200\,g + 800\,g$

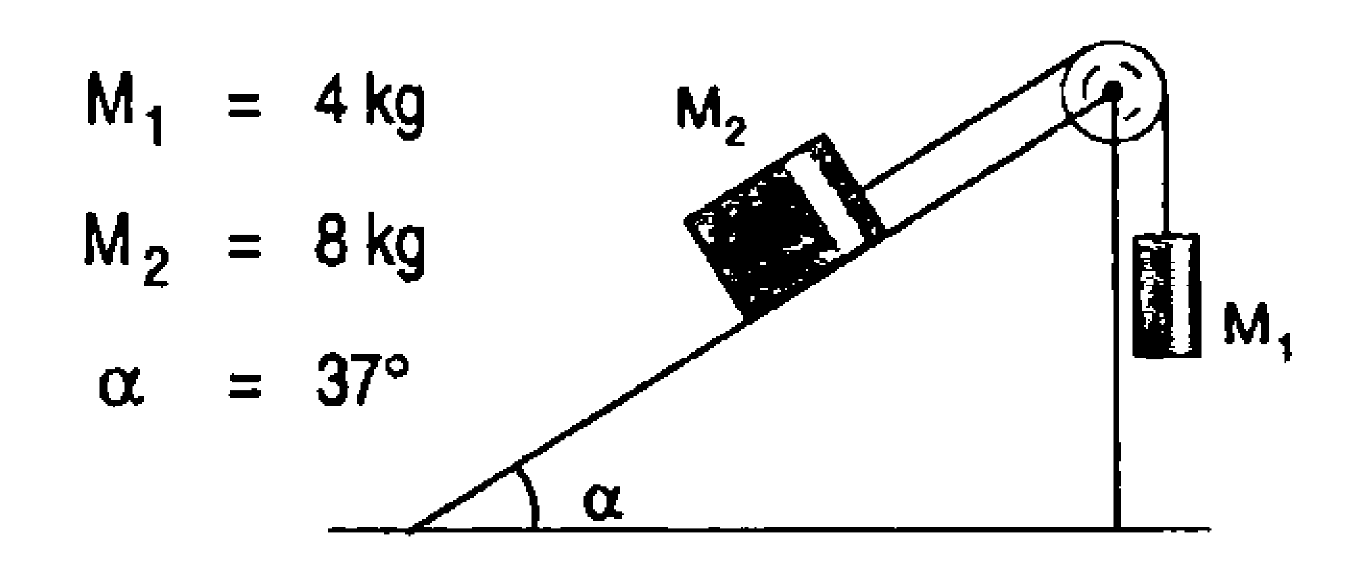
$$m = 1\,200\,g \qquad (2)$$

sustituyendo (1) y (2) en (I):

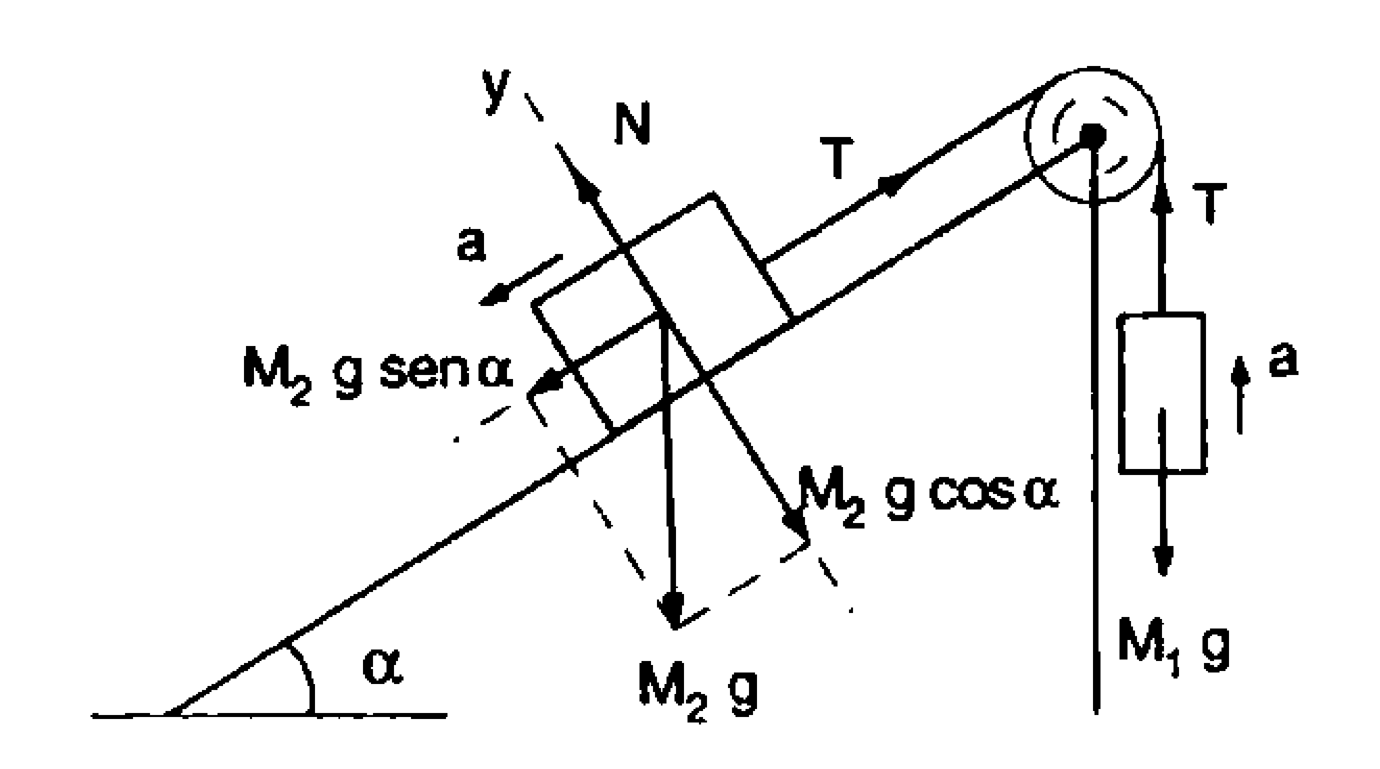
$$392 \cdot 10^3\,g \cdot \frac{cm}{s^2} = 1\,200\,g \cdot a$$

de donde: Rpta.: $a = 326{,}7\ cm/s^2$

PROBLEMA 11. Calcular la aceleración del sistema de masas M_1 y M_2. No existe rozamiento.



RESOLUCIÓN :



Sabiendo que: $\Sigma F_y = m \cdot a_y$

$$M_2\,g\,sen\alpha - M_1\,g = (M_1 + M_2)\,a$$

de donde: $$a = \frac{M_2\,g\,sen\alpha - M_1\,g}{M_1 + M_2}$$

http://librosysolucionarios.net

$$a = \frac{M_2 \operatorname{sen}\alpha - M_1}{M_1 + M_2} \times g$$

$$a = \frac{(8\,kg \,.\, \operatorname{sen} 37° - 4\,kg)}{4\,kg + 8\,kg} \cdot 9{,}8\,m/s^2$$

$$a = \frac{(8\,kg \cdot \frac{3}{5} - 4\,kg)\ 9{,}8\,m/s^2}{12\,kg}$$

Rpta.: $a = 0{,}65\ m/s^2$

PROBLEMA 12. ¿Cuánto pesa un cuerpo cuya masa es 5 kg en un lugar donde la gravedad es 6 m/s^2 ?

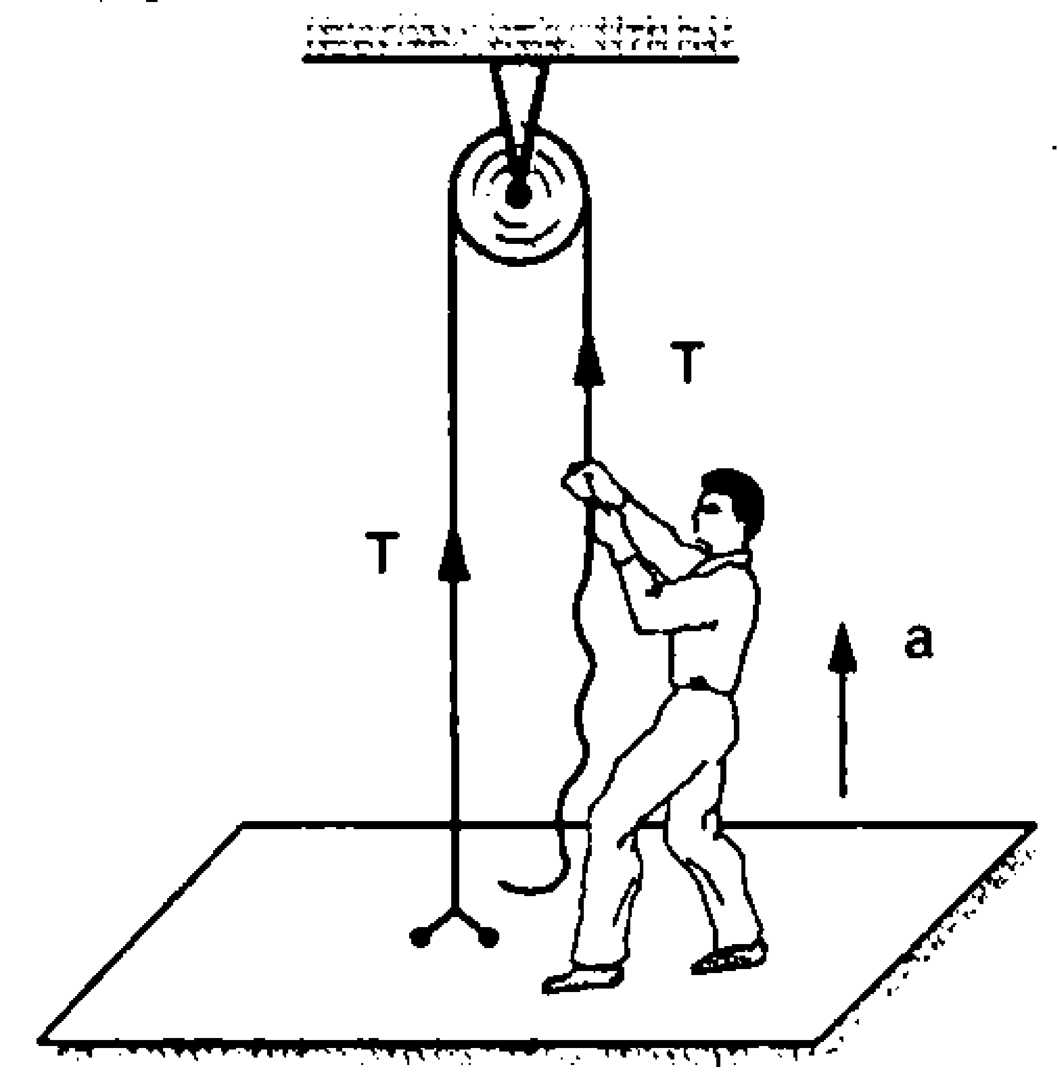
RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$P = m\,g = 5\,kg \,.\, 6\,m/s^2$$

$$P = 30\,kg \,.\, m/s^2$$

Rpta.: $P = 30\ N$

PROBLEMA 13. Un hombre cuyo peso es de 800 N está de pie sobre una plataforma que pesa 400 N tira de una cuerda que está sujeta a la plataforma y que pasa por una polea fija al techo. ¿Con qué fuerza, en newton, ha de tirar la cuerda, para comunicarse a sí mismo y a la plataforma una aceleración hacia arriba de $0{,}6\ m/s^2$?



RESOLUCIÓN : El peso de la plataforma y el hombre se reparte a los dos lados de la cuerda, por eso las tensiones, cuando el sistema se mueve, son iguales.

$$\Sigma F_y = m \,.\, a_y \qquad (1)$$

Pero:

$$\Sigma F_y = 2T - w_{total} = 2T - 1\,200\,N$$

Además: $m = \frac{w_{total}}{g} = \frac{1\,200\,N}{9{,}8\,m/s^2}$

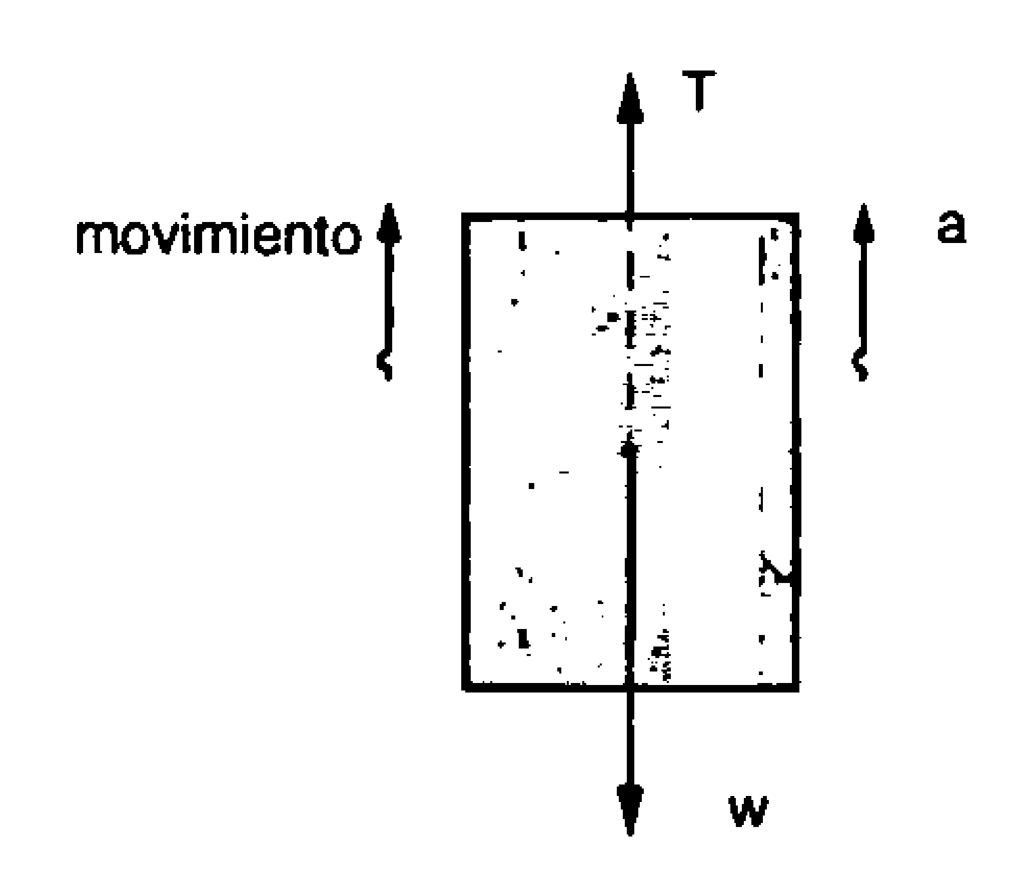
Sustituyendo en (1):

$$2T - 1\,200\,N = \frac{1\,200\,N}{9{,}8\,m/s^2} \cdot 0{,}6\,m/s^2$$

de donde:

Rpta.: $T = 636{,}7\ N$

PROBLEMA 14. Un bloque pesa 100 dinas y es sostenido por una cuerda muy delgada que resiste sólo una tensión de 10 N/cm^2. Su diámetro es de 0,1 mm. Si se le imprime una aceleración, hacia arriba, de 20 m/s^2, averiguar si resiste la cuerda.



RESOLUCIÓN :

$$w = 100\ din$$

$$T = 10\ N/cm^2$$

$$d = 0{,}1\ mm$$

$$a = 20\ m/s^2$$

Se escribe que: $\Sigma F_y = m \,.\, a_y$

$$T - w = \frac{w}{g} \cdot a_y$$

http://librosysolucionarios.net

$$T = w + \frac{w}{g} \cdot a_y = w\left(1 + \frac{a_y}{g}\right) \quad (I)$$

El valor de la tensión se calculará en N, para ello:

$$w = 100 \text{ din}$$

$$w = 100 \times 10^{-5} \text{ N}$$

Sustituyendo en (I) :

$$T = 100 \cdot 10^{-5} \text{ N}\left(1 + \frac{20 \text{ m/s}^2}{9{,}8 \text{ m/s}^2}\right)$$

$$T = 100 \cdot 10^{-5} \text{ N} \cdot 3{,}04$$

$$T = 3\,040 \times 10^{-6} \text{ N} \qquad (1)$$

Cálculo de la sección de la cuerda:

$$S = \frac{\pi d^2}{4} = \frac{3{,}14 \times (0{,}01 \text{ cm})^2}{4}$$

$$S = 78{,}5 \times 10^{-6} \text{ cm}^2$$

Cálculo de la resistencia del hilo o cuerda de 0,01 cm de diámetro:

$$R = P \,.\, S$$

$$R = (10 \text{ N/cm}^2) \cdot 78{,}5 \cdot 10^{-6} \text{ cm}^2$$

$$R = 785{,}0 \cdot 10^{-6} \text{ N}$$

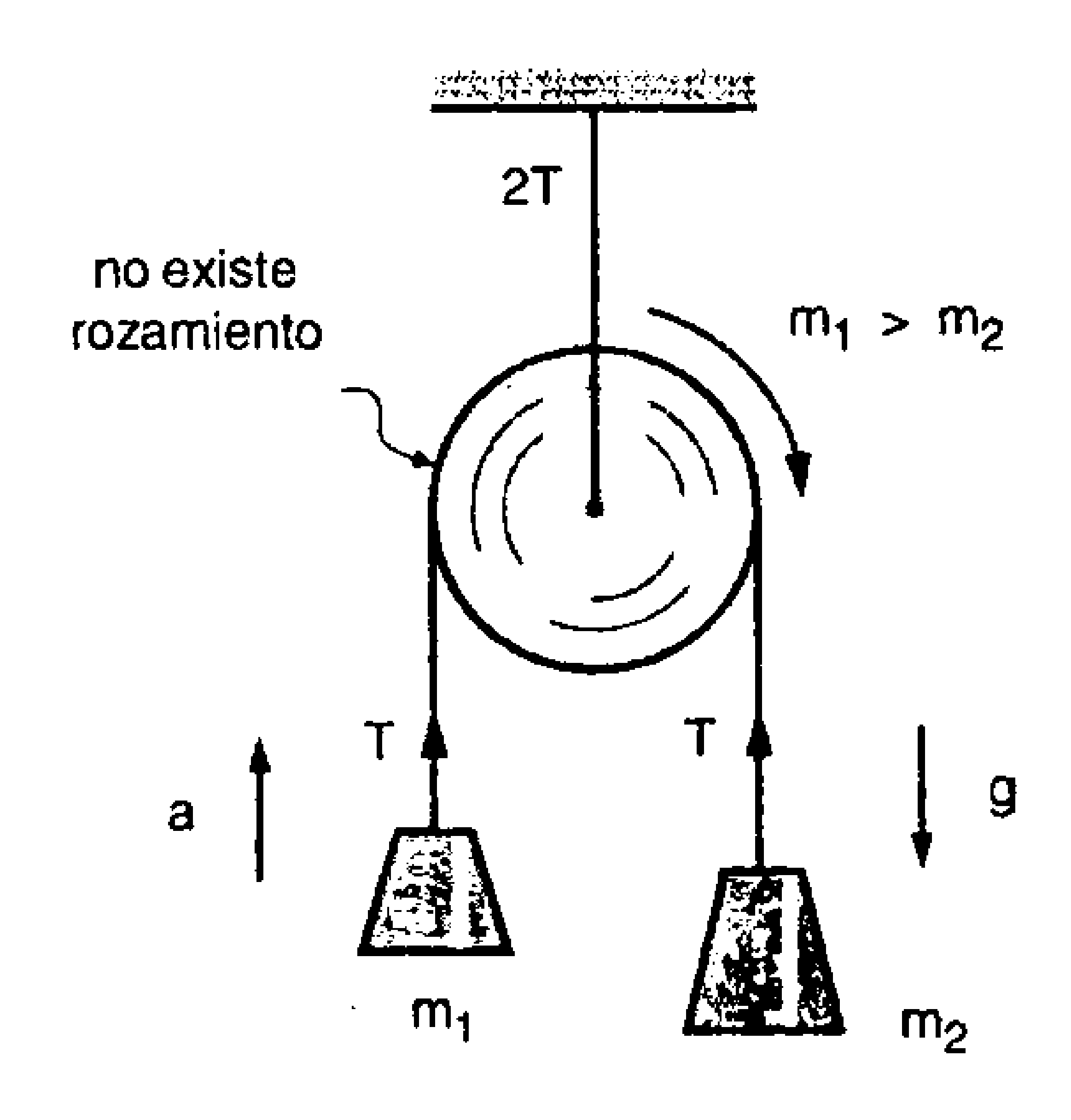
Rpta.: Como la cuerda resiste: $785{,}0 \times 10^{-6}$ N, quiere decir que se rompe.

PROBLEMA 15. Se cuelgan dos masas m_1 y m_2 como se muestra en la figura. Calcular:

a) La aceleración del sistema.

b) La tensión de los cables que sostienen las masas, y

c) Calcular la tensión de la cuerda que sostiene a la polea.



RESOLUCIÓN :

a) Cálculo de la aceleración:

Para la masa de la derecha:

$$\Sigma F_y = m_1 \,.\, a$$

$$m_1 \,.\, g - T = m_1 \,.\, a \qquad (1)$$

Para la masa de la izquierda:

$$T - m_2 \,.\, g = m_2 \,.\, a \qquad (2)$$

Sumando (1) + (2) :

$$m_1 \,.\, g - m_2 \,.\, g = m_1 \,.\, a + m_2 \,.\, g$$

de donde:

Rpta.: $$a = \frac{g\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

b) Sustituyendo en (1) :

$$m_1 \,.\, g - T = m_1 \frac{g\,(m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$T = m_1 \,.\, g - m_1 \frac{g\,(m_2 - m_1)}{m_1 + m_2} + m_1 \,.\, g$$

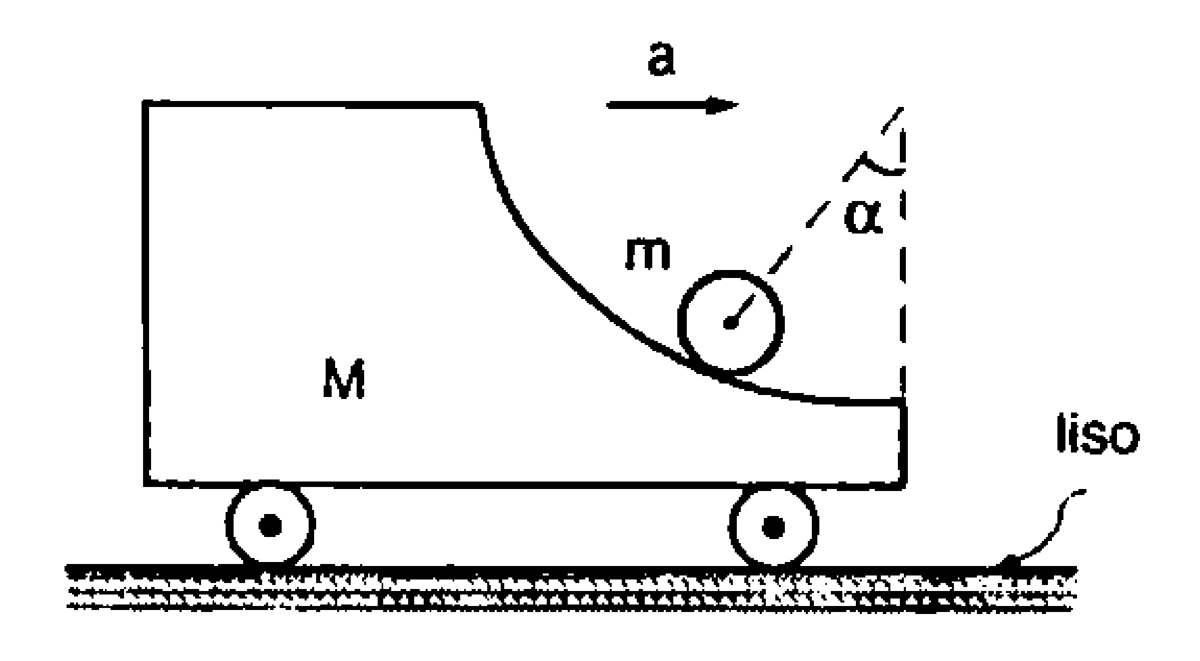
de donde: Rpta.: $$T = \frac{2\,m_1 \,.\, m_2 \,.\, g}{m_1 + m_2}$$

c) Según la figura, como la cuerda que sostiene la polea (que se supone sin peso) sostiene a todo el sistema, soportará por consiguiente las dos tensiones.

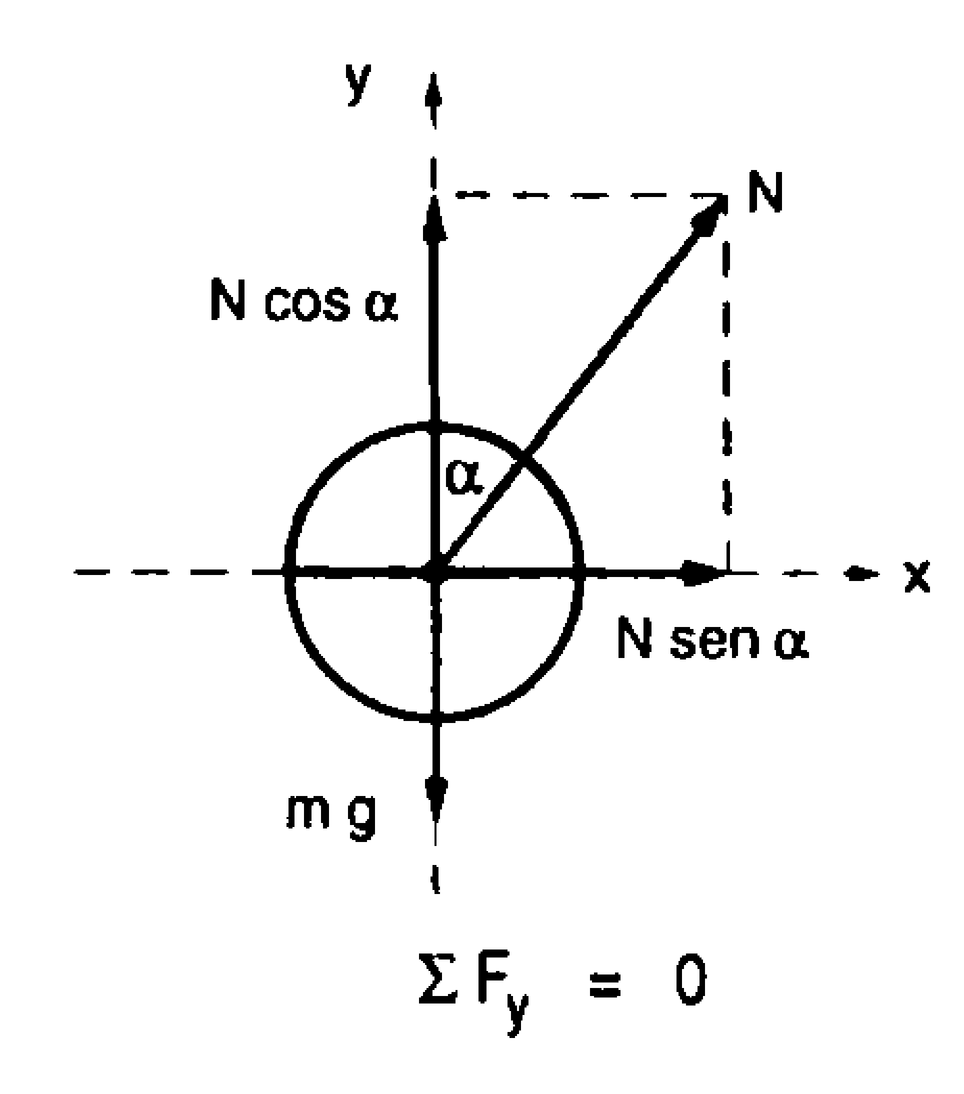
De donde, por equilibrio:

Rpta.: $2T = \dfrac{4 m_1 m_2 g}{m_1 + m_2}$

PROBLEMA 16. Calcular la aceleración del sistema mostrado en la figura para que la esferita de masa "m" se mantenga en la posición mostrada. Considere que todas las superficies son lisas.



RESOLUCIÓN : D.C.L. de "m"



$$\Sigma F_y = 0$$

$\therefore \qquad N\cos\alpha = m \cdot g \qquad (1)$

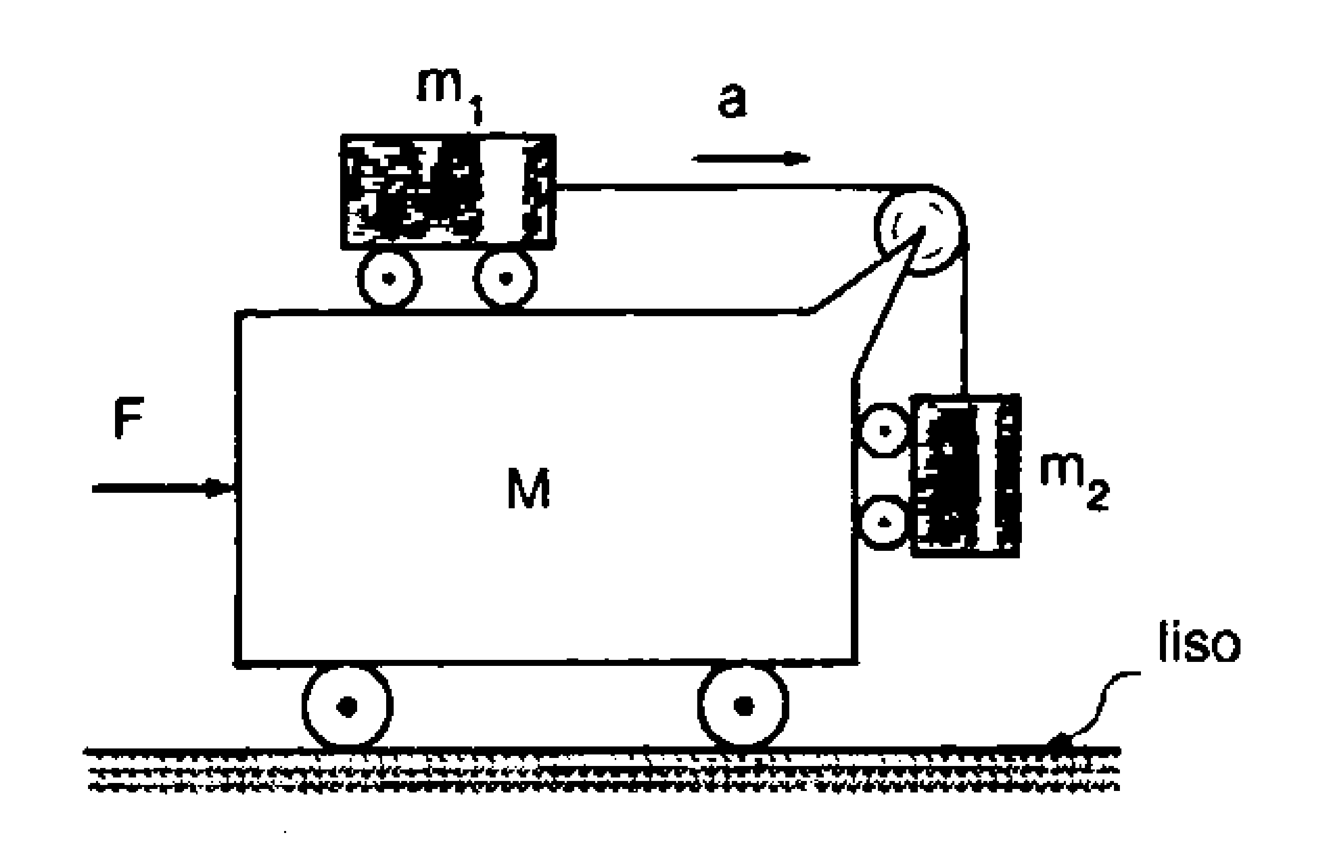
$$\Sigma F_x = m \cdot a$$

$\therefore \qquad N \operatorname{sen}\alpha = m \cdot a \qquad (2)$

$$\frac{(2)}{(1)}: \frac{N\operatorname{sen}\alpha}{N\cos\alpha} = \frac{m \cdot a}{m \cdot g}$$

Rpta.: $a = g \cdot \operatorname{tg}\alpha$

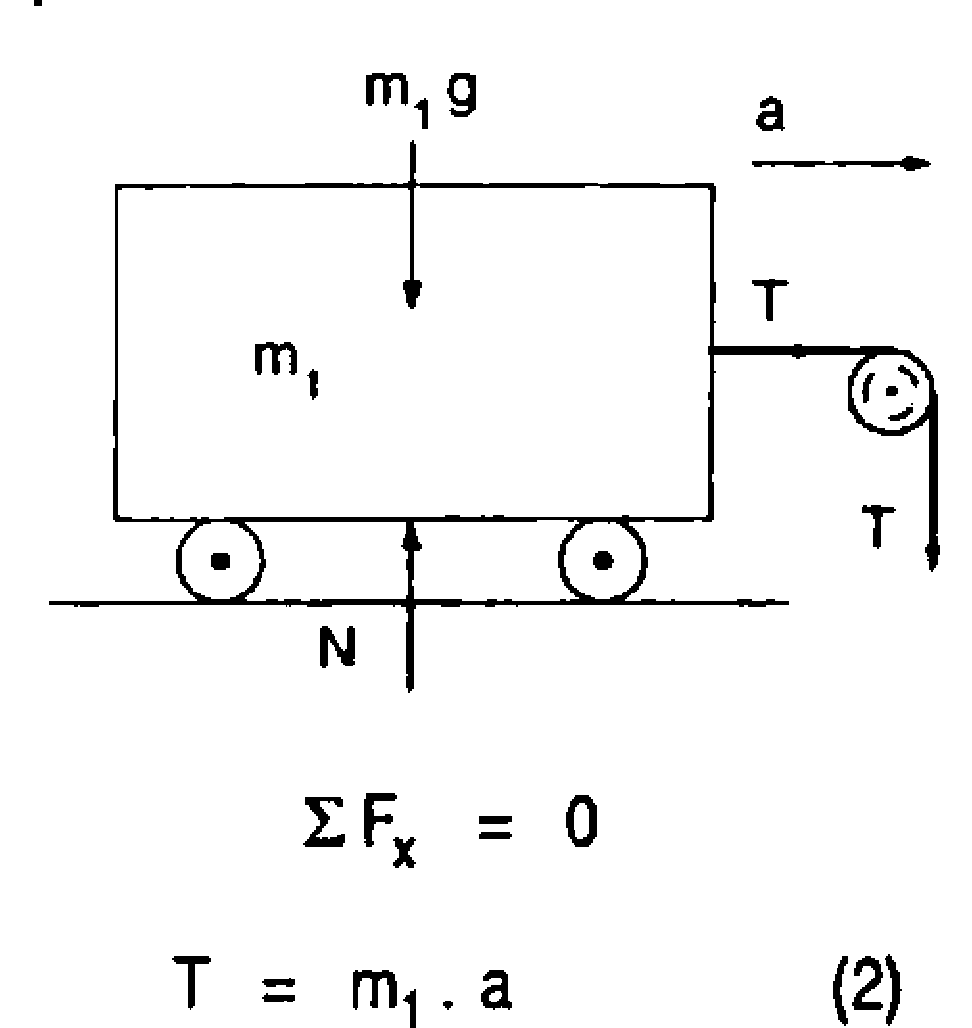
PROBLEMA 17. En la siguiente figura mostrada, hallar la aceleración "a" y la fuerza F para que m_1 y m_2 se mantengan en reposo con respecto a **M**.



RESOLUCIÓN : Por equilibrio:

I) $F = (M + m_1 + m_2)\,a \qquad (1)$

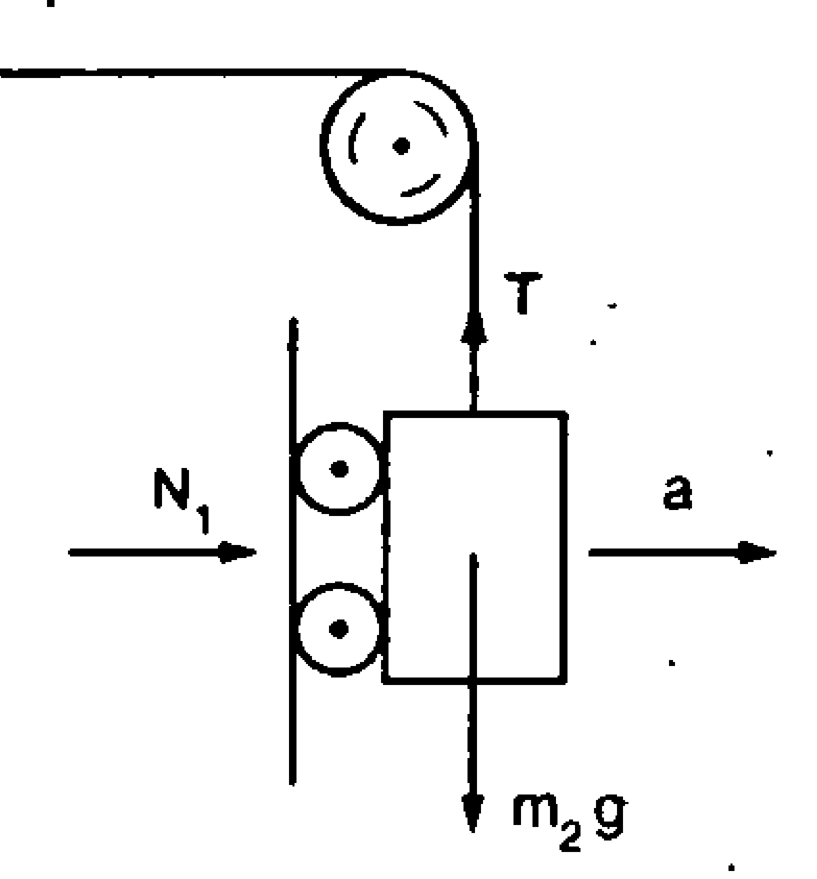
II) Diagrama de cuerpo libre de m_1, con respecto a tierra.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T = m_1 \cdot a \qquad (2)$$

III) Diagrama de cuerpo libre de m_2, con respecto a tierra



$$\Sigma F_y = 0$$

$$T = m_2 \cdot g \qquad (3)$$

$$\frac{(2)}{(1)}: m_1 \cdot a = m_2 \cdot g$$

La aceleración del sistema con respecto a tierra es:

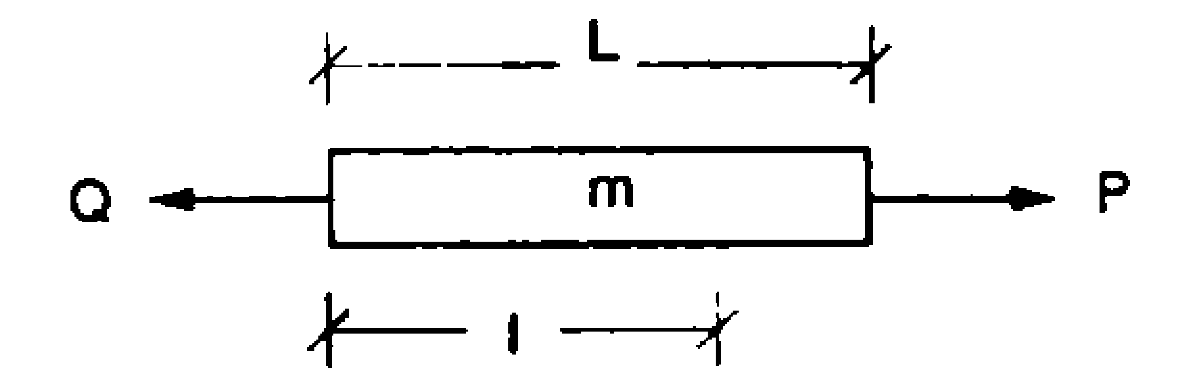
Rpta. $a = \frac{m_2}{m_1} g$ (4)

Reemplazando (4) en (1):

Rpta.: $F = (M + m_1 + m_2) \frac{m_2}{m_1} g$

NOTA: En el paso (II) la aceleración "a" se manifiesta sólo en el eje x, mientras que en el eje y, a =0. En el paso (III) se nota también que para y: a = 0 y para el eje x se manifiesta la aceleración "a".

PROBLEMA 18. Una barra homogénea de longitud "L" experimenta la acción de dos fuerzas P y Q (P > Q) aplicadas en sus extremos y dirigidas en sentidos opuestos, tal como se indica en la figura. Hallar la fuerza de tracción que experimenta la barra en su sección que se encuentra a una distancia "l" de uno de sus extremos.



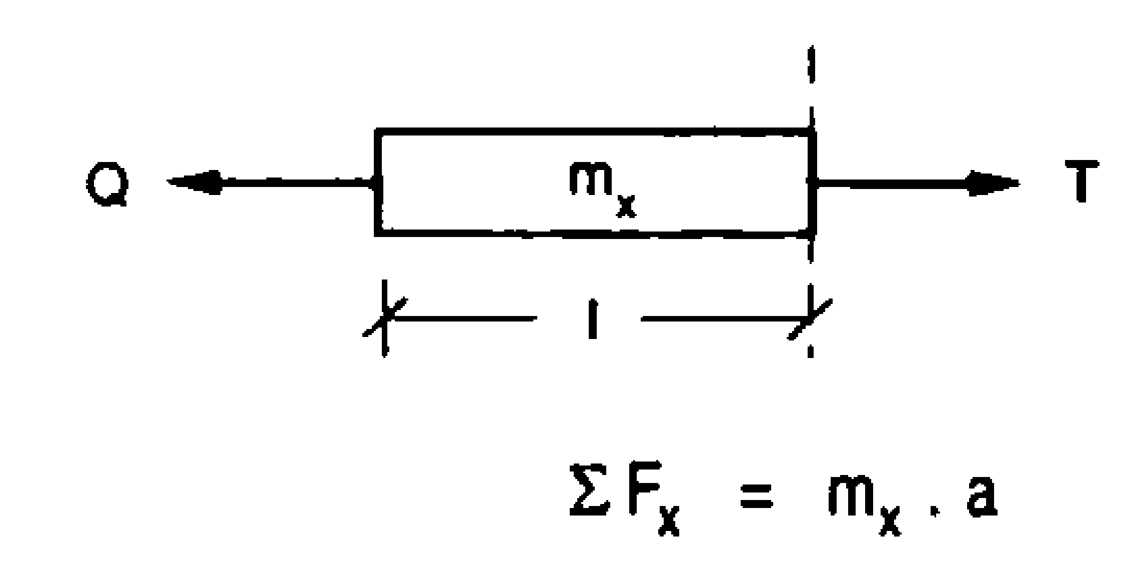
RESOLUCIÓN : $\Sigma F_x = m \cdot a$

$$P - Q = m \cdot a \qquad (1)$$

En la barra homogénea , por regla de tres simple se tiene:

$$\left.\begin{matrix} m & \rightarrow & L \\ m_x & \rightarrow & l \end{matrix}\right\} \therefore \; m_x = \left(\frac{l}{L}\right) m \qquad (2)$$

D. C. L. de una parte de la barra: m_x



$$\Sigma F_x = m_x \cdot a$$

$$T - Q = m_x \cdot a \qquad (3)$$

Reemplazando (2) en (3):

$$T - Q = \left(\frac{l}{L}\right) m \cdot a \qquad (4)$$

de (1) en (4):

Rpta.: $T = \left(\frac{l}{L}\right) P + \left(\frac{L - l}{L}\right) Q$

DINÁMICA CIRCUNFERENCIAL

En esta parte de la Dinámica estudiaremos las condiciones que se deben cumplir para que un cuerpo se mueva sobre una circunferencia. El estudio se fundamenta en la 2da. ley de Newton.

Como recordaremos, en el movimiento circunferencial el móvil posee dos velocidades (tangencial y angular). Si el movimiento es circunferencial uniforme la velocidad tangencial se mantiene constante en su módulo pero cambia de dirección permanentemente.

La rapidez con que cambia la dirección de la velocidad tangencial se mide con la aceleración centrípeta.

$$a_c = \frac{v_t^2}{R} = \omega^2 R \qquad (1)$$

Donde:

a_c: Es la aceleración centrípeta, medida en "m / s^2".

v_t : Es la velocidad tangencial, medida en "m/s"

w : Es la velocidad angular, medida en "rad/s".

R : Es el radio de giro, medido en metros "m".

http://librosysolucionarios.net

¿Cuál es la condición de todo movimiento circunferencial?

Para que un cuerpo gire con movimiento circunferencial debe existir sobre él una fuerza resultante mayor que cero, dirigida hacia el centro de la circunferencia denominada "fuerza centrípeta", la cual origina una "aceleración centrípeta" en su misma dirección.

¿Cómo hallar la fuerza centrípeta?

De la Segunda ley de Newton:

$$F_c = m \cdot a_c \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$F_c = m\left(\frac{v_t^2}{R}\right) = m(\omega^2 R)$$

Donde:

m : Es la masa del cuerpo, en "kg".

F_c : Es la fuerza centrípeta o fuerza resultante en dirección radial dirigida hacia el centro de rotación, se le mide en newton "N".

FUERZA CENTRÍPETA F_c

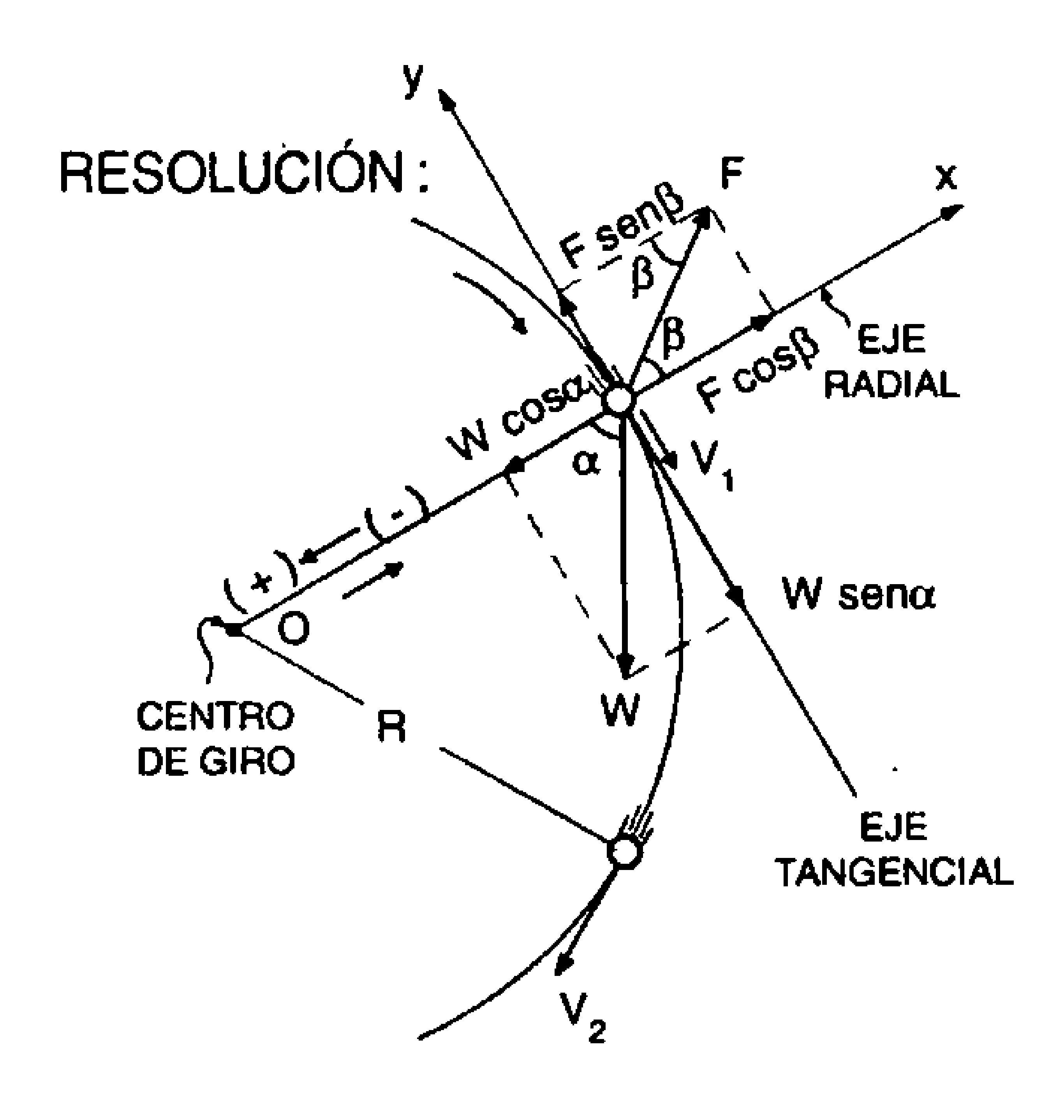
Es aquella fuerza resultante en la dirección radial que origina todo movimiento circunferencial. La fuerza centrípeta posee la misma dirección que la aceleración centrípeta (la cual está relacionada con los continuos cambios de dirección de la velocidad tangencial durante el movimiento circunferencial).

$$F_c = \Sigma F_{radiales} = m \cdot a_c$$

$$F_c = \Sigma F_{\substack{\text{que van hacia}\\ \text{el centro}}} - \Sigma F_{\substack{\text{que van hacia}\\ \text{afuera}}}$$

Ejemplo: Una esferita de peso "W" es atada a una cuerda y se le lanza haciéndola girar en un plano vertical, se le aplica una fuerza externa "F", tal como muestra la figura. Realice el diagrama de fuerzas sobre la esferita.

RESOLUCIÓN :



En el eje radial (eje x) :

$$\Sigma F_{radiales} = m \cdot a_c = m\frac{v^2}{R} \qquad (I)$$

$$W\cos\alpha - F\cos\beta = m\frac{v^2}{R}$$

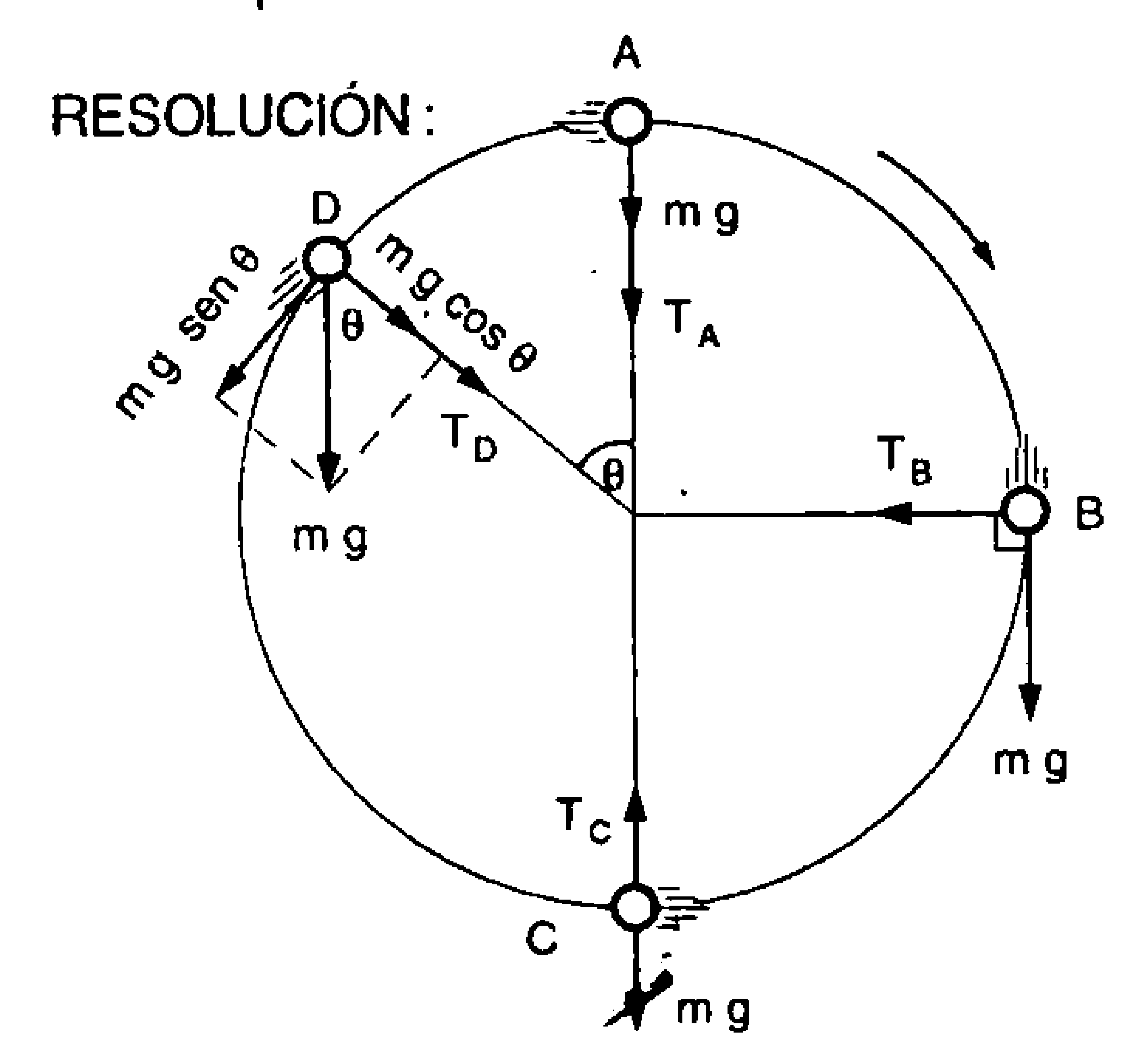
En el eje tangencial (eje y) :

$$\Sigma F_{tangenciales} = m \cdot a_t \qquad (II)$$

$$W\operatorname{sen}\alpha - F\operatorname{sen}\beta = m \cdot a_t$$

Ejemplo: Hallar la tensión de la cuerda cuando la esferita pasa por los puntos A, B, C y D de la circunferencia ubicada en el plano vertical.

RESOLUCIÓN :



Realicemos el D.C.L. de la esferita en cada uno de los puntos y apliquemos la Segunda ley de Newton.

$$\Sigma F_{radiales} = F_c = m a_c = m \frac{v^2}{R}$$

$$\text{En A:} \quad T_A + m g = m \frac{v_A^2}{R}$$

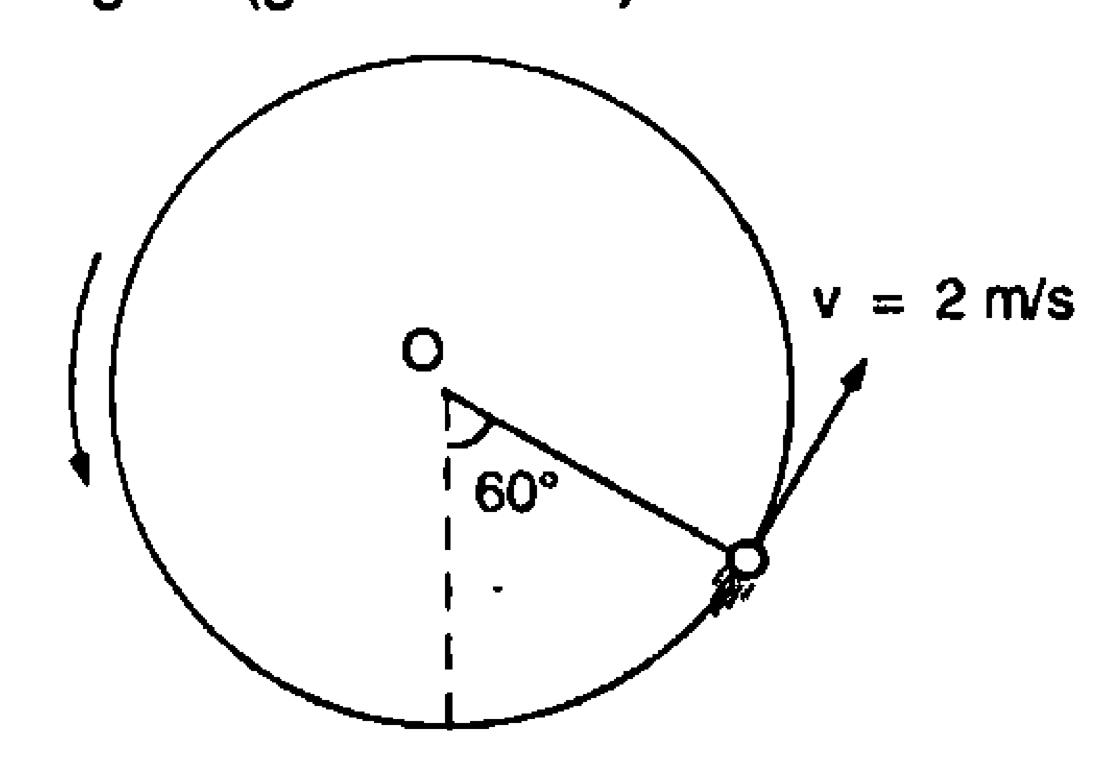
$$\text{En B:} \quad T_B = m \frac{v_B^2}{R}$$

$$\text{En C:} \quad T_C - m g = m \frac{v_C^2}{R}$$

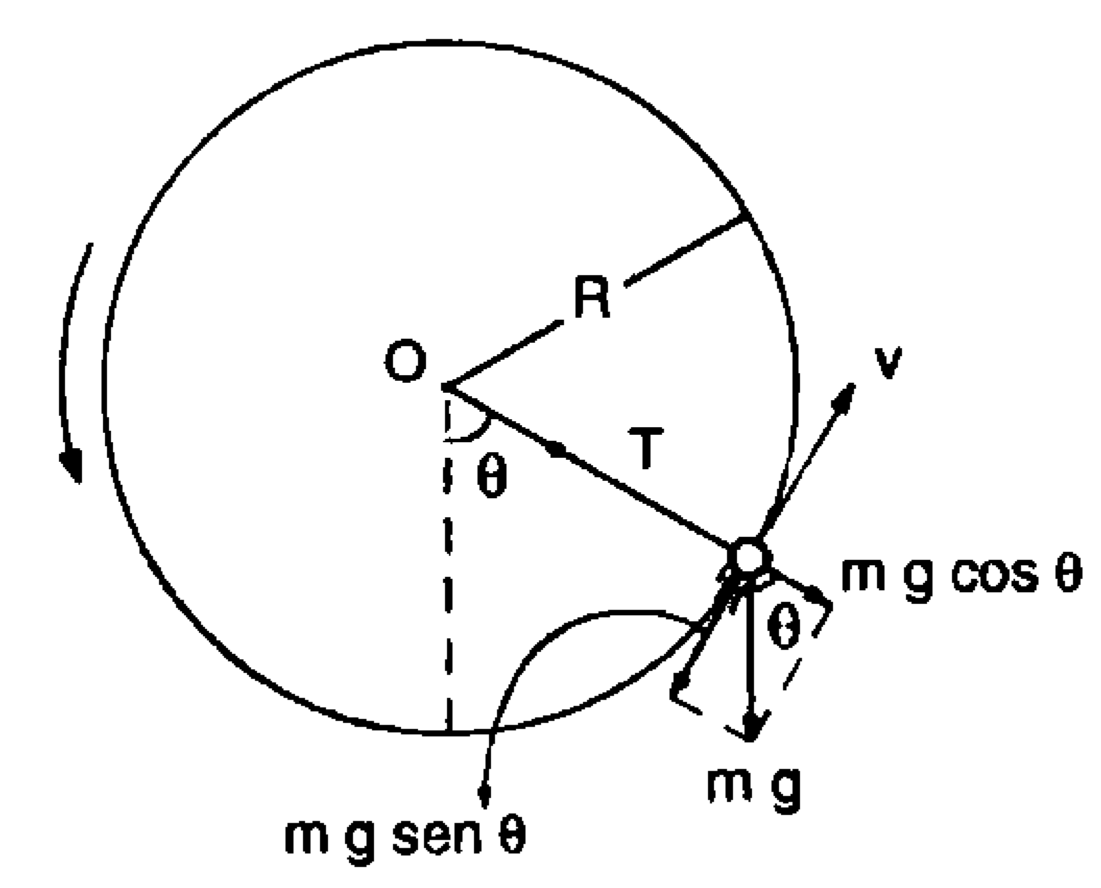
$$\text{En D:} \quad T_D + m g \cos\theta = m \frac{v_D^2}{R}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. El cuerpo de 1 kg de masa gira en un plano vertical atado a un cable inextensible, de masa despreciable y de longitud 1 m. Calcular la tensión en el cable para la posición mostrada en la figura ($g = 10\ m/s^2$)



RESOLUCIÓN : D.C.L.



$$\Sigma F_{radiales} = m \cdot a_c$$

$$\therefore \quad T - m \cdot g \cdot \cos\theta = m \frac{v^2}{R}$$

$$T - 1 \cdot 10 \cdot \cos 60° = 1 \frac{(2)^2}{1}$$

Rpta.: $T = 9\ N$

PROBLEMA 2. En un móvil que da una vuelta en una curva, si se duplica el radio de giro, se triplica la velocidad y la masa se hace 1/8. ¿Qué ocurre con la fuerza centrípeta?

RESOLUCIÓN : $F_c = m \cdot a_c$

$$F_c = m \frac{v^2}{R} \qquad (1)$$

Por otro lado, según el problema:

$$F_c' = \frac{\frac{1}{8} m (3 v)^2}{2 R} = \frac{9}{16} \frac{m \cdot v^2}{R} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ EN } (2): \qquad F_c' = \frac{9}{16} F_c$$

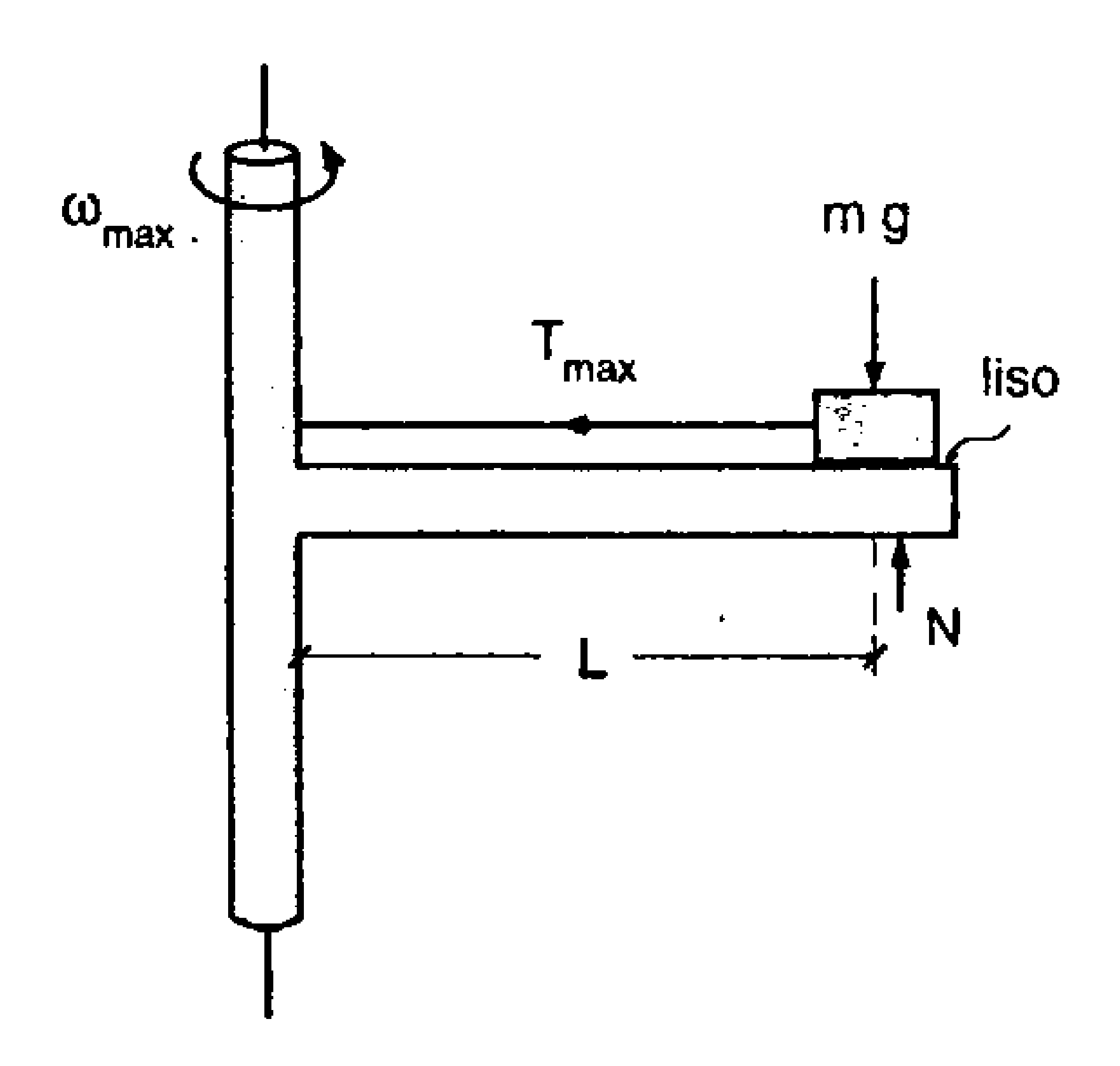
Rpta.: La nueva fuerza centrípeta es los 9/16 de la anterior

PROBLEMA 3. Un bloque de masa "m" gira en un plano horizontal atado a una cuerda de longitud "L". Calcular la velocidad angular máxima si se sabe que la máxima tensión es de 9 veces su peso. Considerar que no hay rozamiento.

RESOLUCIÓN :

Realicemos el D.C.L. del bloque que gira con movimiento circunferencial.

http://librosysolucionarios.net



De la Segunda ley de Newton:

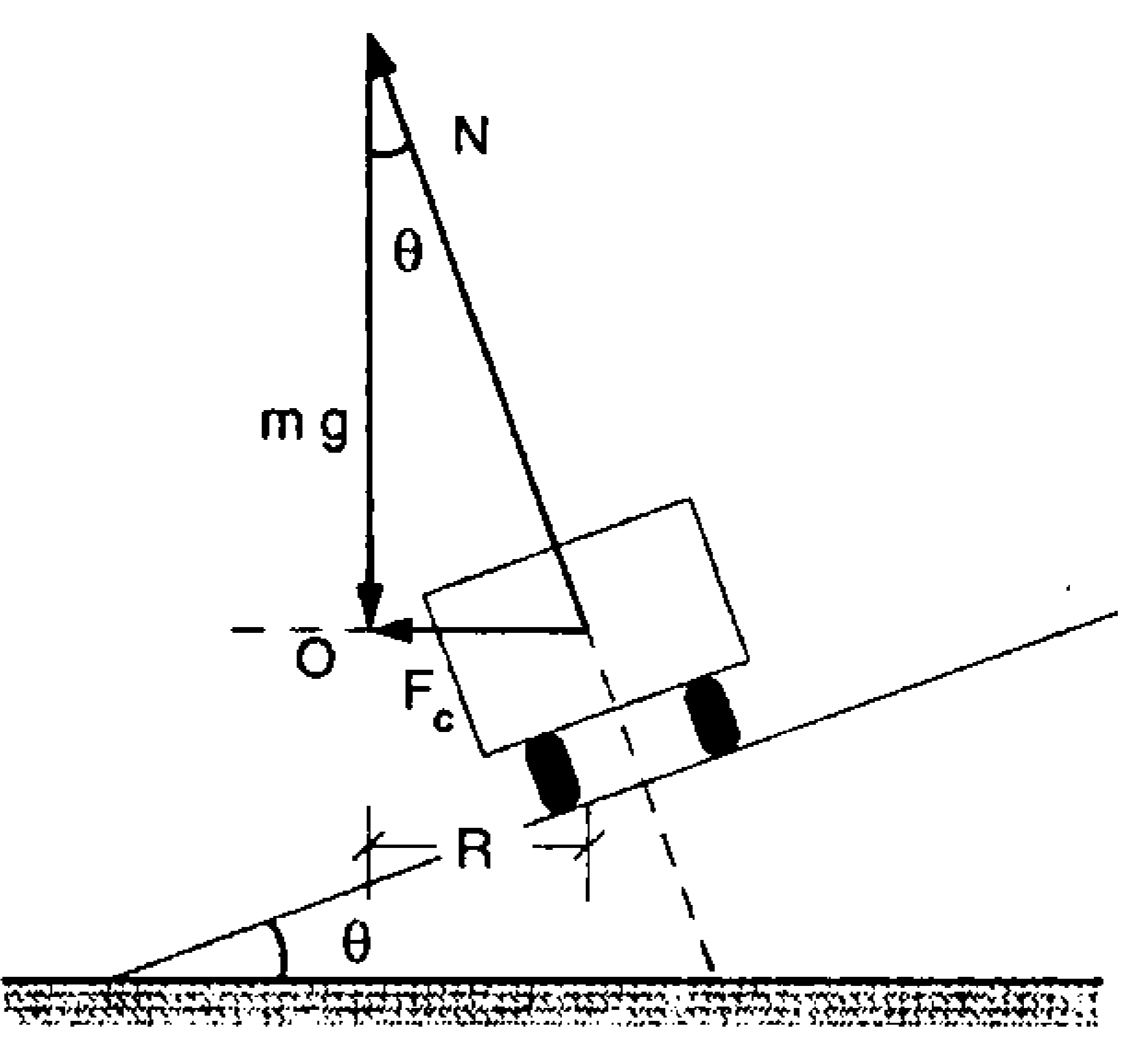
$$F_c = m \cdot a_x = m \cdot \omega^2 R$$

$$T_{max} = m \cdot \omega^2_{max} L$$

$$9\,m \cdot g = m \cdot \omega^2_{max} L$$

Rpta.: $\omega_{max} = 3\sqrt{\dfrac{g}{L}}$

PROBLEMA 4. Un móvil describe una circunferencia de 100 pie de radio y con una velocidad tangencial de 32 pie/s. ¿Cuál debe ser el ángulo de peralte para esta velocidad? (En las carreteras, vías férreas, velódromos, etc. se suele encontrar una mayor elevación de la parte exterior de una curva en relación con la interior; a este ángulo de inclinación se le llama peralte). Considere g = 32 pie/s².



RESOLUCIÓN : De la figura:

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{F_c}{m \cdot g} = \frac{\dfrac{m \cdot v^2}{R}}{m \cdot g}$$

De aquí se obtiene la fórmula para calcular el ángulo de peralte θ :

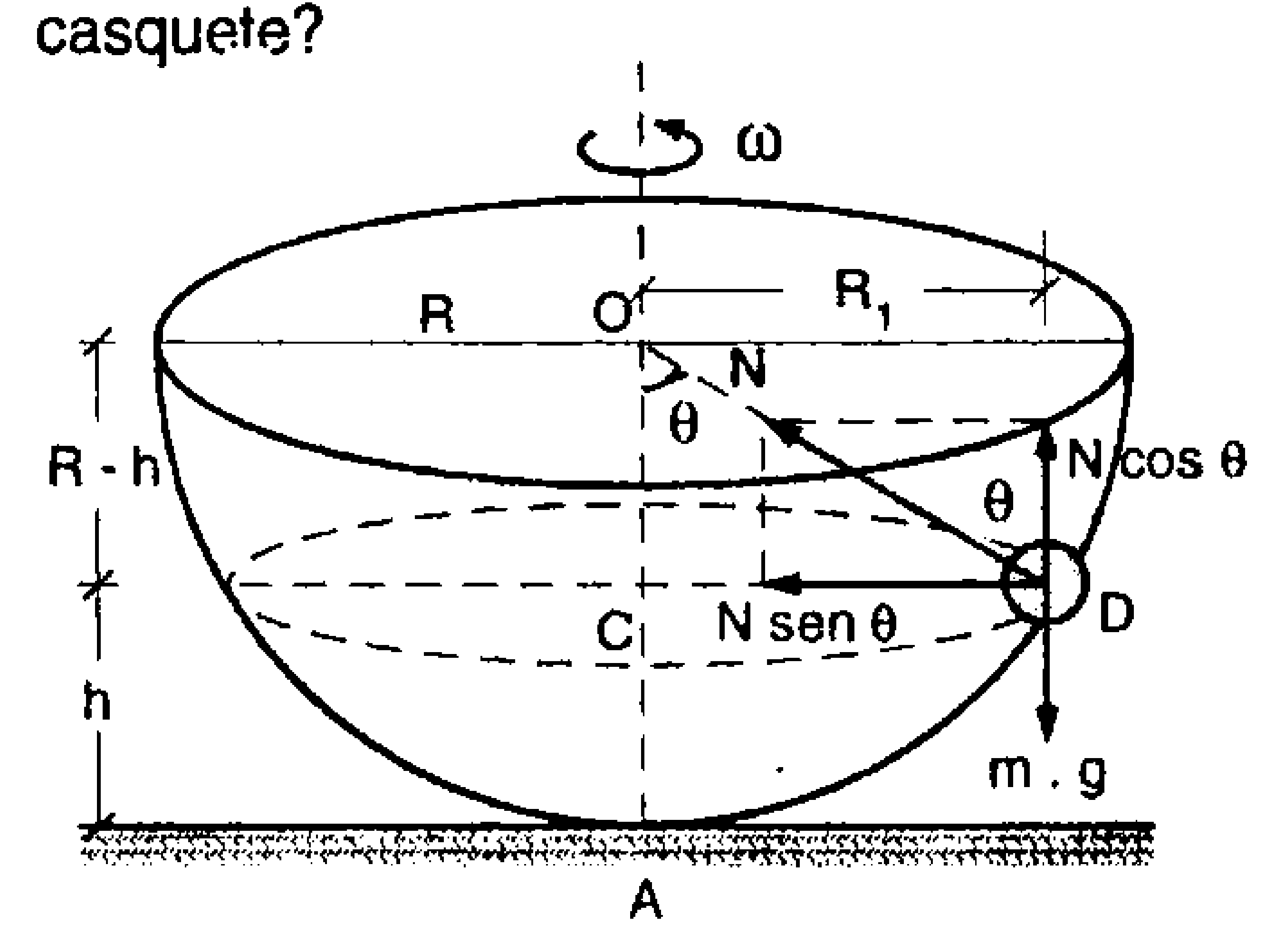
$$\boxed{\operatorname{tg}\theta = \frac{v^2}{R \cdot g}}$$

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{(32)^2}{(100)(32)}$$

$$\operatorname{tg}\theta = 0{,}32$$

Rpta.: $\theta \cong 18°$

PROBLEMA 5. En un casquete semi esférico liso y de radio R se encuentra fija una esferita de masa "m". ¿A qué altura "h" se encuentra dicho cuerpo si el casquete gira uniformemente con una velocidad angular "w" y con qué fuerza "N" la esferita hace presión sobre la superficie del casquete?



RESOLUCIÓN:

Al girar el casquete alrededor del eje OA, el cuerpo de masa "m" gira con radio de giro "R_1" , luego:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_c$$

$$N \operatorname{sen}\theta = m \cdot a_c$$

pero: $a_c = \omega^2 R_1$

$$\therefore \quad N \operatorname{sen}\theta = m \cdot \omega^2 R_1 \qquad (1)$$

http://librosysolucionarios.net

$$\Sigma F_y = 0$$

$\therefore \quad N \cos\theta = m \cdot g \qquad (2)$

$(1) \div (2): \quad tg\,\theta = \dfrac{\omega^2 R_1}{g} \qquad (3)$

En el triángulo rectángulo OCD:

$$tg\,\theta = \frac{R_1}{R - h}$$

pero: $R_1 = R \operatorname{sen}\theta$; luego:

$$tg\,\theta = \frac{R \operatorname{sen}\theta}{R - h} \qquad (4)$$

Sustituyendo valores en (3):

$$\frac{R \operatorname{sen}\theta}{R - h} = \frac{\omega^2 R \operatorname{sen}\theta}{g}$$ de donde:

Rpta.: $h = R\left(1 - \dfrac{g}{\omega^2 R}\right)$

Sustituyendo el valor de R_1 en (1):

$N \operatorname{sen}\theta = m \cdot \omega^2 R \operatorname{sen}\theta$; de donde:

Rpta.: $N = m\,\omega^2 R$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un hombre de 700 N de peso está parado dentro de un ascensor. ¿Qué fuerza, en newtons, ejerce el piso sobre él cuando el ascensor sube a razón de 6 m/s^2.

Rpta.: 1 128,6 N

2. A una masa de 1000 kg se le aplica una fuerza de 800 N durante 10 s. Calcular:
a) La aceleración.
b) La velocidad que adquiere.

Rpta.: a) 0,8 m/s^2
b) 8 m/s

3. Un vagón de 300 toneladas métricas lleva una velocidad de 72 km/h. ¿Cuál será la fuerza necesaria para pararlo en 500 m?

Rpta.: 12×10^4 N

4. Un auto es empujado por un plano horizontal hasta darle cierta velocidad y luego se le suelta hasta que para. Su masa es de 800 kg. Después de que se le dejó hasta que se detuvo recorrió 100 m en 40 s. Calcular:
a) La fuerza que tiene que aplicarse para moverlo.
b) La máxima velocidad que alcanza.

Rpta.: a) F = 653 N
b) V_m = 5 m/s

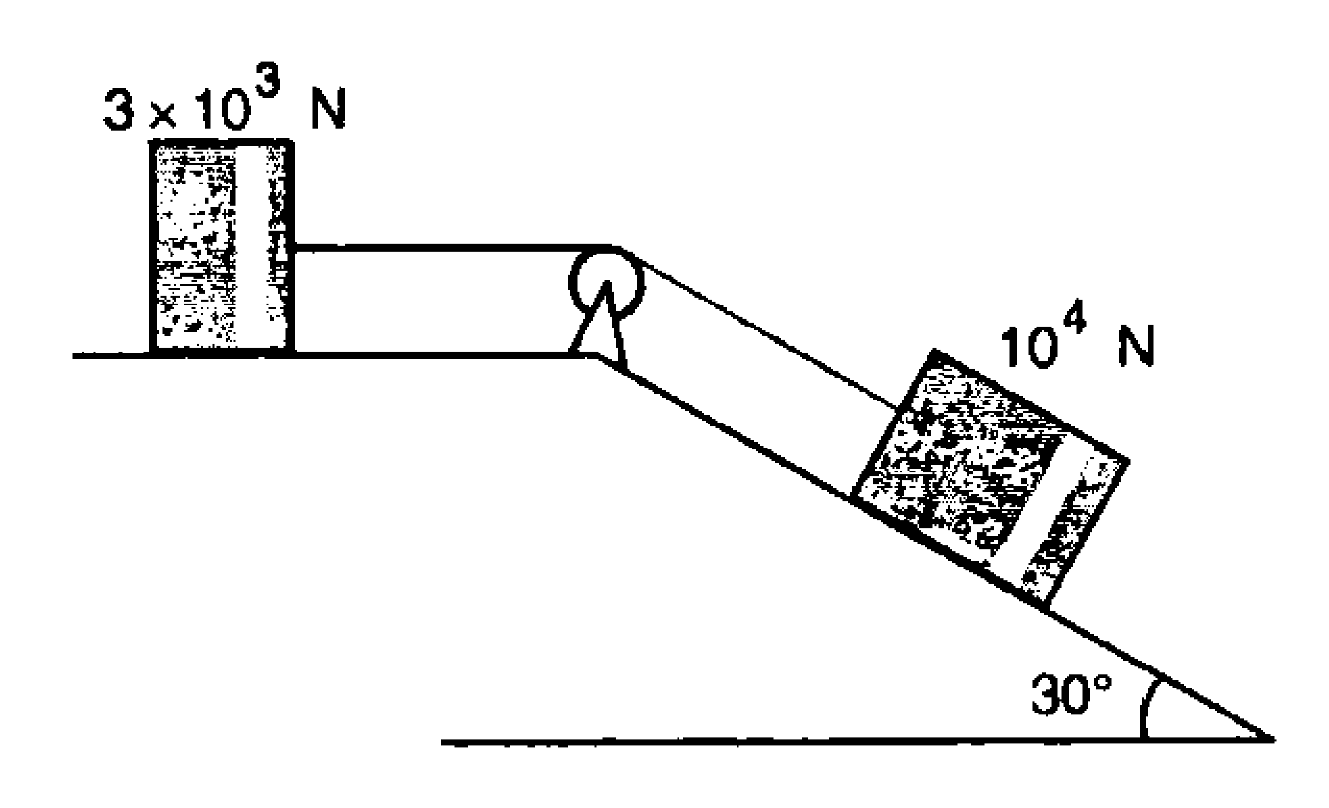
5. Un hombre de 800 N está parado en un ascensor. ¿Cuál será presión sobre el piso cuando el ascensor descienda con una aceleración de 1,8 m/s^2?

Rpta.: 640 N

6. Un cuerpo de 10^5 N se quiere subir por un plano inclinado de 30° con una aceleración de 1 m/s^2. ¿Cuál es la fuerza necesaria? (Despreciar todo efecto de rozamiento; g = 10 m/s^2)

Rpta.: 6×10^4 N

7. Calcular la aceleración que se provoca en el sistema mostrado en la figura y calcular también la fuerza de contención para que haya movimiento uniforme.



Rpta.: $a = 3{,}77\ m/s^2$
$F = 5 \times 10^3$ N

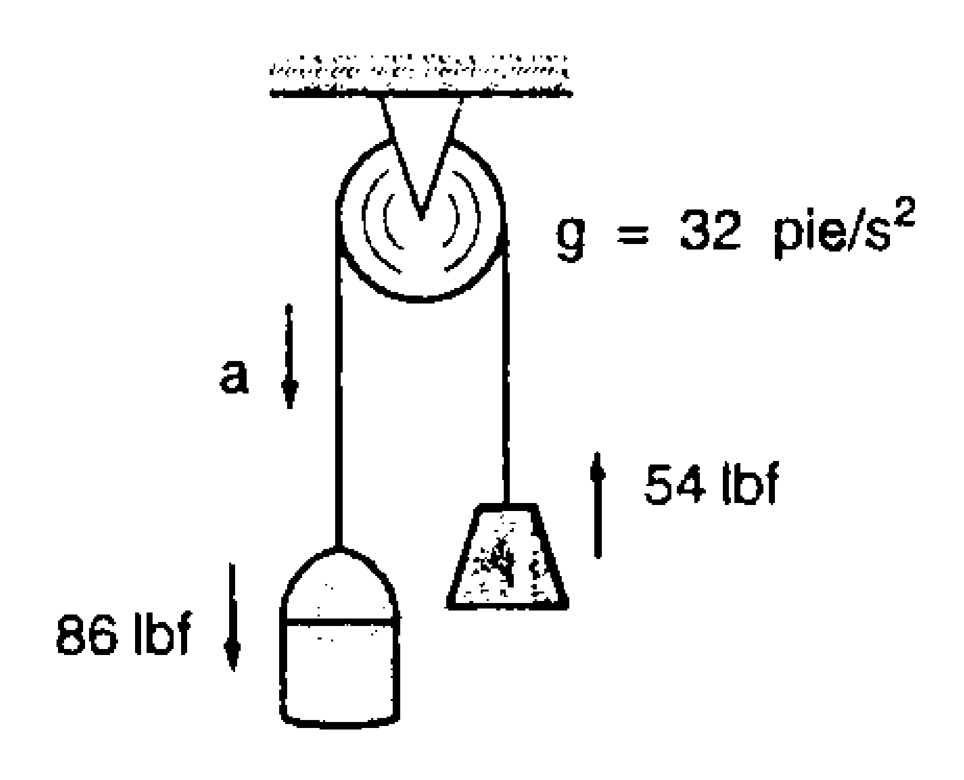
8. Hallar el valor de la tangente del ángulo que debe tener el peralte de una curva de 60 m de radio por donde se desplaza un automóvil a 80 km/h para que no se salga. ($g = 10\ m/s^2$)

Rpta.: $tg\ \alpha = 0,823$

9. Un vehículo de 0,75 cm de ancho y 0,90 m de alto y de 150 kg entra a 36 km/h en una curva de 20 m de radio. ¿Vuelca o no?

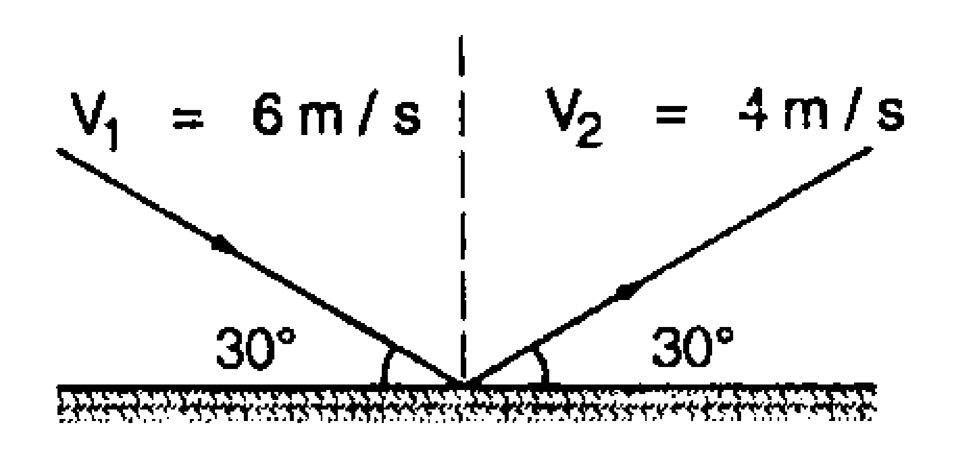
Rpta.: No.

10. Dos bloques de 86 lbf y 54 lbf de peso están conectados con una cuerda que pasa a través de una polea acanalada sin rozamiento. Hallar la aceleración del sistema.



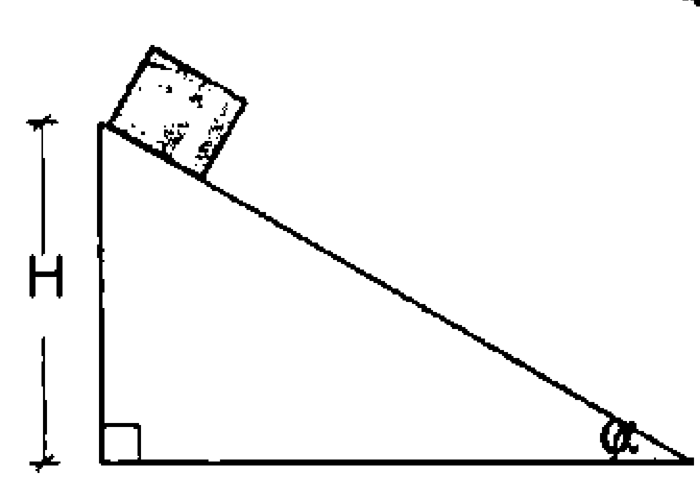
Rpta.: $a = 7,31\ pie/s^2 = 2,2\ m/s^2$

11. Una pelotita se avienta contra una superficie con una velocidad de 6 m/s y rebota con una velocidad de 4 m/s, tal como se muestra en la figura. Si la aceleración media producida por el choque fue de $16\sqrt{7}\ m/s^2$, determinar el intervalo de tiempo de contacto entre la pelotita y la superficie.



Rpta.: $t = 0,125\ s$

12. ¿Cuál debe ser la inclinación "a" de un plano liso para que un cuerpo descienda en un tiempo "t" que sea el triple que el requerido para descender la misma altura cayendo libremente?

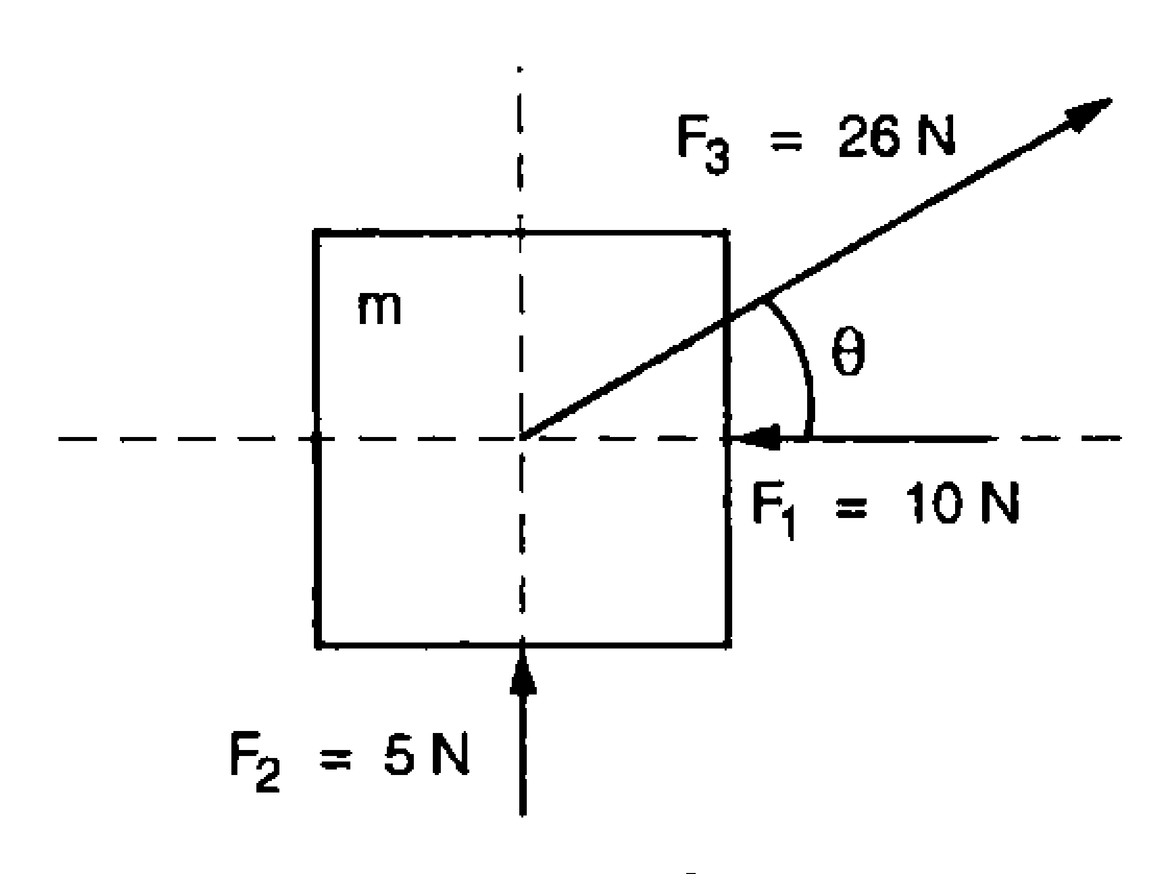


Rpta.: $\alpha = arc\,sen\left(\frac{1}{3}\right) = 19°28'16"$

16. Una piedra gira en un plano vertical describiendo una circunferencia .Si la cuerda que la mantiene en movimiento puede soportar como máximo una tensión equivalente a 10 veces su peso. ¿Cuál es la máxima velocidad que puede experimentar dicho cuerpo sin llegar a romper la cuerda? La longitud de la cuerda es 2,5 m. ($g = 10\ m/s^2$).

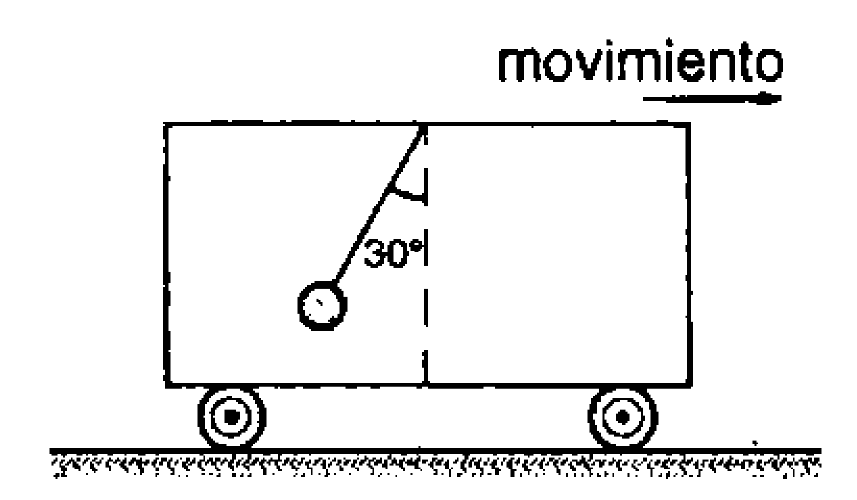
Rpta.: $v_{max} = 15\ m/s$

13. Un bloque situado sobre un plano horizontal liso está sometido a las fuerzas que se indican. ¿Qué aceleración adquiere el bloque? tg q = 12/5 y m = 58 kg.



Rpta.: $a = 0,5\ m/s^2$

14. Un observador en una estación ve partir al tren y ve también que una lámpara



que colgaba verticalmente ha adoptado una posición de 30° con respecto a la vertical. ¿Cuál será la velocidad dentro de 3 s ?

Rpta.: V = 17,3 m/s

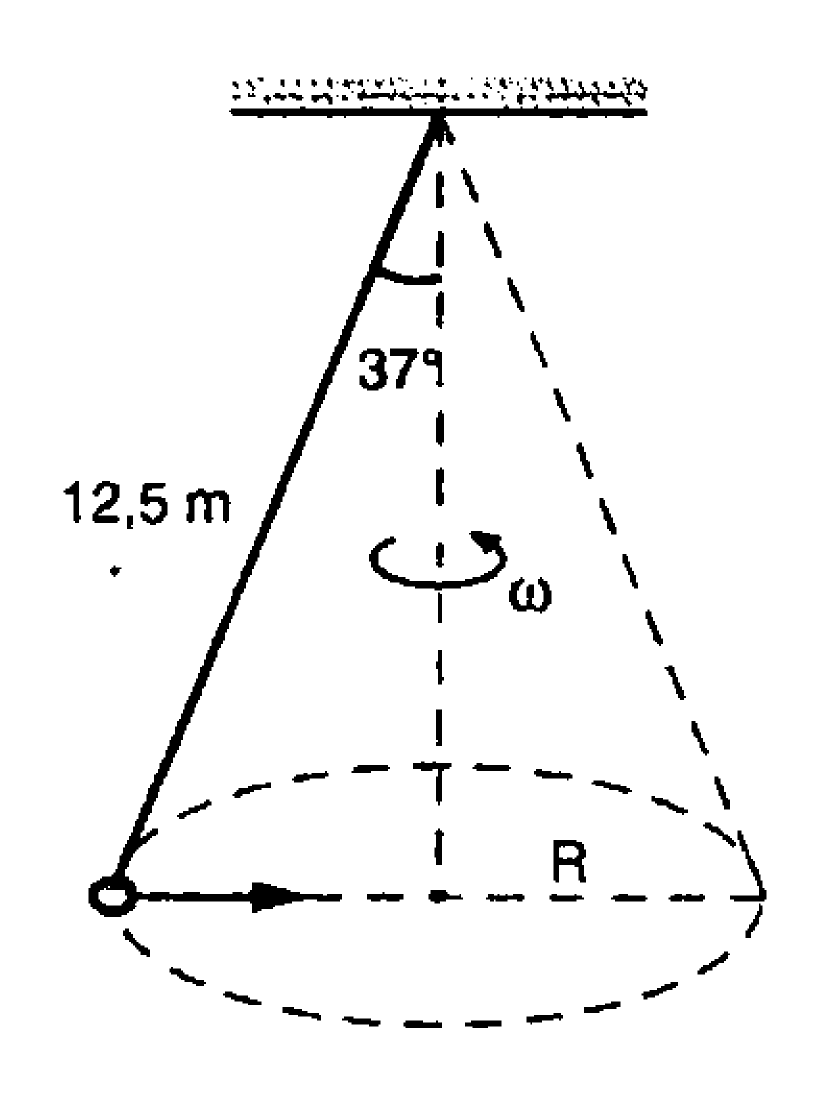
15. Una esfera de 10 kg gira en una superficie horizontal unida por medio de una cuerda de 1 m de longitud, que la fija por un extremo a un clavo la hace describir un movimiento circunferencial. ¿Cuál es la tensión que soporta la cuerda si esta gira a razón de 5 rad/s

Rpta.: T = 250 N

17. Un cuerpo, gira en un plano vertical de modo que describe una circunferencia, si está atado a una cuerda de 2,5 m de longitud. ¿Cuál es la mínima velocidad angular que debe mantener el cuerpo para poder continuar con su movimiento circun-ferencial (g = 10 m/s²).

Rpta.: w = 2 rad/s

18. Calcular la velocidad angular que desarrolla el péndulo cónico mostrado en la figura. La longitud de la cuerda es 12,5 m y el ángulo que forma dicha cuerda con la vertical es 37° (g = 10 m/s²).



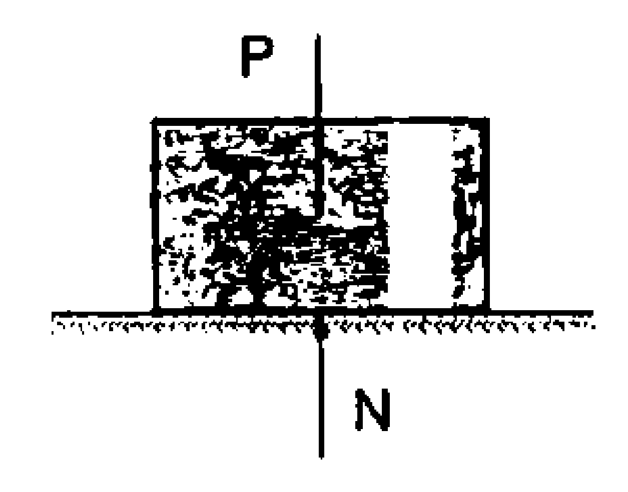
Rpta.: ω = 1 rad/s

FUERZA DE ROZAMIENTO O FRICCIÓN

Es una fuerza tangencial que está presente entre dos superficies de contacto y que se opone al movimiento relativo (desplazamiento) de uno con respecto al otro. Puede ser rozamiento estático o cinético.

ROZAMIENTO ESTÁTICO "R"

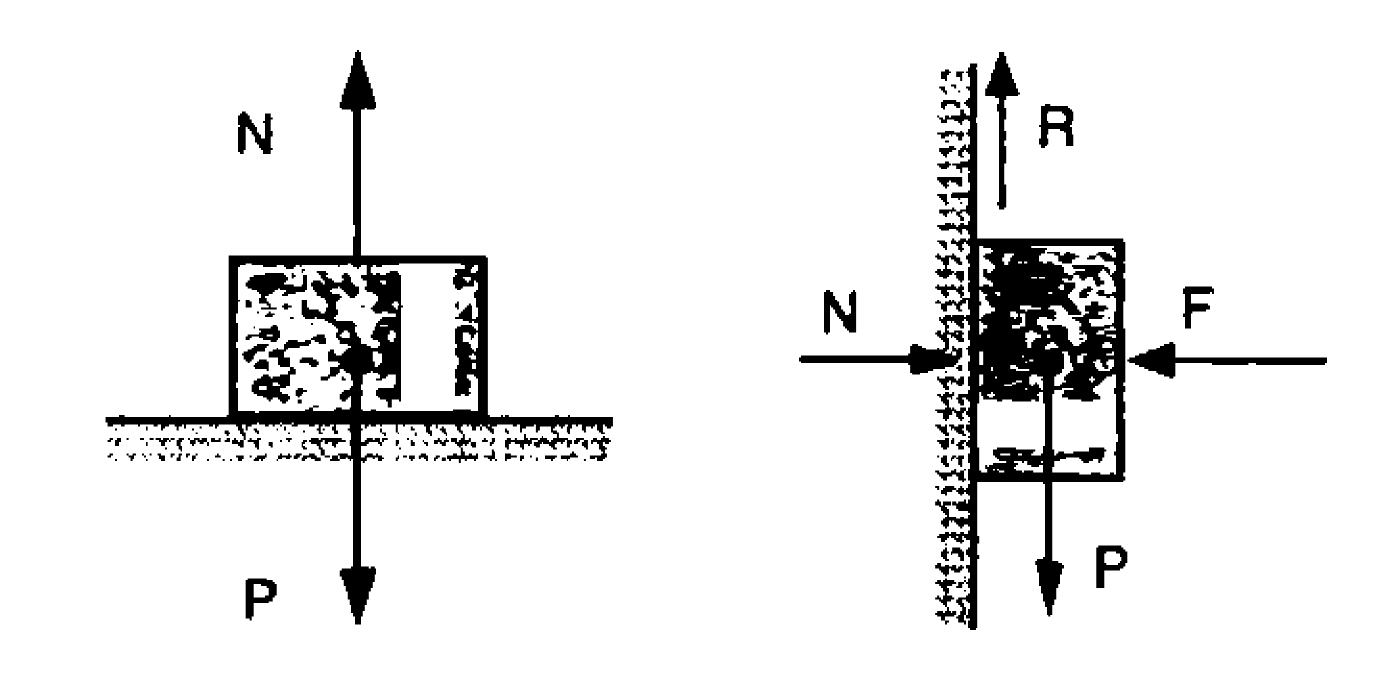
Es la fuerza tangencial entre dos cuerpos en contacto cuando ambas están en reposo y que se manifiesta como una reacción cuando una se va a desplazar con respecto al otro.

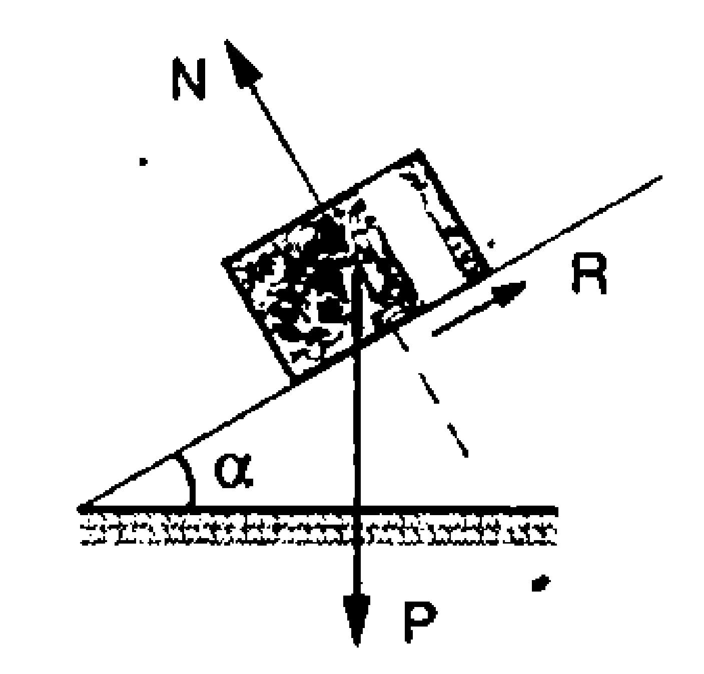


Cuando el cuerpo está en reposo y sobre un plano horizontal, la fuerza que soporta todo el peso se llama Normal.

$$P = N$$

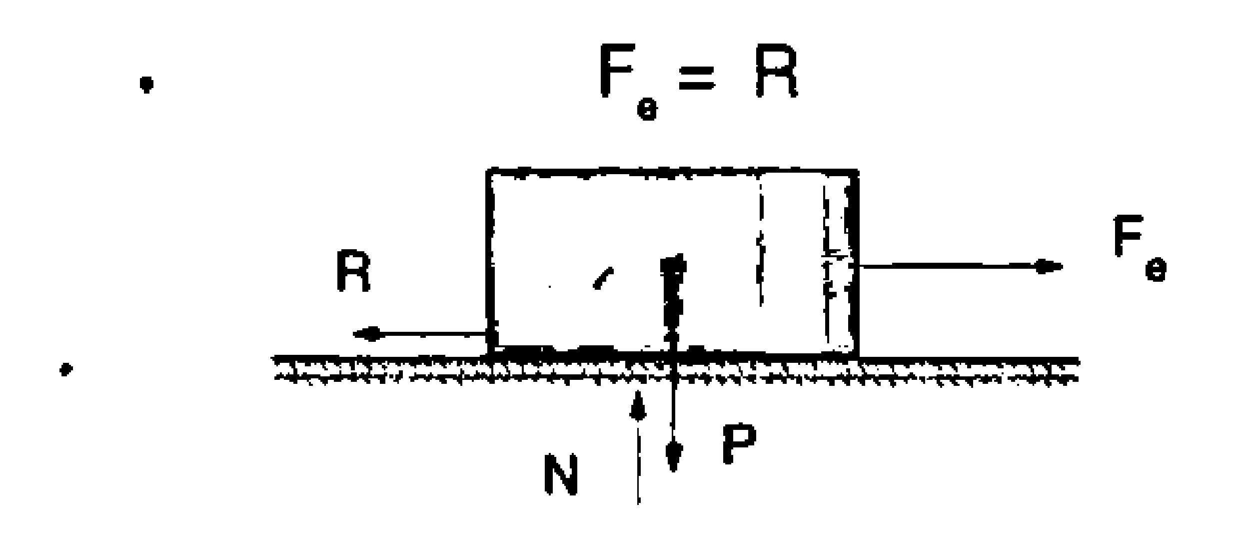
NOTA : El peso siempre es vertical. La Normal es siempre perpendicular al plano de sustentación.





FUERZA MÁXIMA DE ROZAMIENTO ESTÁTICO " F_e"

Es la fuerza "F_e" necesaria para vencer la fuerza tangencia "R", presente entre sus dos superficies la cual se opone al desplazamiento de uno con respecto al otro.



COEFICIENTE DE ROZAMIENTO ESTÁTICO " μ_e "

Es la relación entre la fuerza máxima de rozamiento estático "F_e" y la fuerza normal que tiende a mantener ambas superficies unidas y en reposo. El valor del coeficiente de rozamiento estático se obtiene en forma experimental

$$\mu_e = \frac{F_e}{\text{Fuerza Normal}}$$

$$\boxed{\mu_e = \frac{F_e}{N}}$$

O también: $\boxed{\mu_e = \frac{R}{N}}$

FUERZA MÁXIMA DE ROZAMIENTO CINÉTICO " F_c"

Es la fuerza tangencial presente entre dos superficies en contacto cuando una de ellas se está desplazando con respecto a la otra.

Esta fuerza se presenta cuando las superficies en contacto manifiestan un movimiento relativo; comprobándose experimentalmente que la fuerza de rozamiento o fricción cinética es prácticamente constante

COEFICIENTE DE ROZAMIENTO CINÉTICO " μ_c"

Es la relación entre la fuerza necesaria para desplazar un cuerpo en contacto con otro con velocidad uniforme y la normal que tiende a mantener unidas ambas superficies.

$$\mu_c = \frac{F_c}{\text{Fuerza Normal}}$$

$$\boxed{\mu_c = \frac{F_c}{N}}$$

NOTAS:

1. Se cumple que: $\mu_e > \mu_c$
2. Con frecuencia se usa μ por μ_e
3. Los rozamientos son independientes de las áreas de contacto y de la velocidad relativa de los cuerpos.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un ladrillo de 50 N se apoya contra una pared vertical mediante una fuerza de sentido horizontal como se ve en la figura; si el coeficiente de rozamiento es 0,5. Hallar el mínimo valor de la fuerza horizontal para mantener el ladrillo inmóvil.

RESOLUCIÓN :

De la primera condición de equilibrio:

$$\Sigma F_y = 0 \; ; \; R = P = 50\,N$$

Por otro lado: $\mu = \frac{R}{N}$

vton

De donde:

$$N = \frac{R}{\mu} = \frac{50\text{ newton}}{0,5}$$

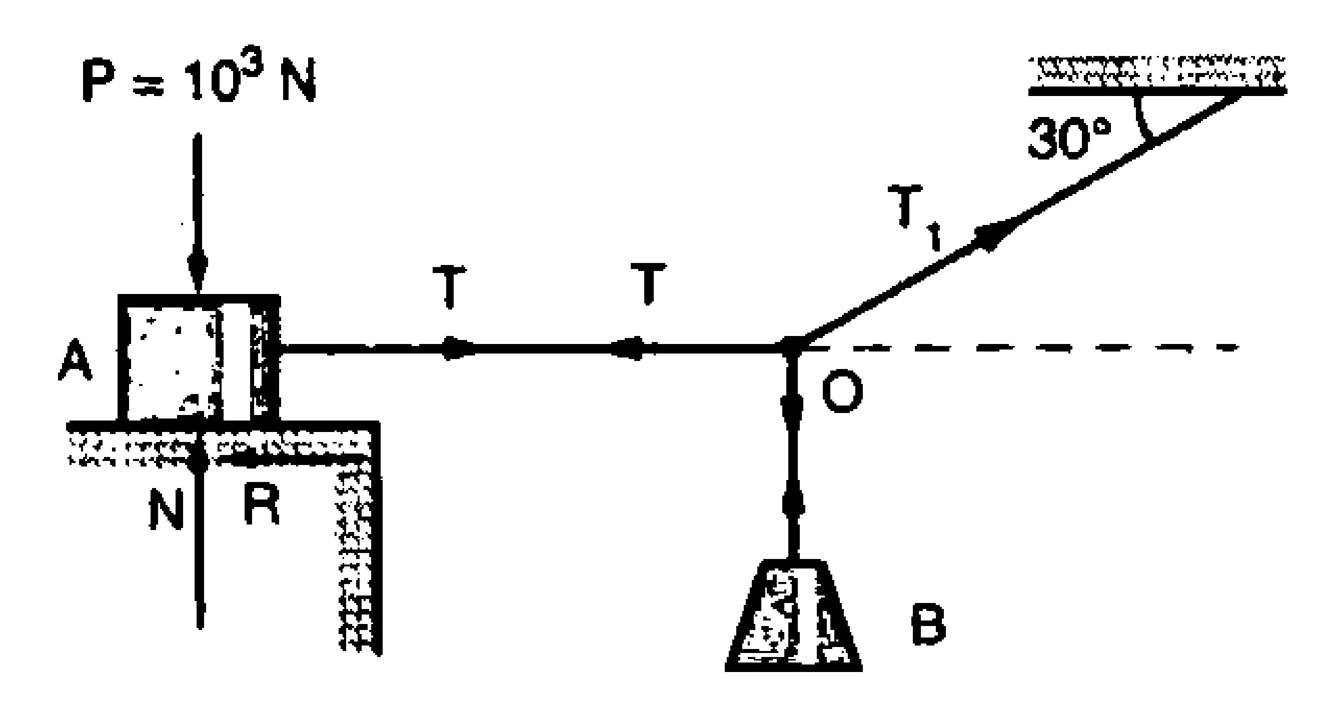
$$\text{Normal} = 100 \text{ newton}$$

$$\Sigma F_x = 0 \quad \therefore \quad F = \text{Normal}$$

Rpta.: $F = 100$ newton

PROBLEMA 2. En la figura, el coeficiente de rozamiento entre el cuerpo "A" de 10^3 N y la superficie de la mesa, es $m_e = 0{,}75$. Calcular:

a) La fuerza máxima de rozamiento desarrollada entre el bloque "A" y la mesa.
b) El peso máximo que debe tener "B" para mantener el sistema en equilibrio.
c) El rozamiento "R" entre "A" y la mesa para un peso de 80 N de "B".



RESOLUCIÓN :

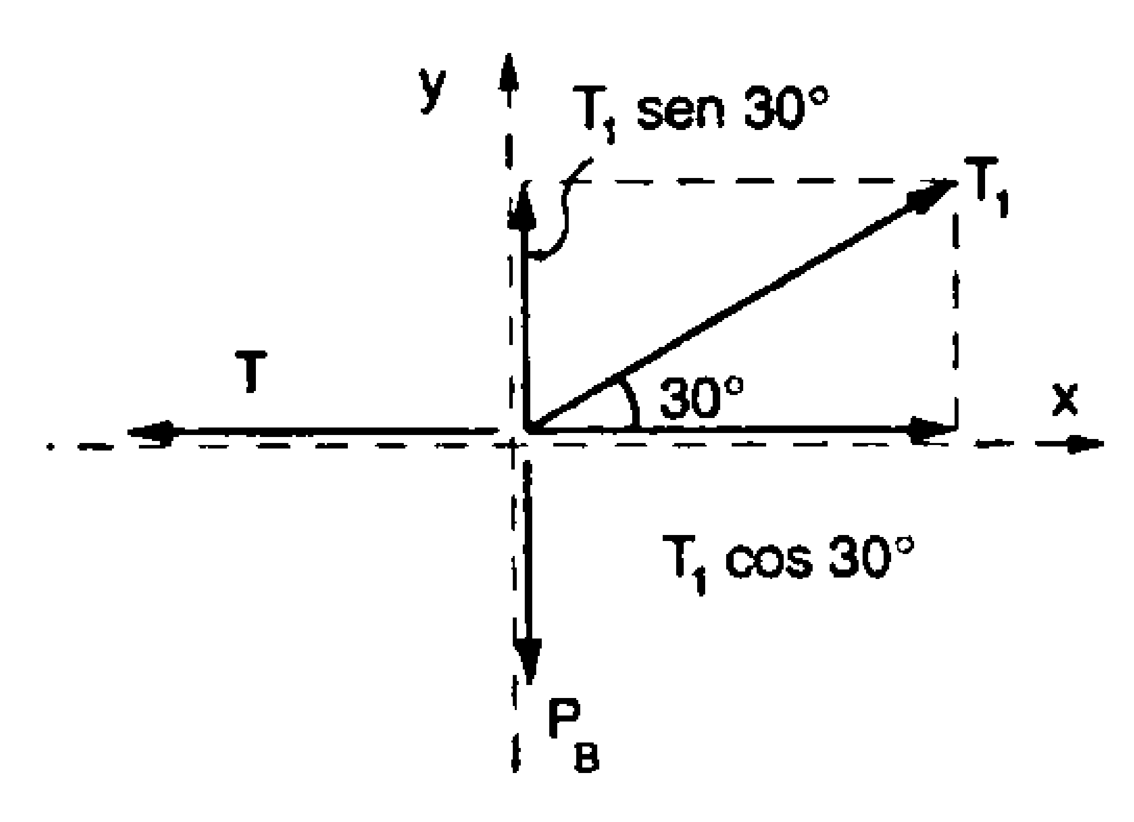
a) R_M = Rozamiento estático máximo

$$R_M = \mu \,.\, N = 0{,}75 \cdot 10^3 \text{ N}$$

$$R_M = 750 \text{ N} = T$$

Con una fuerza ligeramente superior a 750 N el bloque se mueve.

b) Cálculo de T_1. Diagrama del cuerpo libre de "O".



1) $\Sigma F_x = 0$

$$\therefore \quad T_1 \cos 30° = T$$

$$T_1 = \frac{T}{\cos 30°} = \frac{750}{\sqrt{3}} \times 2 = 500\sqrt{3} \text{ N}$$

$$T_1 = 500\sqrt{3} \text{ N}$$

2) $\Sigma F_y = 0$

$$\therefore \quad T_1 \text{ sen } 30° = P_B$$

$$500\sqrt{3} \text{ N} \cdot \frac{1}{2} = P_B$$

$$\therefore \quad P_B = 250\sqrt{3} \text{ N}$$

c) Para un peso $B = 80$ N

1) $\Sigma F_y = 0$

$$\therefore \quad T_1 \text{ sen } 30° = 80 \text{ N}$$

$$T_1 = 160 \text{ N}$$

2) $\Sigma F_x = 0$

$$\therefore \quad T = T_1 \cos 30°$$

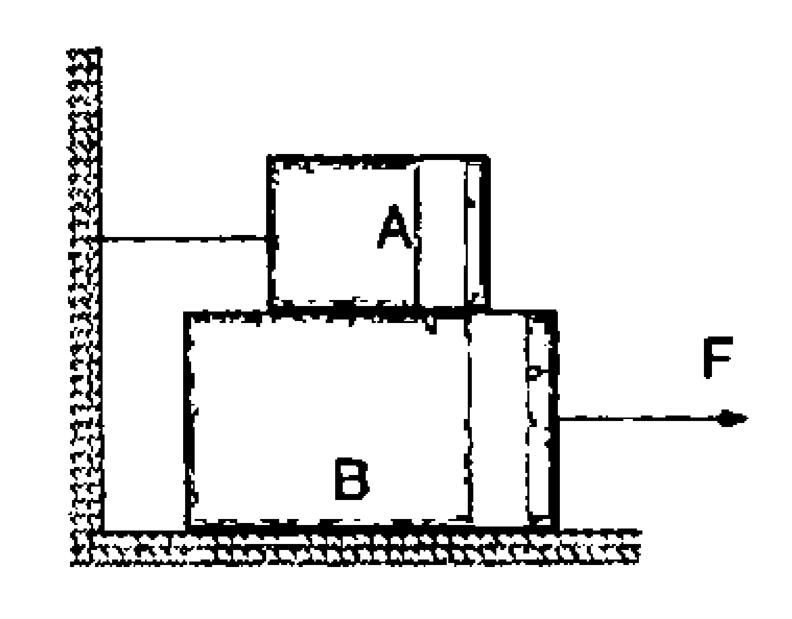
$$T = 80\sqrt{3} \text{ N}$$

Para que no resbale debe tenerse que:

$$R = T$$

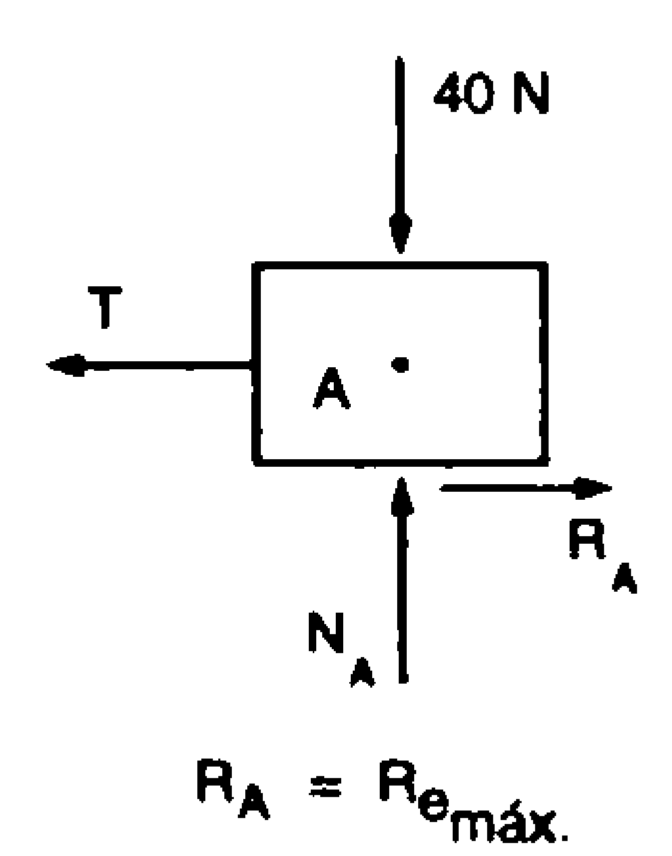
$$\therefore \quad R = 80\sqrt{3} \text{ N}$$

PROBLEMA 3. En la figura, "A" pesa 40 N y "B" 80 N, los coeficientes de rozamiento entre las superficies son de 0,5. Calcular el valor de la fuerza "F" para mover "B".



RESOLUCIÓN : D.C.L. de A :

http://librosysolucionarios.net

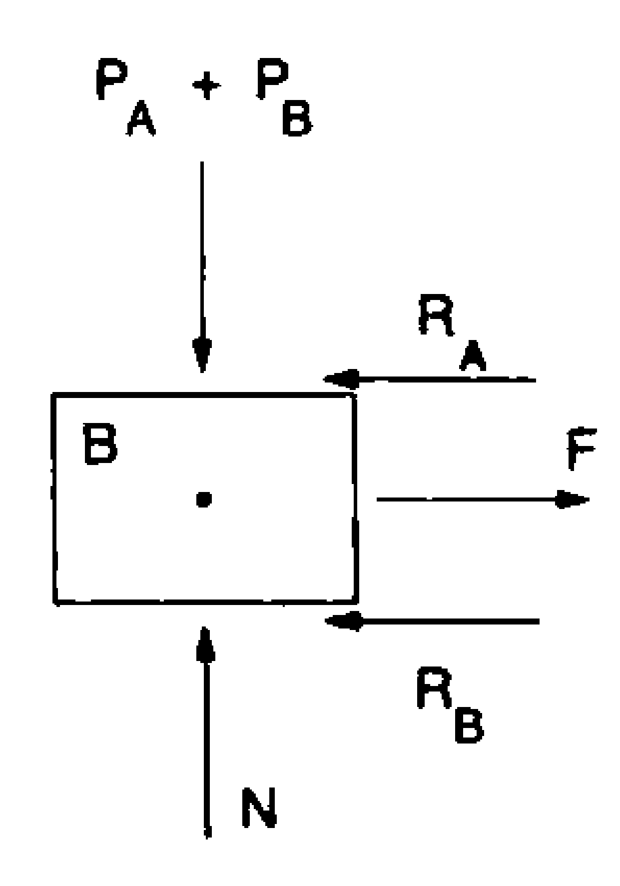


$R_A = R_{e_{máx.}}$

Cálculo de la R_A :

$$R_A = \mu . N_A = 0{,}5 . 40\,N = 20\,N$$

Diagrama de B:



Cálculo de R_B :

$$R_B = \mu . N = 0{,}5 . 120\,N$$

$$R_B = 60\,N$$

$$\Sigma F_x = 0$$

$$R_A + R_B = F$$

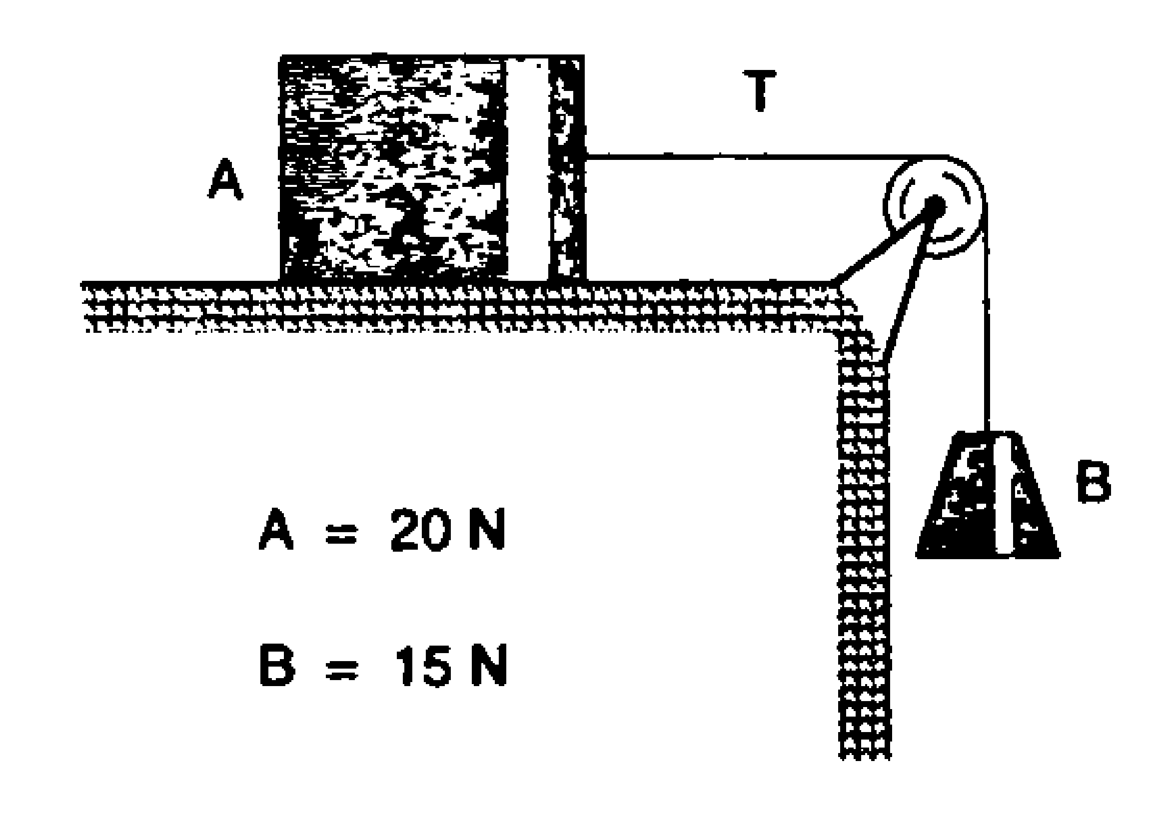
$$\therefore \quad F = 20\,N + 60\,N$$

$$F = 80\,N$$

Rpta.: $F = 80\,N$

PROBLEMA 4. En el gráfico determinar cuál será la aceleración con que se mueve el sistema y cuál la tensión del cable que los une.

$$\mu_e = 0{,}5 \; ; \quad \mu_c = 0{,}4$$



RESOLUCIÓN :

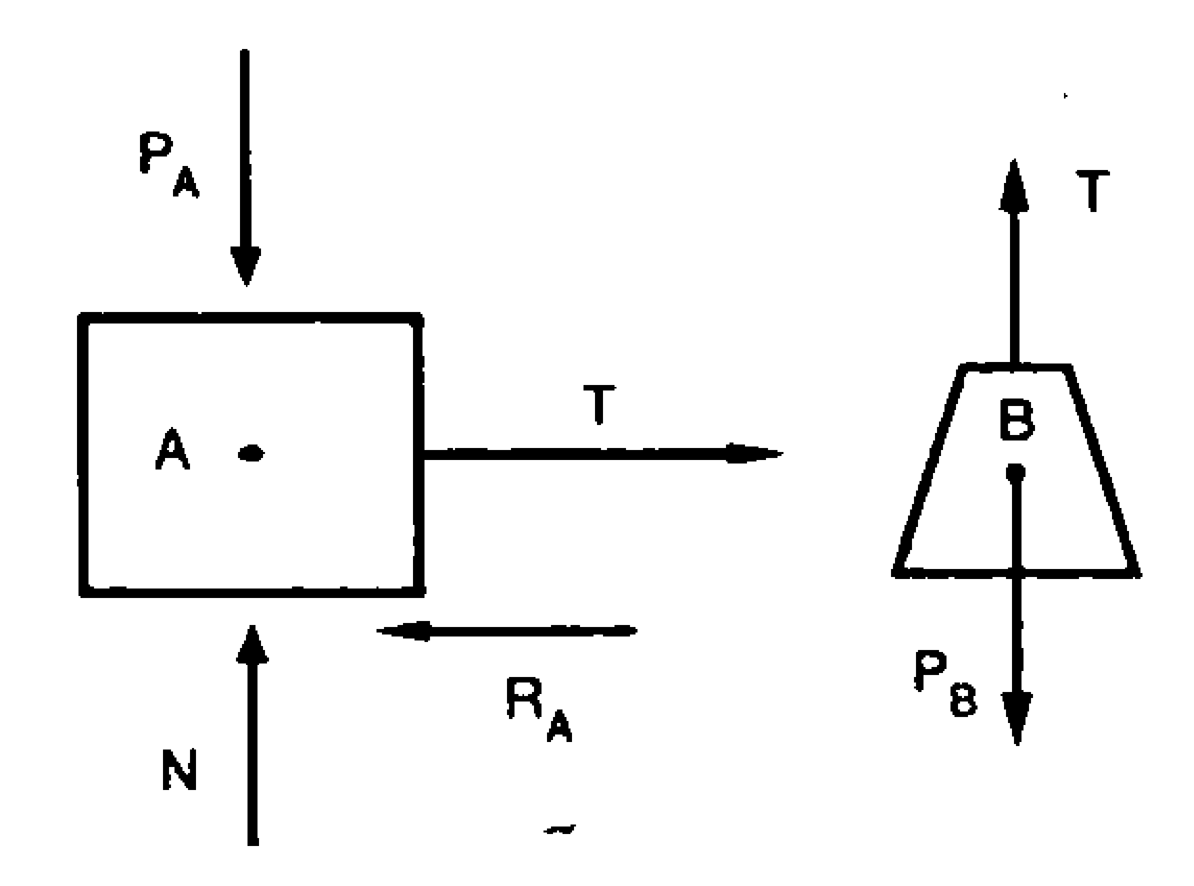
Cálculo de la máxima fuerza de rozamiento en A :

$$R_A = \mu . N = 0{,}5 . 20\,N$$

$$R_A = 10\,N$$

Luego el sistema se mueve, ya que el peso de 15 N es superior a la tensión de la cuerda que, como consecuencia del rozamiento, ofrece el cuerpo A y que es de 10 N.

Diagrama de A y B :



Para A : $\quad \Sigma F_x = m_A . a$

$$T - R_A = m_A . a \qquad (1)$$

Para B : $\quad \Sigma F_x = m_B . a$

$$P_B - T = m_B . a \qquad (2)$$

Sumando (1) y (2) :

$$P_B - R_A = a\,(m_A + m_B)$$

$$a = \frac{P_B - R_A}{m_A + m_B} = \frac{15\,N - 0{,}4 . 20\,N}{\dfrac{20\,N}{g} + \dfrac{15\,N}{g}}$$

http://librosysolucionarios.net

$$a = g \times \frac{7\,N}{35\,N} \quad ; \quad \text{para } g = 9{,}8\ m/s^2$$

Rpta.: $a = 1{,}96\ \frac{m}{s^2}$

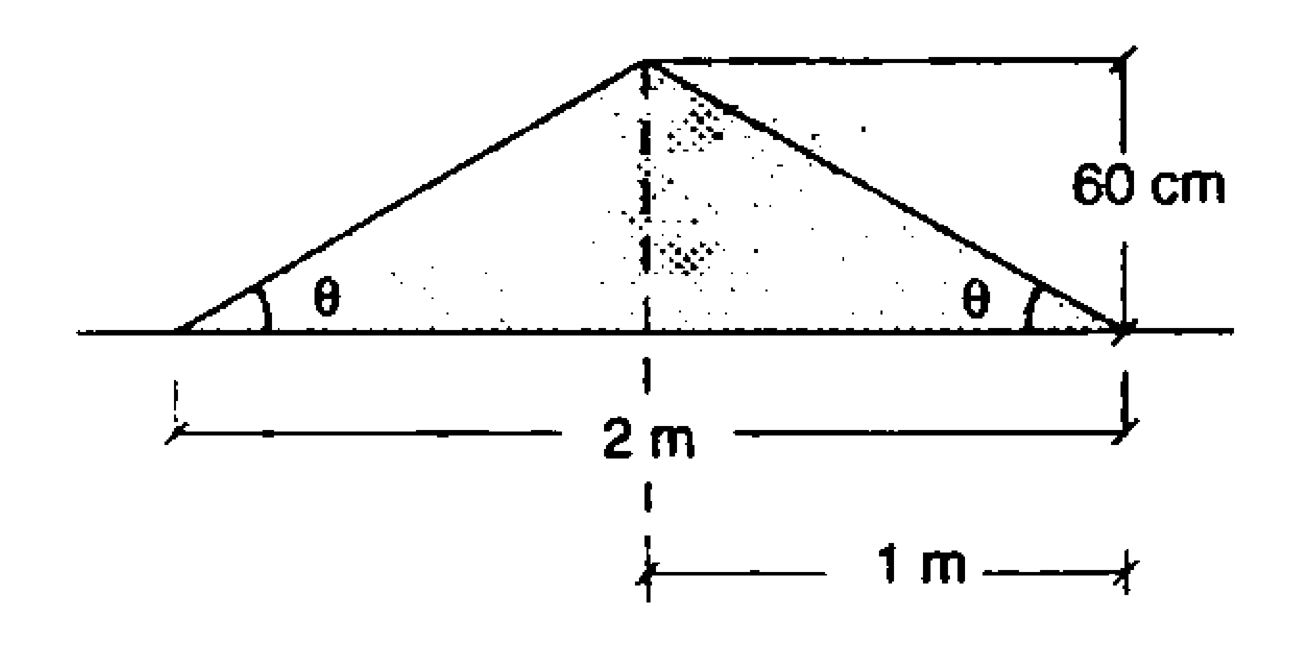
Sustituyendo en (1):

$$T = m_A \cdot 1{,}96\ \frac{m}{s^2} + R_A$$

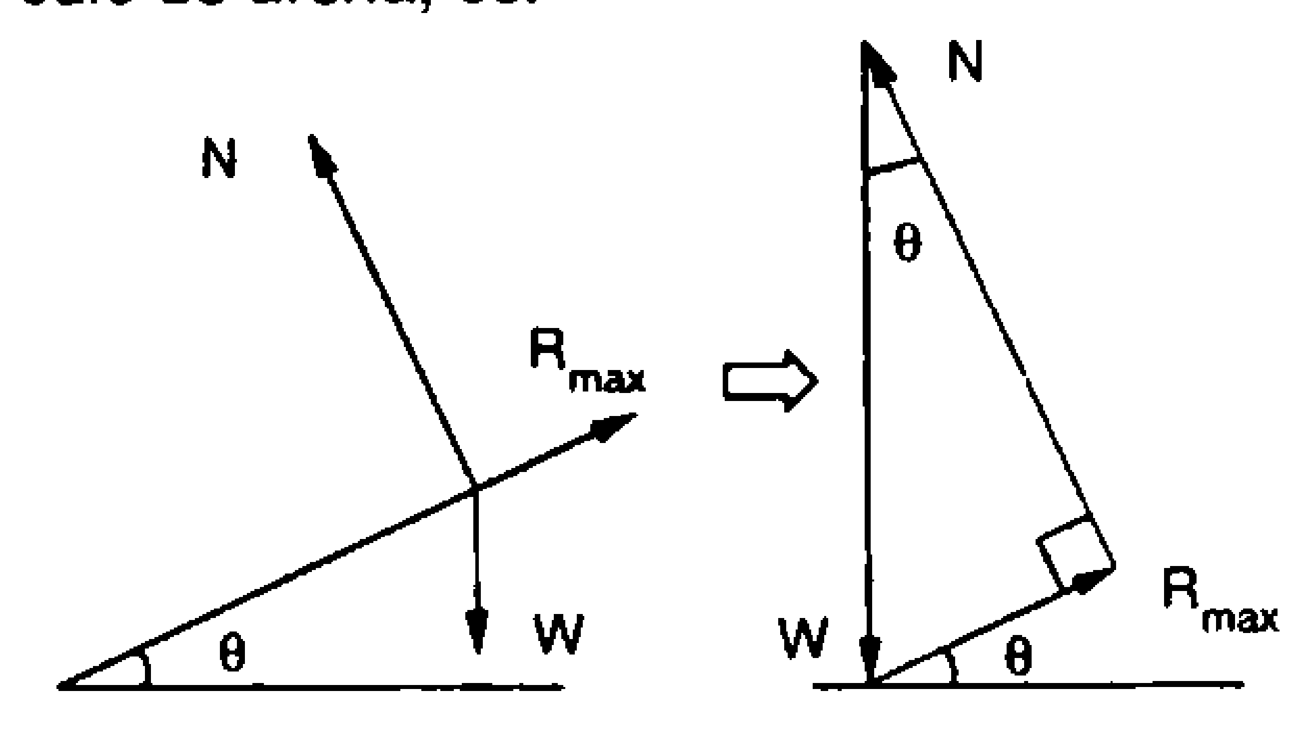
$$T = \frac{20\,N}{9{,}8\ \frac{m}{s^2}} \cdot 1{,}96\ \frac{m}{s^2} + 0{,}4 \cdot 20\,N$$

Rpta.: $T = 12\,N$

PROBLEMA 5. Al dejar un volquete la arena sobre el suelo, se forma el montículo mostrado en la figura. Calcular el coeficiente de rozamiento entre los granos de arena.



RESOLUCIÓN : Los granos de arena que se encuentran sobre la falda (superficie lateral del cono formado) son los que le dan la forma de montículo. Por lo tanto el diagrama de cuerpo libre del montículo de arena, es:



En el I triángulo formado:

$$tg\,\theta = \frac{R}{N} = \frac{\mu\,.\,N}{N}$$

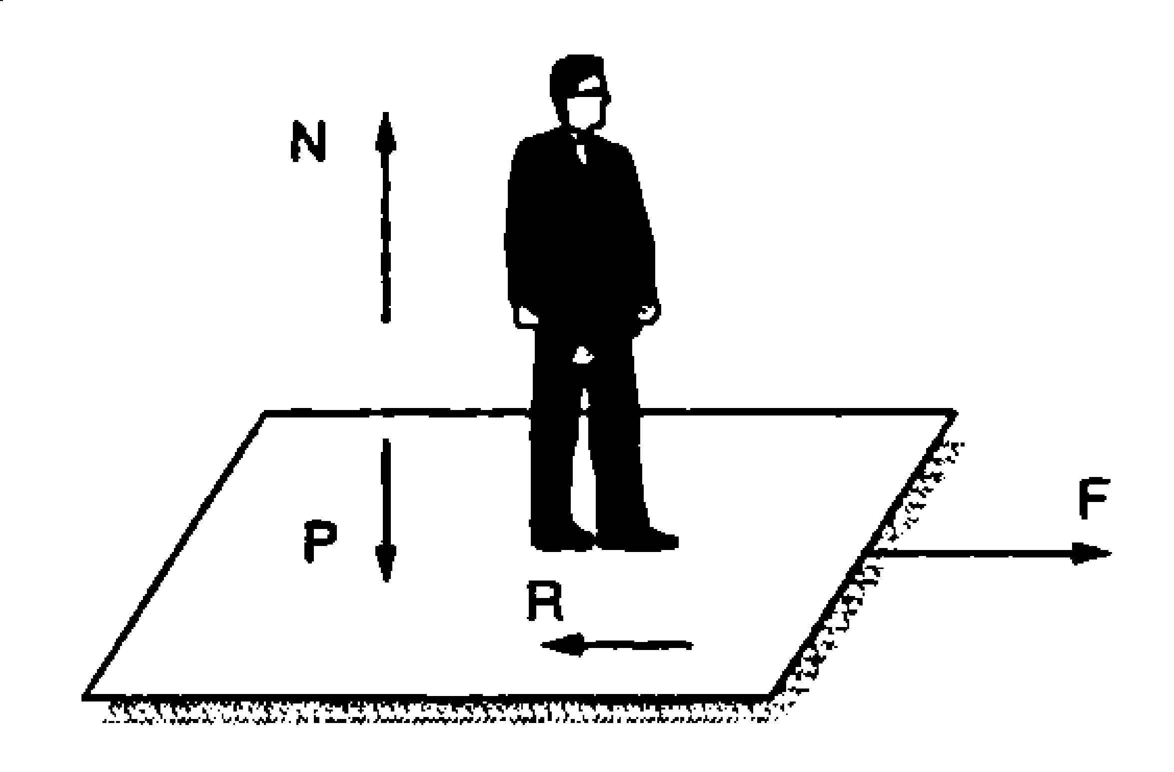
$$tg\,\theta = \mu \qquad \text{(propiedad)}$$

"La tangente del ángulo de reposo "θ" es igual al coeficiente de rozamiento "μ"

Reemplazando tg θ : $\frac{0{,}6\,m}{1m} = \mu$

Rpta.: $\mu = 0{,}6$

PROBLEMA 6. ¿Cuál será la fuerza para mover a un hombre de 80 kg que está parado sobre un piso, con el cual produce un coeficiente de rozamiento m = 0,6?



RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - R = 0 \ , \ \text{luego: } F = R$$

ó: $$F = \mu\,.\,N \qquad (I)$$

Como la masa del hombre es de 80 kg es preciso calcular su peso que es igual al valor de la normal N.

$$P = m\,.\,g = 80\,kg \cdot 9{,}8\,m/s^2$$

$$P = 80\ \frac{N}{m/s^2} \cdot 9{,}8\,m/s^2$$

$$P = 784\,N$$

que es igual a la normal, luego, sustituyendo en (I):

$$F = 0{,}6\,.\,784\,N$$

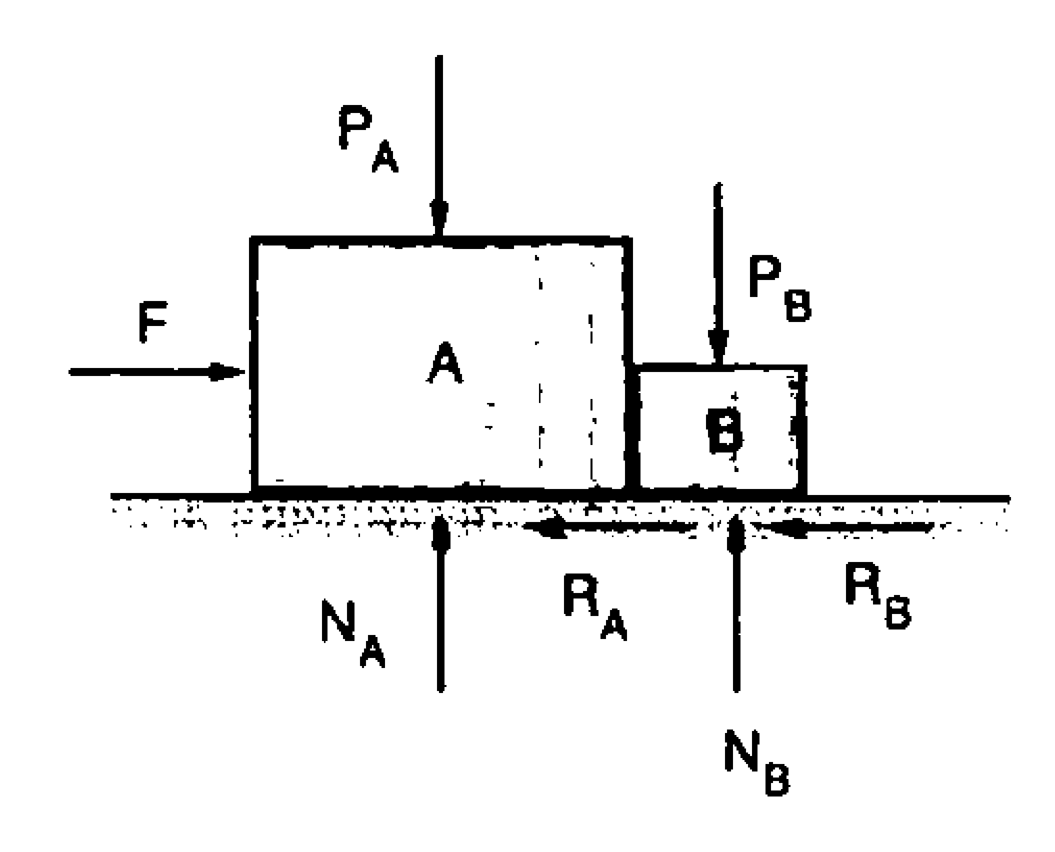
Rpta.: $F = 470{,}4\,N$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 7. Calcular la aceleración con que avanzan los bloques de la figura.

$M_A = 8\ kg$ $\quad F = 50\ N$

$M_B = 3\ kg$ $\quad \mu_c = 0,3$



RESOLUCIÓN : $\Sigma F_x = m \cdot a$

$$F - R_A - R_B = (M_A + M_B)a \quad (I)$$

Pero: $R_A = \mu_c N_A = \mu_c M_A g \quad$ (a)

$$R_B = \mu_c N_B = \mu_c M_B g \quad (b)$$

Sustituyendo (a) y (b) en (I) :

$$F - \mu_c M_A g - \mu_c M_B g = (M_A + M_B)a$$

$$F - \mu_c g(M_A + M_B) = (M_A + M_B)a$$

de donde: $a = \dfrac{F - \mu_c \cdot g(M_A + M_B)}{M_A + M_B}$

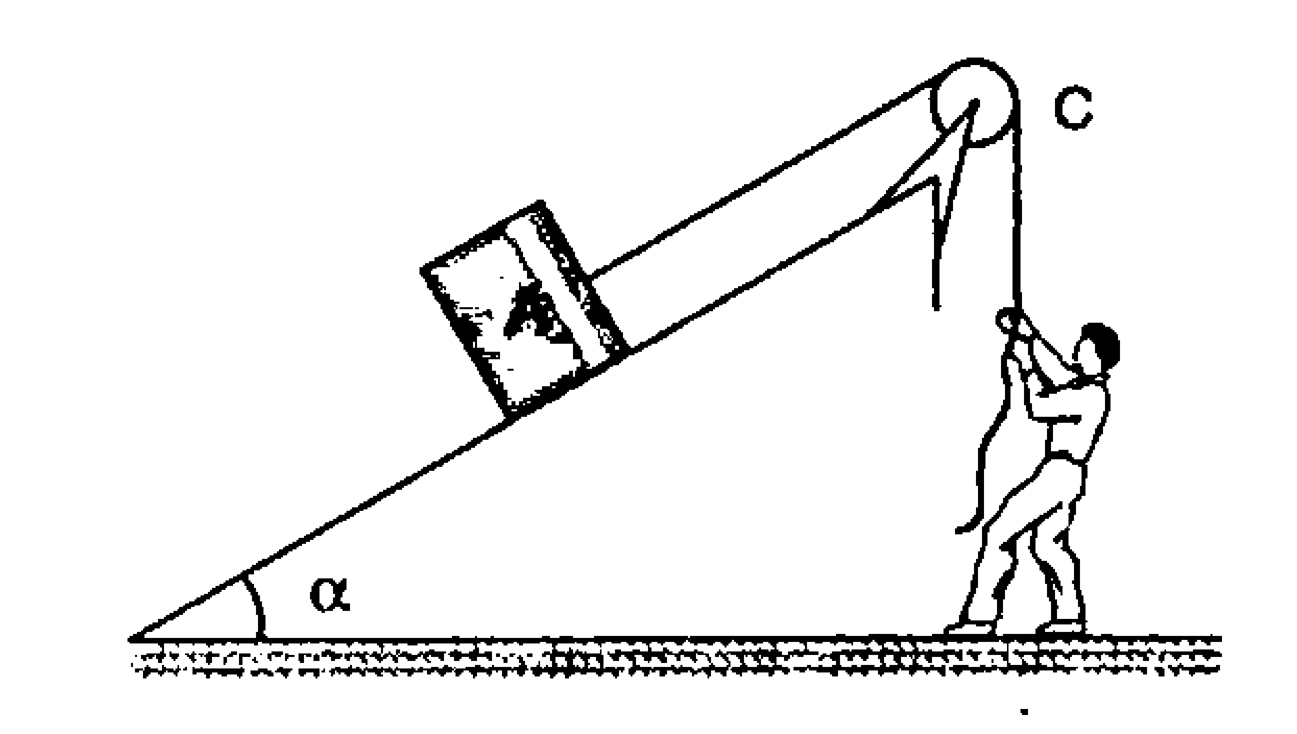
sustituyendo datros :

$$a = \frac{50\ N - 0,3 \cdot 9,8\ m/s^2\ (8\ kg + 3\ kg)}{8\ kg + 3\ kg}$$

$$a = \frac{50\ N - 32,34\ kg \cdot m/s^2}{11\ kg}$$

Rpta.: $a = 1,6\ m/s^2$

PROBLEMA 8. Un hombre de 700 N de peso quiere escalar la cuerda de la figura. ¿Cuál debe ser el peso mínimo de "A" si su coeficiente de rozamiento estático con el plano inclinado es 0,6 y el plano hace un ángulo de 30° con la horizontal, para que logre sostener al hombre que sube?

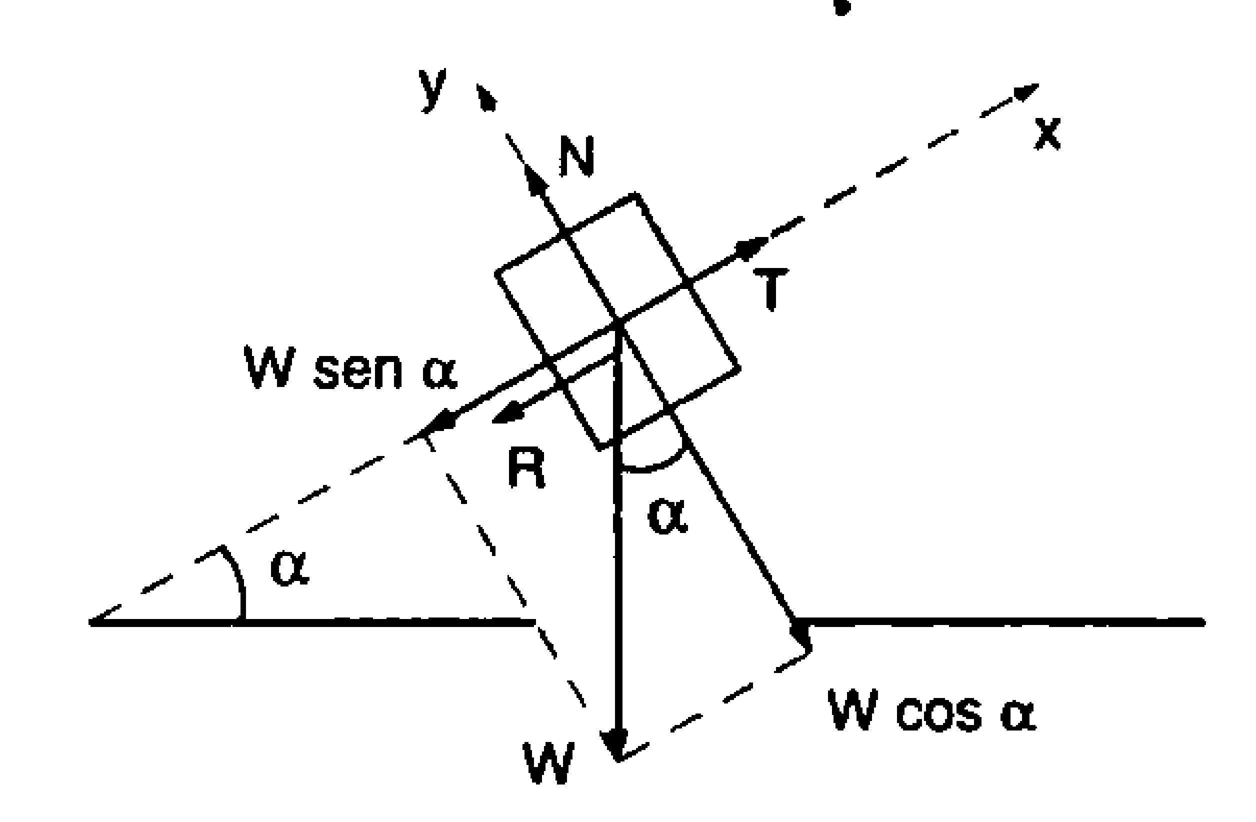


RESOLUCIÓN :

$\alpha = 30°$ $\quad W_A = ?$

$\mu = 0,6$ $\quad T = 700$

Diagrama de cuerpo libre de A :



Sea un sistema de ejes coordenados xy, con el eje x paralelo al plano inclinado. Tómese en cuenta que la polea "C" no modifica el valor del peso del hombre, en todo caso sólo cambia la dirección de la fuerza o tensión del cable.

a) $\Sigma F_x = 0$

$$W \operatorname{sen} \alpha + R - T = 0 \quad (1)$$

b) $\Sigma F_y = 0$

$$N - W \cos \alpha = 0$$

Pero: $N = \dfrac{R}{\mu}$, luego, reemplazando:

$$\frac{R}{\mu} - W \cos \alpha = 0$$

o sea: $R = \mu \cdot W \cos \alpha$; en (1) :

$$W \operatorname{sen} \alpha + \mu \cdot W \cos \alpha - T = 0$$

http://librosysolucionarios.net

de donde:

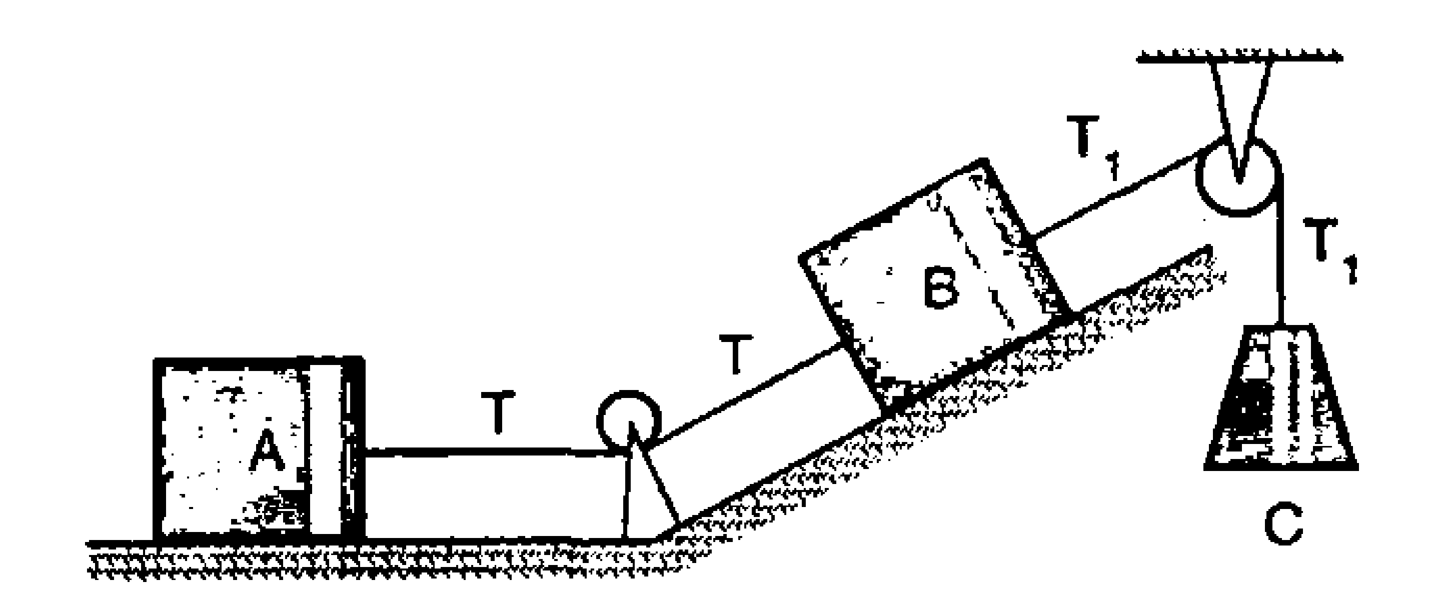
$$W = \frac{T}{\text{sen}\,\alpha + \mu \,.\, \cos\alpha}$$

$$W = \frac{700\text{ N}}{\text{sen}\,30° + 0,6 \,.\, \cos 30°}$$

$$W = \frac{700\text{ N}}{0,5 + 0,6 \,.\, 0,87}$$

Rpta.: W = 684,9 N

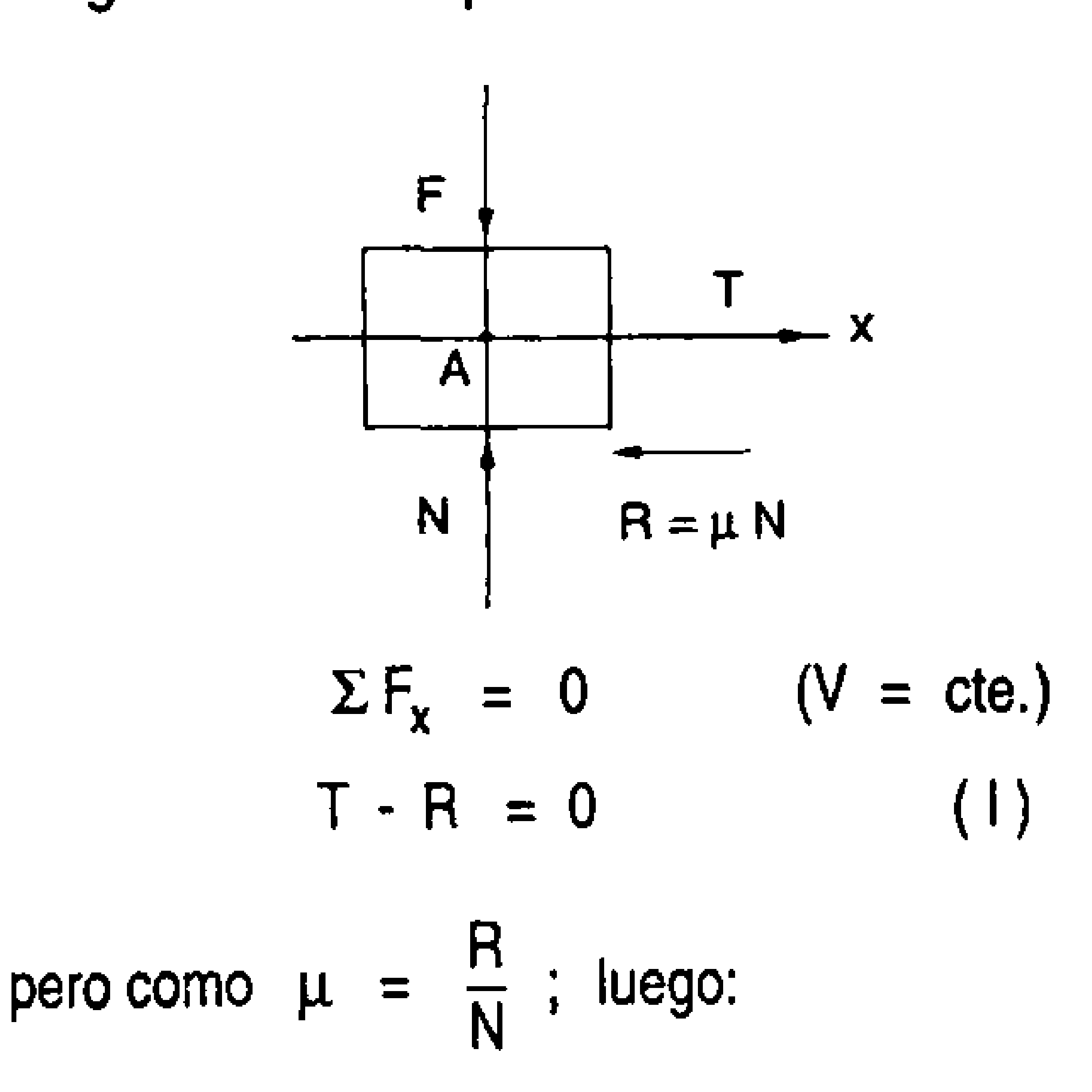
PROBLEMA 9. En la figura los bloques "A" y "B" pesan 300 N cada uno. El coeficiente dinámico de rozamiento, es 0,4 para cada bloque "A" y "B"; "C" desciende con velocidad constante. ¿Cuál es la tensión del cable que une los bloques "A" y "B" y cuál es el peso de "C"?



RESOLUCIÓN : Téngase presente que la velocidad de

C es constante:

Diagrama de cuerpo libre de A :



$$\Sigma F_x = 0 \qquad (V = \text{cte.})$$

$$T - R = 0 \qquad (I)$$

pero como $\mu = \frac{R}{N}$; luego:

$$R = \mu N \quad ; \text{ en } (1)$$

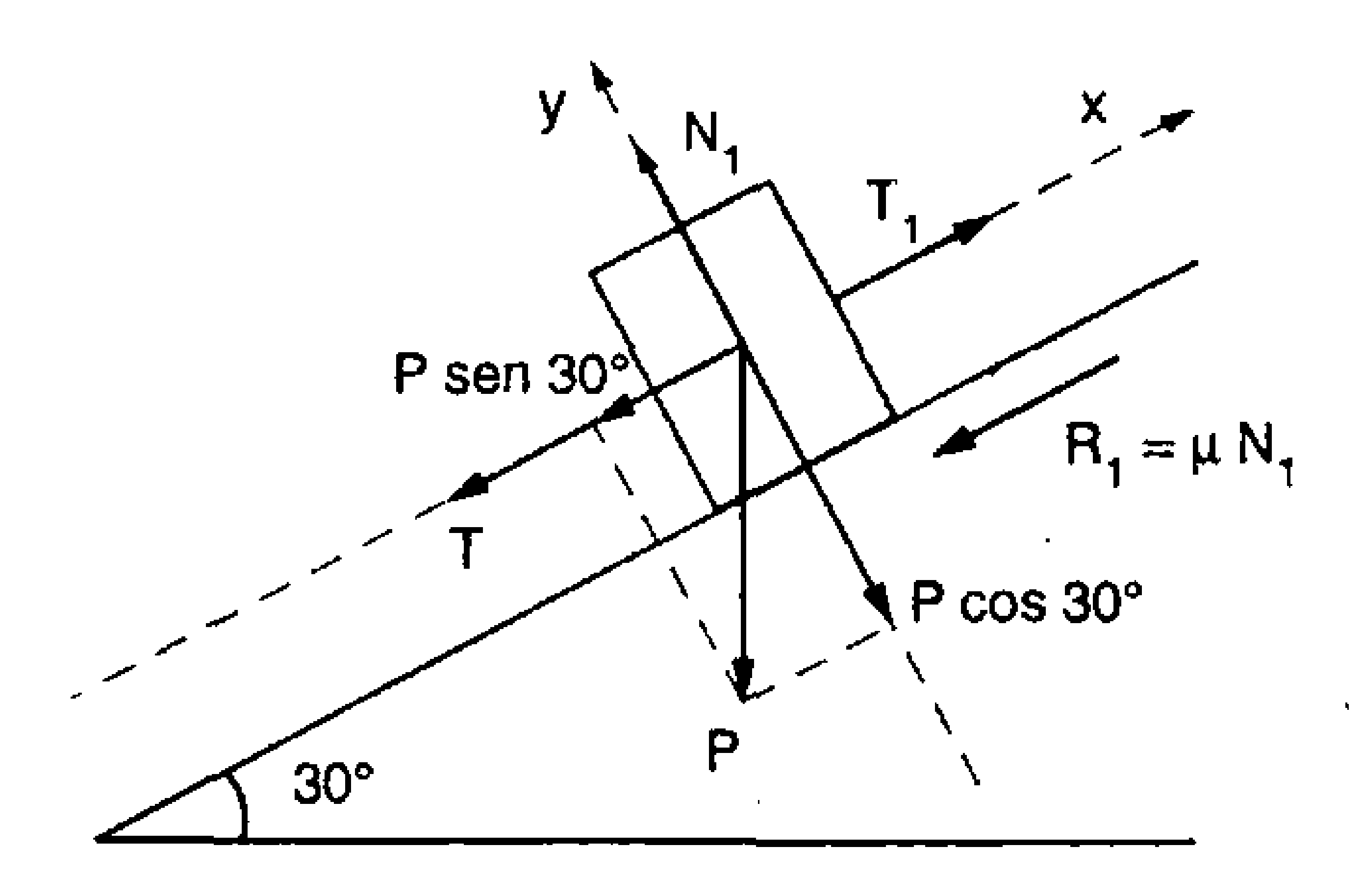
$$T - \mu \,.\, N = 0 \quad ; \quad T = \mu \,.\, N$$

pero: $N = P = 300\text{ N}$

$\therefore \quad T = 0,4 \,.\, 300\text{ N}$

1ra. Etapa: $T = 120\text{ N}$

Diagrama de cuerpo libre de B:



ΣF_x paralelos al plano inclinado = 0

$$T_1 - T - P \,.\, \text{sen}\,30° - R_1 = 0 \qquad (II)$$

Cálculo de R_1 :

ΣF_y perpendicular al plano inclinado = 0

$$N_1 = P \cos 30° = 0$$

$$N_1 = P \,.\, \cos 30° = 300\text{ N} \,.\, 0,86$$

$N_1 = 258\text{ N}$. Además:

$$R_1 = \mu \,.\, N_1 = 0,4 \,.\, 258\text{ N}$$

$$R_1 = 103,2\text{ N}$$

Sustituyendo valores en (II):

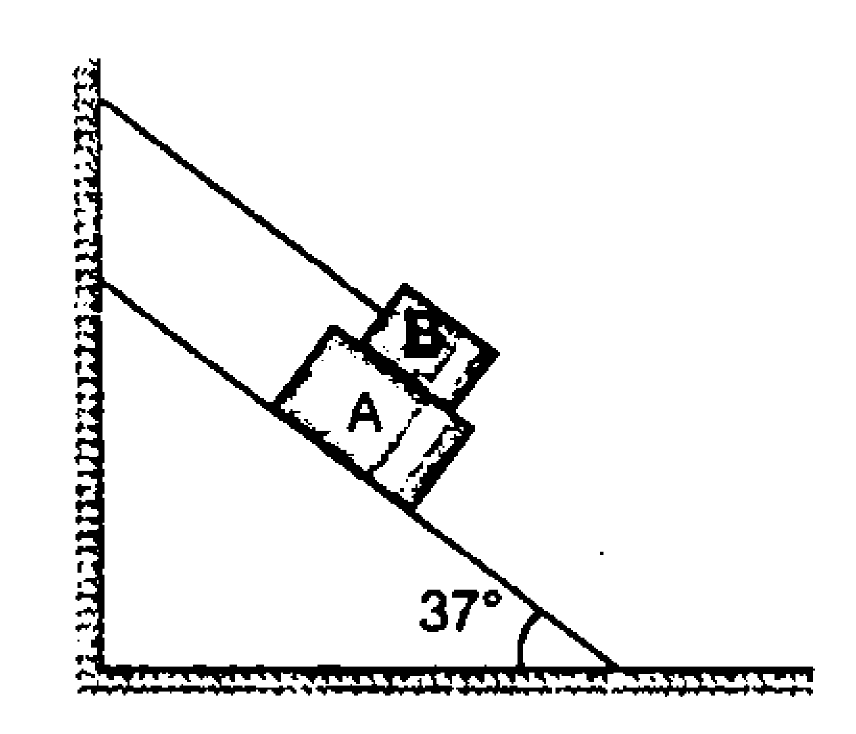
$$T_1 - 120\text{ N} - 300\text{ N} \cdot \frac{1}{2} - 103,2\text{ N} = 0$$

de donde: $T_1 = 373,2\text{ N}$

El peso del cuerpo tendrá que ser 373,2 N, igual a la tensión de la cuerda que lo soporta.

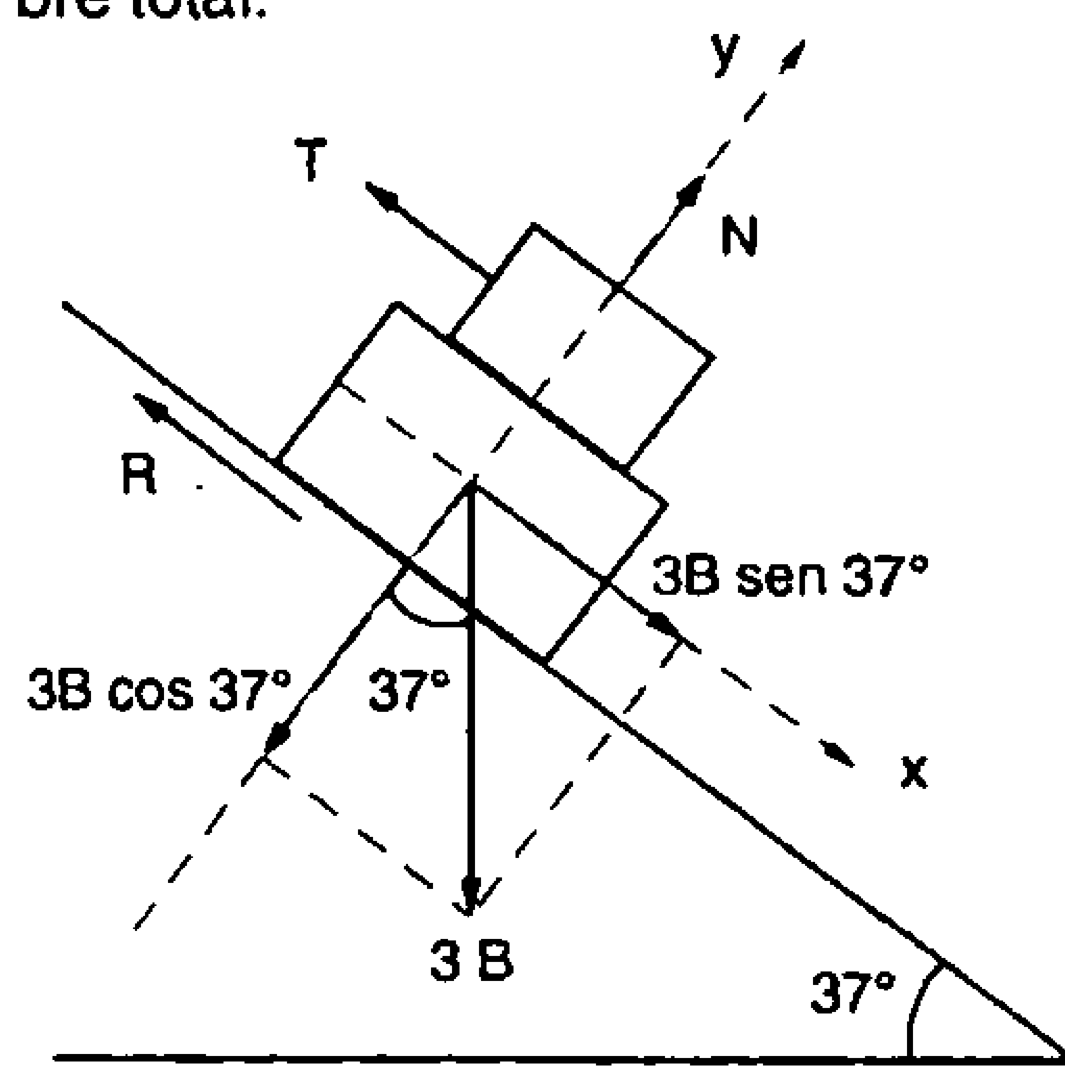
http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 10. En la figura, A pesa el doble que B; el coeficiente de rozamiento entre A y B, A y el plano inclinado es igual, calcular el valor de este coeficiente de rozamiento para que el sistema se mantenga en equilibrio.



RESOLUCIÓN :

a) Considerando el diagrama de cuerpo libre total.



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T + R = 3\,B \operatorname{sen} 37° = 3\,B\left(\frac{3}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad T + \mu \,.\, N = \frac{9}{5}B \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

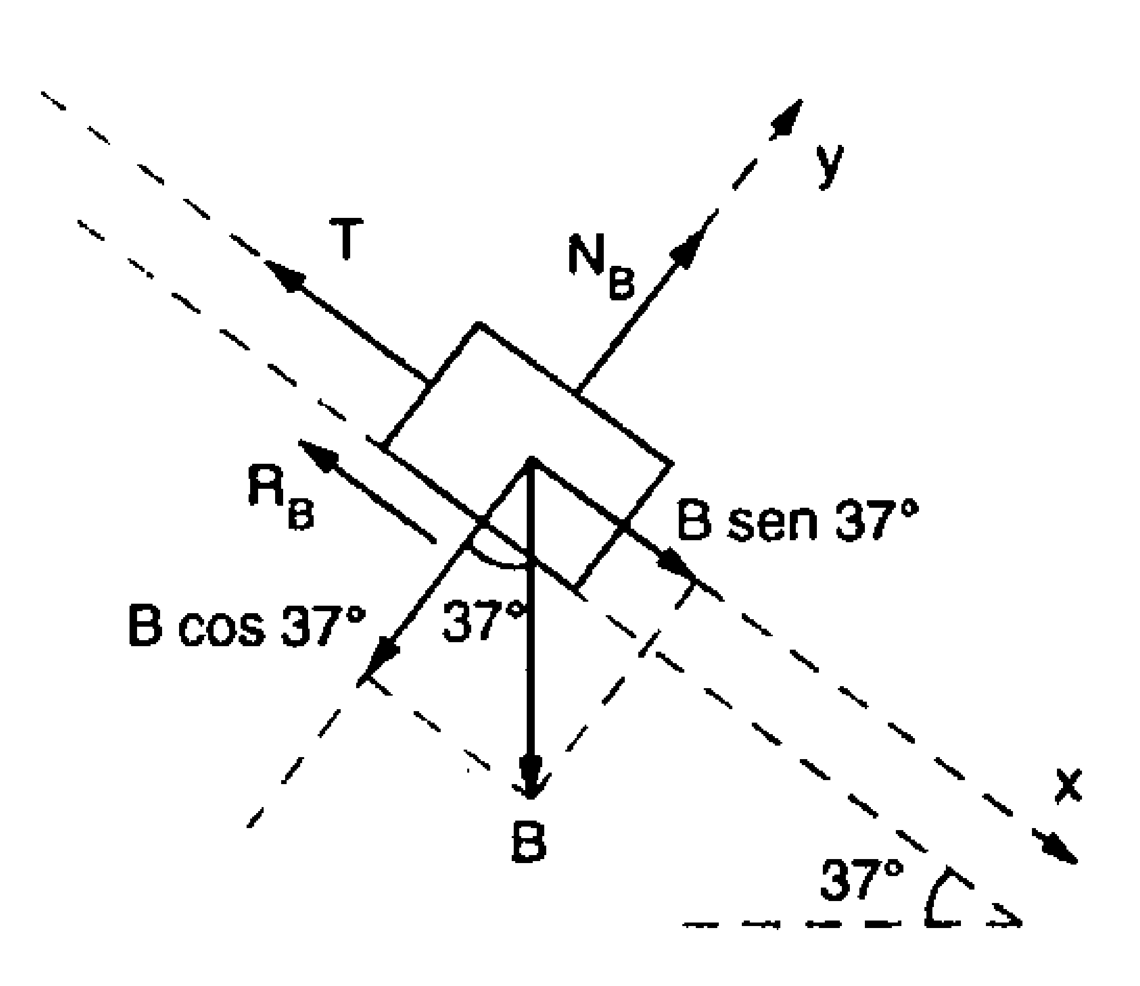
$$N = 3\,B \cos 37° = 3\,B\left(\frac{4}{5}\right)$$

$$\Rightarrow \quad N = \frac{12}{5}B \qquad (2)$$

(2) en (1) : $T + \mu \cdot \frac{12}{5}B = \frac{9}{5}B$

$$\therefore \quad T = \frac{9}{5}B - \mu \cdot \frac{12}{5}B \qquad (3)$$

b) Diagrama de cuerpo libre de "B" :



$$\Sigma F_x = 0$$

$$T + R_B = B \operatorname{sen} 37°$$

$$T + \mu \,.\, N_B = \frac{3\,B}{5} \qquad (4)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_B = B \cos 37°$$

$$N_B = \frac{4}{5}B \qquad (5)$$

Reemplazando (5) en (4) :

$$T + \mu \cdot \frac{4}{5}B = \frac{3}{5}B$$

$$\therefore \quad T = \frac{3}{5}B - \mu \cdot \frac{4}{5}B \qquad (6)$$

Igualando (3) y (6) :

$$\frac{9}{5}B - \mu\frac{12}{5}B = \frac{3}{5}B - \mu\frac{4}{5}B$$

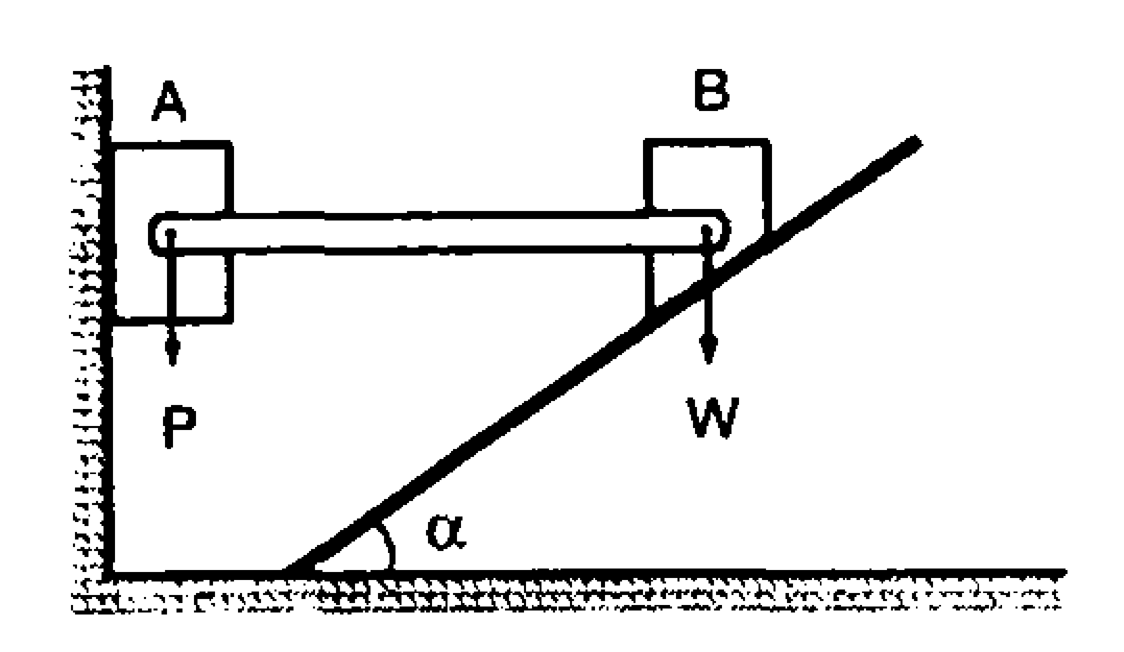
$$\frac{6}{5}B = \mu\frac{8}{5}B$$

$$\mu = \frac{6}{8}$$

http://librosysolucionarios.net

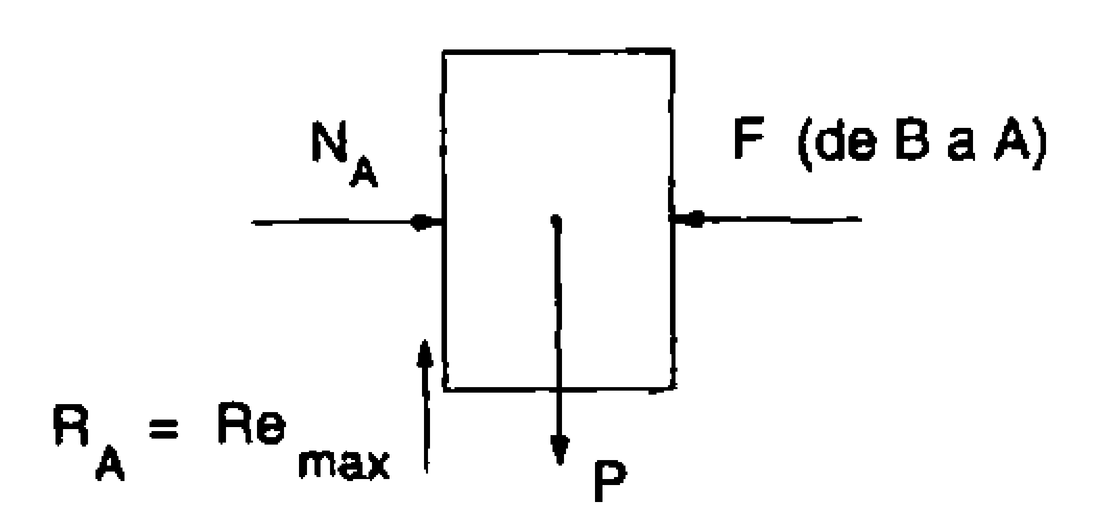
Rpta.: $\mu = \frac{3}{4} = 0,75$

PROBLEMA 11. Hallar el peso mínimo que debe tener B para que el sistema mostrado en la figura se mantenga en equilibrio.



RESOLUCIÓN :

Diagrama de cuerpo libre de A :



R_A = rozamiento de A con la pared

N_A = normal de la pared con A

P = peso de A

F = presión de la barra contra A

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F = N_A \qquad (I)$$

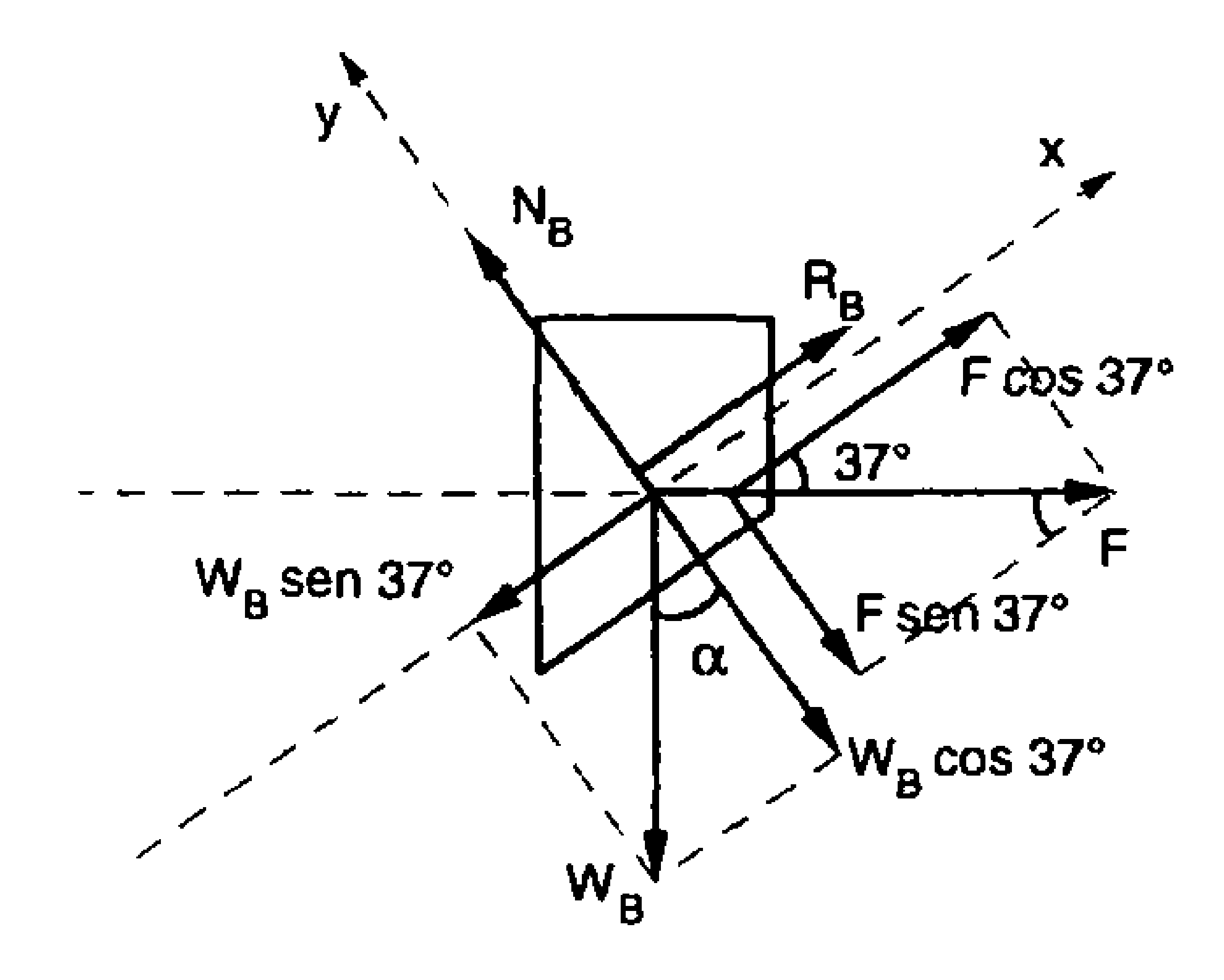
pero: $N_A = \frac{R_A}{\mu_A}$ y $R_A = P$ luego:

$$N_A = \frac{P}{\mu_A}$$

$$\therefore \quad F = \frac{P}{\mu_A} = \frac{400\ N}{0,7} = 571,4\ n$$

Diagrama de cuerpo libre de B :

Trazando un sistema de ejes coordenados, con el eje x paralelo al plano inclinado:



El problema es calcular W, ya se conoce F.

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F \cos 37° + R_B = W_B \operatorname{sen} 37° \qquad (I)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N_B = F \operatorname{sen} 37° + W_B \cos 37°$$

Pero: $R_B = \mu_B \cdot N_B$

Sustituyendo los valores de m_B y N_B :

$$R_B = 0,2\,(F \operatorname{sen} 37° + W_B \cos 37°)$$

Sustituyendo en (I) :

$$F \cos 37° + 0,2(F \operatorname{sen} 37° + W_B \cos 37°) = W_B \operatorname{sen} 37°$$

$$F \cos 37° + 0,2\,F \operatorname{sen} 37° + 0,2\,W_B \cos 37° = W_B \operatorname{sen} 37°$$

$$W_B = \frac{F(\cos 37° + 0,2 \times \operatorname{sen} 37°)}{(-0,2 \times \cos 37° + \operatorname{sen} 37°)}$$

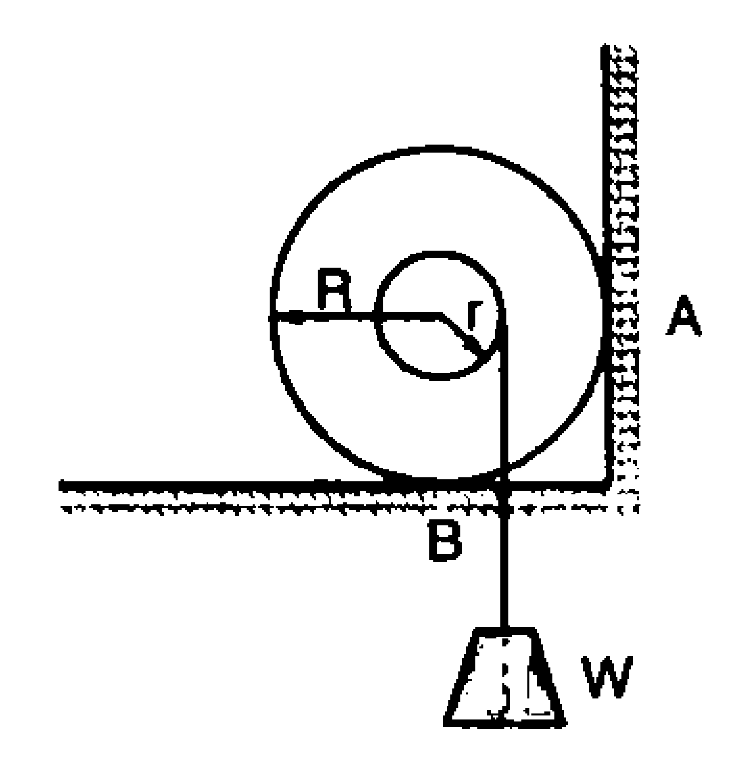
Sustituyendo en valores:

$$W_B = \frac{571,4\ N\left(\frac{4}{5} + 0,2 \times \frac{3}{5}\right)}{-0,2 \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5}} = \frac{571,4 \times 0,92\ N}{0,44}$$

Rpta.: $W_B = 1\ 194,74\ N$

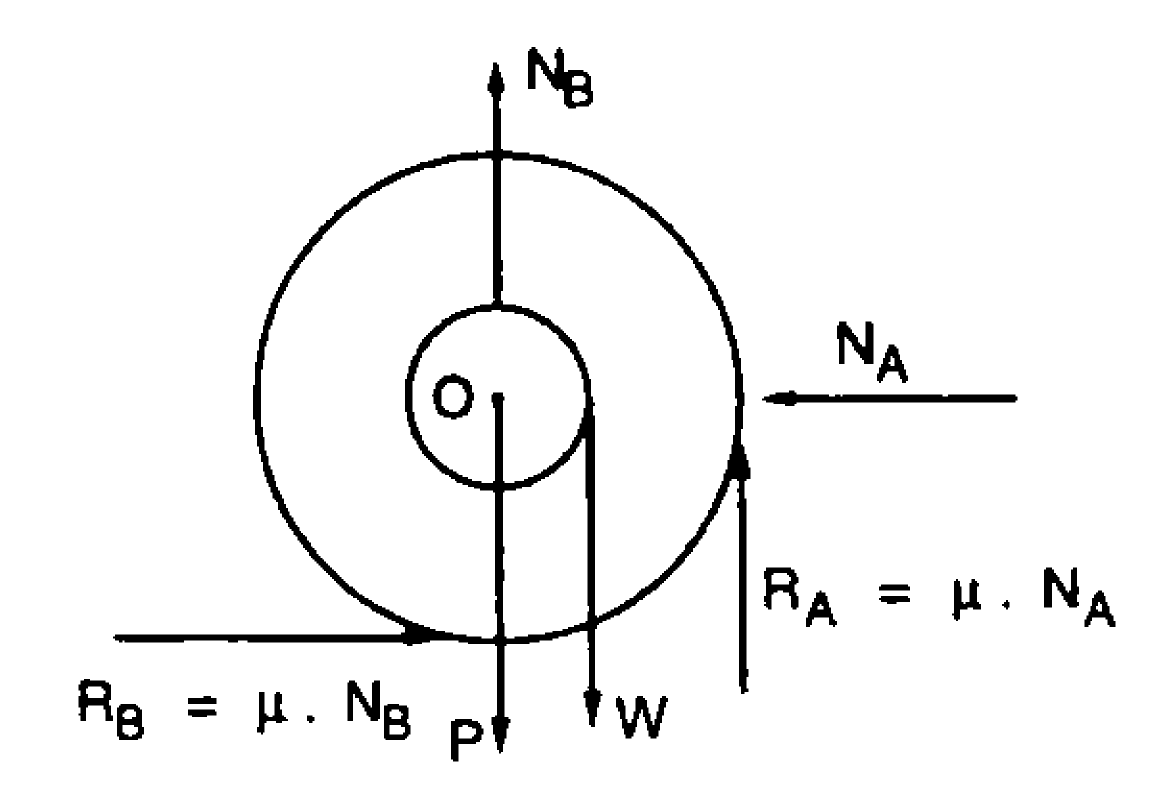
PROBLEMA 12. ¿Cuál debe ser el máximo peso "W", en la figura, para que el cilindro esté en equilibrio? Siendo el coeficiente de rozamiento entre ambas superficies de contacto igual a 0,3; peso "P" del cilindro es 800 N.

$$r = 20\,cm \quad ; \quad R = 50\,cm$$



RESOLUCIÓN :

Diagrama de cuerpo libre del cilindro:



Tomando momentos con respecto al punto "O" que es el centro del cilindro:

$$\Sigma M_O = 0$$

$$w \cdot r - R_A \cdot R - R_B \cdot R = 0 \qquad (I)$$

$$R_B = \mu \cdot N_B \quad y \quad R_A = \mu \cdot N_A \qquad (1)$$

Por otro lado: $\Sigma F_x = 0$, luego:

$$N_A = R_B \quad \Rightarrow \quad N_A = \mu \cdot N_B$$

sustituyendo en (1) , luego todo en (I):

$$w r - \mu\mu . N_B . R - \mu . N_B . R = 0,$$

pero: $N_B = P$; luego:

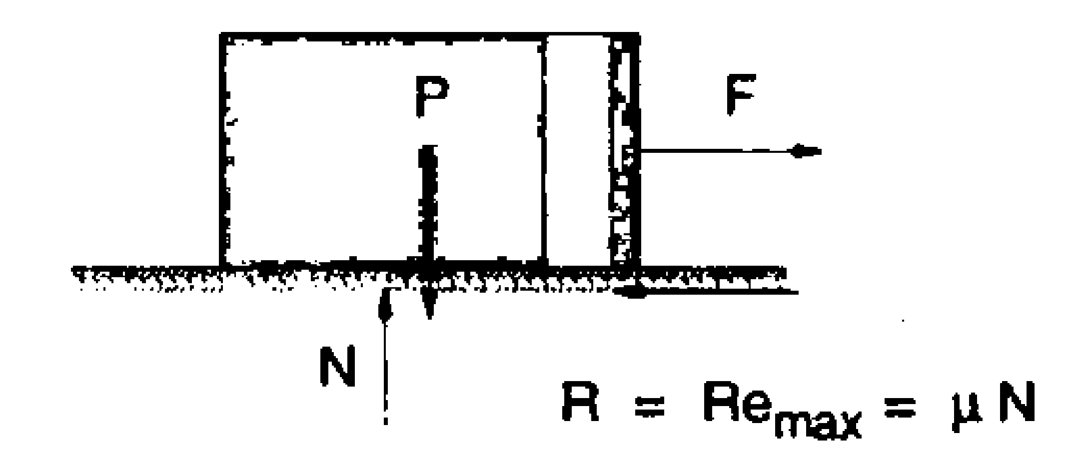
$$w r - \mu^2 . P . R - \mu . P . R = 0,$$

de donde: $$w = \frac{\mu^2 . P . R + \mu . P . R}{r}$$

$$W = \frac{(0{,}3)^2\ 800 \cdot 50 + 0{,}30 \cdot 800 \cdot 50}{20}$$

Rpta.: $w = 780$ N

PROBLEMA 13. A un peso de 100 N se le aplica una fuerza horizontal de tracción de 60 N. ¿Cuál será la velocidad del cuerpo a los 3 segundos de haber iniciado la aplicación de la fuerza? $\mu_e = 0{,}4$ y $\mu_c = 0{,}2$.



RESOLUCIÓN :

Si la fuerza de rozamiento estático del cuerpo es mayor que 60 N, el cuerpo no se mueve. Veamos:

Sabiendo que: $R = R_{e_{máx}} = \mu_e . N$

$$R = 0{,}4 \ . \ 100\ N = 40\ N$$

Lo que quiere decir que el rozamiento, sólo opone una fuerza de 40 N al desplazamiento y como se aplica al cuerpo una fuerza de 60 N, el cuerpo sí se mueve con una fuerza equivalente a la diferencia, es decir:

$$F - R = 60\ N - 40\ N = 20\ N$$

Cálculo de la aceleración con que se mueve el cuerpo con esta fuerza:

$$\Sigma F_x = m . a$$

$$F - R = m . a$$

$$F - R = \frac{P}{g} \cdot a$$

http://librosysolucionarios.net

de donde: $a = \dfrac{g(F - R)}{P}$

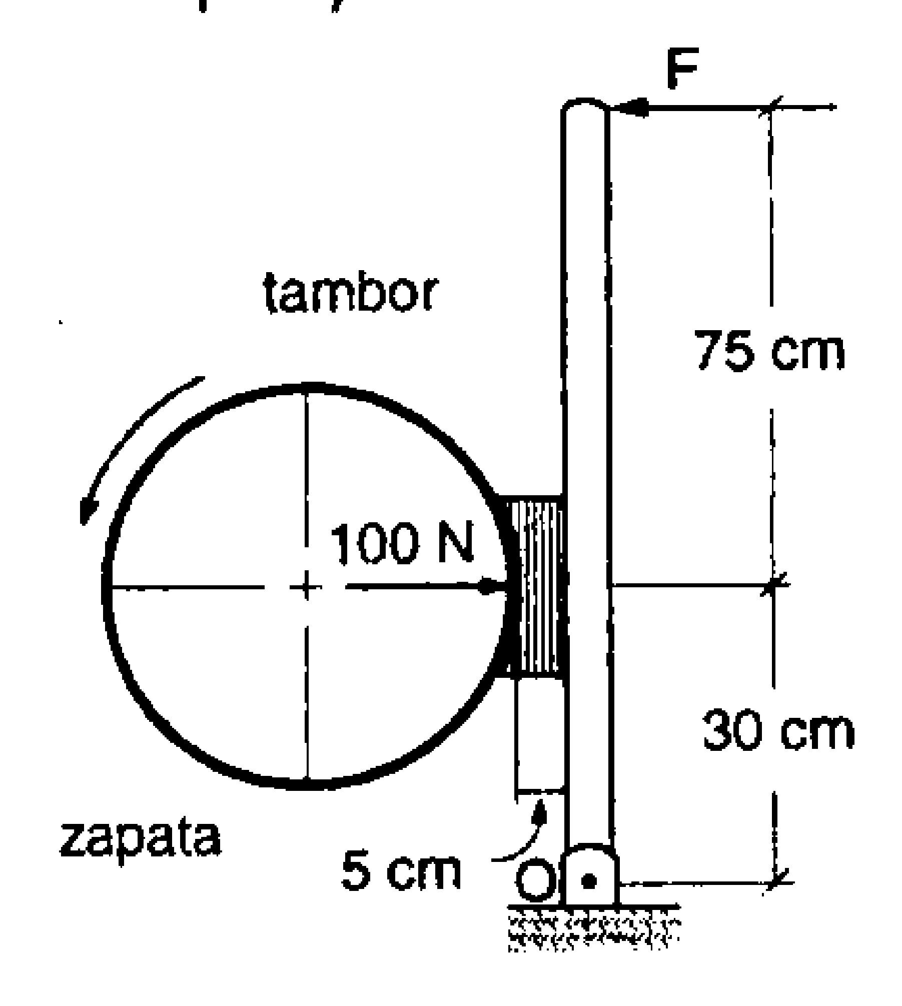
$$a = \frac{9{,}8\ m/s^2 \,.\, 20\ N}{100\ N} = 1{,}96\ m/s^2$$

Cálculo de la velocidad a los 3 s:

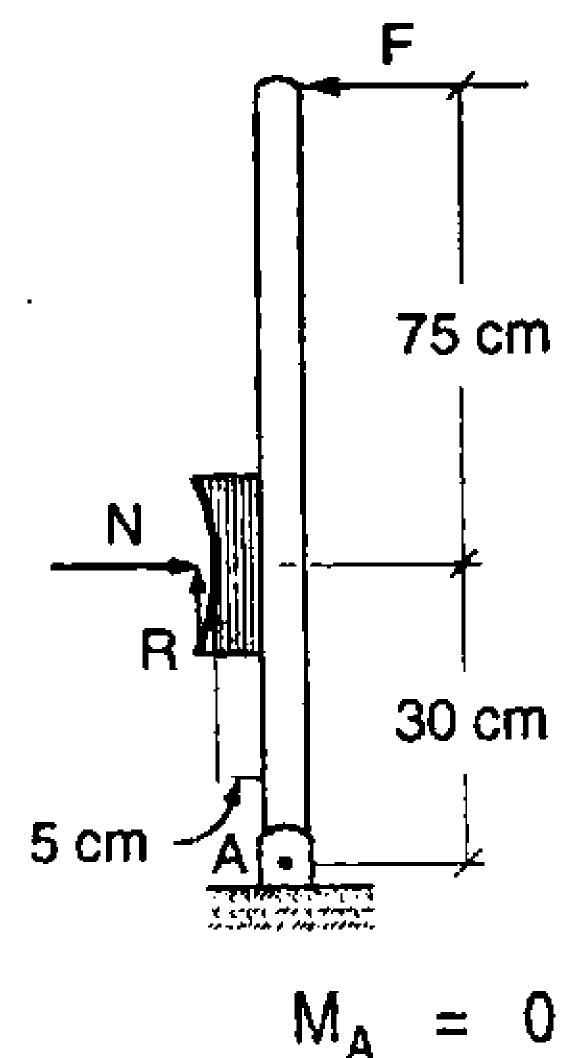
$$V = a\,.\,t = 1{,}96\ m/s^2 \,.\, 3\ s$$

Rpta.: $V = 5{,}88$ m/s

PROBLEMA 14. En la figura, el tambor gira en sentido antihorario, y se desea saber cuál es el valor de la fuerza "F" capaz de frenar el tambor, para una fuerza de presión de 100 N en la zapata, y m = 0,3 (Fuerza de presión es el valor de la normal N a la zapata).



RESOLUCIÓN : D.C.L.



$$M_A = 0$$

$$F\,.\,105 - N\,.\,30 - R\,.\,5 = 0$$

$$105\,F = 30\,N + 5\,\mu N$$

$$F = \frac{N(30 + 5\mu)}{105} \quad ; \text{ con datos :}$$

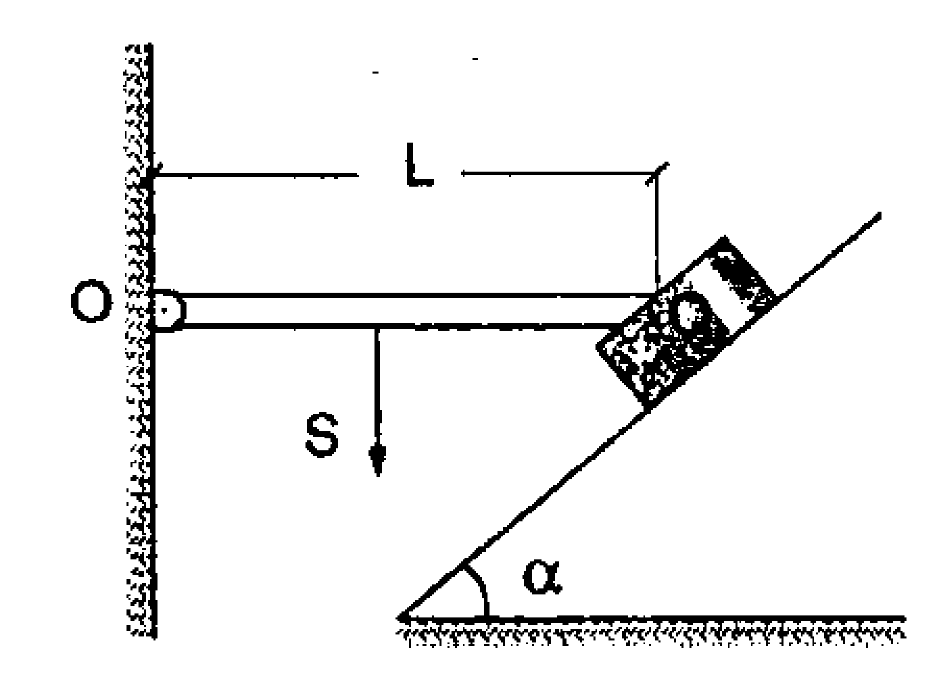
Sustituyendo datos:

$$F = \frac{100\,(30 + 5 \times 0{,}3)}{105}$$

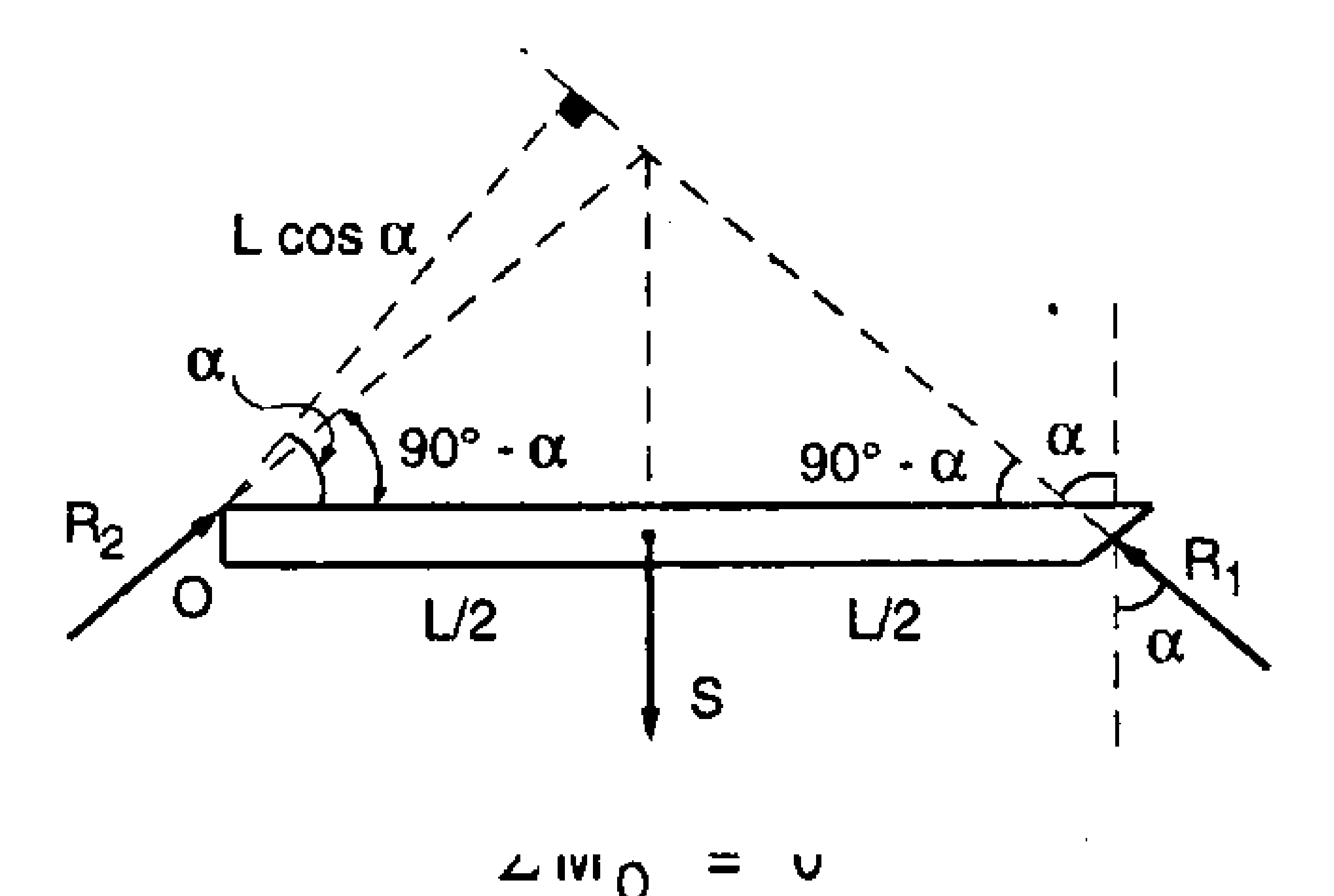
Rpta.: $F = 30$ N

PROBLEMA 15. Una barra homogénea de longitud "L" y peso "S", descansa horizontalmente, como se ve en la figura con el extremo libre sobre un bloque de peso "Q". Este bloque está en reposo sobre un plano inclinado de ángulo "α" con la horizontal. Calcular el coeficiente de rozamiento "μ", entre el bloque y el plano para que haya equilibrio.

Suponer que no hay rozamiento entre la barra y el bloque.



RESOLUCIÓN : D.L.C. de la barra:



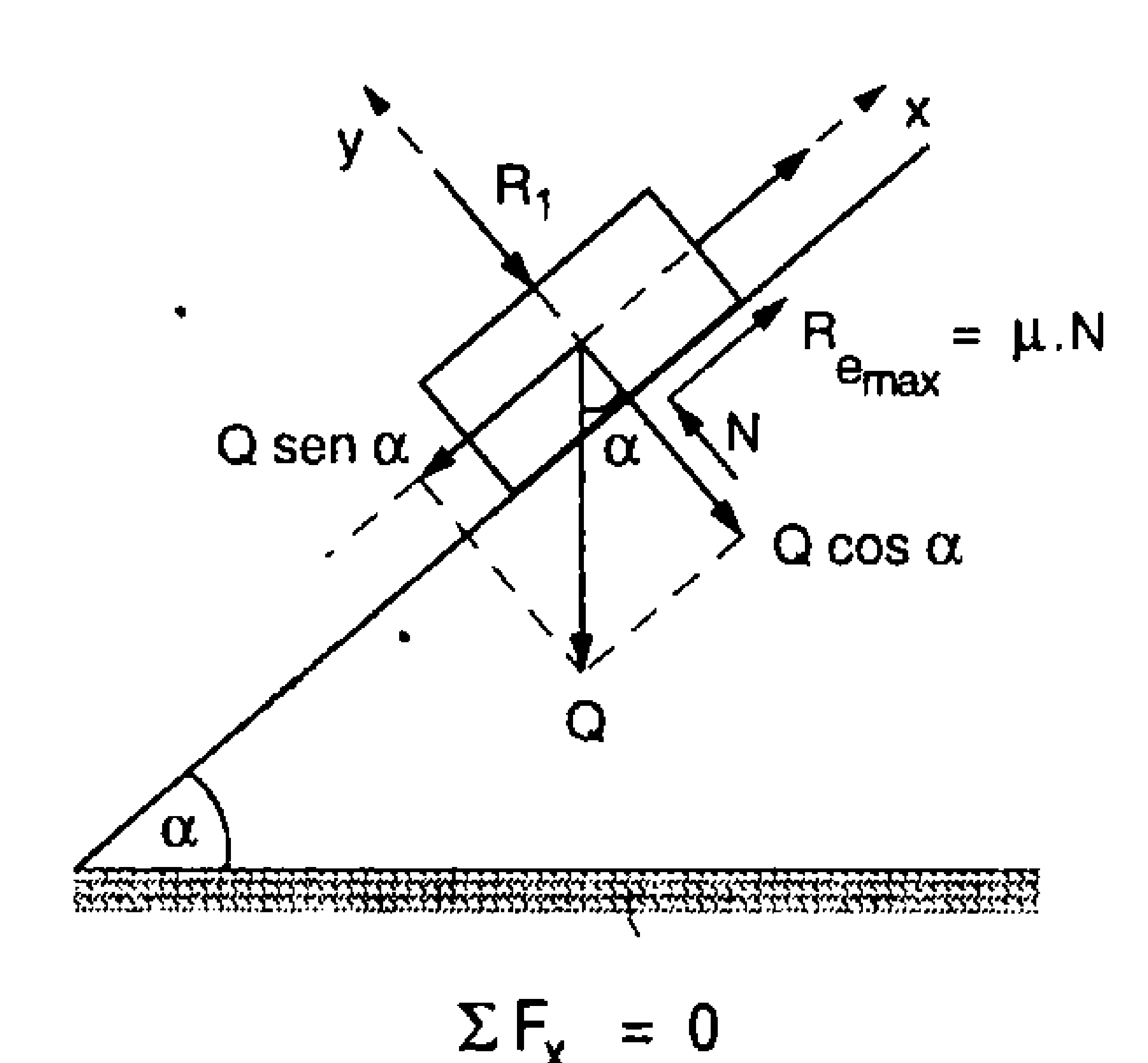
$$\Sigma M_O = 0$$

$$R_1\,L\cos\alpha = S \times \frac{L}{2}$$

de donde: $R_1 = \dfrac{S}{2\cos\alpha}$ (1)

Diagrama de cuerpo libre de "Q" :

http://librosysolucionarios.net



$$\Sigma F_x = 0$$

$$\mu . N - Q \operatorname{sen}\alpha = 0$$

$$\therefore \quad N = \frac{Q \operatorname{sen}\alpha}{\mu} \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N = R_1 + Q\cos\alpha \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3) :

$$\frac{Q . \operatorname{sen}\alpha}{\mu} = \frac{S}{2\cos\alpha} + Q\cos\alpha$$

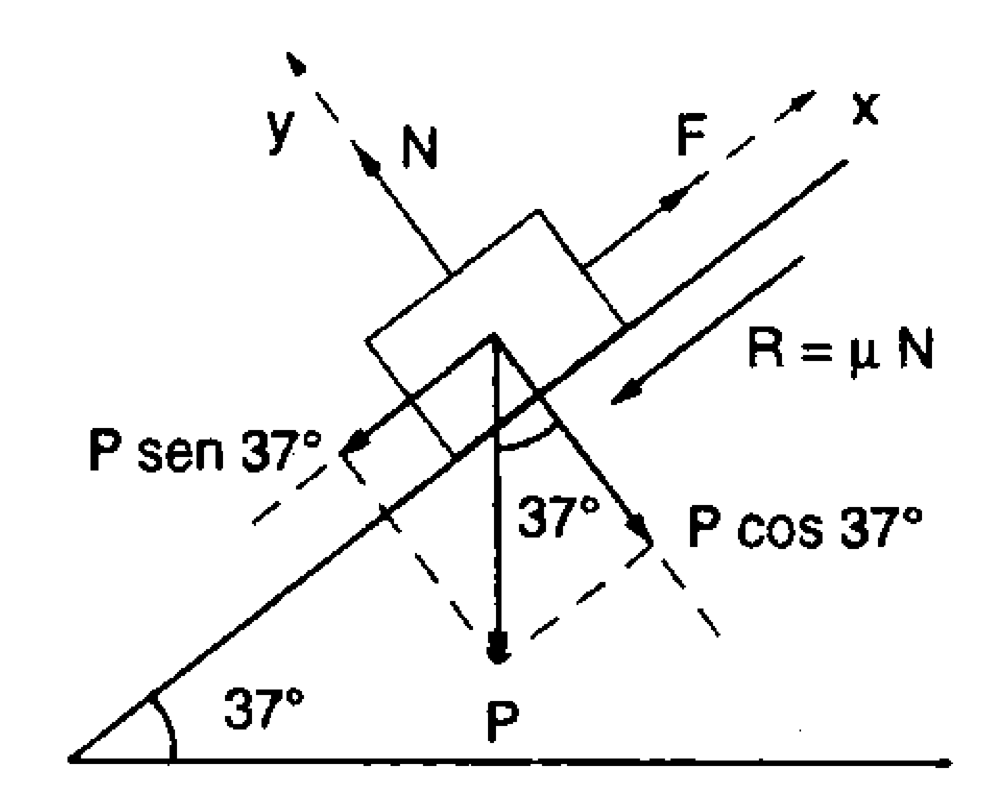
$$Q . 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha = \mu S + 2\mu Q \cos^2\alpha$$

$$Q \operatorname{sen} 2\alpha = \mu (S + 2 Q \cos^2\alpha)$$

Rpta.: $\mu = \dfrac{Q \operatorname{sen} 2\alpha}{S + 2 Q \cos^2\alpha}$

PROBLEMA 16. Calcular la fuerza que debe aplicarse al cuerpo de masa 5 kg de la figura, para que suba con una aceleración de 2 m/s²,

$\mu_C = 0{,}25$. Se da el D.C.L.



RESOLUCIÓN : Sea el sistema xy con el eje "x" paralelo al plano inclinado.

$$\Sigma F_x = m . a$$

$$F - R - P \operatorname{sen} 37° = m . a$$

Pero: $R = \mu_C . N$; luego:

$$F - \mu_C . N - P \operatorname{sen} 37° = m . a$$

y: $N = P \cos 37°$; luego:

$$F - \mu_C . P \cos 37° - P \operatorname{sen} 37° = m . a$$

$$F - \mu_C\, m\, g \cos 37° - m\, g \operatorname{sen} 37° = m . a$$

despejando F :

$$F = m a + m g (\mu_C \cos 37° + \operatorname{sen} 37°)$$

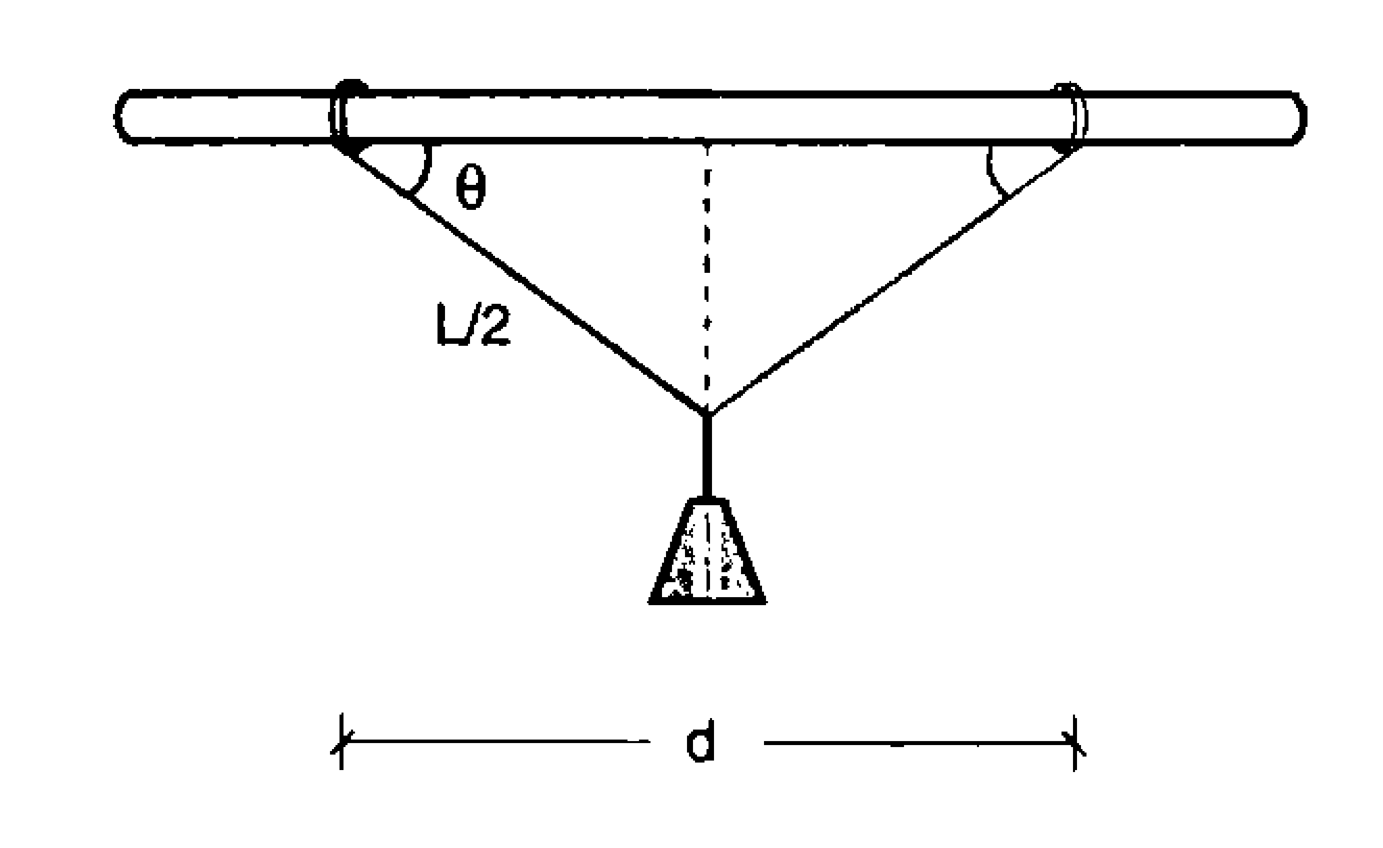
$$F = 5 \text{ kg} \times 2 \text{ m/s}^2 + 5 \text{ kg} \times$$

$$\times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times \left(0{,}25 \times \frac{4}{5} + \frac{3}{5} \right)$$

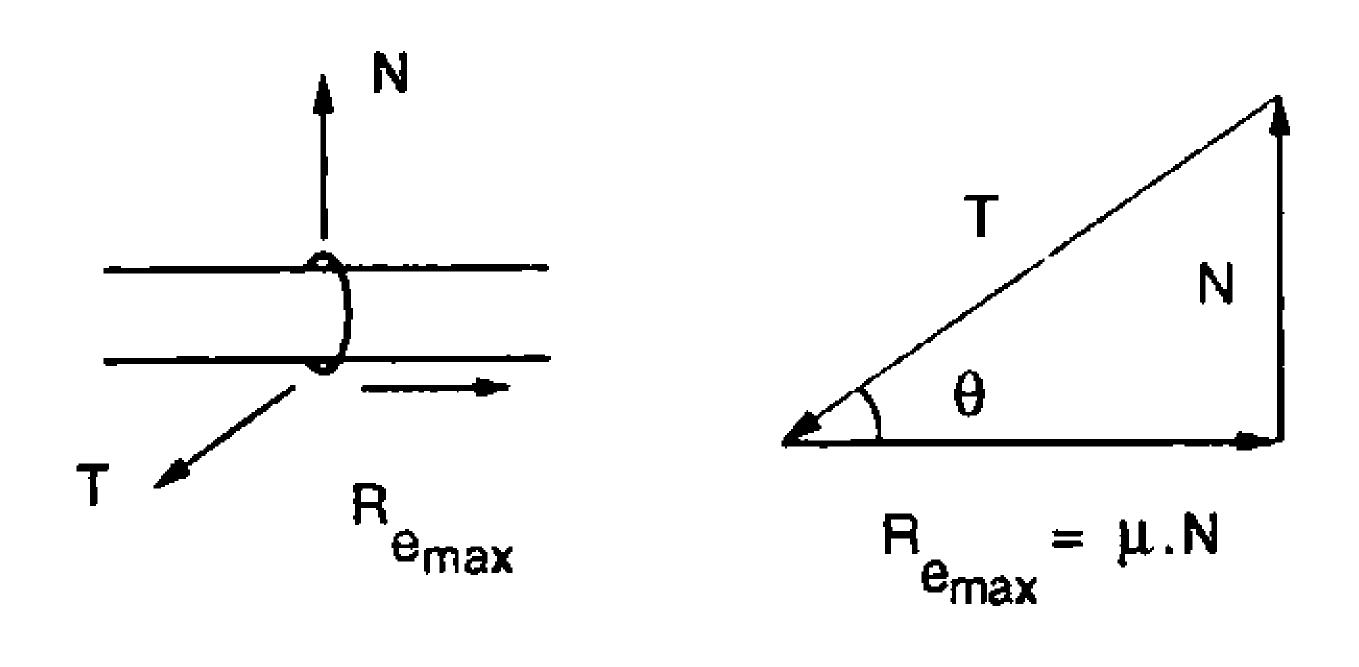
de donde: $F = 49{,}2$ kg x m/s²

Rpta.: $F = 49{,}2$ N

PROBLEMA 17. Dos anillos ingrávidos pueden deslizarse a lo largo de una varilla horizontal de coeficiente de rozamiento m. Los anillos están unidos por un cordón ligero e inestable, de longitud "L", en el punto medio del cual se sujeta un peso "W". Calcular la distancia entre los anillos cuando el sistema está en equilibrio.

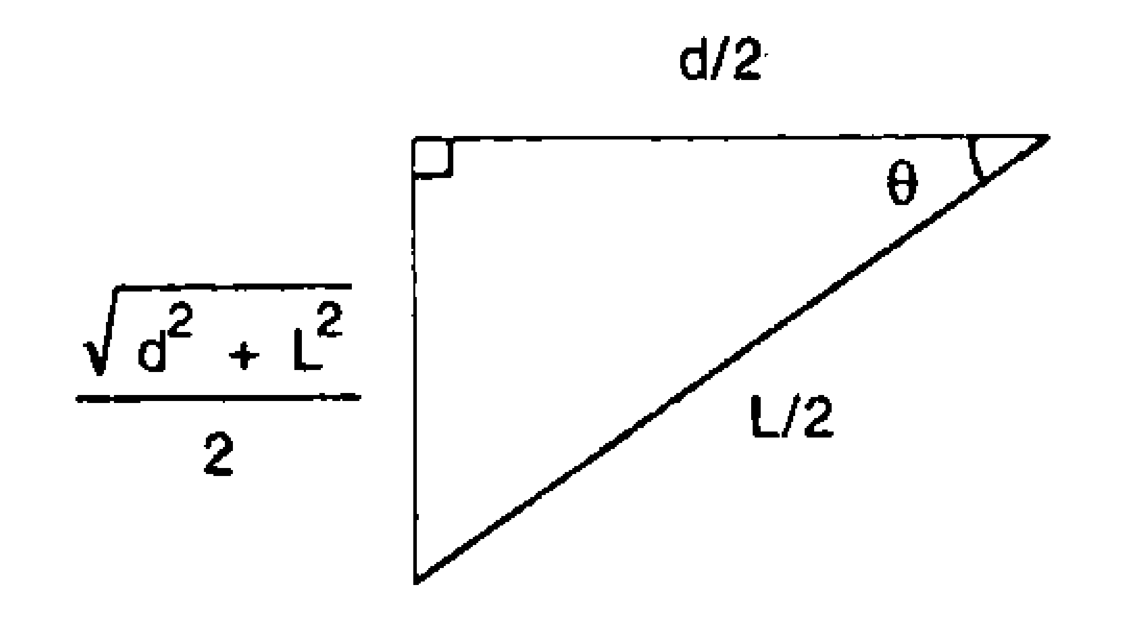


RESOLUCIÓN : D.L.C. de un anillo:



$$\text{tg}\,\theta = \frac{N}{\mu \,.\, N} \quad ; \quad \text{tg}\,\theta = \frac{1}{\mu} \qquad (1)$$

Por otro lado, en el triángulo rectángulo geométrico adjunto:



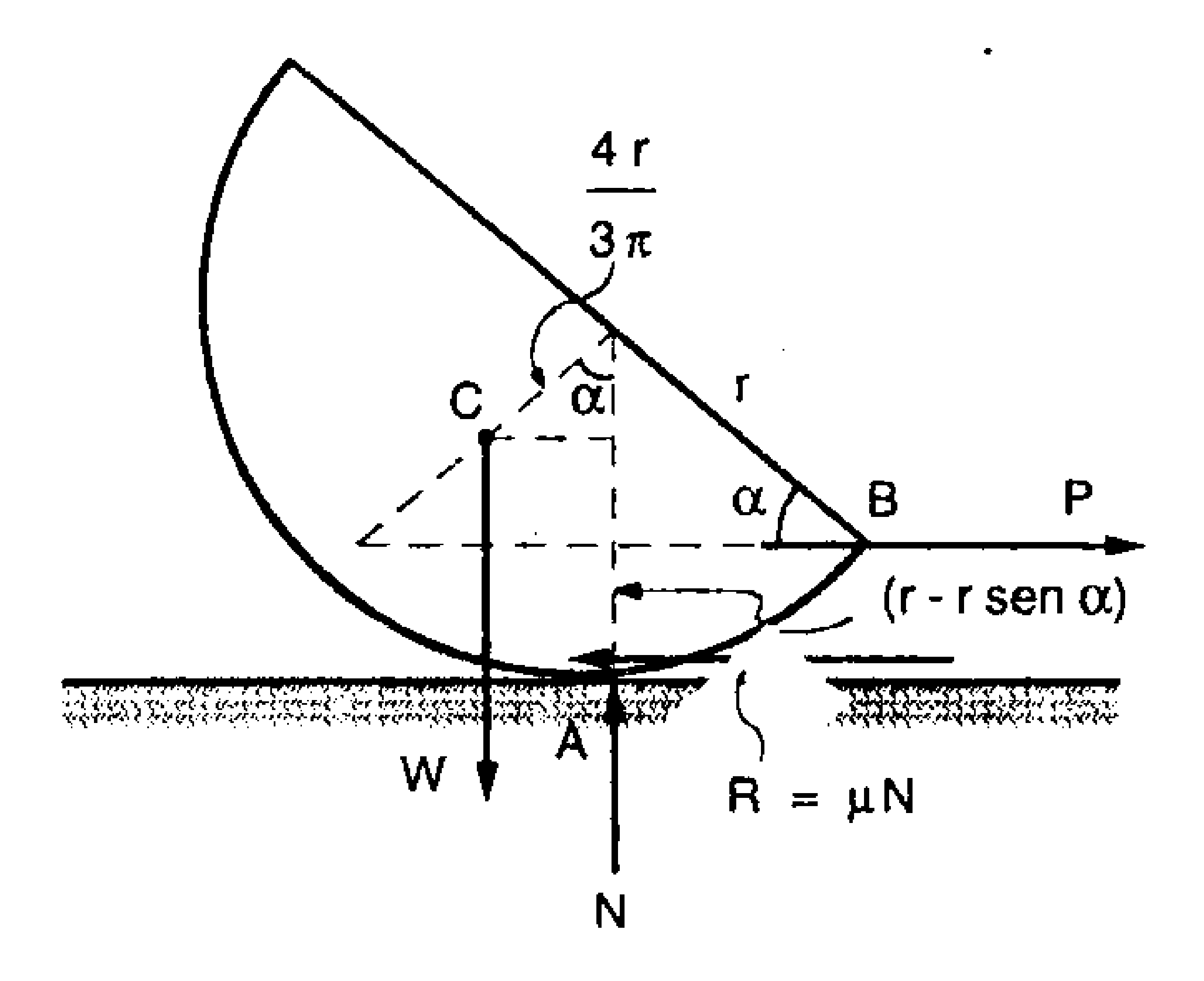
$$\text{tg}\,\theta = \frac{\frac{\sqrt{L^2 + d^2}}{2}}{\frac{d}{2}}$$

$$\text{tg}\,\theta = \frac{\sqrt{L^2 + d^2}}{d} \qquad (2)$$

$$(1) = (2): \quad \frac{\sqrt{L^2 + d^2}}{d} = \frac{1}{\mu}$$

de donde: Rpta.: $d = \dfrac{\mu L}{\sqrt{1 - \mu^2}}$

PROBLEMA 18. Un cilindro corto, de base semicircular, de radio "r" y peso "W", descansa sobre una superficie horizontal y es solicitada por una fuerza horizontal "P", perpendicular a su eje geométrico, aplicada en el punto B de su borde frontal. Hallar el ángulo "α" que la superficie plana formará con el plano horizontal antes que se inicie el deslizamiento, si elcoeficiente de rozamiento en la línea de contacto "A" es m. La fuerza de gravedad "W" debe considerarse aplicada en el centro de gravedad C como se indica en la figura.



RESOLUCIÓN : $\Sigma F_x = 0$

$$P = R = \mu.N \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$N = W \qquad (2)$$

(2) en (1) : $P = \mu.W \qquad (3)$

$$\Sigma M_A = 0$$

$$W \cdot \frac{4r}{3\pi}\,\text{sen}\,\alpha = P\,(r - r\,\text{sen}\,\alpha)$$

$$W\,\frac{4r\,\text{sen}\,\alpha}{3\pi} = P\,r\,(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

$$\frac{4W\,\text{sen}\,\alpha}{3\pi} = P\,(1 - \text{sen}\,\alpha) \qquad (4)$$

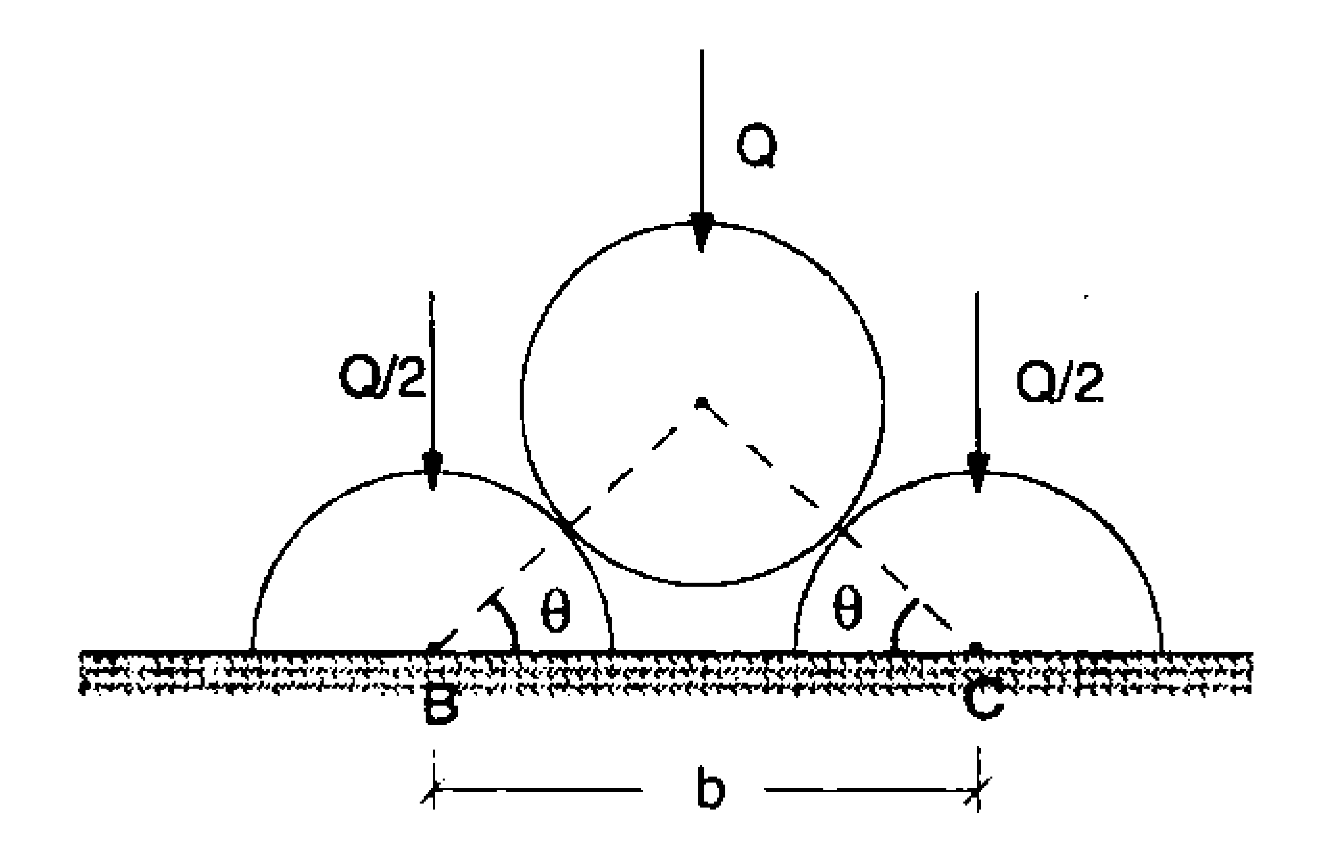
Sustituyendo (3) en (4):

$$\frac{4W\,\text{sen}\,\alpha}{3\pi} = \mu\,W\,(1 - \text{sen}\,\alpha)$$

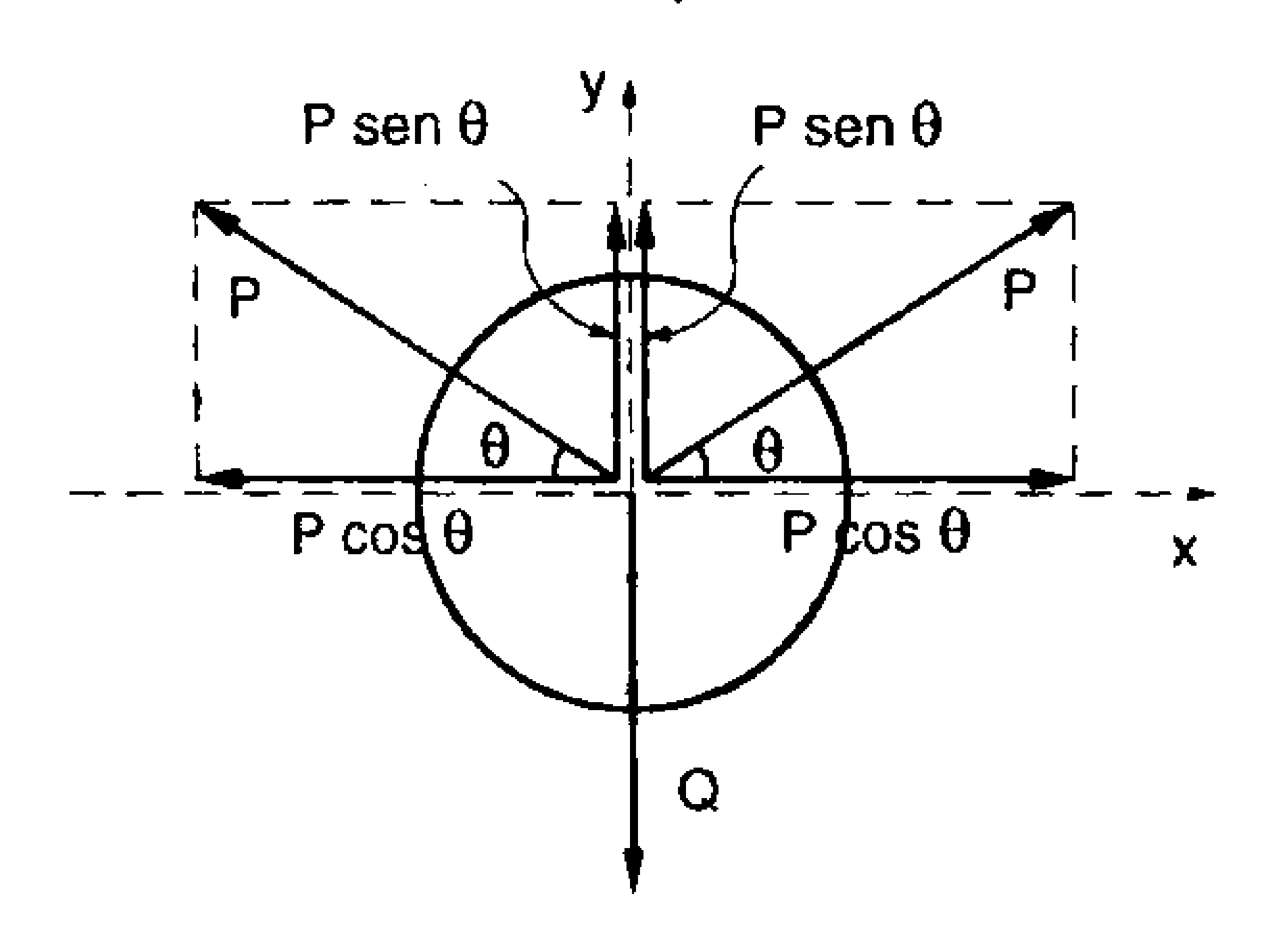
de donde: Rpta.: $\text{sen}\,\alpha = \dfrac{3\mu\pi}{4 + 3\mu\pi}$

PROBLEMA 19. Un cilindro circular liso de peso "Q" y radio "r" se apoya sobre dos cilindros semicirculares del mismo radio y de peso "Q/2", como se indica en la figura. Si el coeficiente de rozamiento estático entre las superficies planas de los cilindros semicirculares y el plano horizontal sobre el cual se apoya es "μ" y no hay roza-

miento apreciable entre los cilindros, calcular la distancia máxima "b" entre los centros B y C, para que haya equilibrio, sin que el cilindro del medio toque al plano horizontal.



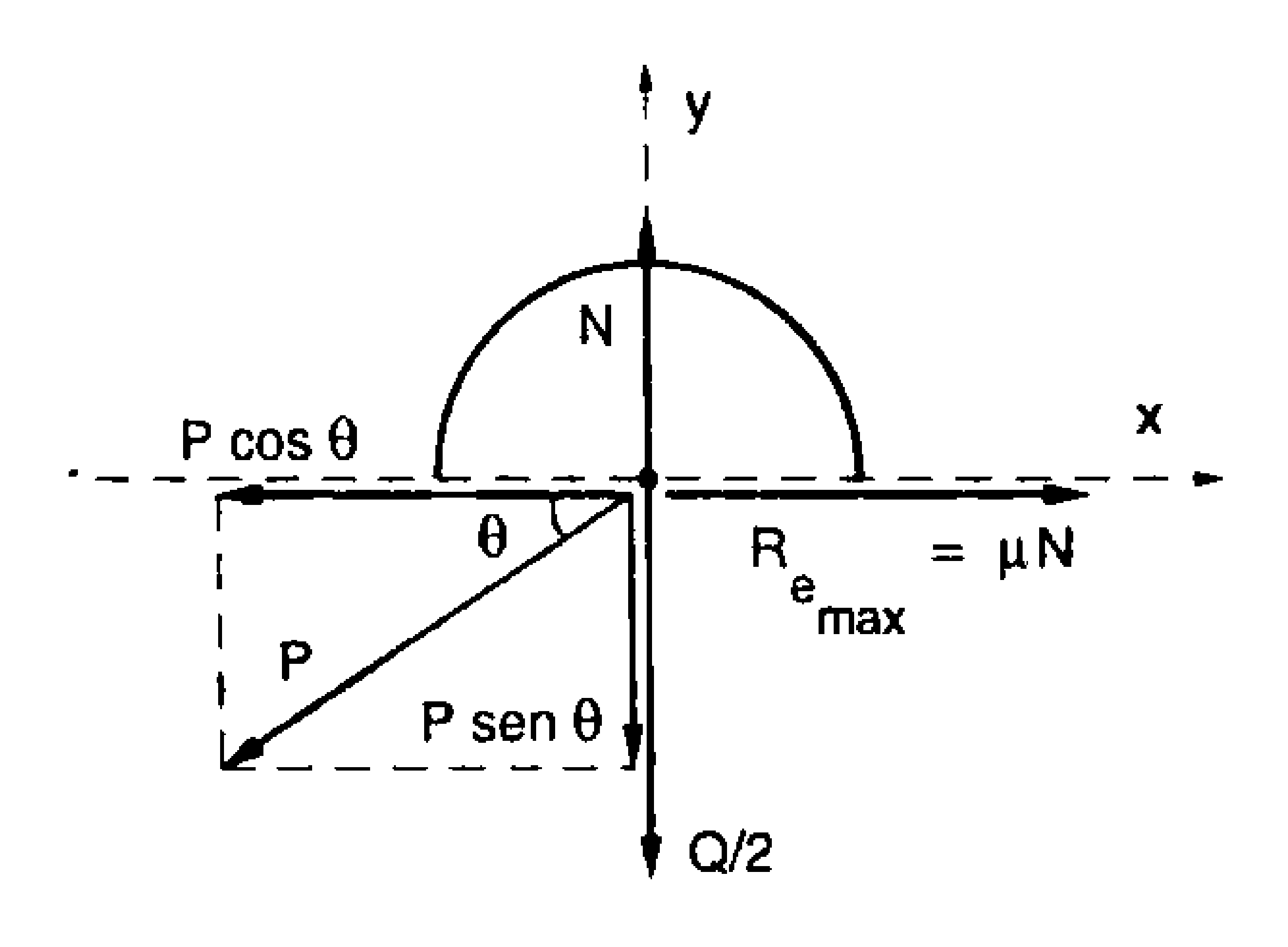
RESOLUCIÓN : Haciendo el diagrama de cuerpo libre de "Q":



$$\Sigma F_x = 0 : \quad 2P \operatorname{sen}\theta = Q$$

$$\therefore \quad P = \frac{Q}{2 \operatorname{sen}\theta} \qquad (1)$$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de Q/2.



$$\Sigma F_x = 0 : \; P\cos\theta = \mu N$$

de donde: $$N = \frac{P\cos\theta}{\mu} \qquad (2)$$

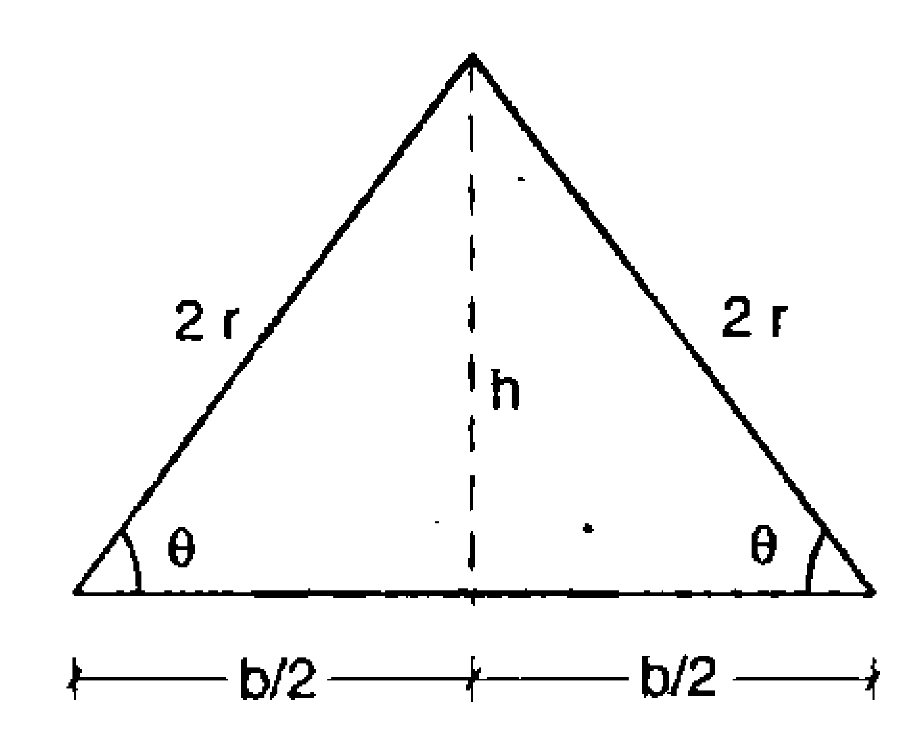
$$\Sigma F_y = 0$$

$$N = P\operatorname{sen}\theta + Q/2 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (3):

$$\frac{Q}{2\operatorname{sen}\theta} \cdot \frac{\cos\theta}{\mu} = \frac{Q}{2\operatorname{sen}\theta} \cdot \operatorname{sen}\theta + \frac{Q}{2}$$

de donde: $$\operatorname{ctg}\theta = 2\mu \qquad (4)$$



Por otro lado: en el triángulo isósceles:

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{2h} \qquad (5)$$

También:

$$h = \sqrt{4r^2 - \frac{b^2}{4}} = \frac{\sqrt{16r^2 - b^2}}{2}$$

Sustituyendo en (5) :

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{2\,\frac{\sqrt{16r^2 - b^2}}{2}}$$

$$\operatorname{ctg}\theta = \frac{b}{\sqrt{16r^2 - b^2}} \qquad (6)$$

Igualando los segundos miembros de las ecuaciones (4) y (6) :

$$2\mu = \frac{b}{\sqrt{16r^2 - b^2}}$$

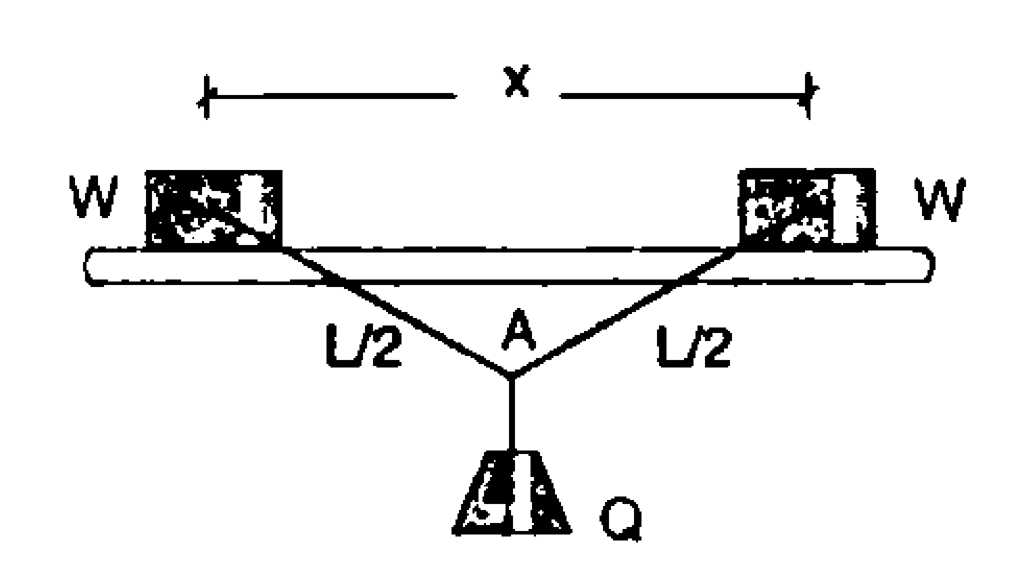
elevando al cuadrado y despejando:

http://librosysolucionarios.net

$$4\mu^2 = \frac{b^2}{16r^2 - b^2} \quad \text{de donde:}$$

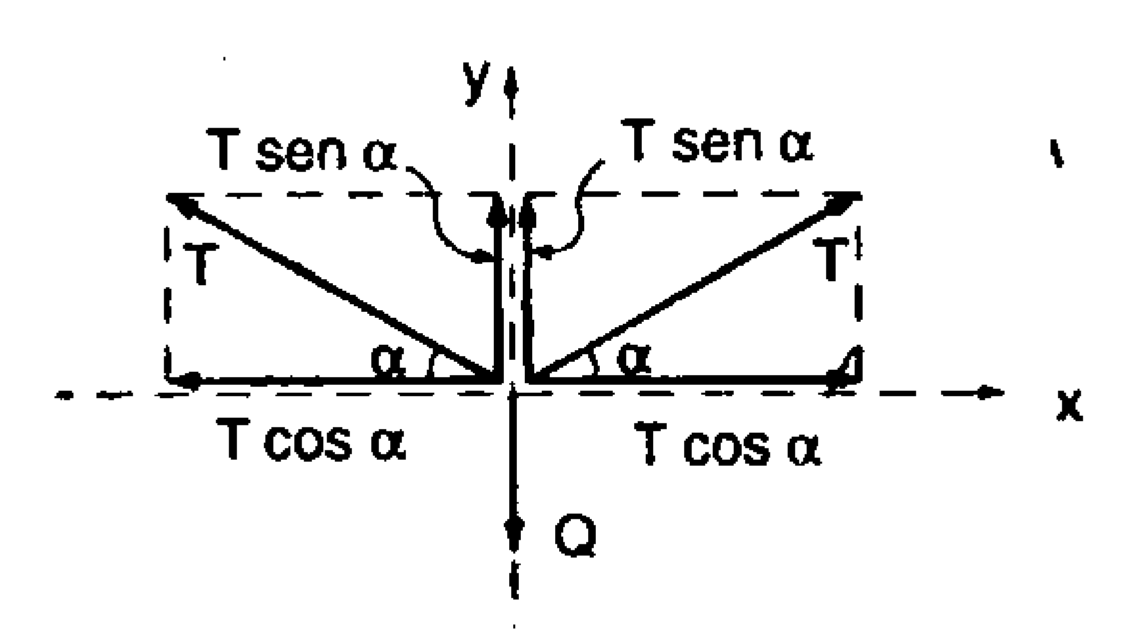
Rpta.: $b = \dfrac{8\mu r}{\sqrt{4\mu^2 + 1}}$

PROBLEMA 20. Dos bloques de igual peso "W", pueden deslizarse sobre una barra horizontal, el coeficiente de rozamiento entre los bloques y la barra es "m". Una cuerda de longitud "L" está suspendida sobre los bloques, la cual lleva un peso "Q" en su punto medio. ¿Hasta qué distancia podrán separarse los bloques permaneciendo en equilibrio?



RESOLUCIÓN :

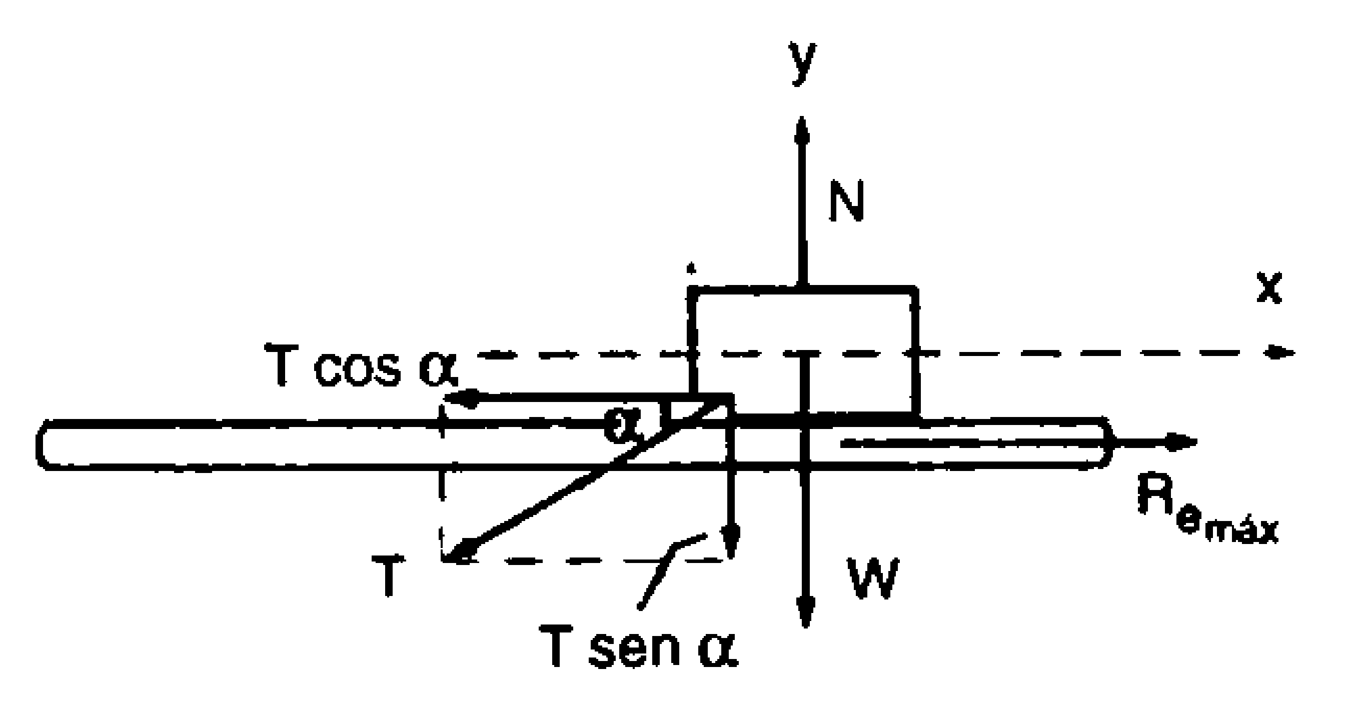
Diagrama del punto "A" con el peso "Q":



$$\Sigma F_y = 0 \quad : \quad 2T\,\text{sen}\,\alpha = Q$$

$$T\,\text{sen}\,\alpha = \frac{Q}{2} \qquad (1)$$

Diagrama de un bloque de peso W:



Los bloques pueden separarse hasta que la fricción estática sea máxima.

$$\Sigma F_x = 0:$$

$$T\cos\alpha = R \quad \text{ó:} \quad T\cos\alpha = \mu N \qquad (2)$$

$$\Sigma F_y = 0:$$

$$T\,\text{sen}\,\alpha + W = N \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) en (2):

$$T\cos\alpha = \mu(T\,\text{sen}\,\alpha + W) \qquad (4)$$

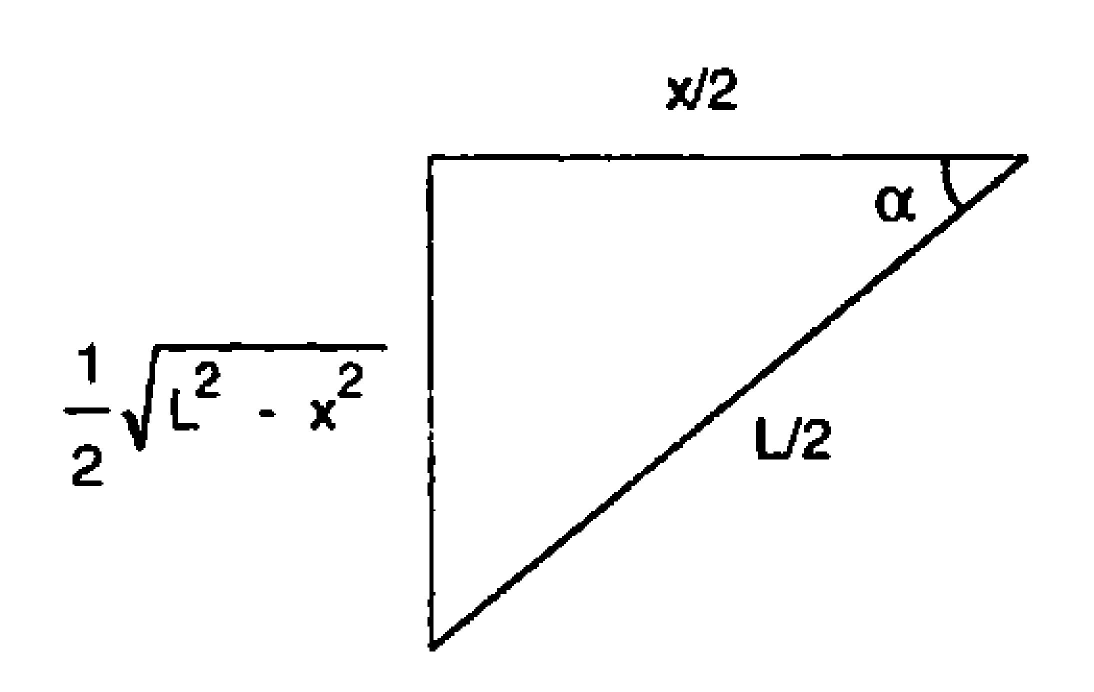
Sustituyendo (1) en (4):

$$T\cos\alpha = \mu\left(\frac{Q}{2} + W\right) \qquad (5)$$

Dividiendo (1) entre (5):

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\frac{Q}{2}}{\mu\left(\frac{Q}{2} + W\right)} \qquad (6)$$

Por otro lado, llamando "x" a la máxima distancia entre los bloques:



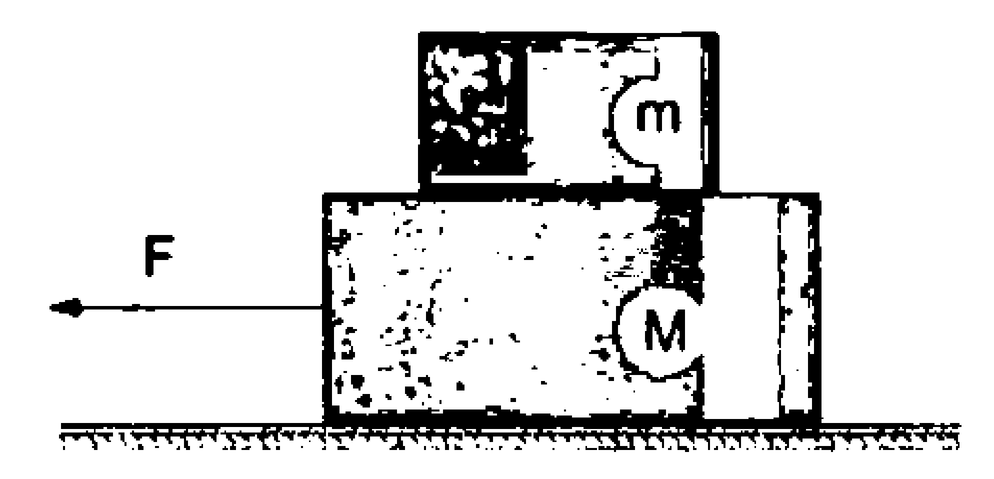
$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\sqrt{L^2 - x^2}}{x} \qquad (7)$$

Igualando (6) y (7) y efectuando:

Rpta.: $x = \dfrac{L\mu\left(\frac{Q}{2} + W\right)}{\sqrt{\left(\frac{Q}{2}\right)^2 + \mu^2\left(\frac{Q}{2} + W\right)^2}}$

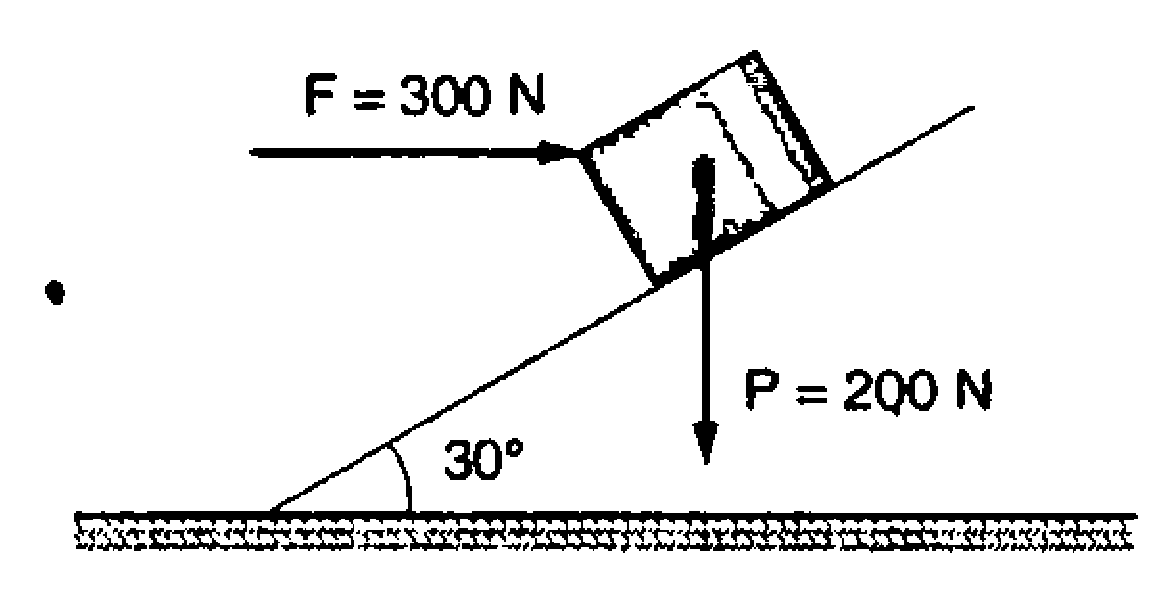
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El coeficiente de rozamiento estático máximo entre los dos bloques es a. Entre el bloque "M" y la tierra no hay rozameineto. Calcular el valor mínimo de la fuerza "F" para que el bloque "m" empiece a deslizarse sobre "M".



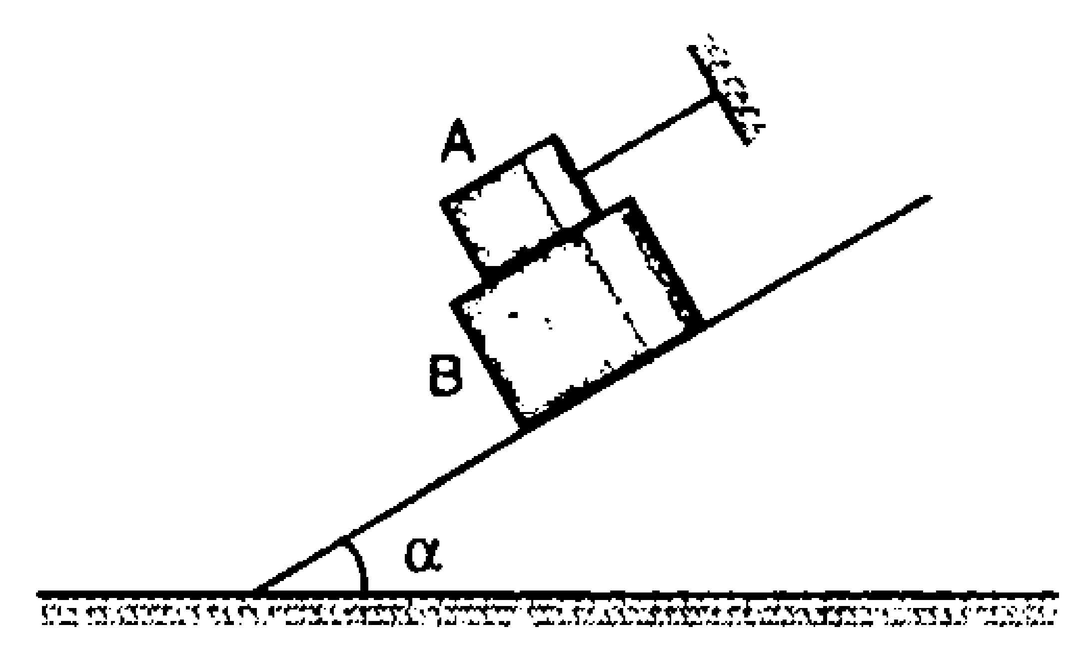
Rpta.: $F = (M + m)\alpha g$

2. En la figura el bloque pesa 200 N si se le aplica una fuerza horizontal de 300 N, ¿se mantendrá en equilibrio? El coeficiente de rozamiento estático es 0,3.



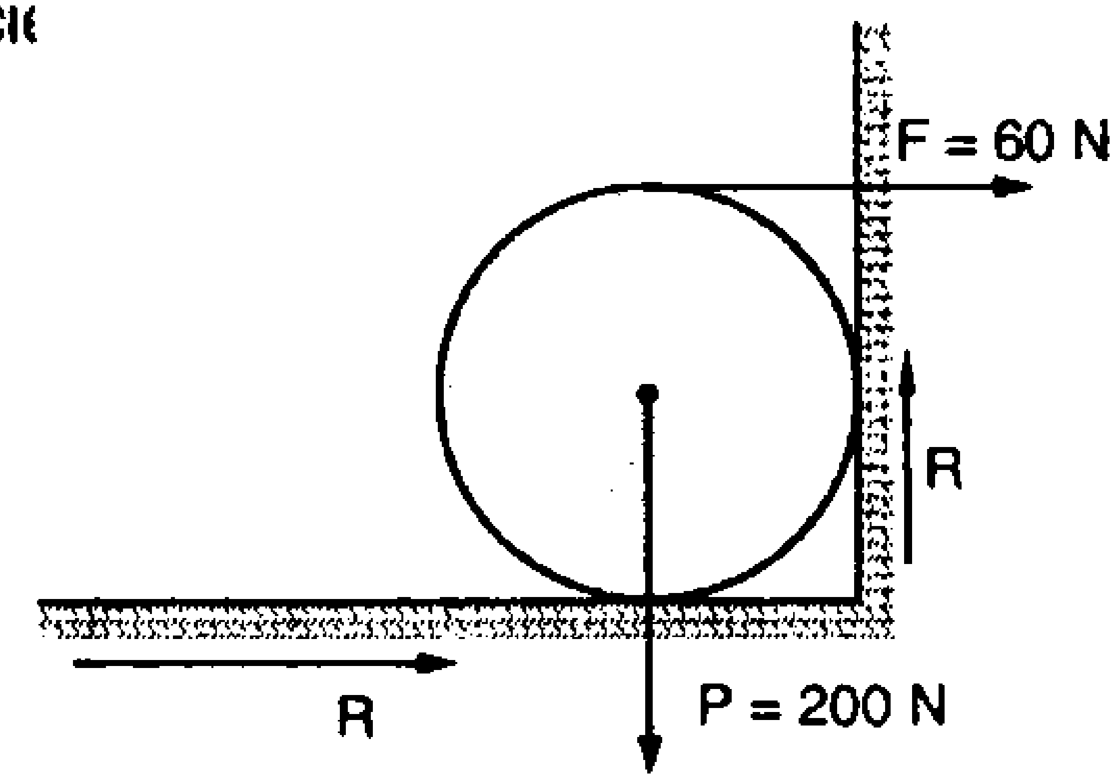
Rpta.: Como R = 352,85 N, el cuerpo se desliza.

3. ¿Cuál es el valor del ángulo "a" para que el bloque B de 90 N esté a punto de deslizarse? El coeficiente de rozamiento entre las dos superficies es 1/3 y el bloque "A" pesa 30 N.



Rpta.: $\alpha = 29°,03'$

4. Calcular si con la fuerza de 60 N se desliza (rueda) el cilindro de peso 200 N. Coeficiente de rozamiento en ambas superficie



Rpta.: No gira.

5. Un móvil marcha a 10 m/s, horizontalmente. Su masa es de 500 kg, ¿en cuánto tiempo parará al aplicársele los frenos? Si el coeficiente de rozamiento es de 0,6. $g = 10\ m/s^2$.

Rpta.: 1,67 s

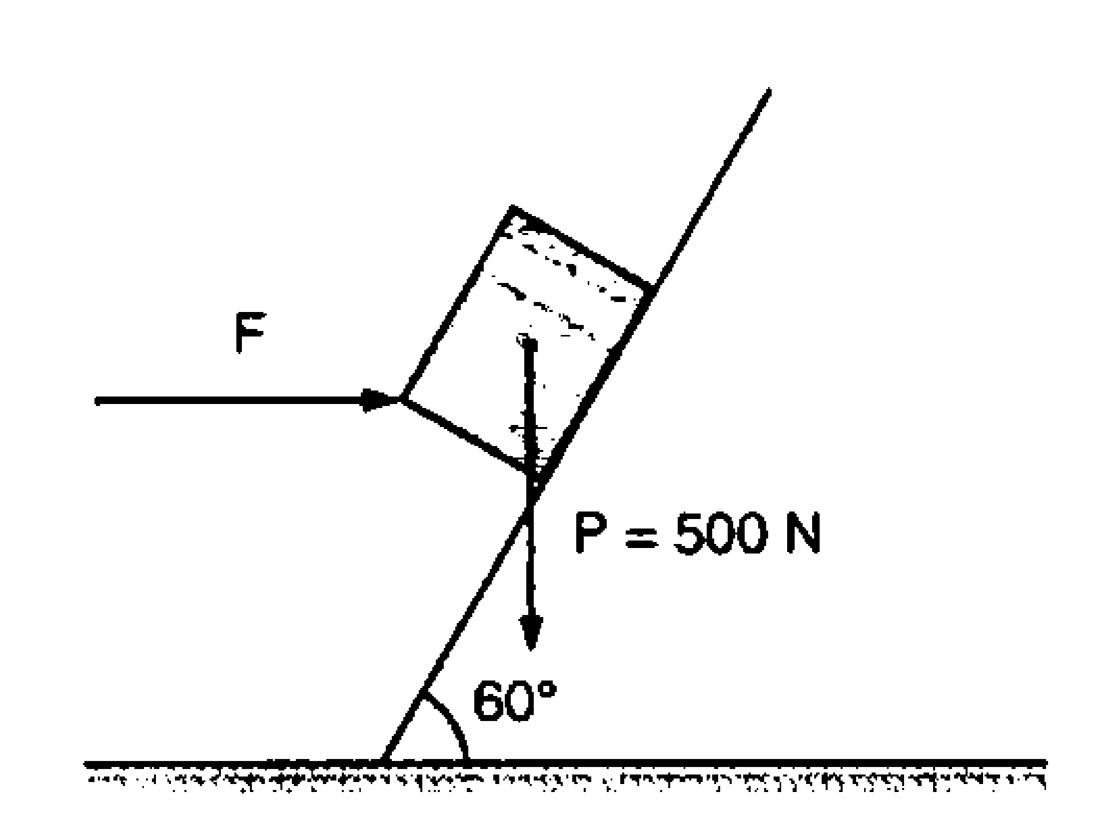
6. Un auto marcha a 60 km/h. Su masa es de 800 kg. Calcular la distancia que recorre hasta detenerse. Resistencia del aire equivalente a 800 N. Coeficiente de rozamiento: 0,5 ($g = 10\ m/s^2$).

Rpta.: 23,22 m

7. ¿Cuál será la aceleración de caída de un cuerpo a lo largo de un plano inclinado de 45° si su coeficiente de rozamiento es de 0,2? (considerar $g = 10\ m/s^2$).

Rpta.: $4\sqrt{2}\ m/s^2$

8. Calcular la fuerza horizontal necesaria para subir un bloque de 500 N de peso a



http://librosysolucionarios.net

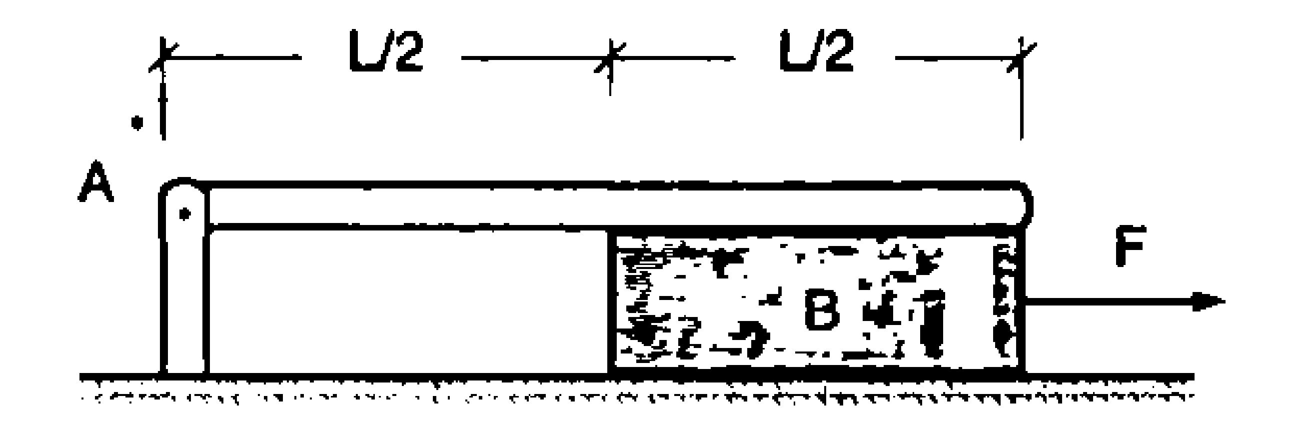
lo largo de un plano inclinado de 60° con velocidad uniforme; calcular también la fuerza necesaria para bajarlo con una aceleración de 20 m/s². El coeficiente de rozamiento es 0,4.

Rpta.: 3 470,36 N y 272,88 N

9. Sobre un plano inclinado de 60° está un cuerpo der 80 N de peso. Si el coeficiente de rozamiento es 0,5 , calcular :
a) La fuerza necesaria para subir.
b) La fuerza necesaria para que no baje.

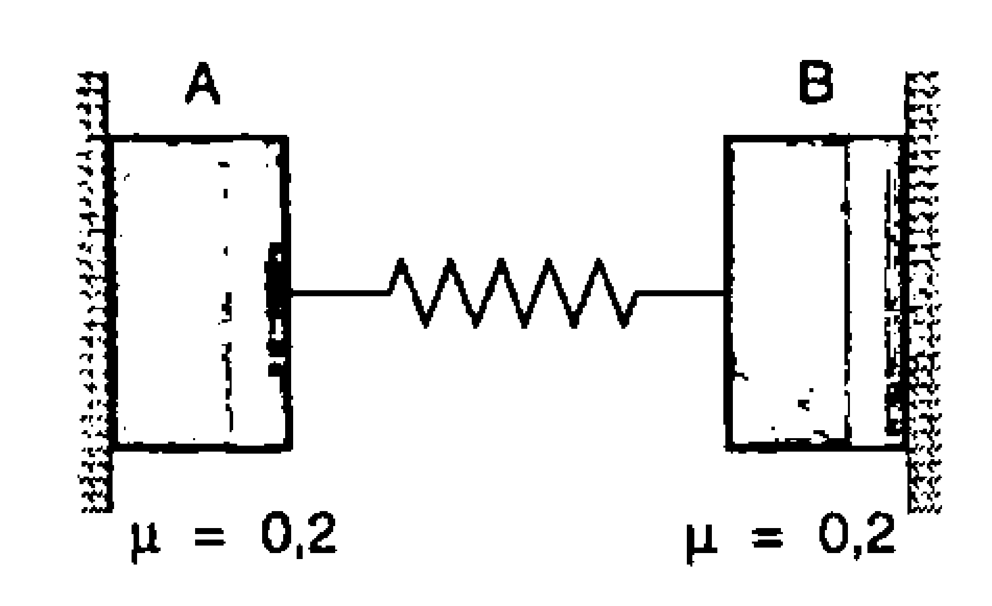
Rpta.: a) 89,28 N ; b) 43,28 N

10. La barra homogénea de peso "w" se apoya en la articulación "A" y en el bloque "B" que pesa w/2. ¿Qué fuerza horizontal, "F", debe aplicarse al bloque para que su movimiento sea inminente si los coeficientes de fricción entre la barra y el bloque y entre el bloque y el piso es μ?



Rpta.: $F = \frac{3}{2}\mu w$

11. Dos cuerpos están comprimidos por un resorte. ¿Cuál debe ser la mínima fuerza que ejerce el resorte sobre ellos para que no se muevan si están situados en un plano vertical?



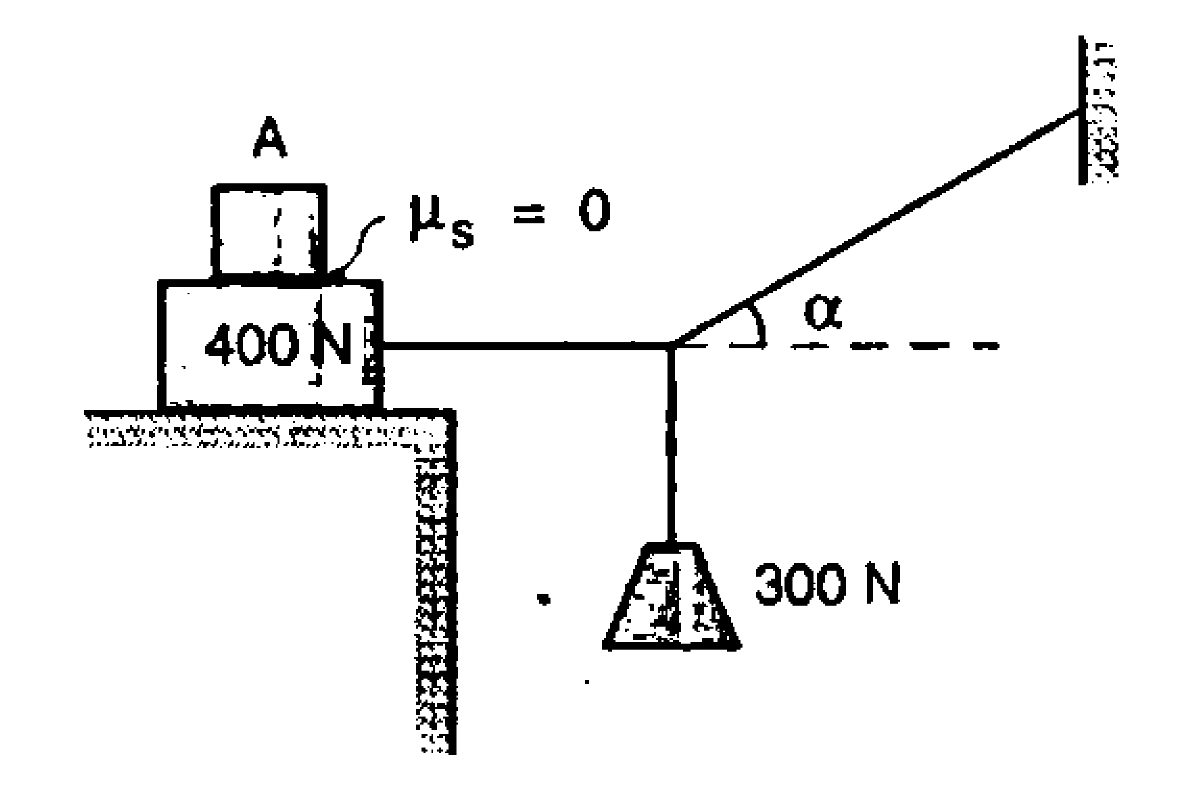
$W_A = 30\text{ N}$; $W_B = 40\text{ N}$

Rpta.: $F_{min} = 150\text{ N}$

12. Un cuerpo desciende por un plano inclinado rugoso de 45°; si el plano fuese liso, el tiempo que emplearía sería la mitad del que empleó actualmente, Calcular μ, si los cuerpos parten del reposo.

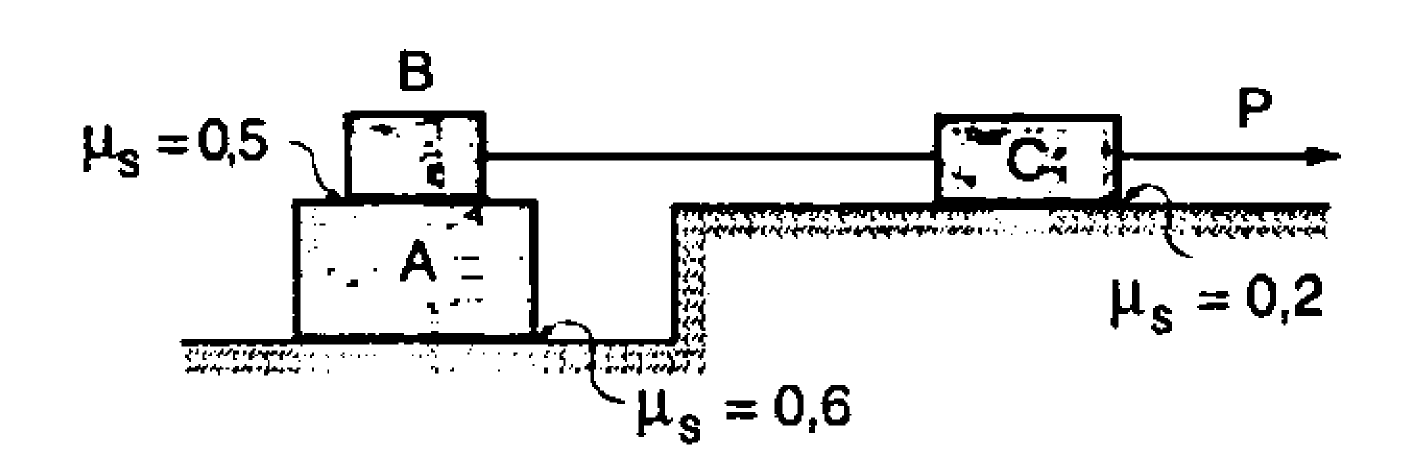
Rpta.: $\mu_k = \frac{3}{4}$

13. ¿Cuál debe ser el peso mínimo de A para que el sistema esté en equilibrio? $\text{tg}\,\alpha = 3$, $\mu_e = 0,2$.



Rpta.: A = 100 N

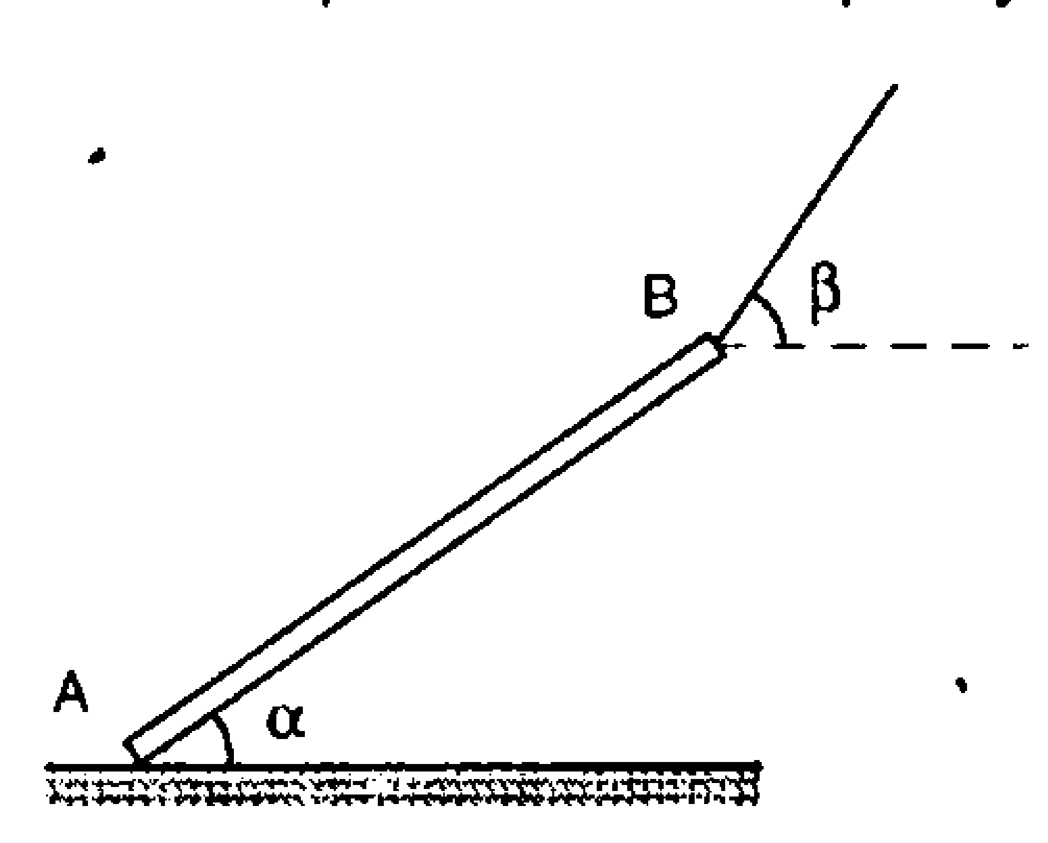
14. Hallar la mínima fuerza "P" para que se inicie el movimiento de C.



A = 700 N ; B = 300 N ; C = 500 N

Rpta.: $P_{min} = 250\text{ N}$

15. Una viga homogénea se apoya en el punto A en un piso horizontal áspero y



http://librosysolucionarios.net

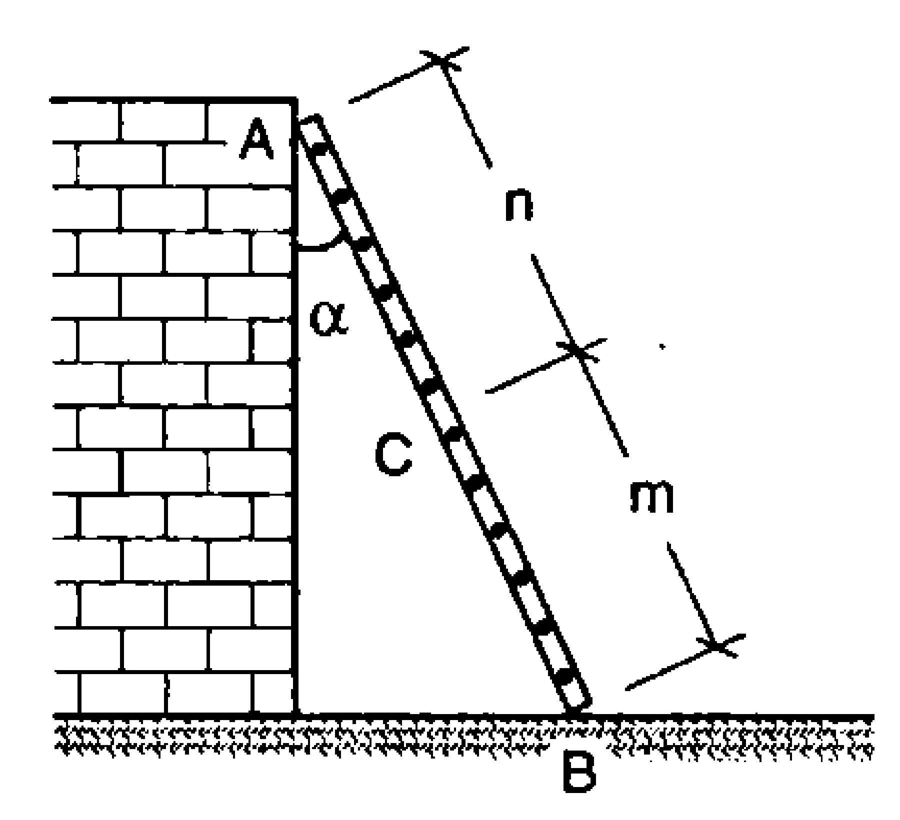
se sostiene en el punto B por una cuerda. El coeficiente de rozamiento de la viga con el piso es μ . El ángulo "α" formado por la viga con el piso equivale a 45°. ¿Para qué ángulo de inclinación β, de la cuerda hacia el horizonte, la viga empezará a deslizarse?

Rpta.: $\operatorname{tg}\beta = 2 + \dfrac{1}{\mu}$

16. Un cuerpo K está en reposo sobre un plano inclinado rugoso. El ángulo de inclinación del plano con la horizontal es α y $\mu_s > \operatorname{tg}\alpha$, donde: μ_s es el coeficiente de rozamiento estático. En un instante determinado se comunica al cuerpo una velocidad inicial V_0 dirigida a lo largo del plano hacia abajo. Determinar el camino "S" recorrido por el cuerpo hasta su parada, si el coeficiente de rozamiento durante el movimiento es μ_k.

Rpta.: $S = \dfrac{V_0^2}{2g(\mu_k \cos\alpha - \operatorname{sen}\alpha)}$

17. La escalera A está apoyada contra un muro vertical, su extremo inferior está puesto sobre el piso horizontal. El coficiente de rozamiento de la escalera con el muro es m_{S1}, con el piso es m_{S2}. El peso de la escalera con el hombre que se halla en ésta es "p"



y está aplicado en el punto C que divide la escalera en la relación m : n. Determinar el mayor ángulo "α" que forma la escalera con el muro en la posición del equilibrio, así como la componente normal de la reación N_A del muro para este valor α.

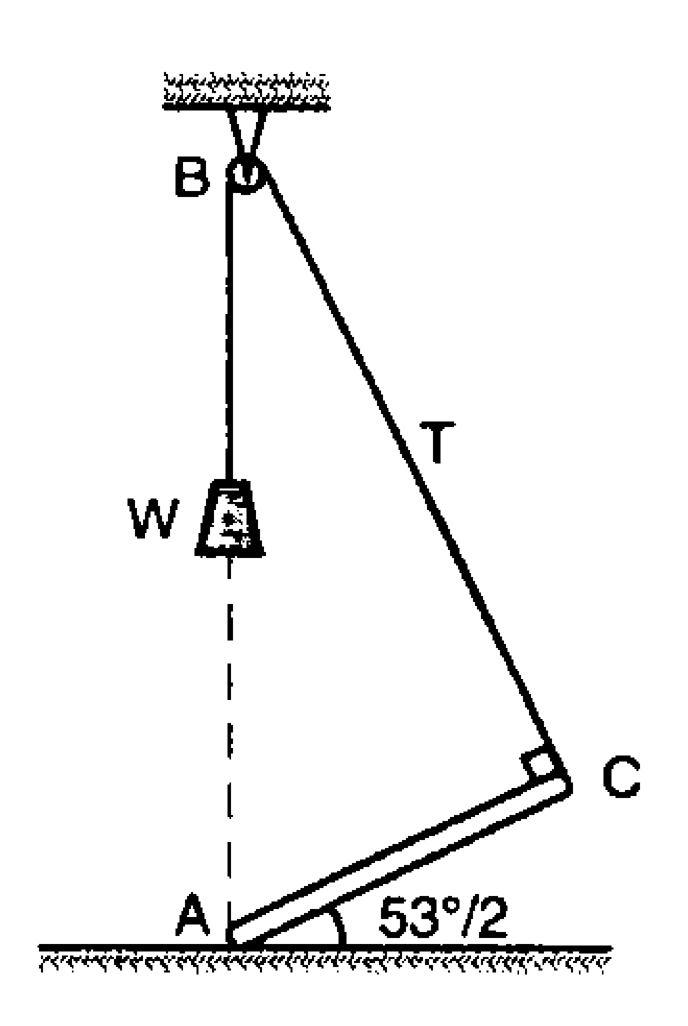
Rpta.: $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{(m + n)\mu_{S2}}{m - n\mu_{S1}\mu_{S2}}$

$$N_A = \frac{p\,\mu_{S2}}{1 + \mu_{S1}\mu_{S2}}$$

18. El sistema mostrado en la figura se encuentra en reposo y está conformado por una carga W y la barra homogénea AC de 5 N de peso, la cual está apoyada en una superficie horizontal áspera. Se pide calcular:

a) El módulo de la reacción de la superficie de apoyo sobre dicha barra para el equilibrio del sistema.
b) Hallar también la tensión de la cuerda.

considerar : $\operatorname{tg}\dfrac{53°}{2} = \dfrac{1}{2}$



Rpta.: a) $R = \sqrt{10}$ N

b) $T = \sqrt{5}$ N

DINÁMICA DE LA ROTACIÓN

PRINCIPIO DE INERCIA PARA LAS ROTACIONES

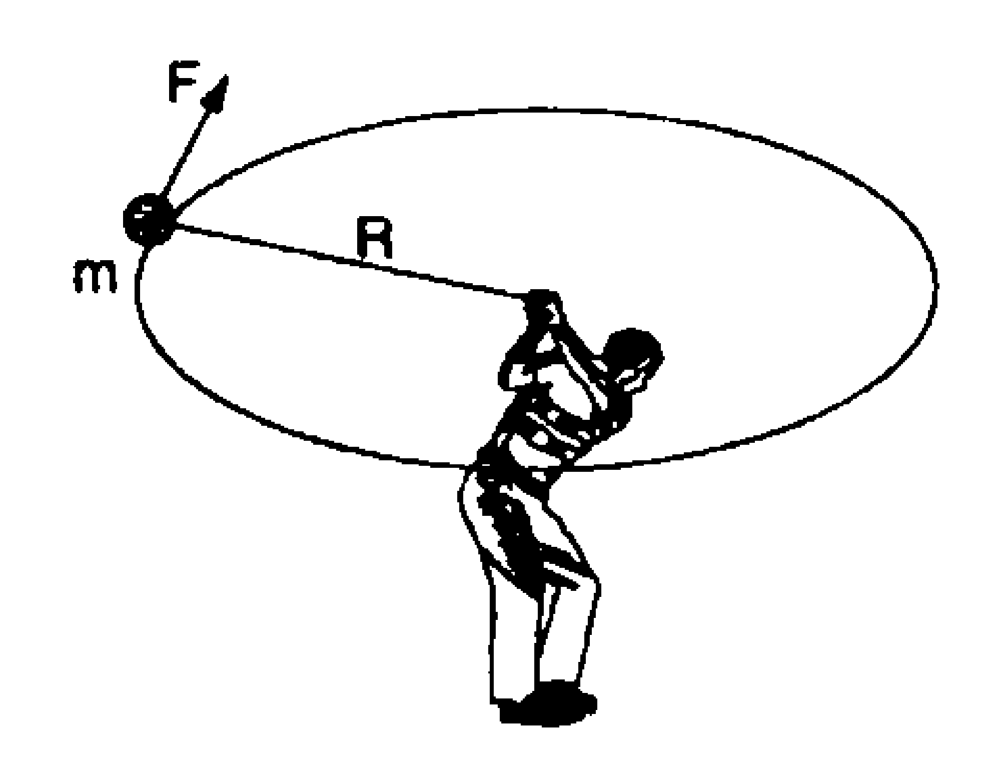
Todo cuerpo que permanece en reposo y todo cuerpo que permanece en movimiento circunferencial uniforme, seguirá con este movimiento, salvo que sobre él actúen cuplas exteriores que le obliguen a modificar esos estados.

http://librosysolucionarios.net

MOMENTO DINÁMICO DE ROTACIÓN "M"

Es la tendencia a la rotación o al giro de una masa "m", alrededor de un punto. Su valor se calcula así:

$$a = \frac{F}{m} \quad \therefore \quad F = m \cdot a$$



por R: $F \cdot R = m \cdot a \cdot R$

donde: $F \cdot R = M$ y $a = \alpha \cdot R$

$$\therefore \quad M = m \cdot \alpha \cdot R \cdot R$$

$$\boxed{M = m \alpha R^2} \qquad (I)$$

M : Momento, en "N . m"
m : Masa, en "kg"
a : Aceleración angular, en "rad/s²"
R : Radio de giro, en metro "m"

MOMENTO DE INERCIA "I"

Como lo que ofrece resistencia a la rotación es la magnitud de la masa y la longitud de la cuerda o radio de giro, el producto m R^2 se llama INERCIA o MOMENTO DE INERCIA.

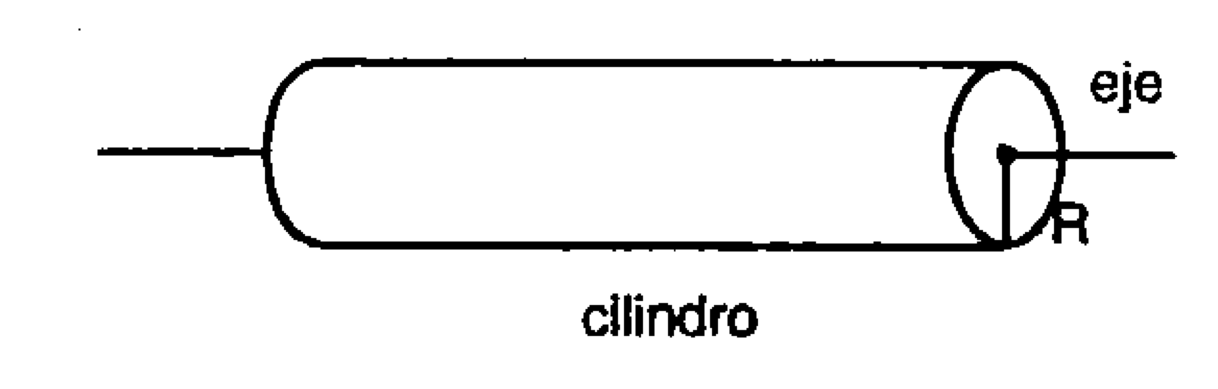
$$\boxed{I = m \cdot R^2} \qquad (II)$$

Comparando (I) con (II) se concluye que :

$$\boxed{M = \alpha \cdot I} \qquad (III)$$

MOMENTOS DE INERCIA DE ALGUNOS SÓLIDOS

Alrededor del eje:

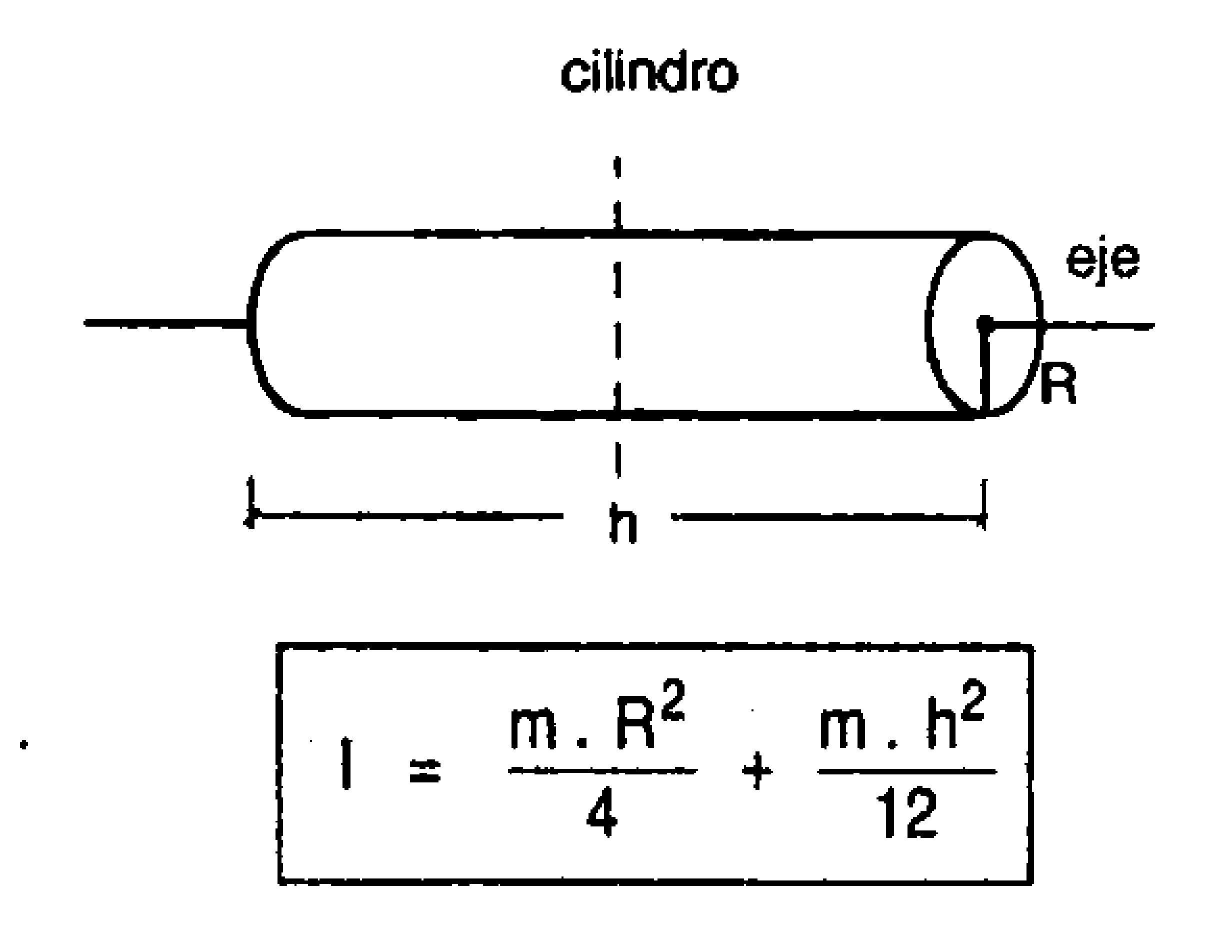


cilindro

$$\boxed{I = \frac{m \cdot R^2}{2}}$$

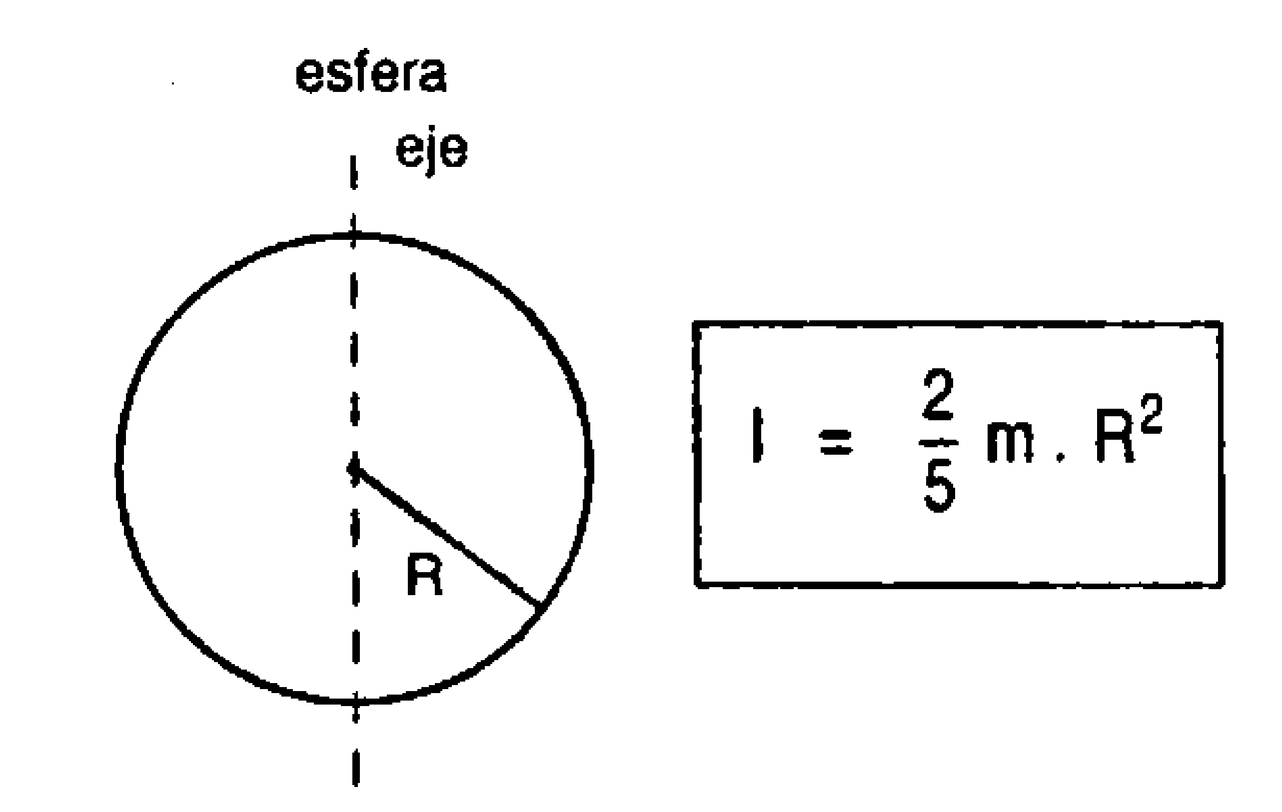
Alrededor de un diámetro central:

cilindro



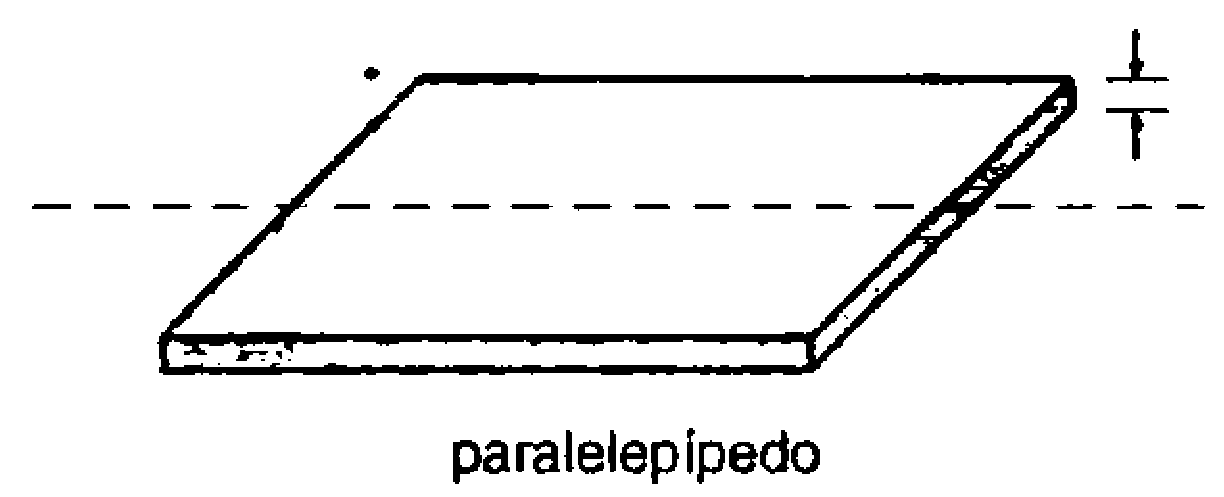
$$\boxed{I = \frac{m \cdot R^2}{4} + \frac{m \cdot h^2}{12}}$$

Alrededor de cualquier diámetro:



$$\boxed{I = \frac{2}{5} m \cdot R^2}$$

Alrededor de un eje central:

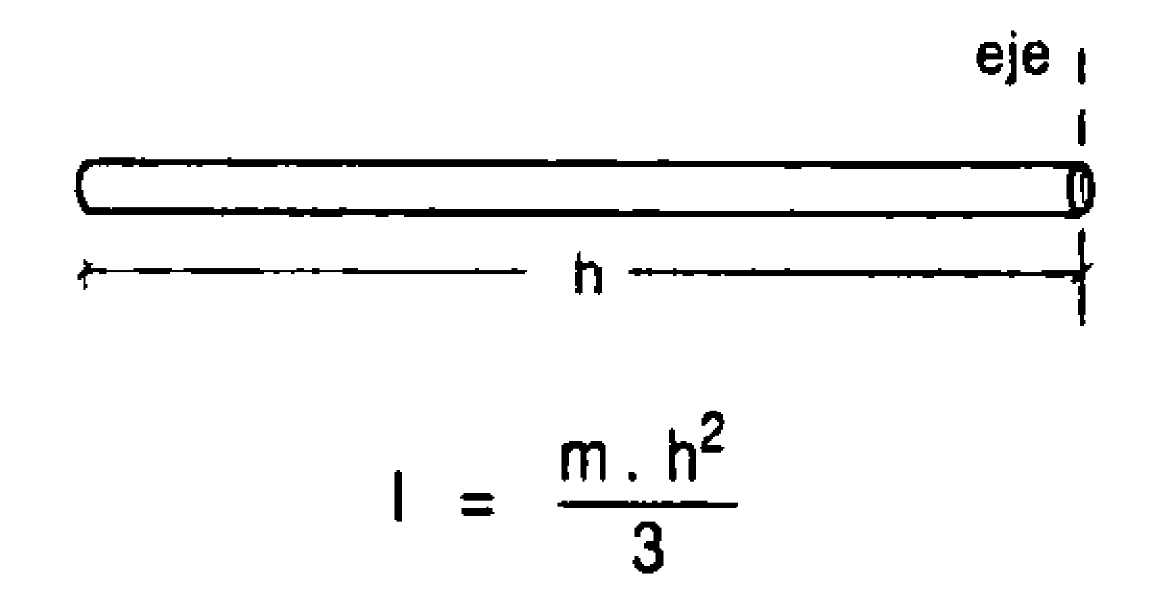


paralelepípedo

$$\boxed{I = m\left(\frac{a^2 + b^2}{12}\right)}$$

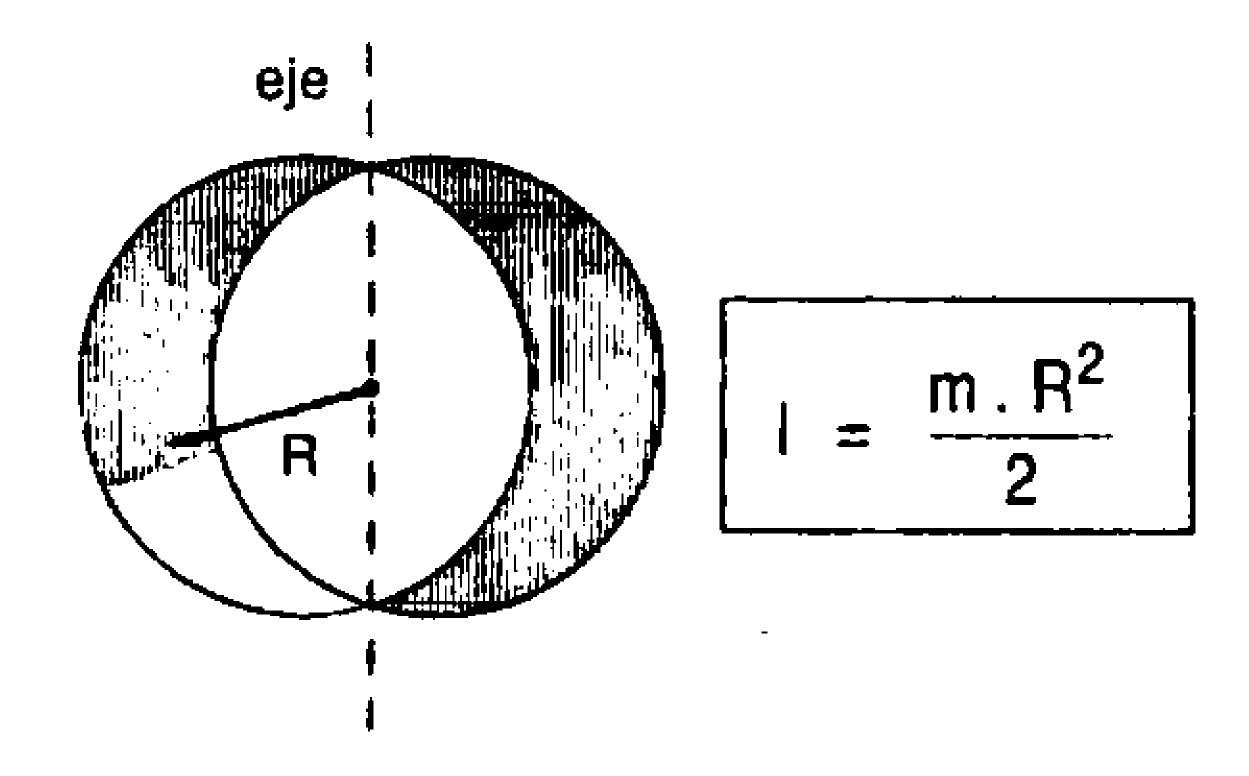
Alrededor de un eje en el extremo perpendicular a h de una barra:

http://librosysolucionarios.net



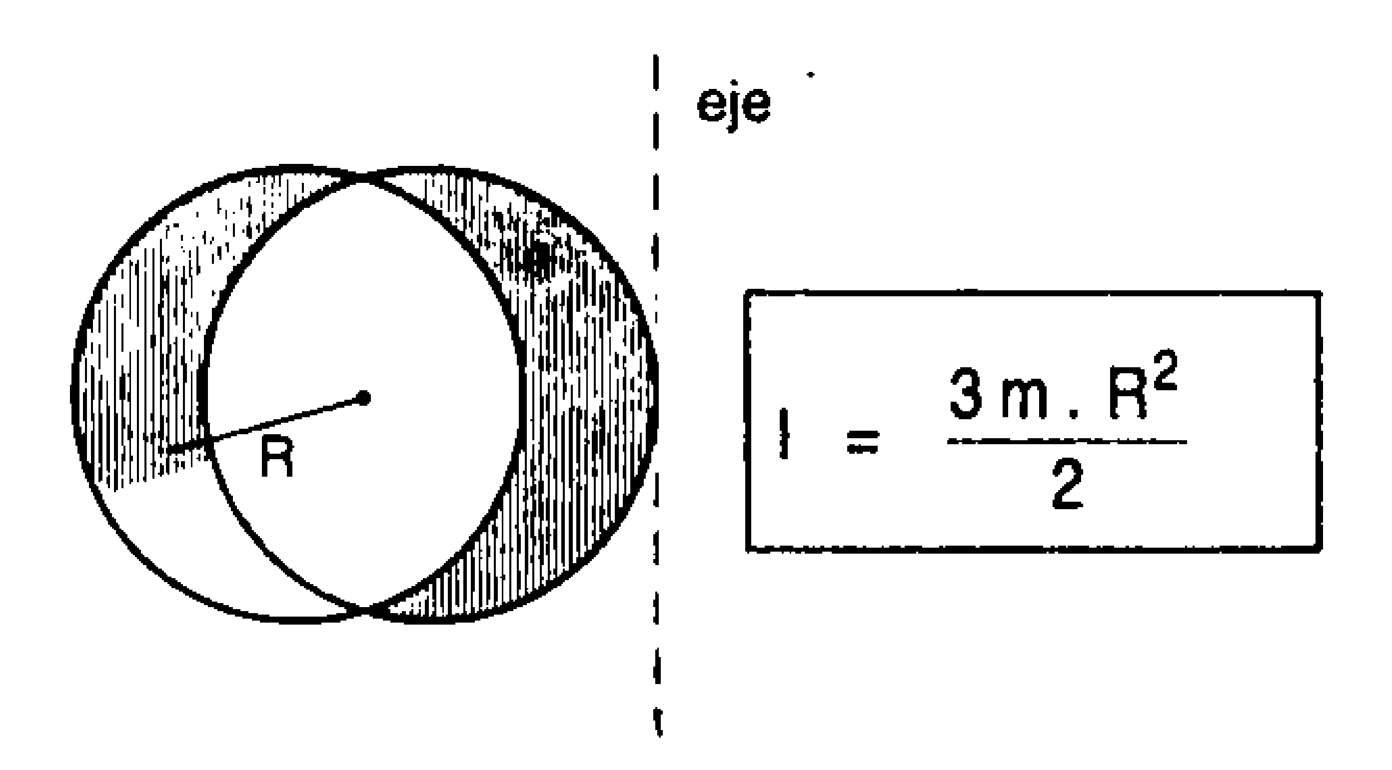
$$I = \frac{m \cdot h^2}{3}$$

1. Alrededor de un diámetro de un aro:



$$I = \frac{m \cdot R^2}{2}$$

2. Alrededor de una tangente de un aro:



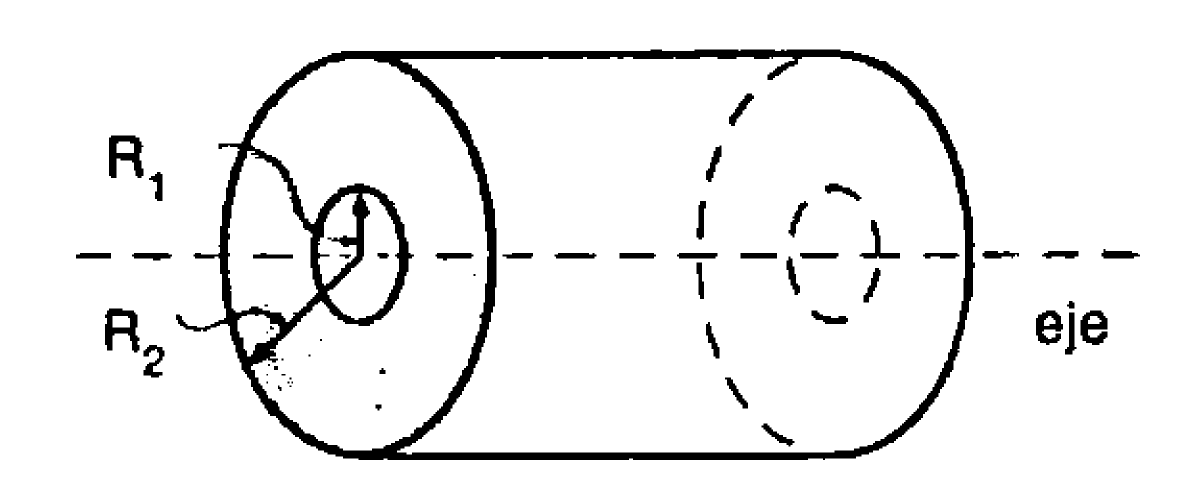
$$I = \frac{3\,m \cdot R^2}{2}$$

3) Alrededor del eje del aro:

$$I = m \cdot R^2$$

Alrededor del eje de un cilindro anular o anillo.

$$I = \frac{M}{2}\left(R_1^2 + R_2^2\right)$$



TEOREMA DE LOS EJES PARALELOS O TEOREMA DE STEINER

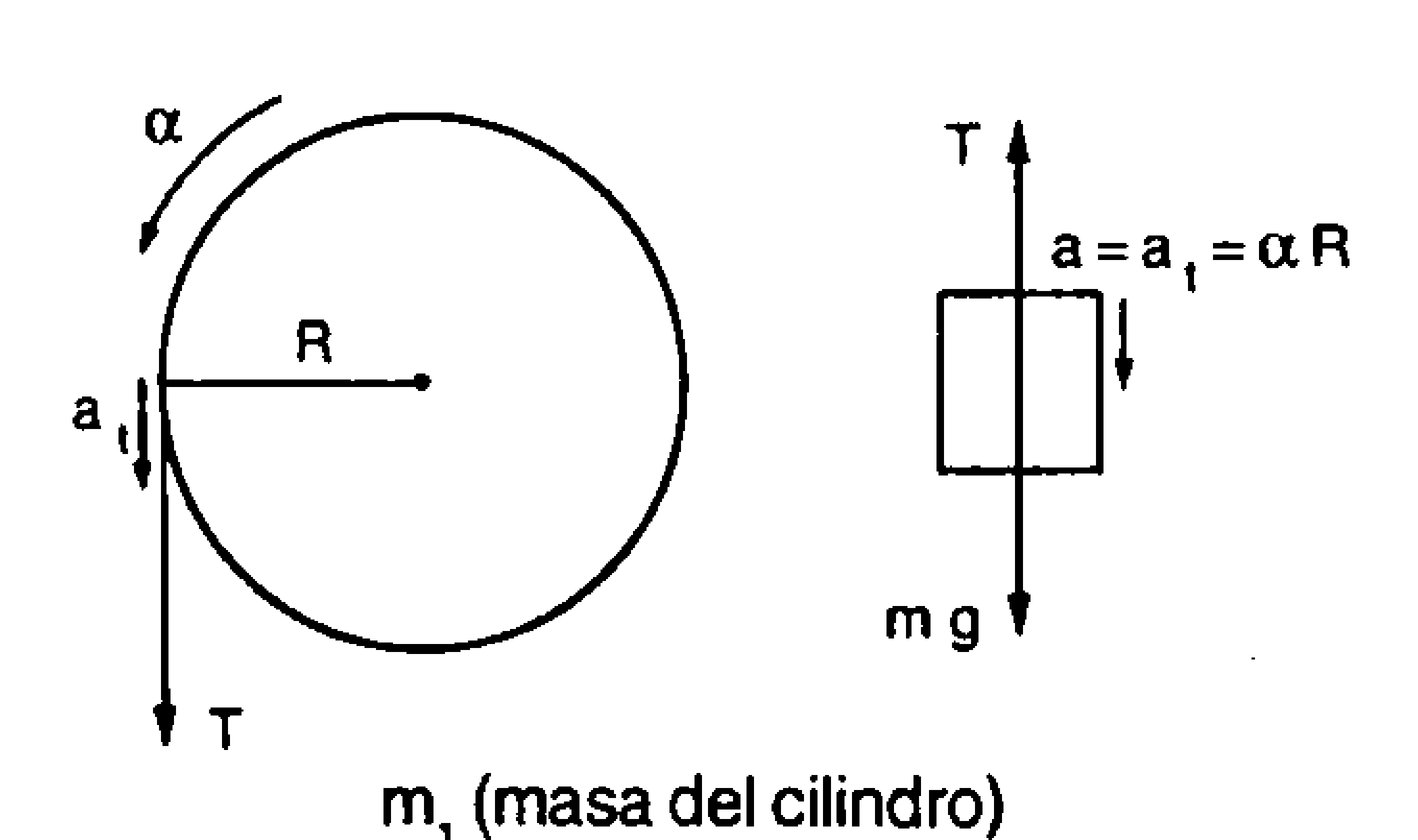
Cuando un sólido rota alrededor de un eje paralelo al eje que pasa por el centro de gravedad (C.G.), el momento de inercia " I_A" con respecto a aquel eje, se calcula con la fórmula de Steiner.

$$I_A = I_G + m \cdot R^2$$

I_A : Momento de inercia con respecto al centro de gravedad.
m : Masa del sólido.
R : Distancia entre los ejes.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un cilindro de 50 cm de radio tiene enrollado una cuerda de cuya punta pende un peso de 80 N; si el cilindro tiene una masa de 200 kg, calcular la aceleración angular del cilindro. (g = 10 m/s²).



m_1 (masa del cilindro)

De la figura: $M = T \cdot R$ (1)

$$T = (m \cdot g - m \cdot a) \quad (2)$$

$$M = I\alpha \quad (3)$$

(2) y (3) en (1):

$$I\alpha = (m.g - m.\alpha.R)\,R$$

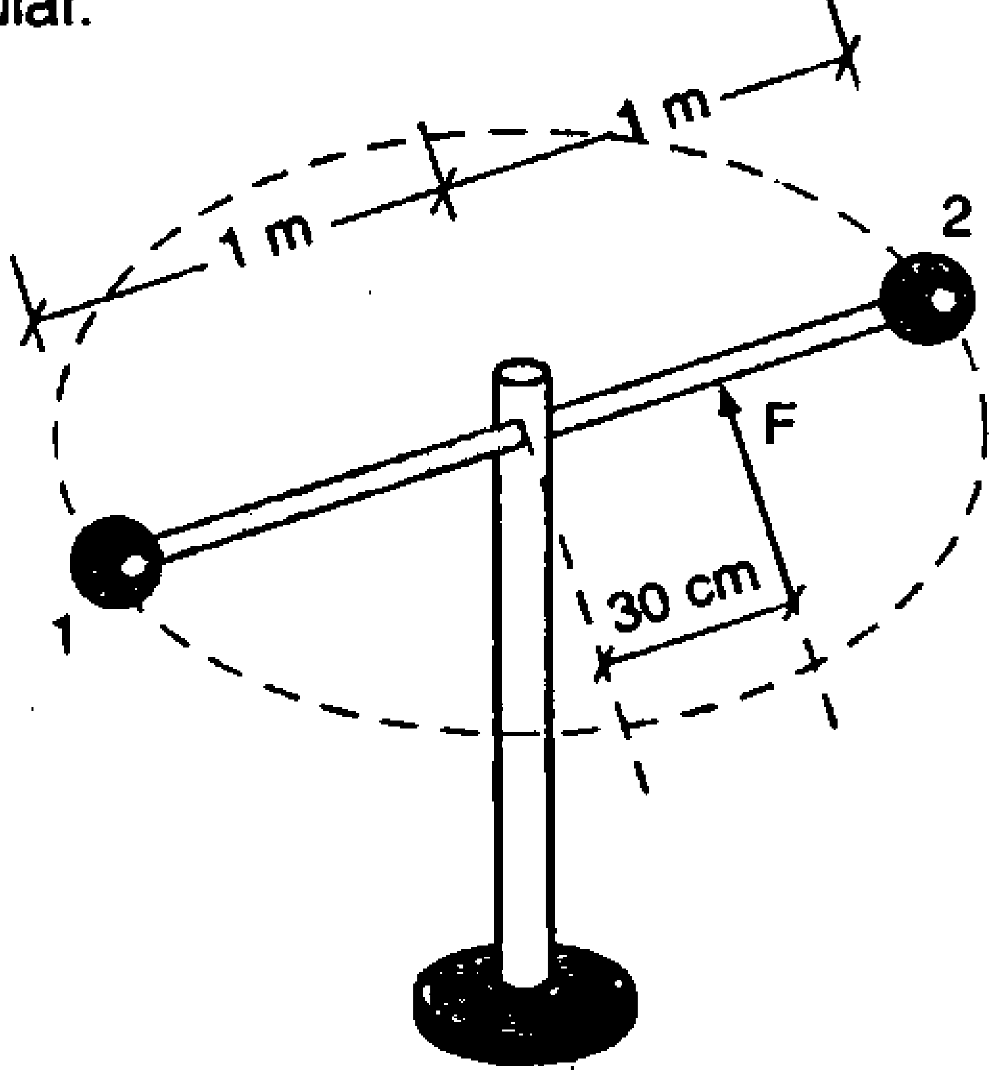
$$\frac{1}{2} m_1 R^2 \alpha = m\,(g - \alpha R)\,R$$

$$\alpha = \frac{2\,m.g}{(2\,m + m_1)\,R}$$

$$\alpha = \frac{2\,(80\text{ N})}{\left(2 \times \frac{80}{10} + 200\right)\text{kg} \cdot 0{,}50\text{ m}}$$

$$\alpha = 1{,}48\left(\frac{1}{s^2}\right) = 1{,}48\ \frac{rad}{s^2}$$

PROBLEMA 2. Dos esferas de 80 g cada una, están colocadas en los extremos de una varilla de 2 m de longitud, de masa despreciable y gira alrededor de su punto medio en un plano horizontal. A 30 cm del eje de rotación se aplica sobre la varilla, en un plano que contiene a la varilla, perpendicular a ésta y en el mismo plano de giro, una fuerza de 4 N. Calculár la aceleración angular.



RESOLUCIÓN :

Sabiendo que:

$M = \alpha . I$; de donde: $\alpha = \dfrac{M}{I}$ (a)

Cálculo de M:

$M = F \times r = 4\ N \times 0{,}3\ m = 1{,}2\ N\,m$ (1)

Cálculo de I: $I = I_1 + I_2$

pero: $I_1 = I_2 \quad \therefore \quad I = 2\,I_1$

Además: $I_1 = m.R^2$, luego:

$$I = 2\,m\,R^2 = 2 \,.\, 0{,}08\ kg \,.\, 1\ m^2$$

$$I = 0{,}16\ kg \,.\, m^2\ ;$$

Sustituyendo (1) y (2) en (a):

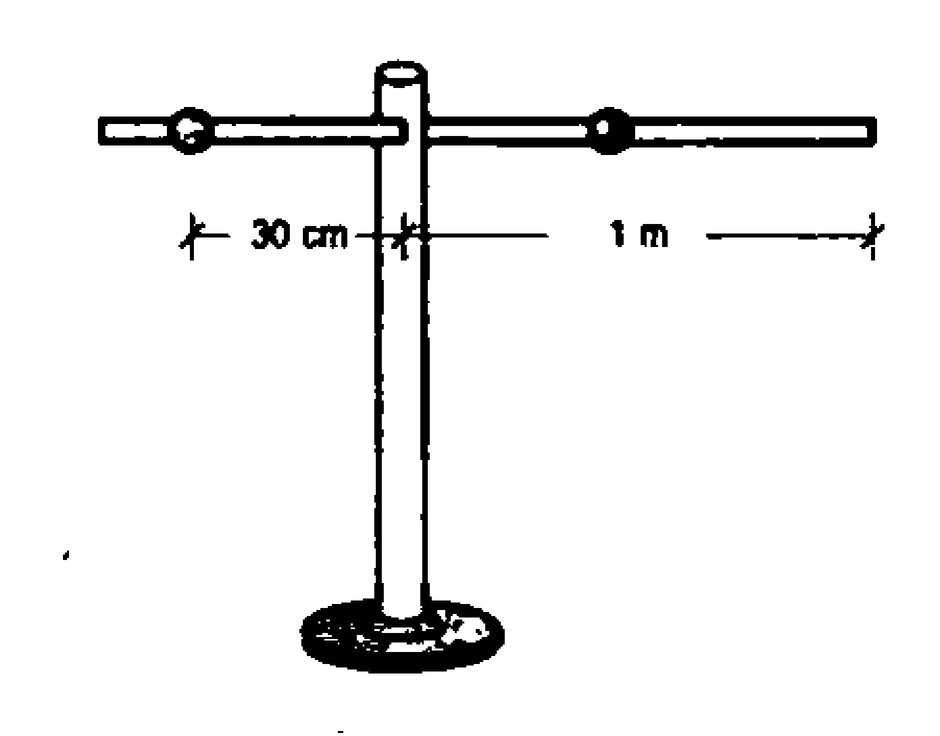
$$\alpha = \frac{1{,}2\ N\,m}{0{,}16\ kg\ m^2}$$

$$\alpha = 7{,}5\ \frac{rad}{s^2}$$

PROBLEMA 3. ¿Cuál será la aceleración angular, si las mismas esferas, del problema anterior, se acercan y se ponen a 30 cm del eje de giro y la fuerza se aplica a 1 m del eje. Datos:

$m = 2 \times 80\ g \qquad d = 1\ m$

$F = 4\ N \qquad R = 30\ cm$



RESOLUCIÓN: $\alpha = \dfrac{M}{I}$ (a)

$$M = F \times r = 4\ N \times 1{,}0\ m$$

$$M = 4\ N\,m \qquad (1)$$

$$I = I_1 + I_2 = 2\,I_1 = 2 \times m\,R^2$$

$$I = 2 \times 0{,}08\ kg \times (0{,}30\ m)^2$$

$$I = 0{,}014\,4\ \frac{N}{m/s^2} \times m^2$$

$$I = 144 \times 10^{-4}\ N \times m \times s^2 \qquad (2)$$

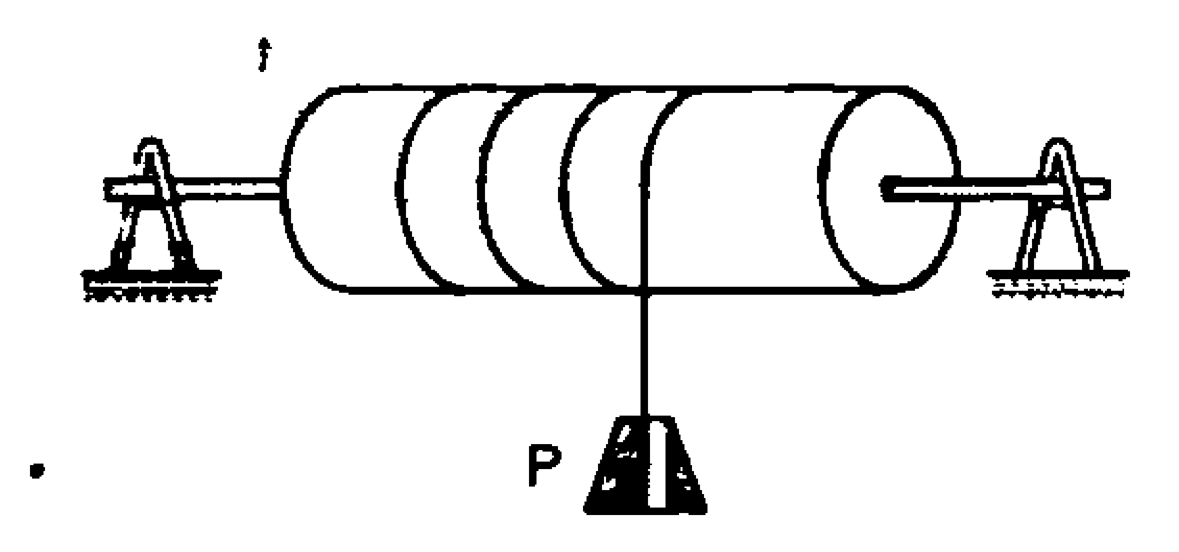
Sustituyendo (1) y (2) en (a):

$$\alpha = \frac{4\ N \times m}{144 \times 10^{-4}\ N \times m \times s^2}$$

Rpta.: $\alpha = 277{,}7\ \dfrac{rad}{s^2}$

PROBLEMA 4. Calcular la velocidad de caída, cuando se suelta un peso de 400 N que está amarrado en la punta de la cuerda enrollada a un cilindro de 100 kg de masa, y de 25 cm de radio, en el tiempo de 2 s. ($g = 10\ m/s^2$)

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN : $V = a_t . t$

a_t : aceleración tangencial

$$V = \alpha R . t \qquad (1)$$

Del problema 1:

$$\alpha = \frac{2m.g}{R(m_1 + 2m)} \qquad (2)$$

Sustituyendo (2) en (1):

$$V = \left(\frac{2m.g}{m_1 + 2m}\right)t$$

Reemplazando valores:

$$V = \frac{2(400\,N)}{\left(2 \times \frac{400}{10} + 100\right)kg} \times 2\,s$$

Rpta.: $V = 8{,}9\ m/s$

PROBLEMA 5. Del problema anterior ¿cuánto tardará el peso en desarrollar 20 m de cuerda?

RESOLUCIÓN : Del problema 1:

$$\alpha = \frac{2m.g}{R(m_1 + 2m)}$$

Sustituyendo datos:

$$\alpha = 4{,}4\ rad/s^2$$

Además: $t = \sqrt{\frac{2h}{a}} = \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}}$

Sustituyendo datos: $t = \sqrt{\frac{2 \times 20}{4{,}4 \times 0{,}25}}\ s$

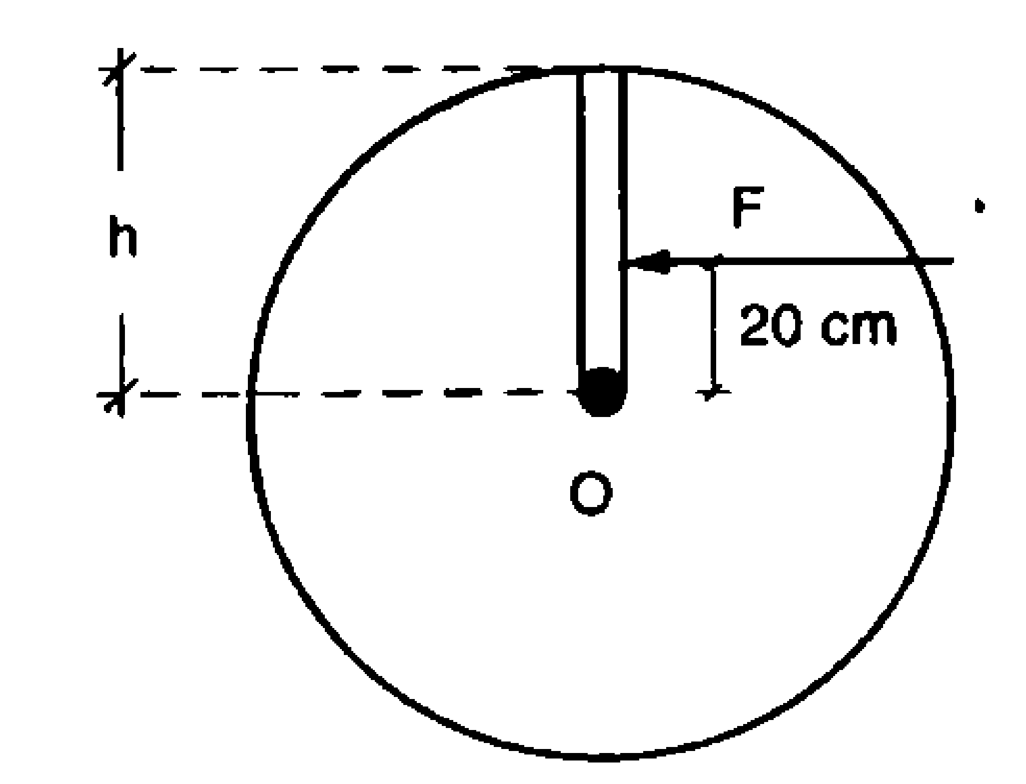
Rpta.: $t = 6\ s$

PROBLEMA 6. Una barra de 20 kg de masa y 1 m de longitud gira alrededor de uno de sus extremos, al aplicarle una fuerza de 8 N a una distancia de 20 cm del eje de giro. Calcular la aceleración angular.

$m = 20\ kg$; $R = 20\ cm$

$h = 1\ m$

$F = 8\ N$ $\qquad \alpha = ?$



RESOLUCIÓN : Se sabe: $M = \alpha I$

de donde: $\alpha = \frac{M}{I}$ (a)

Donde: $M = F . R$ y:

$I = \frac{m.h^2}{3}$; en (a):

$$\alpha = \frac{3F.R}{m.h^2}$$

$$\alpha = \frac{3 \times 8\,N \times 0{,}2\,m}{20\,kg \times (1\,m)^2}$$

Sustituyendo el equivalente de kg:

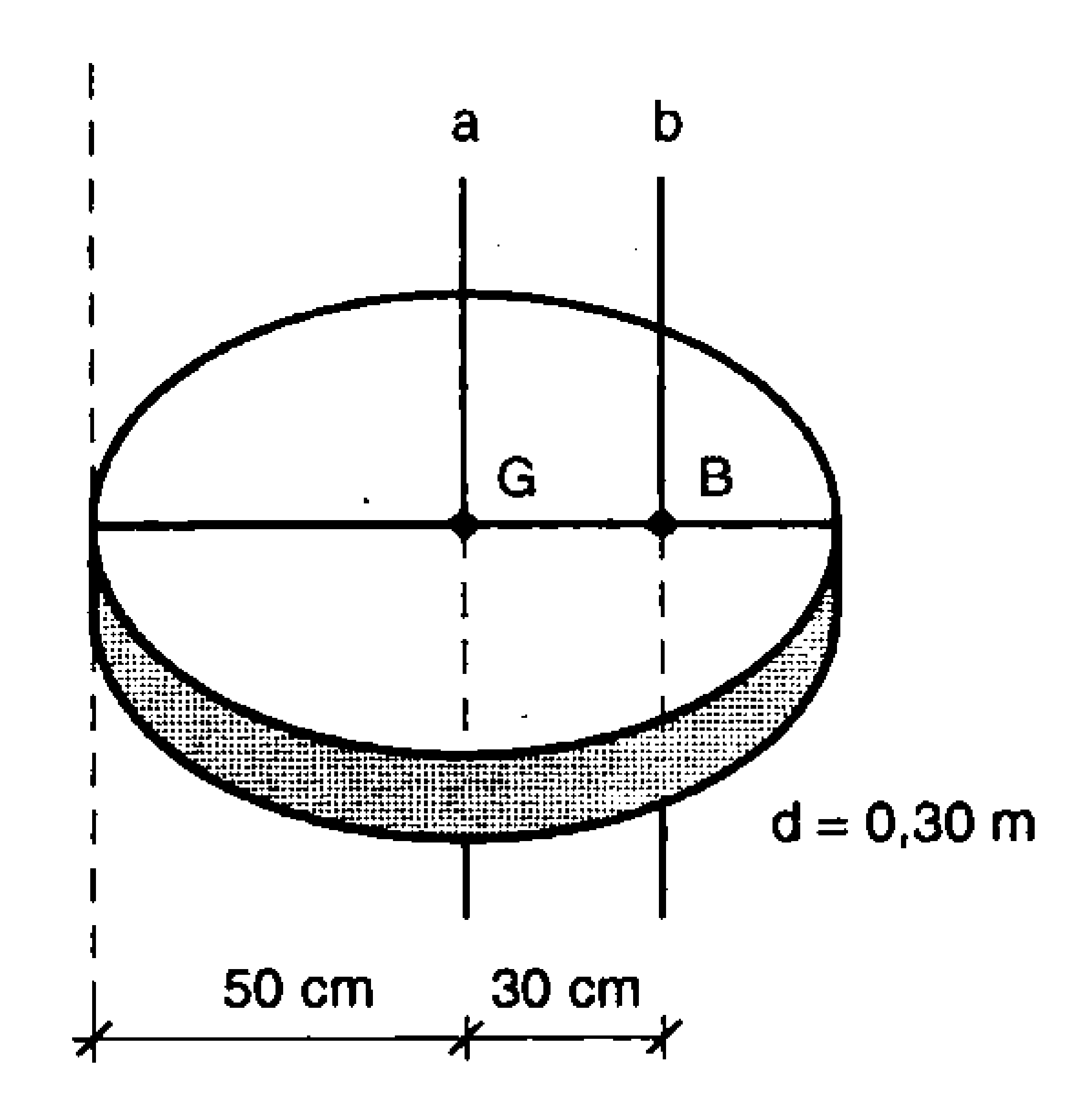
$$\alpha = \frac{0{,}6 \times 8\,N \times m}{20 \times \frac{N}{m/s^2} \times 1\,m^2}$$

Rpta.: $\alpha = 0{,}24\ rad/s^2$

PROBLEMA 7. Un disco metálico tiene una masa de 8 kg y 1 m de diámetro, calcular el momento de inercia con respecto a un eje que pasa perpendicular:

a) Por el centro del disco.
b) A 30 cm del centro.

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN :

a) El disco gira alrededor de "G" que es el centro del disco.

$$I_G = \frac{1}{2} m . R^2$$

$$I_G = \frac{1}{2} \cdot 8 \text{ kg} \cdot (0,5 \text{ m})^2$$

$$I_G = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

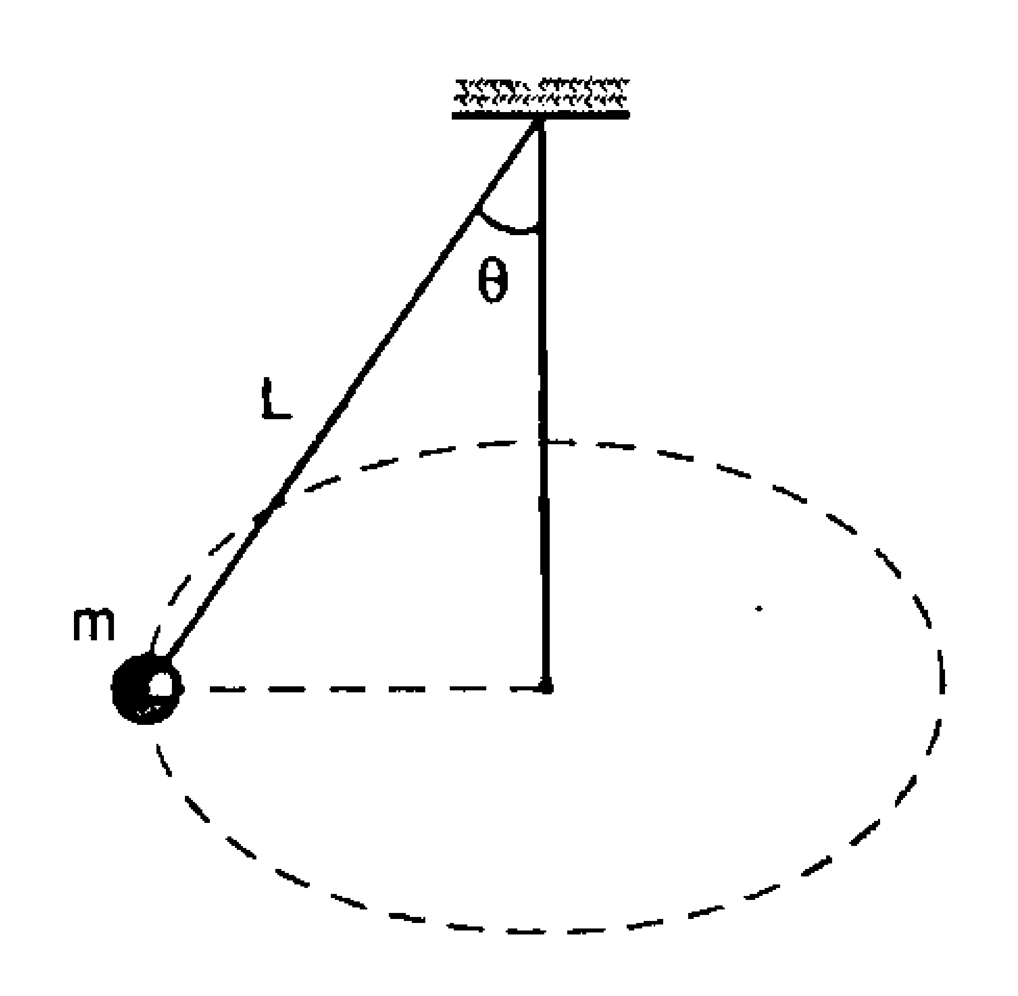
b) Cuando gira alrededor de **"B"** : (Steiner)

$$I_B = I_G + m\,d^2$$

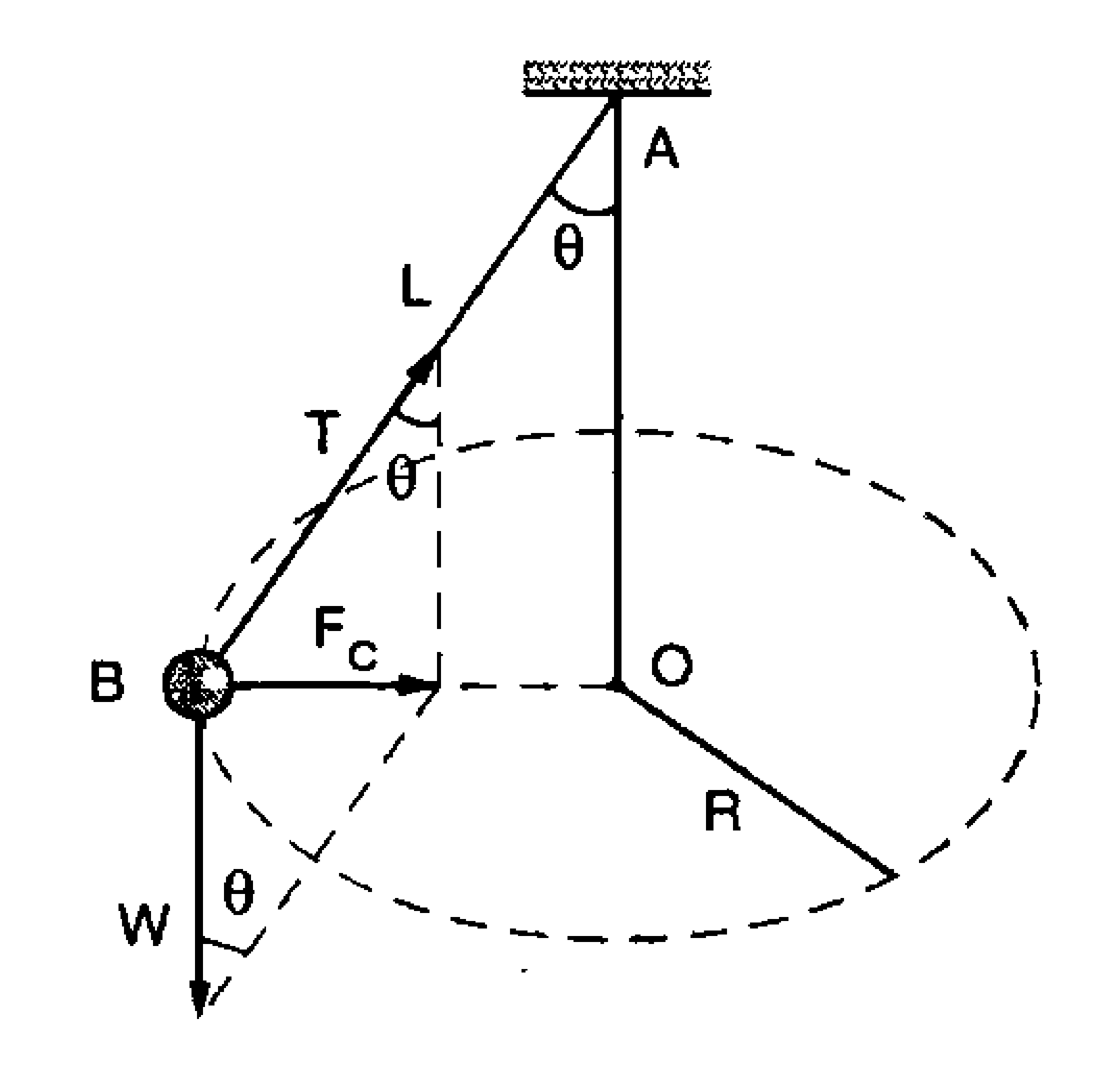
$$I_B = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 + 8 \text{ kg} \cdot (0,3 \text{ m})^2$$

Rpta.: $I_B = 1,72 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$

PROBLEMA 8. La figura representa un pequeño cuerpo de masa "m" , sujeto al extremo de una cuerda de longitud "L", describe, con velocidad constante "v", una circunferencia horizontal. Cuando el cuerpo describe su trayectoria la cuerda describe la superficie de un cono, formando un ángulo "θ" con la vertical. Calcular el período "T" de revolución en función del ángulo "θ", la longitud "L" y la gravedad "g".



RESOLUCIÓN : Aislando el paralelogramo de fuerzas que incluye F_C , W , θ y T.

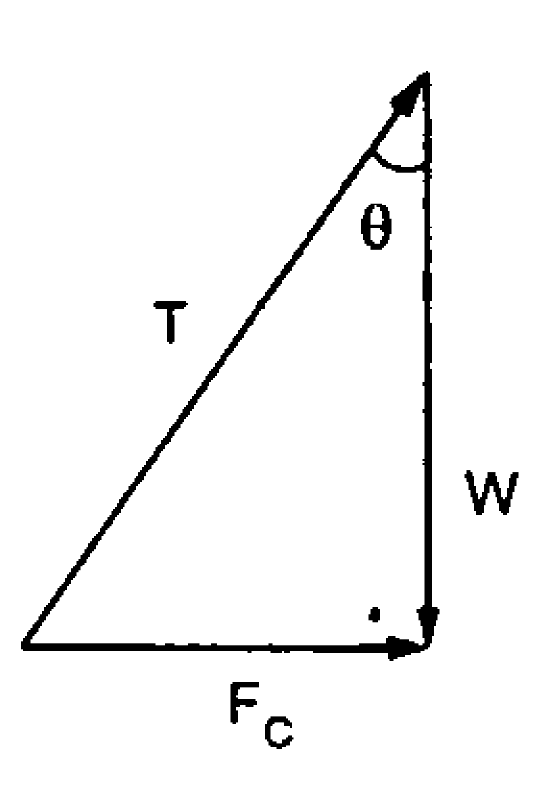


Siendo: F_c = fuerza centrípeta

$$F_C = W . \text{tg}\,\theta \qquad (I)$$

Pero se sabe que:

$$F_C = m . a_C = m . \omega^2 R \qquad (a)$$



Por otro lado: $W = m . g$ (b)

Sustituyendo (a) y (b) en (I) :

$$m . \omega^2 R = m . g . \text{tg}\,\theta$$

De donde: $\omega^2 R = g . \text{tg}\,\theta$ (II)

http://librosysolucionarios.net

Pero en el triángulo AOB de la figura:

$$R = L \operatorname{sen}\theta$$

Reemplazando en (II) y simplificando:

$$\omega^2 L \operatorname{sen}\theta = g\,\frac{\operatorname{sen}\theta}{\cos\theta}$$

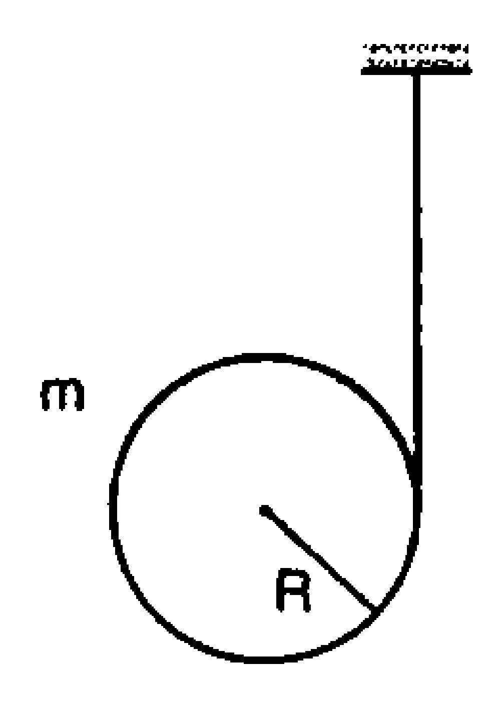
$$\therefore \qquad \omega = \sqrt{\frac{g}{L\cos\theta}} \qquad (1)$$

Por otro lado: $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ (2)

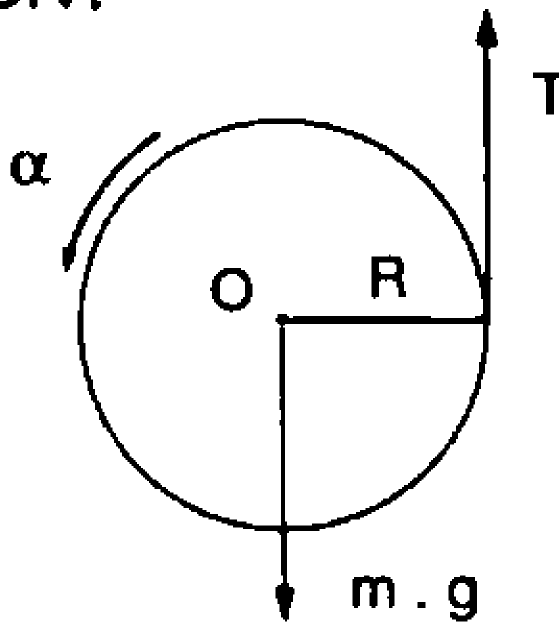
(1) = (2): $\dfrac{2\pi}{T} = \sqrt{\dfrac{g}{L\cos\theta}}$

Rpta.: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{L\cos\theta}{g}}$

PROBLEMA 9. Un disco de radio R y masa "m" se desenrrolla de una cuerda liviana de masa despreciable, tal como se muestra en la figura. Si el disco se desplaza verticalmente, calcular la aceleración del disco.



RESOLUCIÓN :



$$\Sigma F = m.a$$

$$m.g - T = m.a$$

$$T = m(g - a) \qquad (1)$$

Además: $M = \alpha.I$

ó : $T \cdot R = \dfrac{a}{R} \cdot \dfrac{1}{2} m \cdot R^2$

$$T = \frac{1}{2} m.a \qquad (2)$$

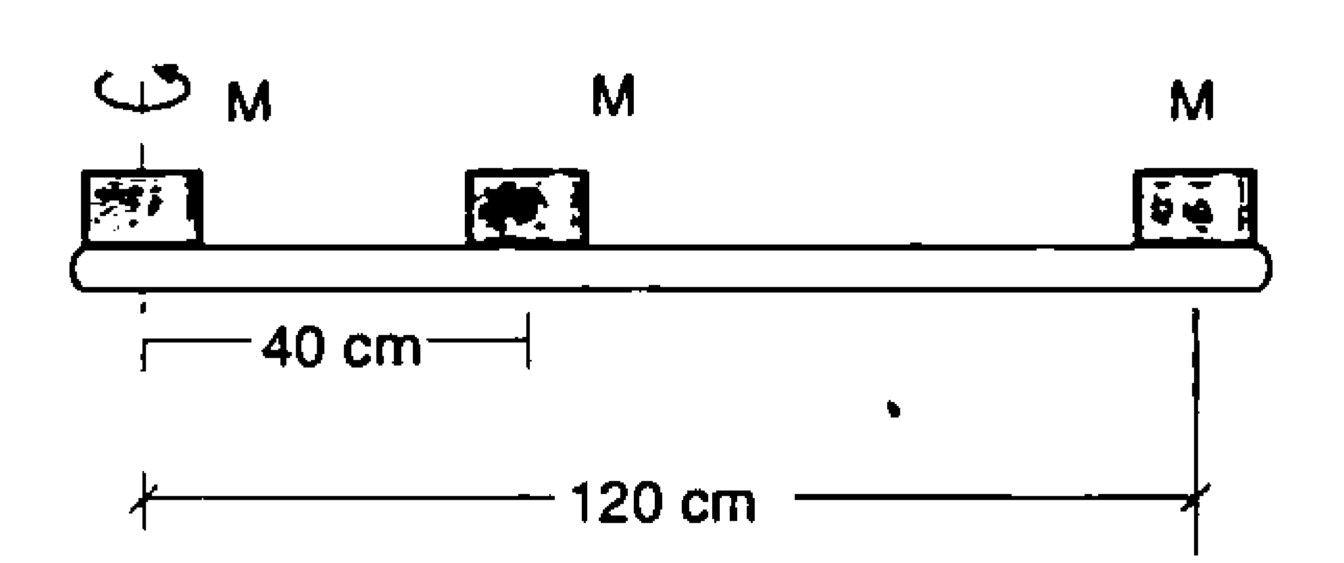
(1) = (2): $m(g - a) = \dfrac{1}{2} m.a$

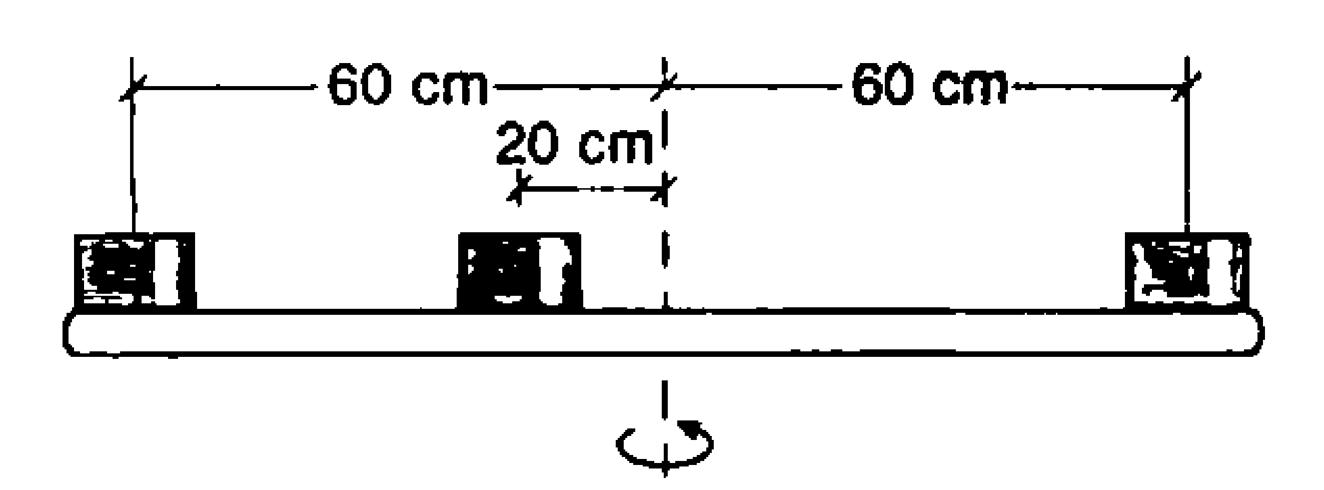
De donde, despejando a:

Rpta.: $a = \dfrac{2}{3} g$

PROBLEMA 10. Una barra de masa despreciable tiene una longitud de 1,20 m. A lo largo de la barra se colocan tres cuerpos de 2 kg de masa cada uno, situados a 0 cm, 40 cm, y 120 cm de un extremo. Calcular el momento de inercia del conjunto con respecto a un eje perpendicular a la barra que pasa:

a) por un extremo de la barra,
b) por el centro de la barra, y calcular los radios de giro en cada caso.





RESOLUCIÓN :

a) El momento de inercia del conjunto con respecto a un extremo es:

$$I_a = \Sigma M R^2 = M R_1^2 + M R_2^2 + M R_3^2$$

Como: $R_1 = 0$; sustituyendo datos:

$$I_a = 2\,kg\left[(0{,}4\,m)^2 + (1{,}2\,m)^2\right]$$

Rpta.: $I_a = 3{,}2\ kg\,m^2$

Por otro lado se sabe que:

$$I_a = M_T R_a^2 \quad \therefore \quad R_a = \sqrt{\frac{I_a}{M_T}}$$

$$R_a = \sqrt{\frac{3{,}2\ kg\ m^2}{6\ kg}}$$

Rpta.: $R_a = 0{,}73\,m$

a) El momento de inercia con respecto al centro:

$$I_b = \Sigma M.R^2$$

$$I_b = 2\,kg\left[(0{,}6\,m)^2 + (0{,}2\,m)^2 + (0{,}6\,m)^2\right]$$

Rpta.: $I_b = 1{,}52\ kg\ m^2$;

por otro lado se sabe que:

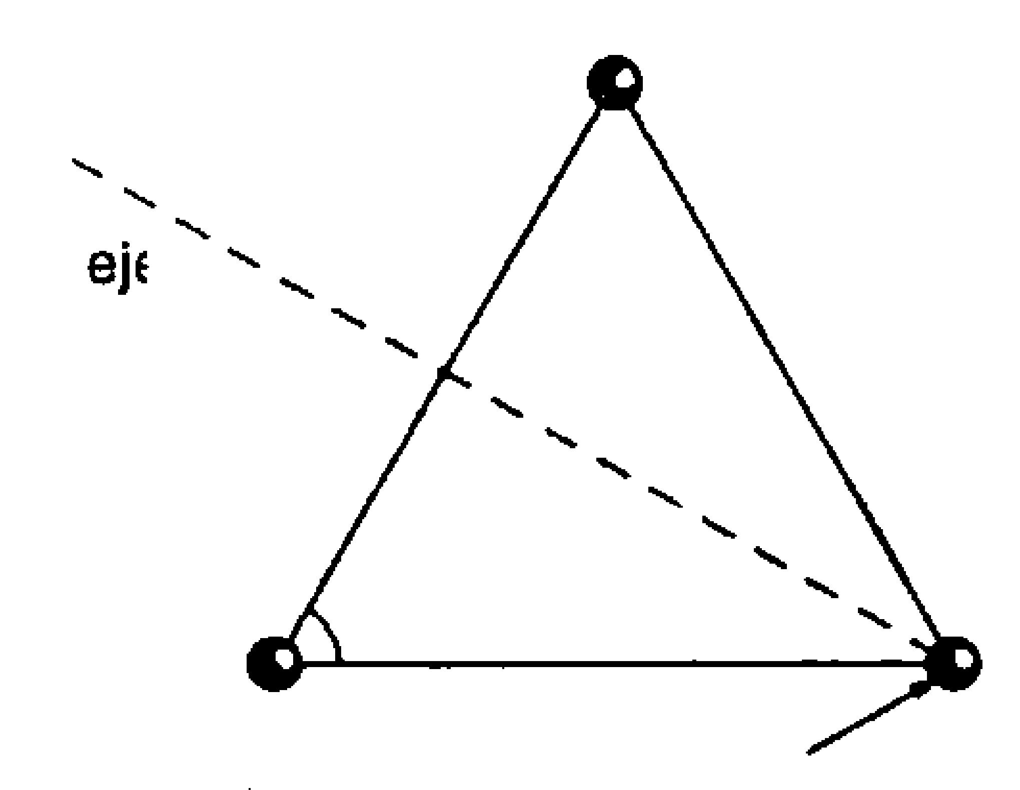
$$I_b = M_T R_b^2$$

$$\therefore \qquad R_b = \sqrt{\frac{I_b}{M_T}}$$

$$R_b = \sqrt{\frac{1{,}52\ kg\ m^2}{6\ kg}}$$

Rpta.: $R_b = 0{,}5\,m$

PROBLEMA 11. En los vértices de un triángulo equilátero de 20 cm de lado, hay 3 masas de 1 kg cada una. Calcular la aceleración angular cuando el sistema gira alrededor del punto medio de uno de sus lados, en un plano horizontal que contiene al triángulo, por acción de una fuerza de 20 N aplicada en el vértice opuesto al punto de giro con una dirección paralela al lado donde está el punto de giro.



RESOLUCIÓN:

$$M = m.\alpha.R^2 \qquad (A)$$

pero: $I = m.R^2 \Rightarrow R^2 = \frac{1}{m}$ (1)

y: $M = F.d$ (2)

$\therefore$ Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$\boxed{F.d = \alpha.I}$$

de donde: $\alpha = \frac{F.d}{I}$ (B)

Cálculo de I : $I = S\,m\,.\,R^2$

$$I = 3\,kg\,[\,(0{,}10\,m)^2 + (0{,}10\,m^2) + (0{,}20\ sen\ 60°\ m\,)^2\,]$$

$$I = 3\,kg \times 0{,}05\,m^2 = 0{,}15\,kg\,m^2$$

Sustituyendo valores en **B**:

$$\alpha = \frac{20\,N \times 0{,}20\ sen\ 60°\ m}{0{,}15\ kg\ m^2}$$

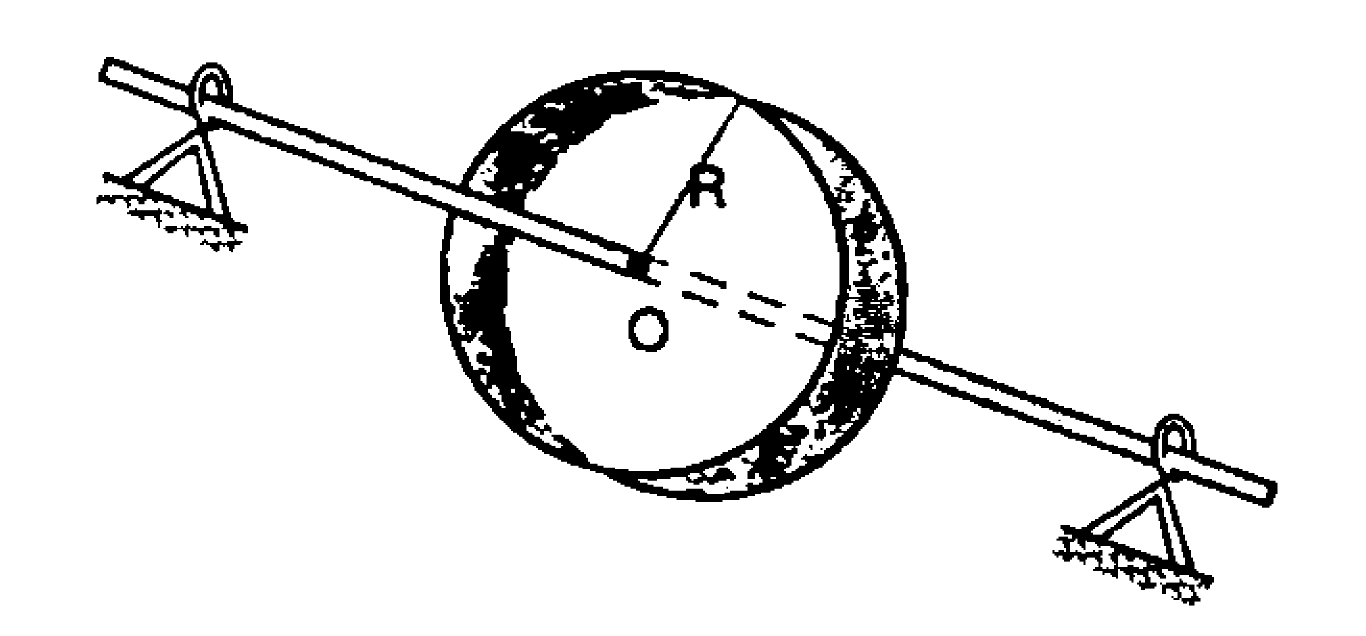
$$= \frac{3{,}46\,N}{0{,}15\ kg\ m}$$

$$\alpha = \frac{3{,}46\,N}{0{,}15 \times \frac{N}{m/s^2}}\ .\ m$$

Rpta.: $\alpha = 23\ rad/s^2$

PROBLEMA 12. El torque (F.d), de una rueda que rota es de 20 Nm debido a la fricción de los ejes. La rueda tiene un radio 0,80 m y 200 kg de masa. Su veloci-

dad angular es de 200 rad/s. ¿Cuánto tiempo demorará en detenerse?



RESOLUCIÓN : $\omega_f = \omega_i - \alpha . t$

pero: $\omega_f = 0 \quad \therefore \quad \omega_i = \alpha . t \qquad (I)$

$$\omega_i = 200 \text{ rad/s}$$

Por otro lado: $F . d = a . I$

Donde: $\alpha = \dfrac{F.d}{I}$ e $I = m.R^2$

$$\therefore \quad \alpha = \frac{F.d}{m.R^2}$$

Sustituyendo valores:

$$\alpha = \frac{20 \text{ N m}}{200 \text{ kg} \times (0{,}80 \text{ m})^2}$$

$$\alpha = 0{,}156\,25 \text{ rad/s}^2$$

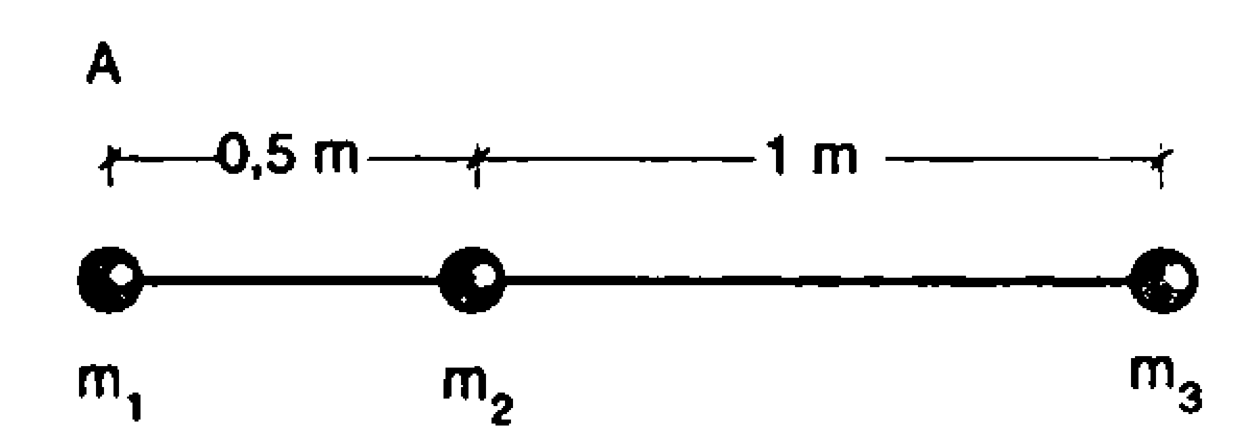
De (I): $t = \dfrac{\omega_i}{\alpha}$

$$t = \frac{200 \text{ rad/s}}{0{,}156\,25 \text{ rad/s}^2} = 1\,280 \text{ s}$$

Rpta.: $t = 21$ min 20 s

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el momento de inercia con respecto a un eje perpendicular a la varilla ingrávida que une a las masas $m_1 = 3$ kg ; $m_2 = 5$ kg ; $m_3 = 10$ kg ; y que pasa por A.



Rpta.: $I_A = 23{,}75 \text{ kg m}^2$

2. Calcular el momento de inercia de la Tierra con respecto a un eje que pasa por su centro, si se considera que es una esfera de 6 400 km de radio cuya masa es $5{,}96 \times 10^{24}$ kg.

Rpta.: $I = 9{,}76 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$

3. Encontrar el radio de giro de una barra de longitud "L" que gira alrededor de un eje transversal que pasa por su punto medio. (K = I/M). K : radio de giro.

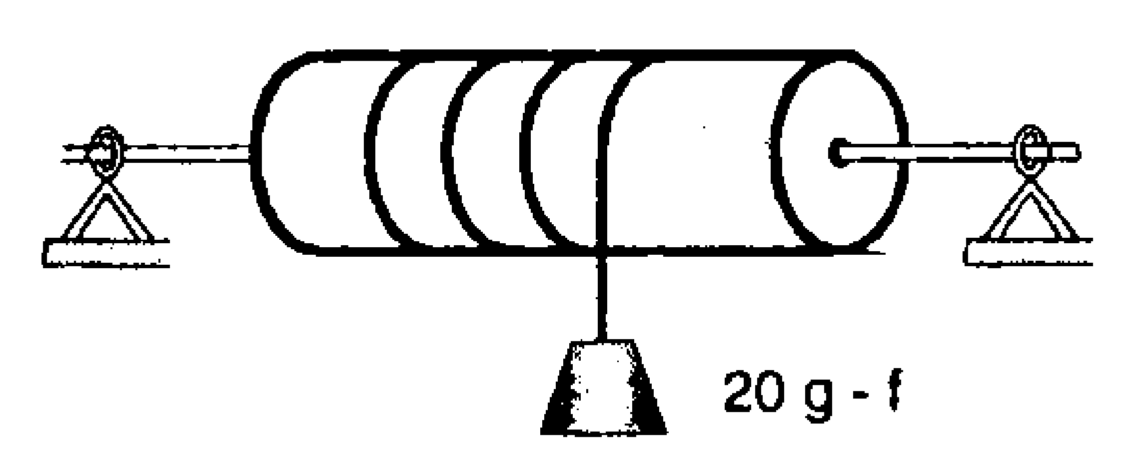
Rpta.: $K = \dfrac{\sqrt{3}}{6} L$

4. Un cilindro de 19,85 kg y 9,84 pulgadas de radio, está girando a razón de 40π rad/s con respecto a su eje geométrico. ¿Cuál es la fuerza tangencial para parar después de 1 800 revoluciones.

Rpta.: $F = 1{,}73$ N

5. Del extremo del cordón enrollado en un carrete cilíndrico de radio 5 cm y peso 4,4 N, que puede girar alrededor de su eje, se cuelga un peso de 0,2 N. Calcular:

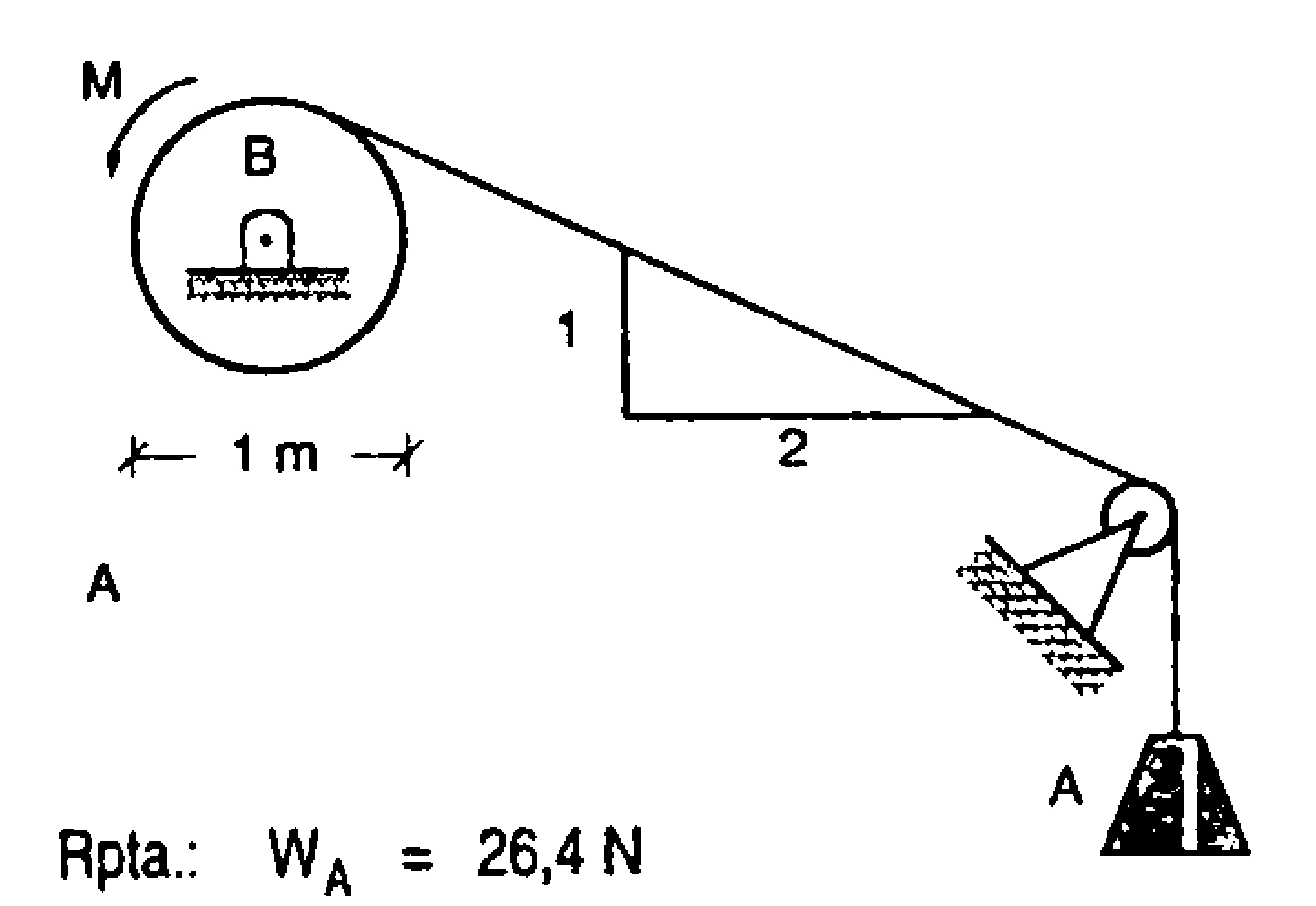
a) La aceleración angular.
b) La velocidad de caída del peso, al cabo de 1 s.
c) El tiempo que tardará en desenvolverse 10 m del cordón. Considerar: $g = 9{,}81 \text{ m/s}^2$.



Rpta.: a) $16{,}35 \text{ rad/s}^2$; b) $81{,}75 \text{ cm/s}^2$

c) 4,94 s

6. En la figura mostrada el peso "A", desciende con una aceleración de $10\ m/s^2$. Está unido por una cuerda sin peso, flexible e inextensible que pasa por un tambor liso, a un cilindro "B" homogéneo de 49 N de peso. Sobre el cilindro actúa un momento (M = 8 N . m) en sentido antihorario. Hallar el peso de "A"



Rpta.: $W_A = 26{,}4$ N

7. Una esfera homogénea de 20 cm de diámetro y peso 304 N gira libremente alrededor de un diámetro. ¿Qué momento constante es necesario para hacerla pasar de 20 RPM a 60 RPM en 1 s?

Rpta.: M = 0,52 N m

8. Un cilindro de 60 cm de diámetro y 490 N de peso tiene una aceleración de 2 rad/s^2, alrededor de su eje geométrico. ¿Qué par produce ésta aceleración?

Rpta.: M = 4,5 N m

9. Un disco homogéneo de 2 m de diámetro pesa 400 N y se le hace girar alrededor de su eje geométrico mediante una fuerza de 40 N, aplicada tangencialmente a su circunferencia. Hallar la aceleración angular del disco.

Rpta.: $\alpha = 1{,}96\ rad/s^2$

10. Un volante cuyo momento de inercia "I" es 623 kg . m^2, gira con una velocidad angular constante de $\omega = 31{,}4\ rad/s$. Hallar el momento decelerador "M" bajo cuya acción el volante se detiene al cabo de un tiempo t = 20 s.

Rpta.: M = 978 N m

11. Una barra de 1 m de longitud, que pesa 5 N gira en un plano vertical alrededor de un eje horizontal que pasa por su centro. ¿Con qué aceleración angular girará la barra si el momento de rotación es igual a $9{,}81 \times 10^{-2}$ N . m.

Rpta.: $\alpha = 2{,}3\ rad/s^2$

> *"Decir la verdad es la manifestación de la pureza del alma"*
>
> *Juan Goñii Galarza*

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 7

CENTRO DE GRAVEDAD

CENTRO DE GRAVEDAD "C.G."

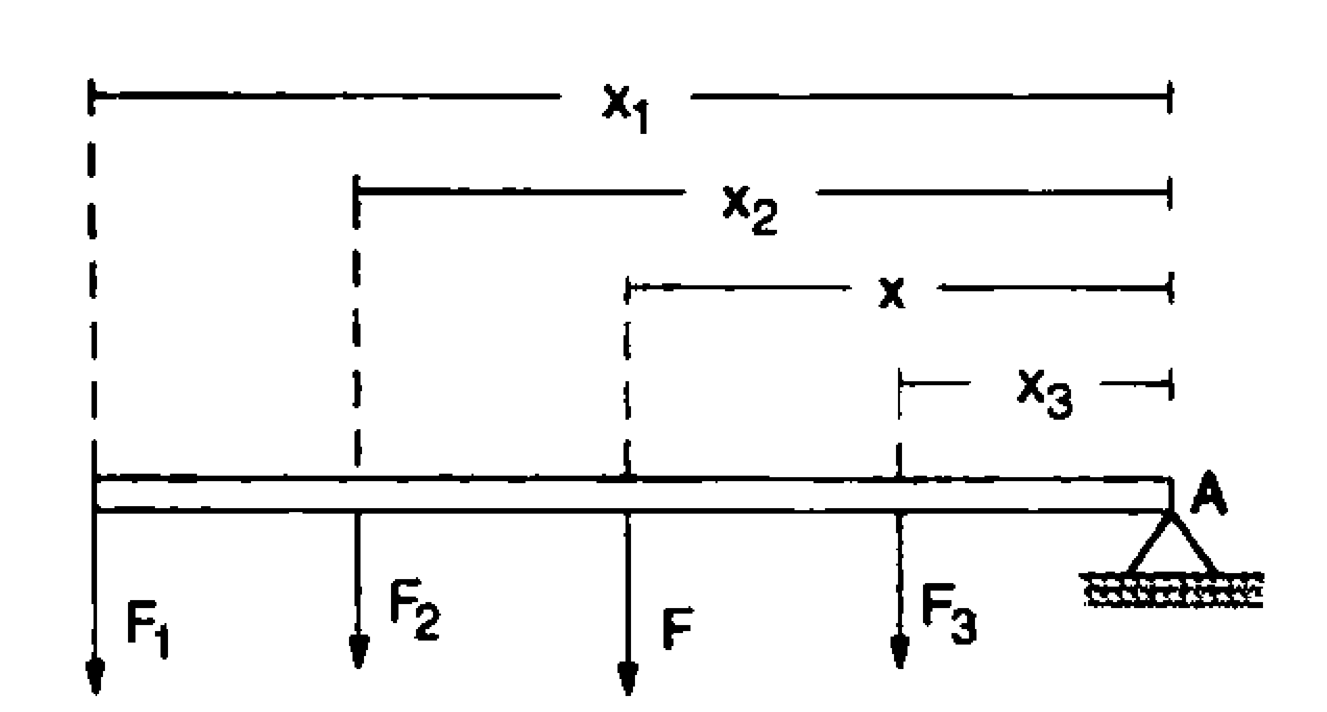
Es el punto donde se supone está concentrado todo el peso de un cuerpo.

Cuando el cuerpo tiene forma geométrica regular, generalmente coincide el centro de gravedad con su centro geométrico.

El centro de gravedad puede estar dentro o fuera del cuerpo.

TEOREMA DE VARIGNON

"En cualquier sistema de fuerzas, se cumple que, la suma de todos los momentos producidos por las fuerzas componentes con respecto a un punto, es igual al momento producido por la fuerza resultante con respecto al mismo punto." Así sea el punto A:

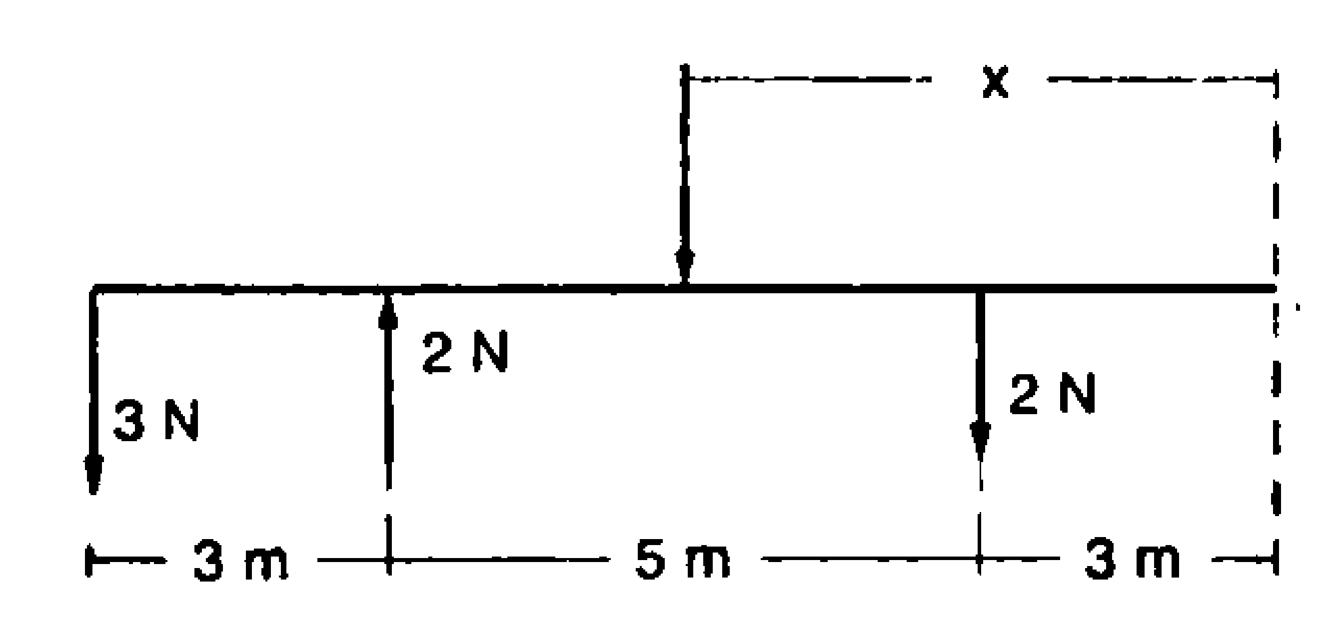


$$R \cdot X = F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3$$

$$\therefore \quad X = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{R}$$

$$\text{ó:} \quad X = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + F_3 x_3}{F_1 + F_2 + F_3}$$

Ejemplo: Localizar el C.G. en el caso de la figura.



RESOLUCIÓN :

$$R = 3N + 2N - 2N = 3N$$

$$3N \cdot X = 3N \times 11\,m - 2N \times 8\,m + \\ + 2N \times 3\,m$$

$$3X = 33\,m - 16\,m + 6\,m$$

Rpta.: X = 7,66 m , desde A.

POSICIÓN DEL CENTRO DE GRAVEDAD DE UN CUERPO

Se determina con respecto a un sistema de ejes coordenados mediante la relación:

$$CG(\bar{x}_g , \bar{y}_g)$$

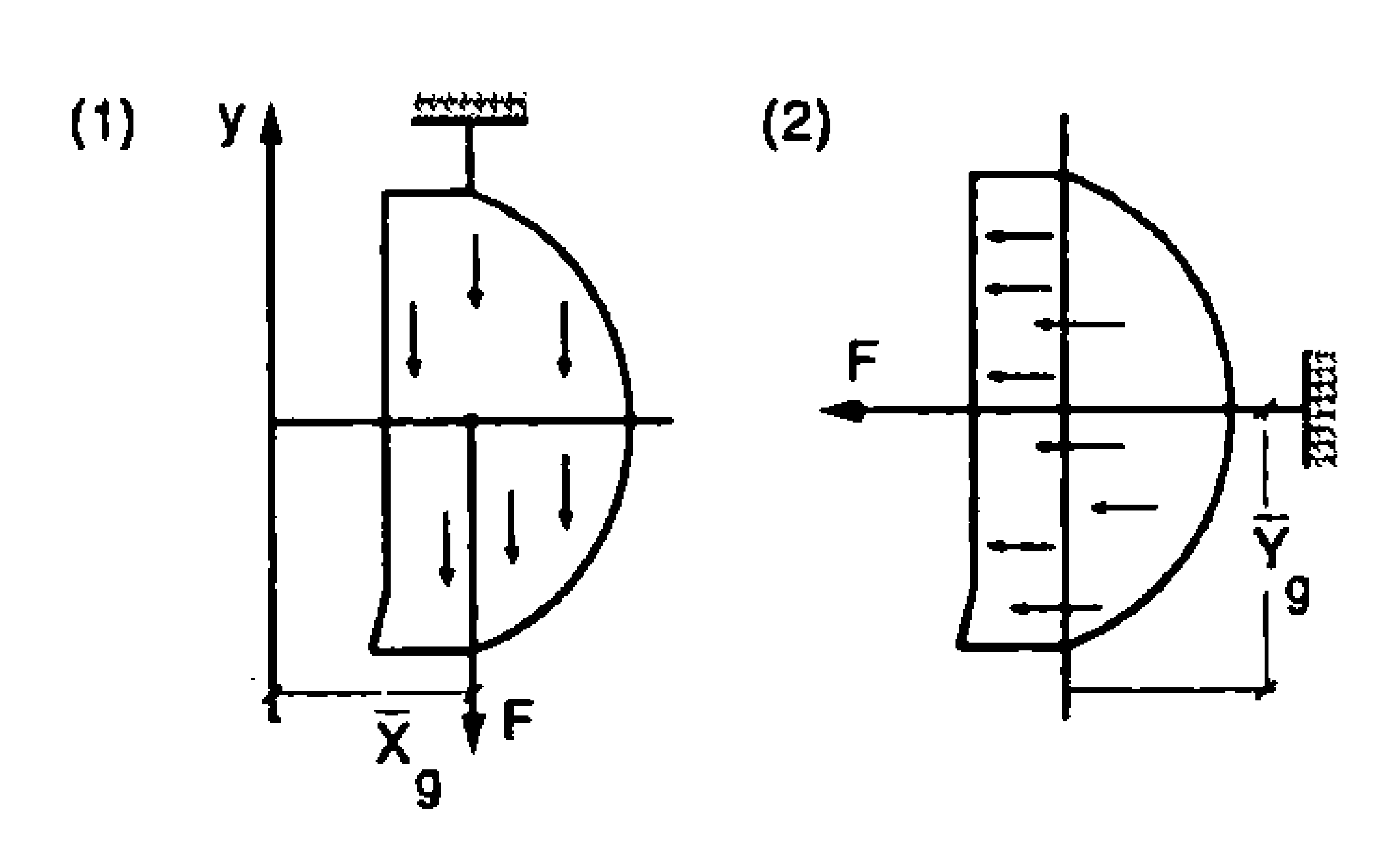
Esta expresión indica la ubicación del centro de gravedad de un cuerpo referido a un, sistema de ejes cartesia-nos X eY.

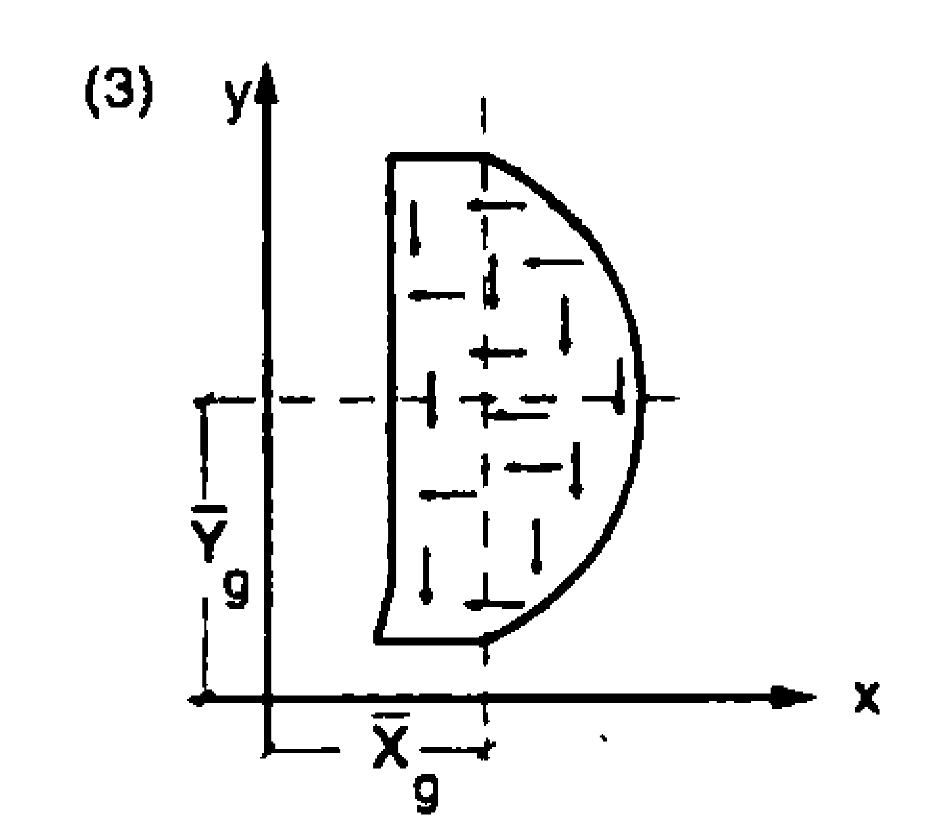
Los valores de " $\bar{x}_g$ " y de " $\bar{y}_g$ " son las coordenadas del C.G. se calcularán así: La suma de todos los momentos de todas las partículas del cuerpo colgado de una mane-

http://librosysolucionarios.net

ra, en dirección de Y por ejemplo, da el valor de " $\bar{x}_g$ ". (figura 1)

$$\bar{X}_g = \frac{F_1 x_1 + F_2 x_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots}$$





La suma de todos los momentos de todas las partículas del cuerpo colgado transversalmente, es decir, en dirección de la X, da el valor de " $\bar{y}_g$ ". (figura 2)

$$\bar{Y}_g = \frac{F_1 y_1 + F_2 y_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots}$$

Cuando se trata de calcular el centro de gravedad de una figura plana que se puede descomponer en áreas geométricas regulares, el área de cada porción está concentrada en su centro geométrico.

Lo mismo en el caso de figuras volumétricas regulares, el volumen de cada figura está concentrado en su centro geométrico.

Tanto el área como el volumen son proporcionales a sus pesos, luego para calcular el centro de gravedad de una figura plana o de una figura volumétrica se toma como referencia los centros geométricos como centros de gravedad parciales de planos y volúmenes y se calcula así:

a) De áreas:

$$\bar{x}_g = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

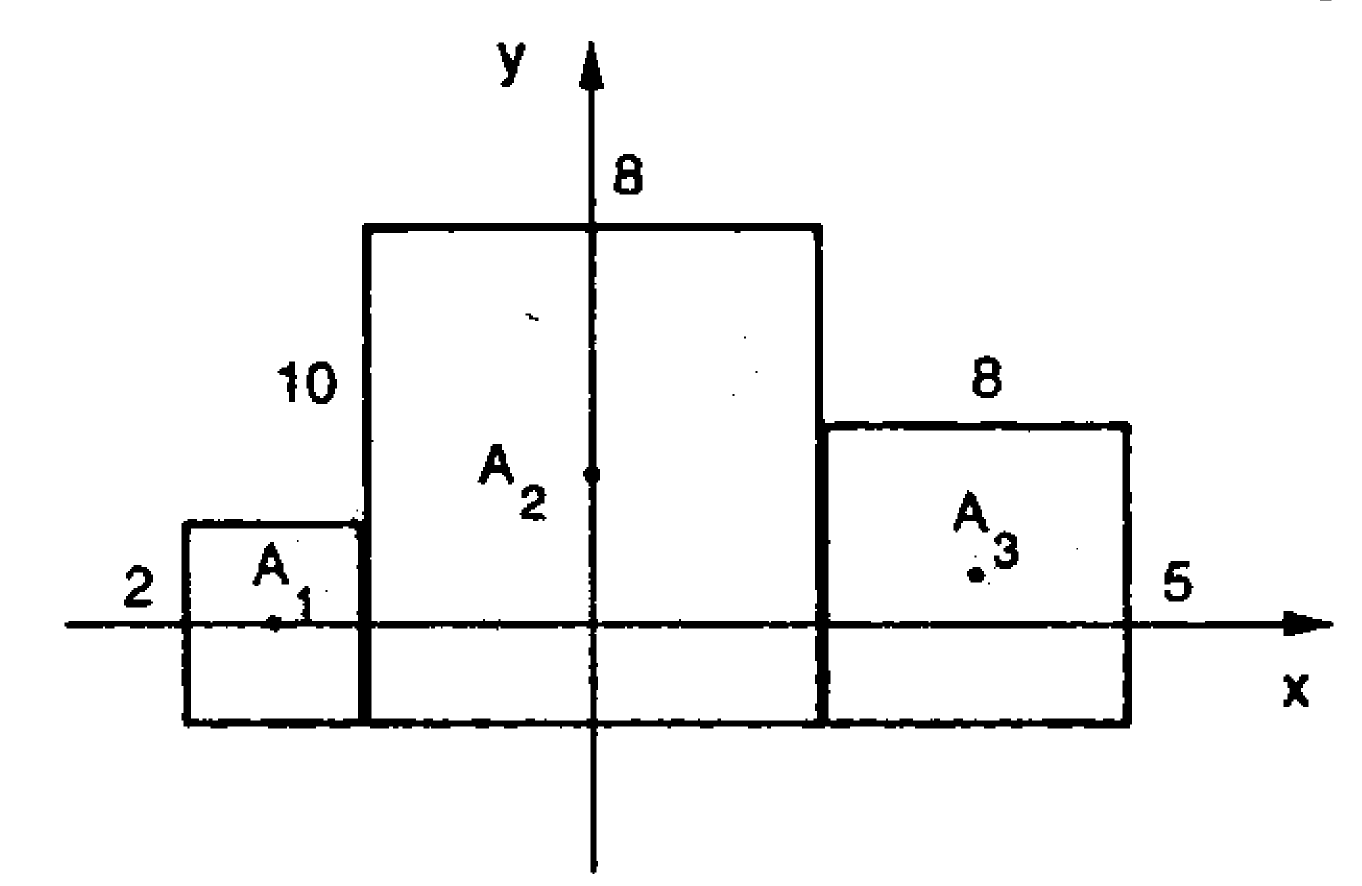
$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + \dots}{A_1 + A_2 + \dots}$$

b) De volúmenes:

$$\bar{x}_g = \frac{V_1 x_1 + V_2 x_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

$$\bar{y}_g = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2 + \dots}{V_1 + V_2 + \dots}$$

Ejemplo: Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la placa de áreas mostrada, referidas al sistema xy.



RESOLUCIÓN:

$A_1 = 2 \times 2 = 4$

$x_1 = -5 \qquad y_1 = 0$

$A_2 = 10 \times 8 = 80$

$x_2 = 0 \qquad y_2 = 3$

$A_3 = 8 \times 5 = 40$

$x_3 = 8 \qquad y_3 = 1,5$

Ahora, se sabe que:

$$\bar{x}_g = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

http://librosysolucionarios.net

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

Sustituyendo los valores:

$$\bar{x}_g = \frac{4(-5) + 80 \times 0 + 40 \times 8}{4 + 80 + 40}$$

$$= \frac{320 - 20}{124} = \frac{300}{124}$$

$$\bar{x}_g = 2{,}42$$

$$\bar{y}_g = \frac{4 \times 0 + 80 \times 4 + 40 \times 1{,}5}{4 + 80 + 40}$$

$$= \frac{320 + 60}{124} = \frac{380}{124}$$

$$\bar{y}_g = 3{,}06$$

Luego: C.G. (2,42 ; 3,06)

CENTROS DE GRAVEDAD DE FIGURAS

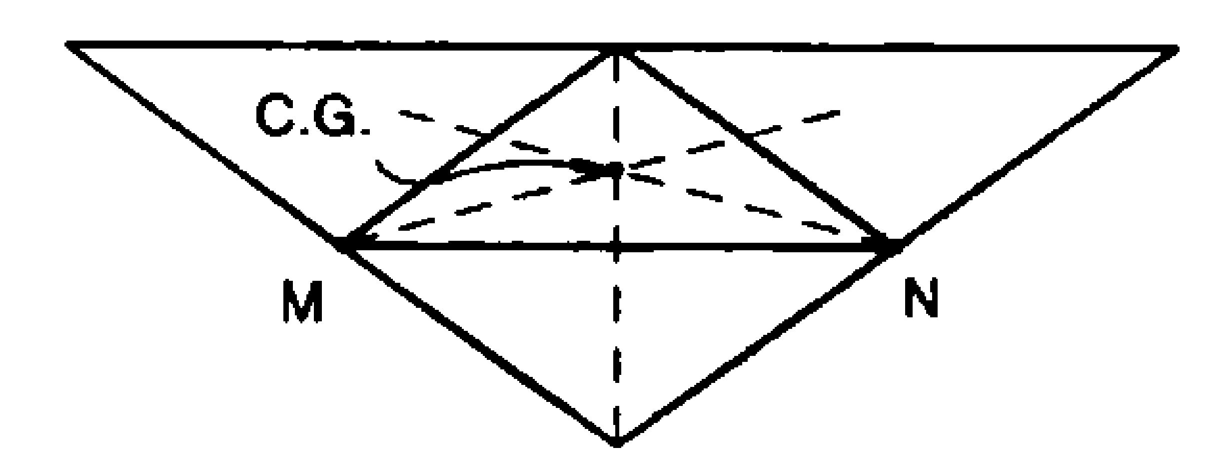
DE LAS LÍNEAS

a) **De una recta:** El punto medio.



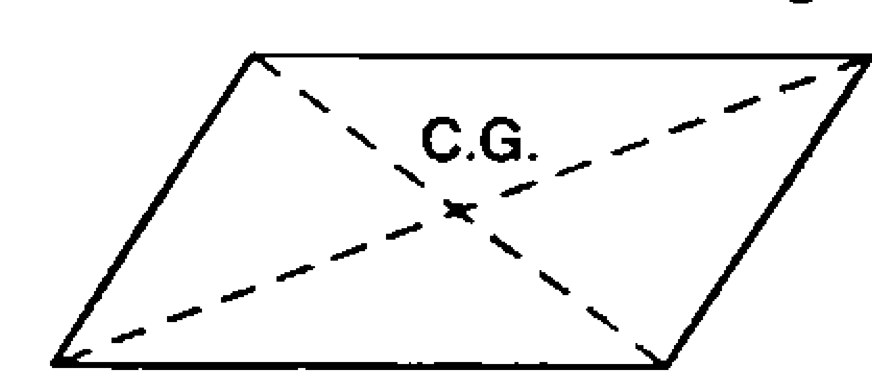
b) **Del perímetro de un triángulo:**

Intersección de las bisectrices del triángulo formado al unir los puntos medios de los lados.



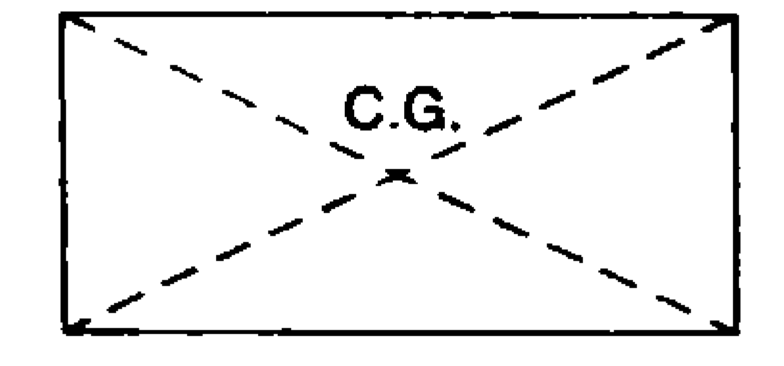
c) **De un paralelogramo:**

Es la intersección de las diagonales.

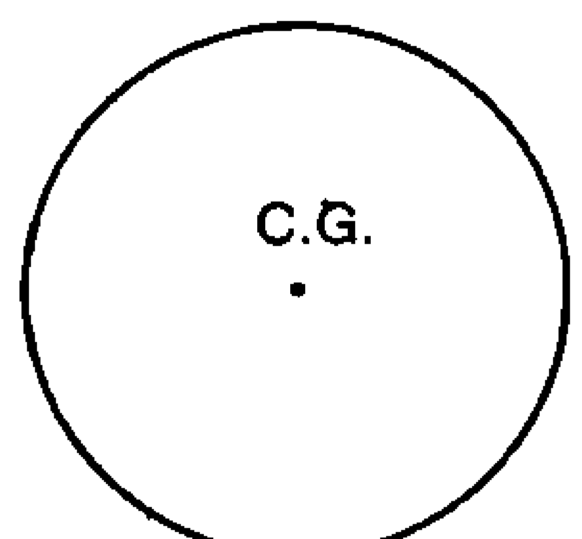


d) **De un rectángulo:**

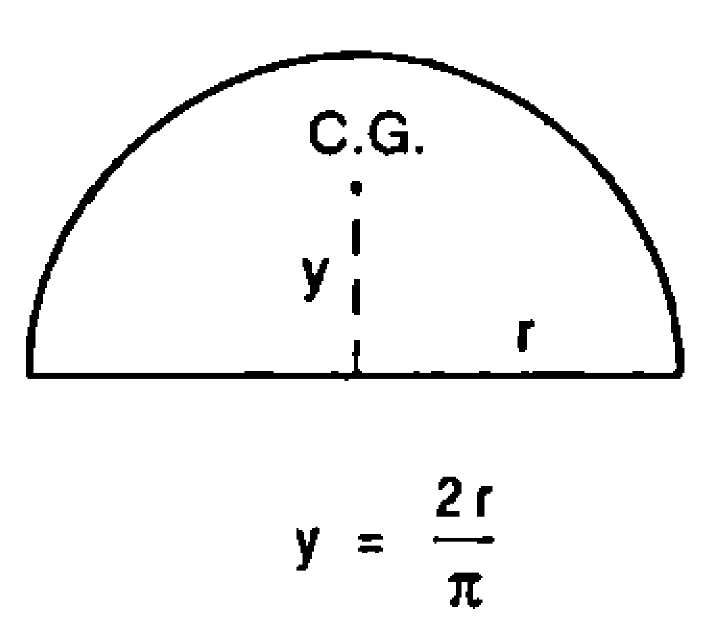
Es la intersección de las diagonales.



e) **De la circunferencia:**



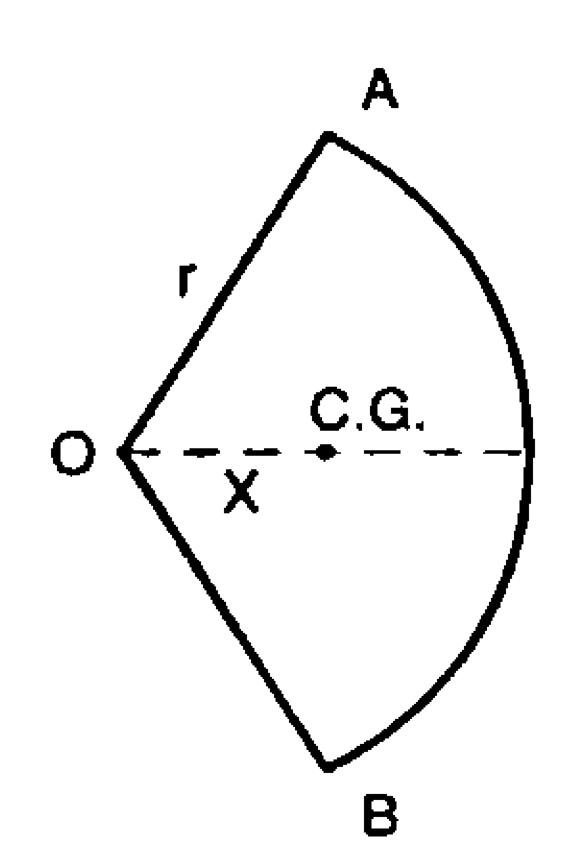
f) **De una semicircunferencia:** Está a 2 r/p de la base.



$$y = \frac{2r}{\pi}$$

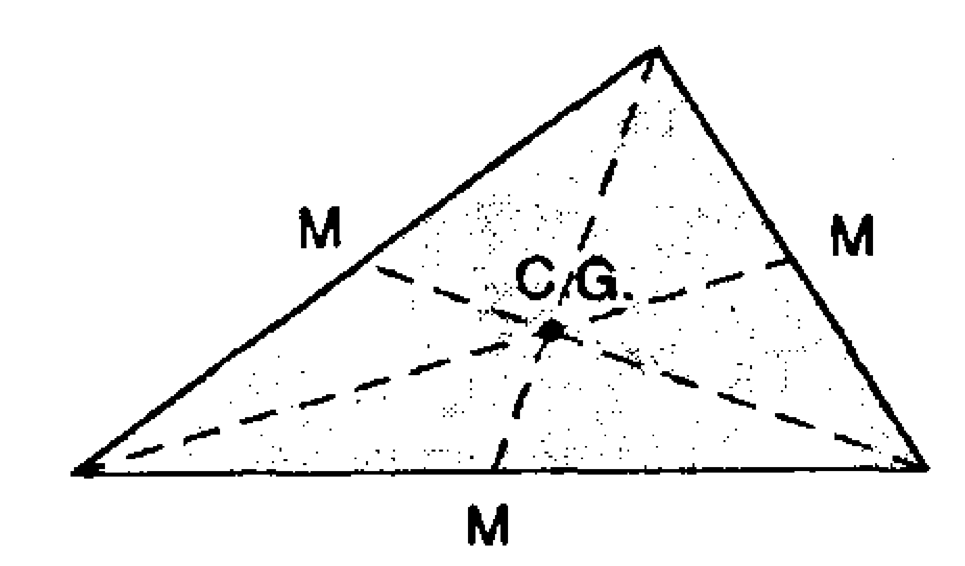
g) **De un arco de circunferencia:**

Está a $r \dfrac{AB\ (cuerda)}{AB\ (arco)}$ del centro.

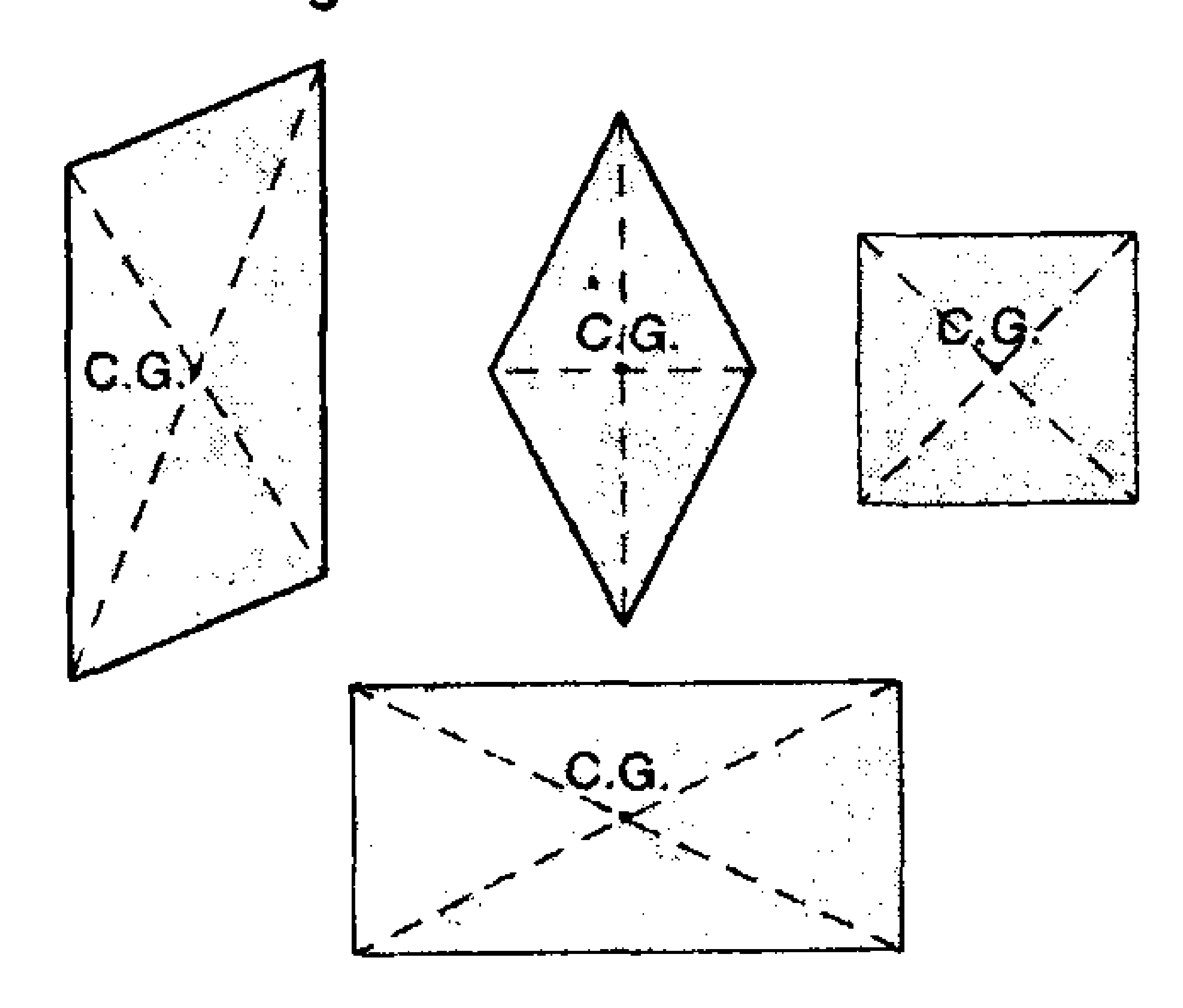


DE LAS SUPERFICIES

a) **De un triángulo:** Intersección de las medianas, a 1/3 de la altura de la base.

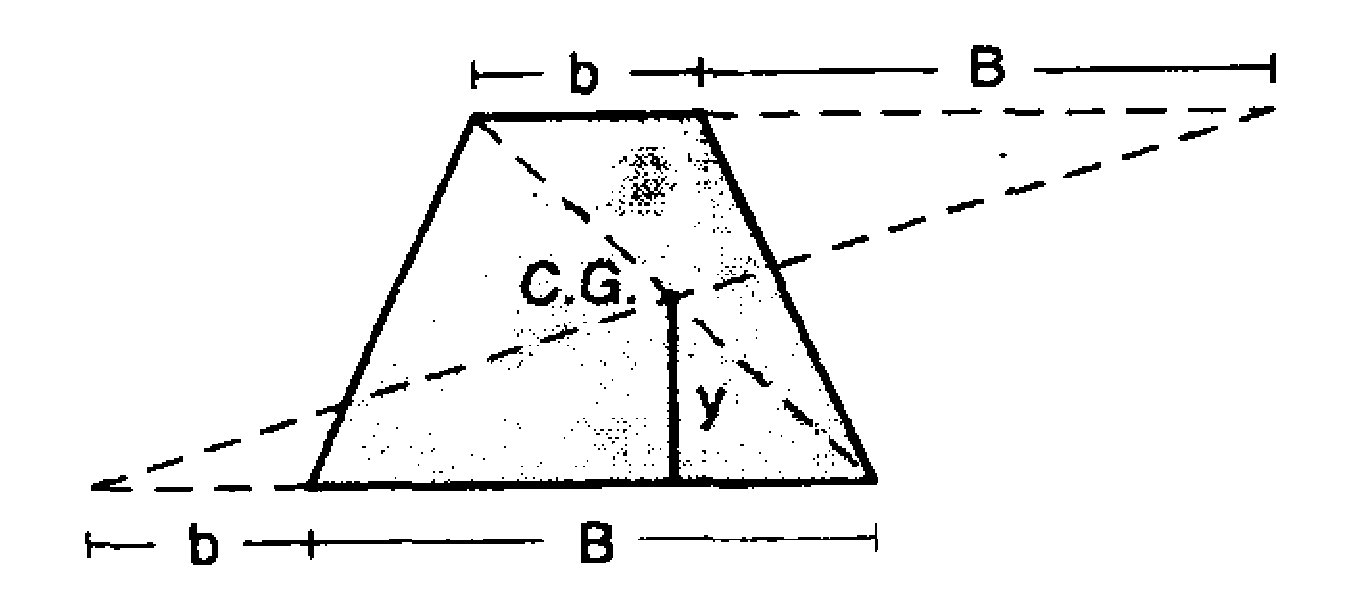


b) **De un paralelogramo, rombo, rectángulo y cuadrado:** Intersección de diagonales.

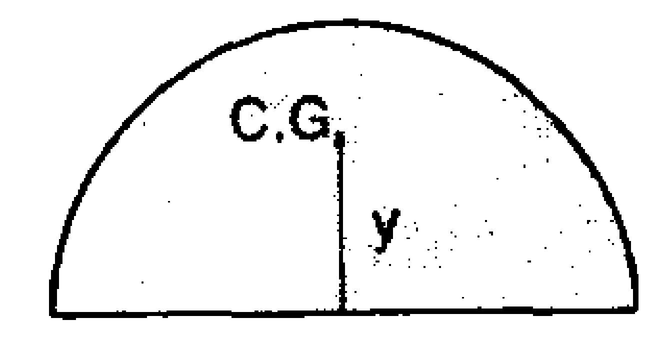


c) **Trapecio:**

$$\bar{y} = \left(\frac{B + 2b}{B + b}\right) \cdot \frac{h}{3} \quad \text{de la base.}$$



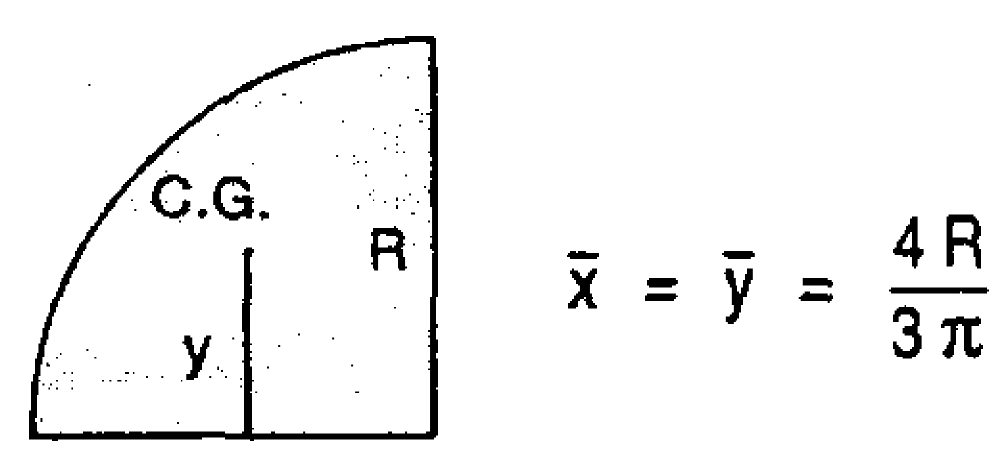
d) **De un semicírculo:**



$$\bar{y} = \frac{4r}{3\pi}$$

de la base

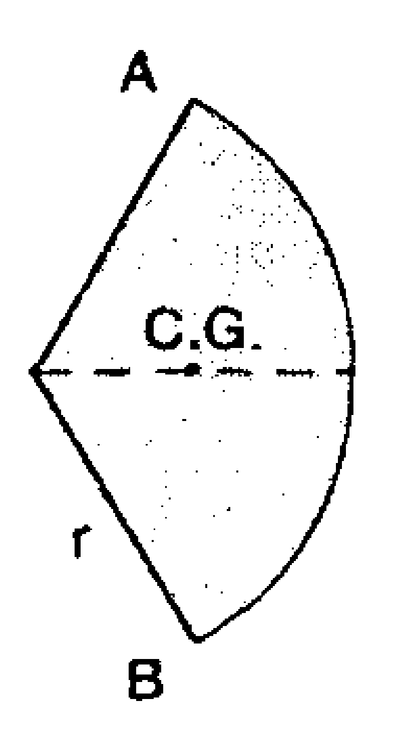
d) **De un cuadrante de círculo:**



$$\bar{x} = \bar{y} = \frac{4R}{3\pi}$$

e) **De un sector circular:**

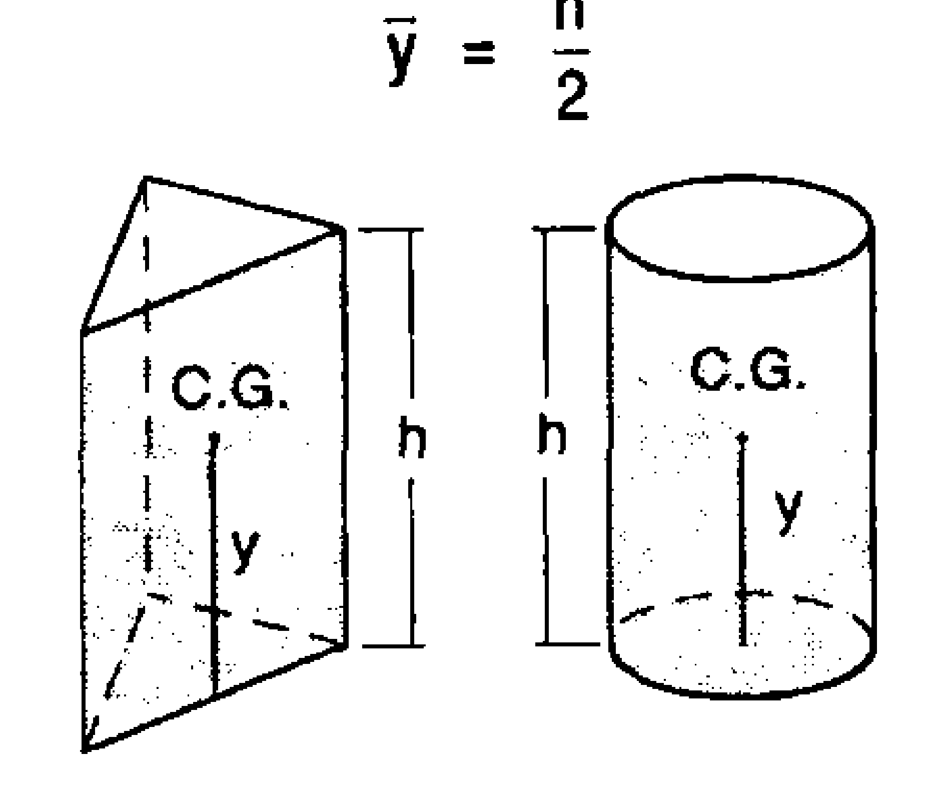
$$\bar{x} = \frac{2}{3} r \frac{\text{cuerda AB}}{\text{arco AB}} \text{ del centro.}$$



DE LOS VOLÚMENES

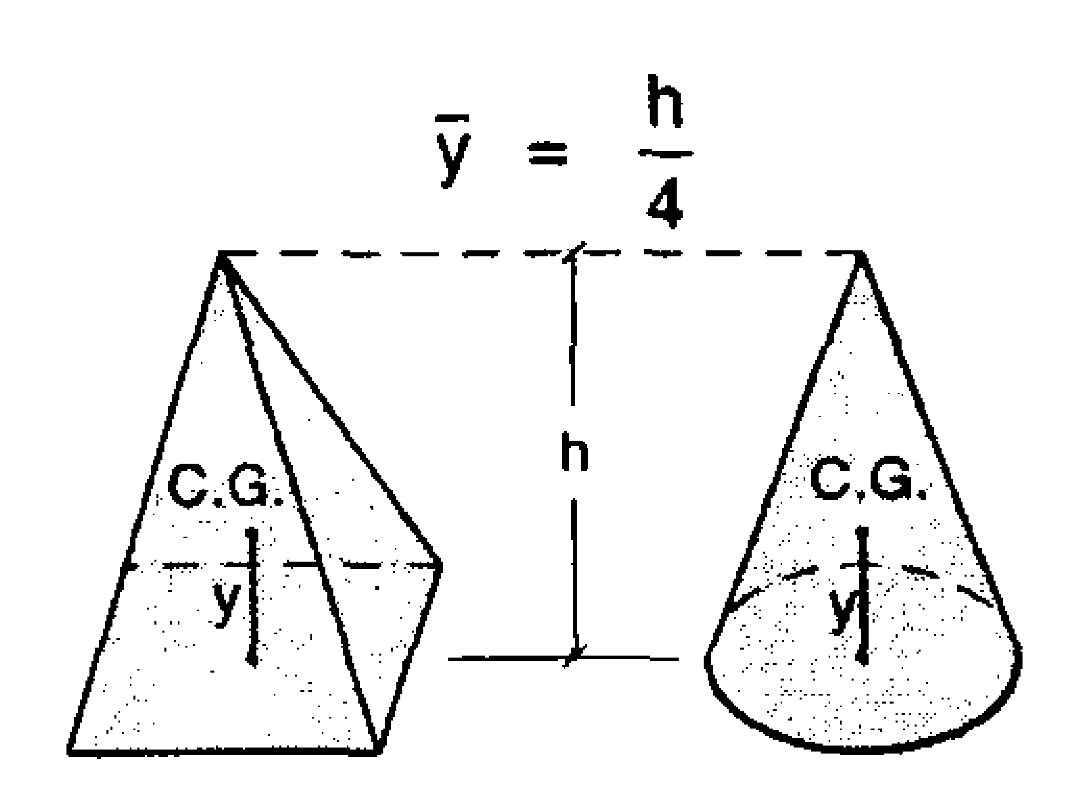
a) **Prisma y cilindro rectos:**

$$\bar{y} = \frac{h}{2}$$



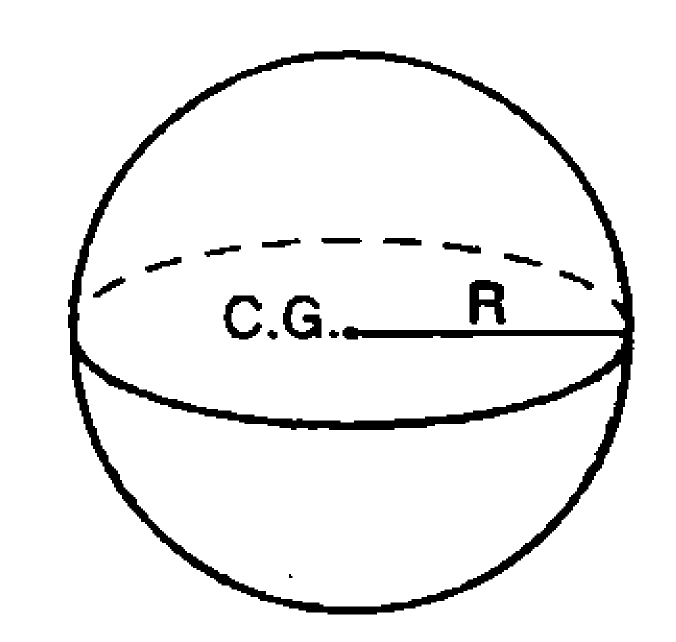
b) **Pirámide y cono rectos:**

$$\bar{y} = \frac{h}{4}$$

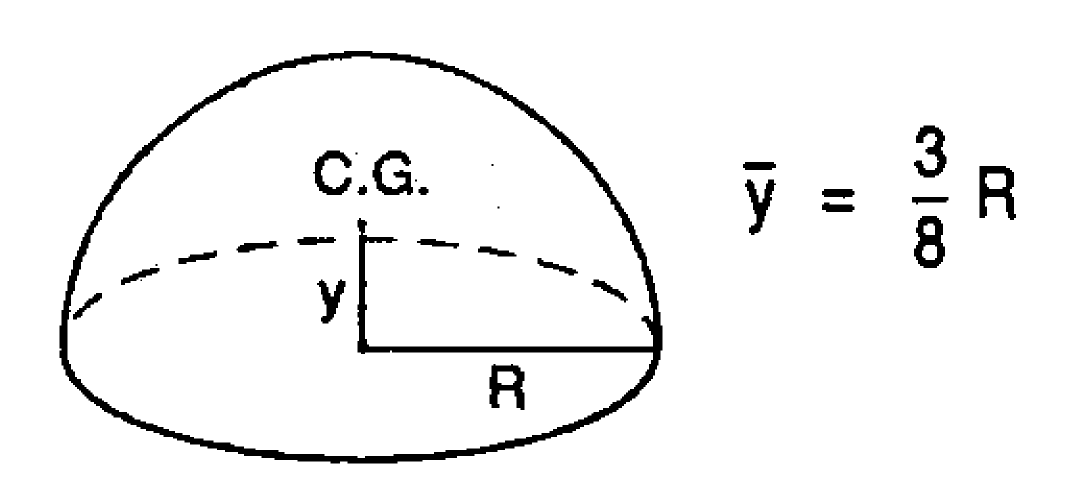


http://librosysolucionarios.net

c) **Esfera:** Centro de la figura.



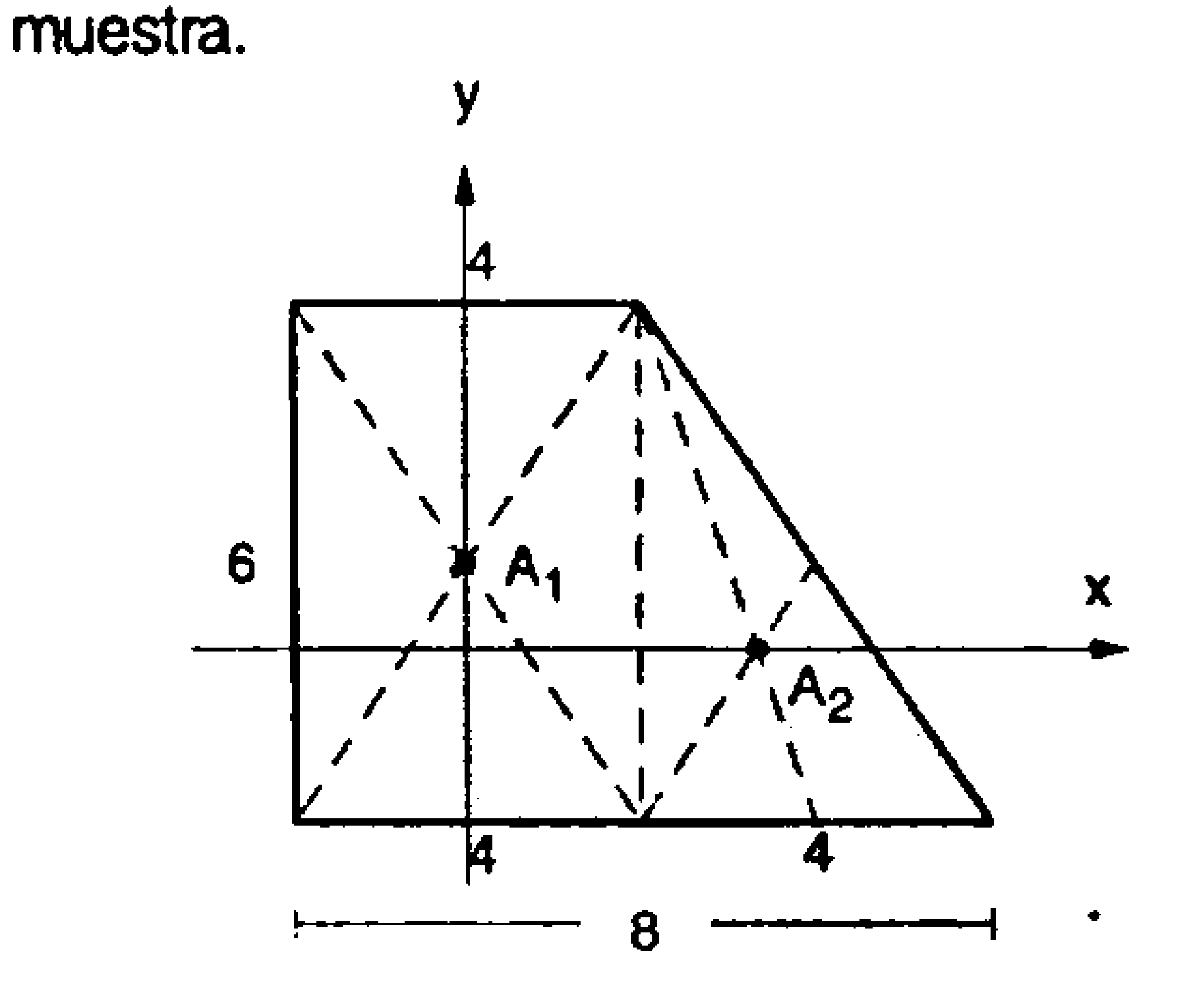
d) Semiesfera:



$$\bar{y} = \frac{3}{8}R$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Hallar el centro de gravedad de la placa que se muestra.



RESOLUCIÓN:

$$A_1 = 6 \times 4 = 24$$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = 3 - 2 = 1$$

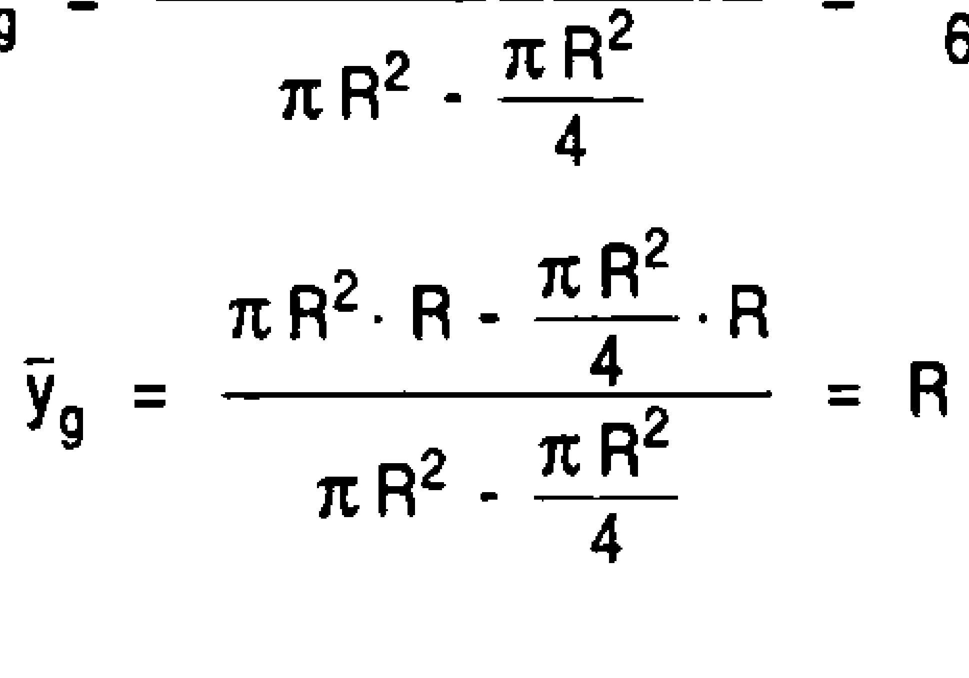
$$A_2 = \frac{4 \times 6}{2} = 12$$

$$x_2 = 2 + \frac{4}{3} = \frac{10}{3} \quad ; \quad y_2 = 0$$

$$\bar{x}_g = \frac{24 \times 0 + 12 \times 10/3}{24 + 12} = \frac{40}{36} = 1{,}11$$

$$\bar{y}_g = \frac{24 \times 1 + 12 \times 0}{24 + 12} = \frac{24}{36} = 0{,}66$$

PROBLEMA 2. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la placa circular recortada, como se muestra en la figura.



RESOLUCION: Para resolver este tipo de problemas, el área hueca se considera como un área negativa.

$$A_1 = \pi R^2$$

$$x_1 = R \quad ; \quad y_1 = R$$

$$A_2 = -\frac{\pi R^2}{4}$$

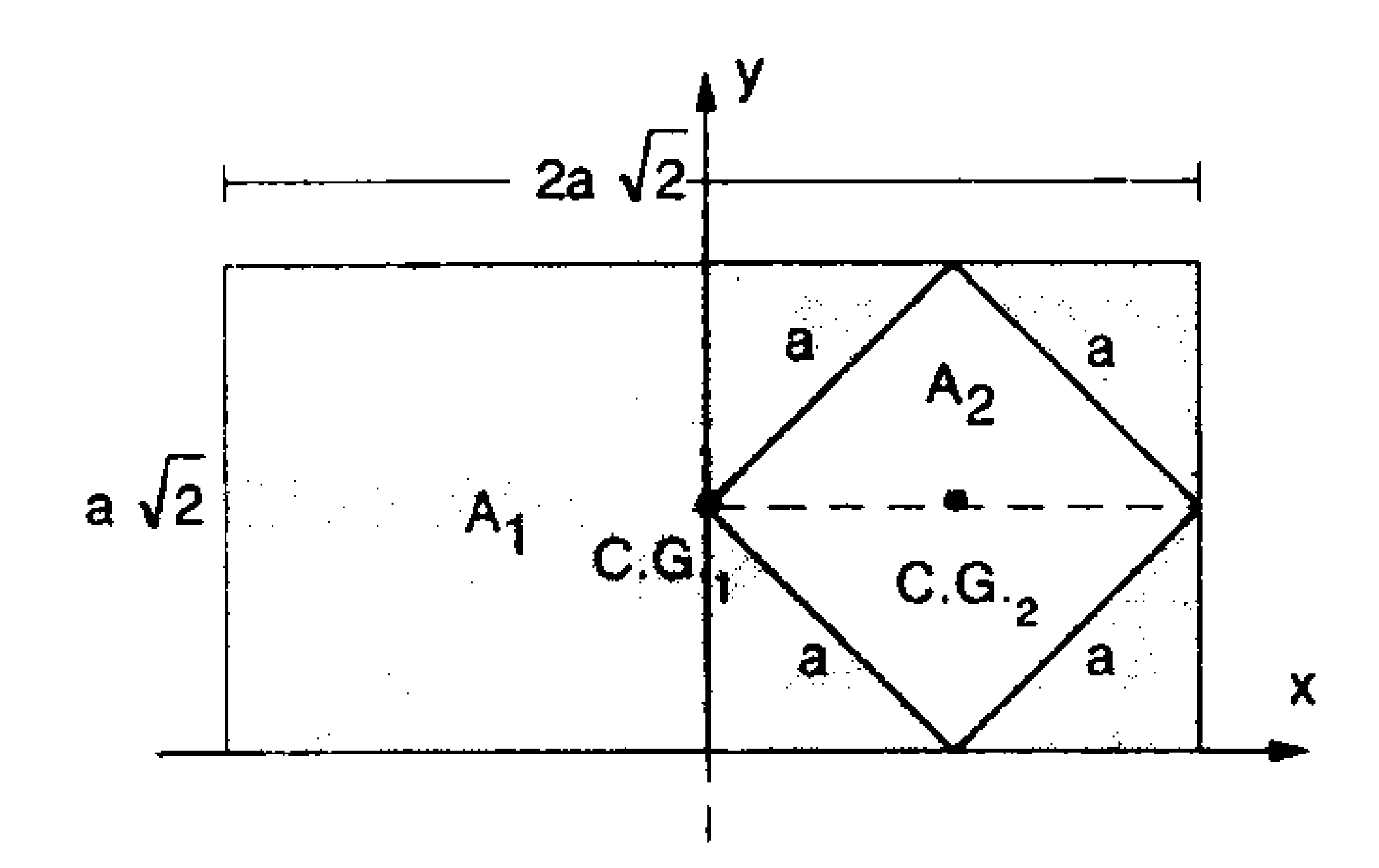
$$x_2 = \frac{3R}{2} \quad ; \quad y_2 = R$$

$$\bar{x}_g = \frac{\pi R^2 . R - \frac{\pi R^2}{4} \cdot \frac{3}{2} R}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}} = \frac{5R}{6}$$

$$\bar{y}_g = \frac{\pi R^2 \cdot R - \frac{\pi R^2}{4} \cdot R}{\pi R^2 - \frac{\pi R^2}{4}} = R$$

PROBLEMA 3. Hallar las coordenadas del centro de gravedad de la placa recortada según la figura.

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN : $A_1 = 4a^2$

$$x_1 = 0 \quad ; \quad y_1 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

$$^{*}\ A_2 = -a^2$$

$$x_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{a}{2}\sqrt{2}$$

Luego, los centros de gravedad son:

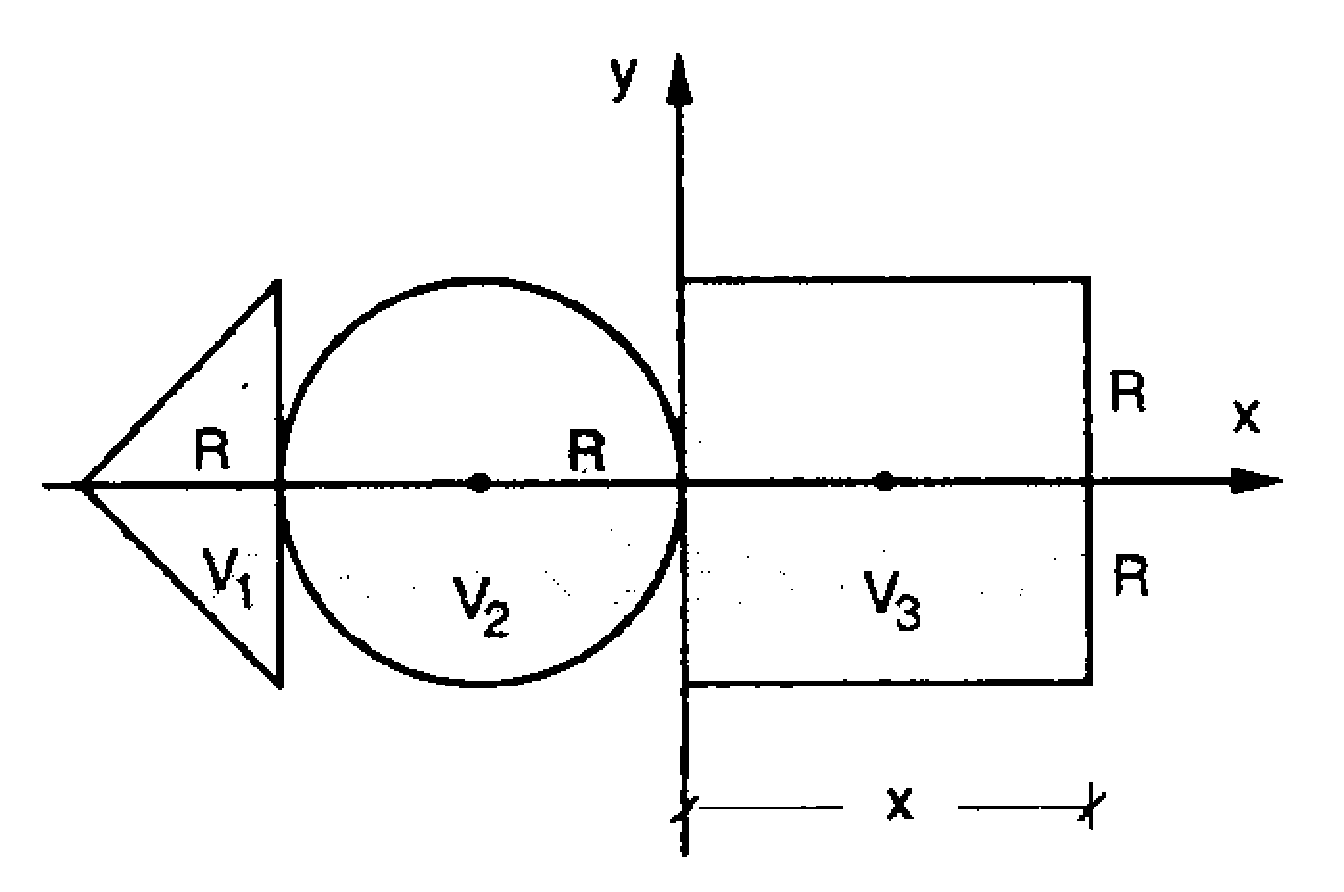
$$\bar{x}_g = \frac{4a^2 \times 0 - a^2 \times \frac{a}{2}\sqrt{2}}{4a^2 - a^2} = -\frac{a\sqrt{2}}{6}$$

$$\bar{y}_g = \frac{4a^2 \times \frac{a}{2}\sqrt{2} - a^2 \times \frac{a}{2}\sqrt{2}}{4a^2 - a^2}$$

$$\bar{y}_g = \frac{3a\sqrt{2}}{3 \times 2} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

* Área negativa por ser hueca

PROBLEMA 4. Los volúmenes de las figuras son cono, esfera y cilindro. Hallar la altura del cilindro para que el centro de gravedad del conjunto caiga en el punto de tangencia entre el cilindro y la esfera.



Centro de Gravedad del cono = $\frac{1}{4}$ R

Altura del cono = R

Radio base del clindro = R

RESOLUCIÓN :

Para el cono: $V_1 = \frac{1}{3}\pi R^2 . R = \frac{1}{3}\pi R^3$

$$x_1 = -2R - \frac{1}{4}R = \frac{-9}{4}R$$

$$y_1 = 0$$

Para la esfera: $V_2 = \frac{4}{3}\pi R^3$

$$x_2 = -R \quad ; \quad y_2 = 0$$

Para el cilindro:

$$V_3 = \pi R^2 x$$

$x_3 = \frac{x}{2}$; $y_3 = 0$ Ahora:

$$\bar{x}_g = \frac{\frac{1}{3}\pi R^3\left(-\frac{9}{4}R\right) + \frac{4}{3}\pi R^3(-R) + \pi R^2 x\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{1}{3}\pi R^3 + \frac{4}{3}\pi R^3 + \pi R^2 x}$$

Por condición del problema y por construcción del sistema de coordenadas:

$$\bar{x}_g = 0$$

Lo que quiere decir que el numerador debe ser 0.

$$\frac{1}{3}\pi R^3\left(-\frac{9}{4}R\right) + \frac{4}{3}\pi R^3(-R) + \pi R^2\frac{x^2}{2} = 0$$

$$\frac{9R^2}{12} + \frac{4R^2}{3} = \frac{x^2}{2}$$

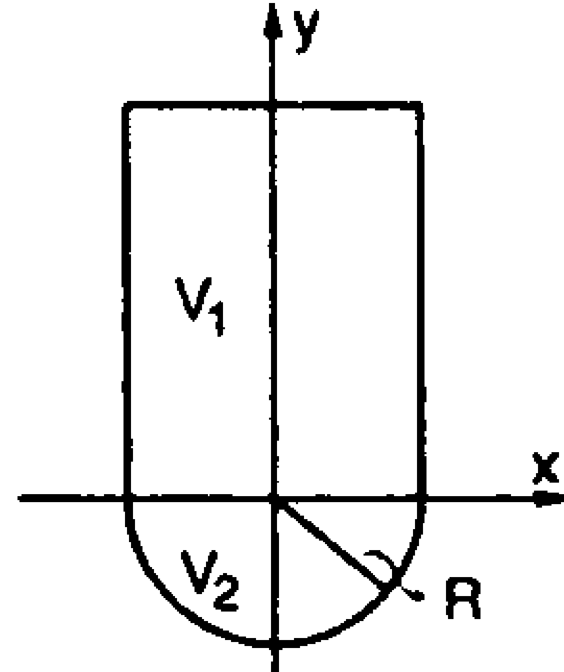
$$\frac{25R^2}{12} = \frac{x^2}{2} \Rightarrow x = \frac{5R}{\sqrt{6}}$$

De donde:

Rpta.: $x = \frac{5R\sqrt{6}}{6} = 2{,}04\,R$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 5. El volumen mostrado en la figura, está conformado por un cilindro hueco V_1 y una semiesfera V_2 también hueca. Hallar el valor de la altura $y = h$ del cilindro, para que el equilibrio sea indiferente.



RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$\bar{y}_g = \frac{V_1 y_1 + V_2 y_2}{V_1 + V_2} \qquad (I)$$

Donde: $V_1 = \pi R^2 y \qquad y_1 = \frac{y}{2}$

$$V_2 = \frac{2}{3}\pi R^3 \qquad y_2 = -\frac{3}{8} R$$

Sustituyendo en (I):

$$\bar{y}_g = \frac{\pi R^2 y\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{2}{3}\pi R^3\left(-\frac{3}{8}\right)}{\pi R^2 y + \frac{2}{3}\pi R^3} \qquad (II)$$

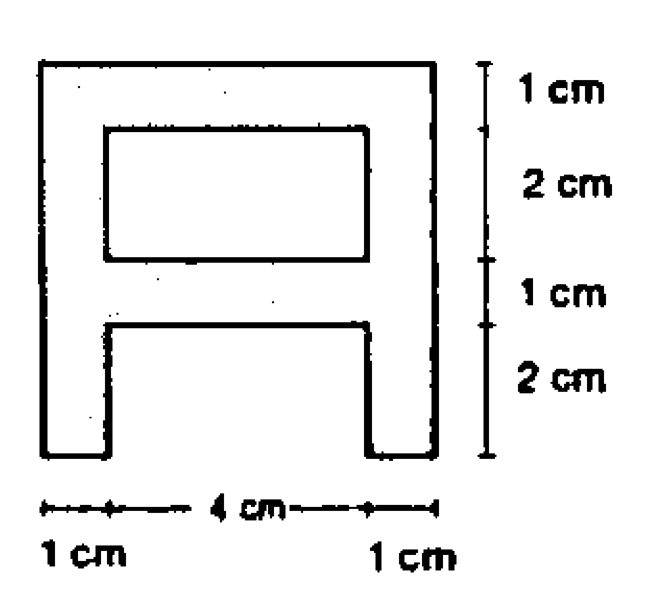
Para que el equilibrio sea indiferente "$\bar{y}_g$" debe ser cero, lo que quiere decir que el numerador de la expresión (II) debe ser cero.

$$\pi R^2 y\left(\frac{y}{2}\right) + \frac{2}{3}\pi R^3\left(-\frac{3}{8} R\right) = 0$$

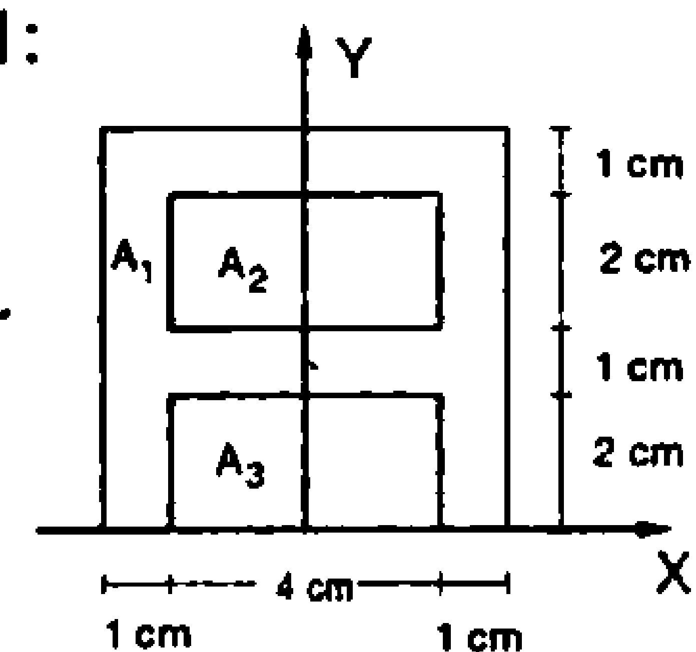
de donde: $y = \frac{R\sqrt{2}}{2}$

PROBLEMA 6.

Hallar el centro de gravedad (C.G.) de la figura.



RESOLUCIÓN :



Para hallar el centro de gravedad (C.G.) se elige un sistema rectangular X Y, este sistema se puede situar en el lugar que al operador se le ocurra, sin embargo, hay posiciones que acomodan mejor la solución, así por ejemplo, para la presente figura se va a elegir X coincidente con la base de la figura, eY coincidente con su parte media (derecha-izquierda).

Para calcular el C.G. se consideran las áreas blancas como negativas y las áreas sombreadas son positivas.

Evidentemente que, por la ubicación que se le ha dado al sistema XY, el valor de $\bar{x}_g = 0$, sólo falta calcular $\bar{y}_g$.

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad (I)$$

Donde:

$$A_1 = 6\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^2$$
$$y_1 = 3\text{ cm}$$
$$A_2 = -4\text{ cm} \times 2\text{ cm} = -8\text{ cm}^2$$
$$y_2 = 4\text{ cm}$$
$$A_3 = -4\text{ cm} \times 2\text{ cm} = -8\text{ cm}^2$$
$$y_3 = 1\text{ cm}$$

sustituyendo en (I):

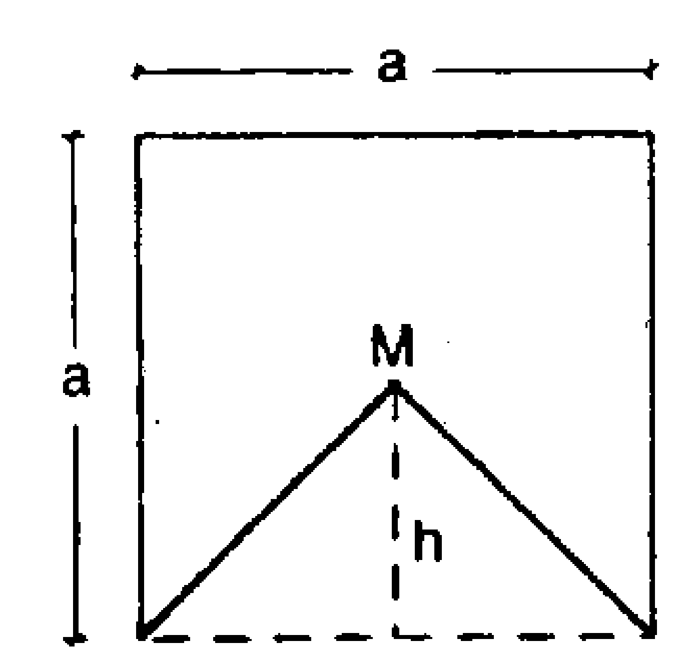
$$\bar{y}_g = \frac{36\text{ cm}^2 \times 3\text{ cm} - 8\text{ cm}^2 \times 4\text{ cm} - 8\text{ cm}^2 \times 1\text{ cm}}{36\text{ cm}^2 - 8\text{ cm}^2 - 8\text{ cm}^2}$$

$$\bar{y}_g = 3{,}4\text{ cm}$$

Por consiguiente:

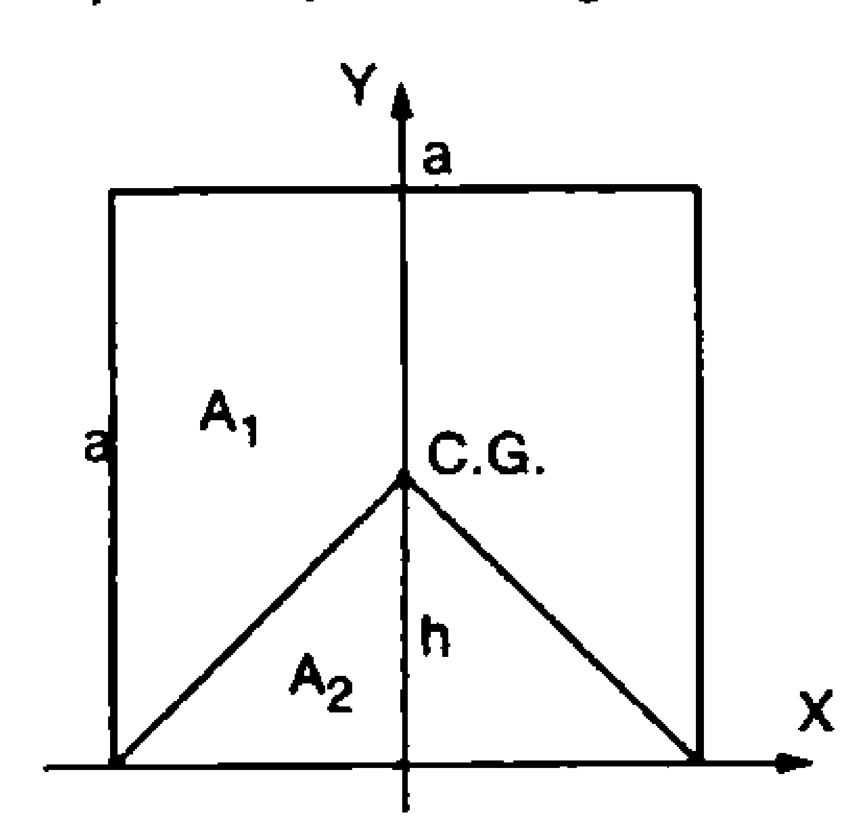
Rpta.: C.G. (0 ; 3,4 cm)

PROBLEMA 7. Calcular la altura "h" situada en el eje del cuadrado, de tal suerte que el punto "M" sea el C.G. de la parte sombreada del cuadrado.



RESOLUCIÓN:

El problema consiste en elegir un sistema de ejes XY, y determinar $\bar{y}_g$ del C.G. de la figura.
Sea el sistema XY, cuyo eje X pasa por la base y el eje Y por el eje de la figura.



$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \qquad (1)$$

Donde: $A_1 = a^2 \quad ; \quad y_1 = \frac{a}{2}$

$$A_2 = -\frac{a\,h}{2} \quad ; \quad y_2 = \frac{1}{3}h$$

$$\bar{y}_g = h$$

todo en (1): $$h = \frac{a^2 \cdot \frac{a}{2} - \frac{a\,h}{2} \cdot \frac{h}{3}}{a^2 - \frac{a\,h}{2}}$$

efectuando:

$$a^2 h - \frac{a\,h^2}{2} = \frac{a^3}{2} - \frac{a\,h^2}{6}$$

$$-\frac{h^2}{3} + a\,h - \frac{a^2}{2} = 0$$

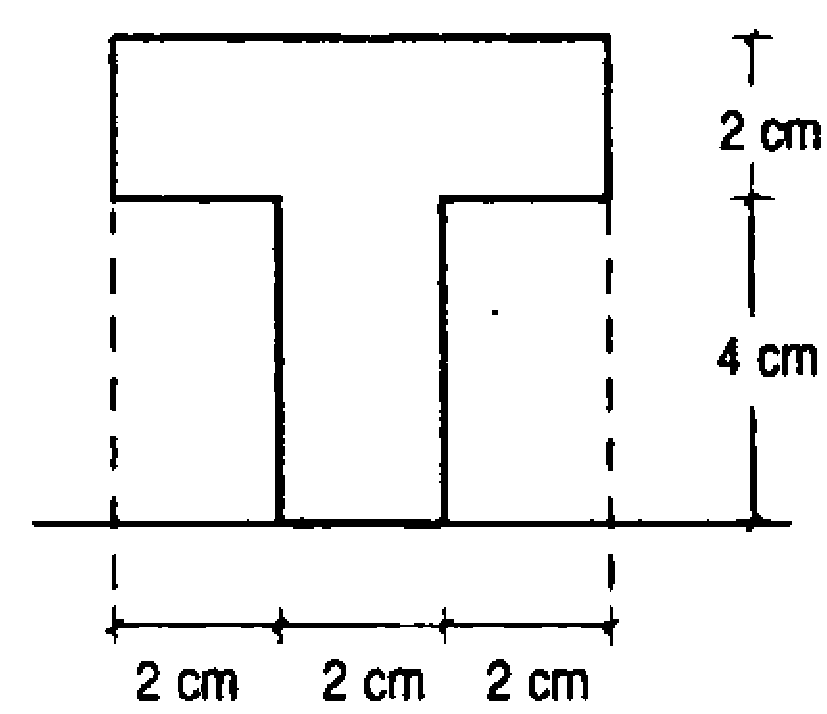
$$2h^2 - 6\,a\,h + 3\,a^2 = 0$$

$$h = \frac{3\,a \pm \sqrt{9\,a^2 - 6\,a^2}}{2} = \frac{3\,a \pm a\sqrt{3}}{2}$$

$$h_1 = \frac{a}{2}(3 + \sqrt{3}) \qquad \text{no}$$

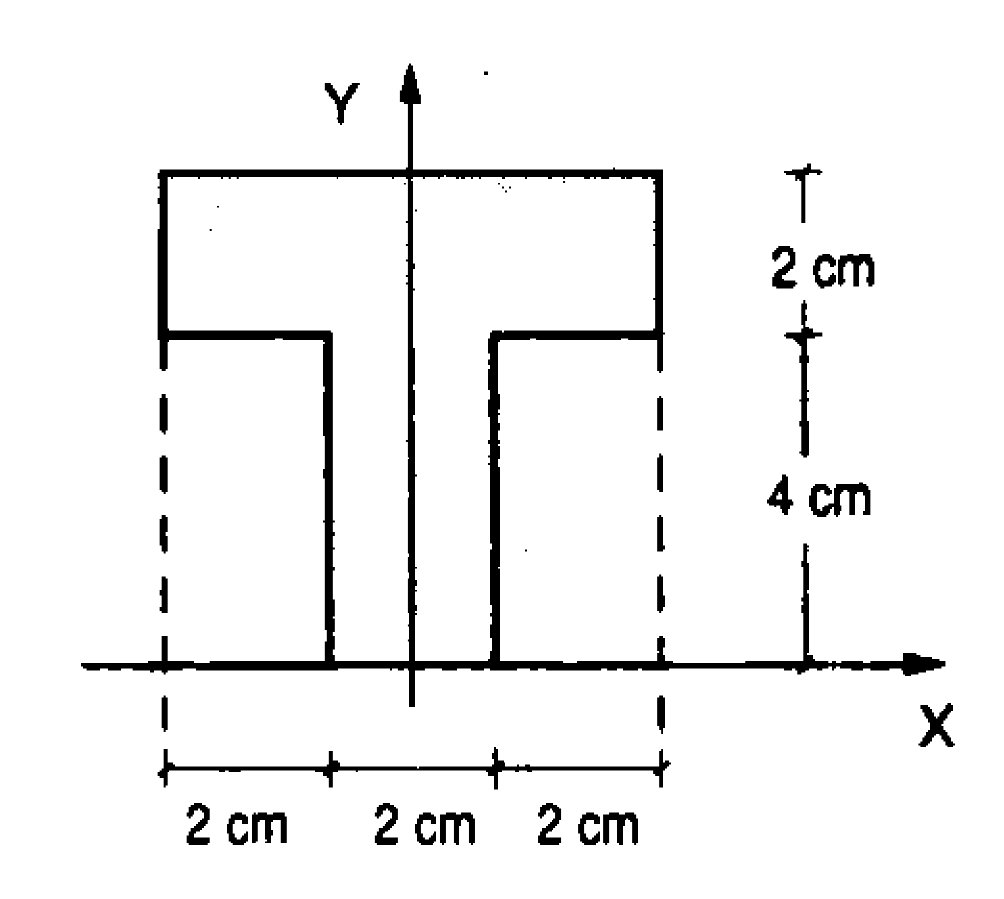
Rpta.: $h_2 = \frac{a}{2}(3 - \sqrt{3})$

PROBLEMA 8. ¿A qué altura sobre el borde inferior está el C.G. de la sección T de la figura?



RESOLUCIÓN:

Se calcula el C.G. de la figura con respecto a un sistema de ejes XY que pasa el eje X por la base de la figura y por el eje, la ordenada Y.



Evidentemente que, así trazado el sistema XY, $\bar{x}_g = 0$, luego solo falta calcular el valor $\bar{y}_g = ?$

http://librosysolucionarios.net

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + 2A_2 y_2}{A_1 + 2A_2} \qquad (I)$$

Donde:

$A_1 = 6\text{ cm} \times 6\text{ cm} = 36\text{ cm}^2$

$y_1 = 3\text{ cm}$

$A_2 = -4\text{ cm} \times 2\text{ cm} = -8\text{ cm}^2$

$y_2 = 2\text{ cm}$

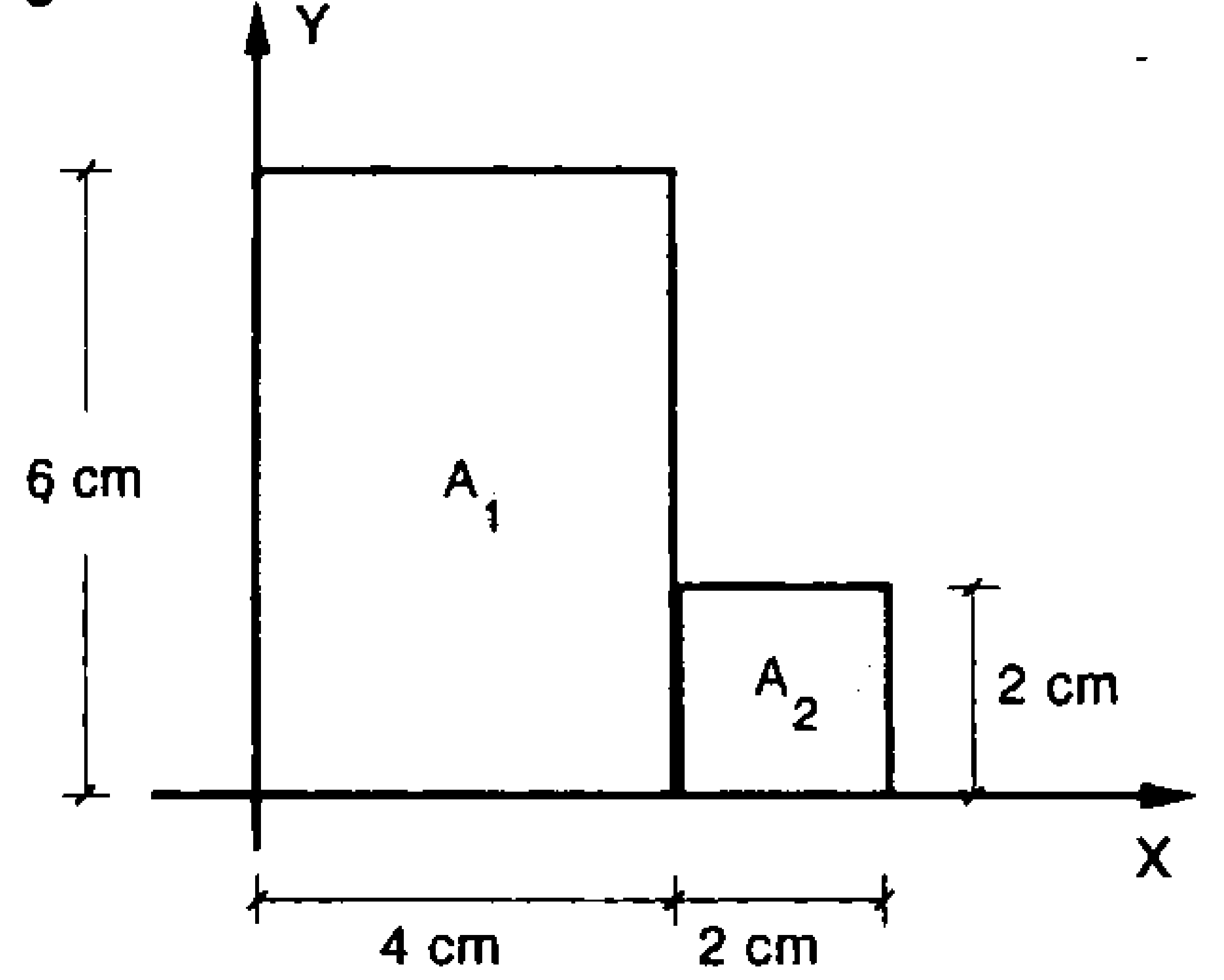
Sustituyendo en (I):

$$\bar{y}_g = \frac{36\text{ cm}^2 \times 3\text{ cm} - 2 \times 8\text{ cm}^2 \times 2\text{ cm}}{36\text{ cm}^2 - 2 \times 8\text{ cm}^2}$$

$\bar{y}_g = 3{,}8\text{ cm}$

Rpta.: C.G. (0 ; 3,8 cm)

PROBLEMA 9. Hallar el C.G. de la figura conformada por A_1 y A_2 con respecto al sistema XY mostrado en la figura.



RESOLUCIÓN:

Sabiendo que:

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2}{A_1 + A_2} \qquad (I)$$

$$\bar{x}_g = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2}{A_1 + A_2} \qquad (II)$$

Donde: $A_1 = 6\text{ cm} \times 4\text{ cm} = 24\text{ cm}^2$

$y_1 = 3\text{ cm} \quad ; \quad x_1 = 2\text{ cm}$

$A_2 = 2\text{ cm} \times 2\text{ cm} = 4\text{ cm}^2$

$y_2 = 1\text{ cm} \quad ; \quad x_2 = 5\text{ cm}$

Sustituyendo en (I) y (II):

$$\bar{y}_g = \frac{24\text{ cm}^2 \times 3\text{ cm} + 4\text{ cm}^2 \times 1\text{ cm}}{24\text{ cm}^2 + 4\text{ cm}^2}$$

$$\bar{y}_g = \frac{76}{28}\text{ cm} = 2{,}71\text{ cm}$$

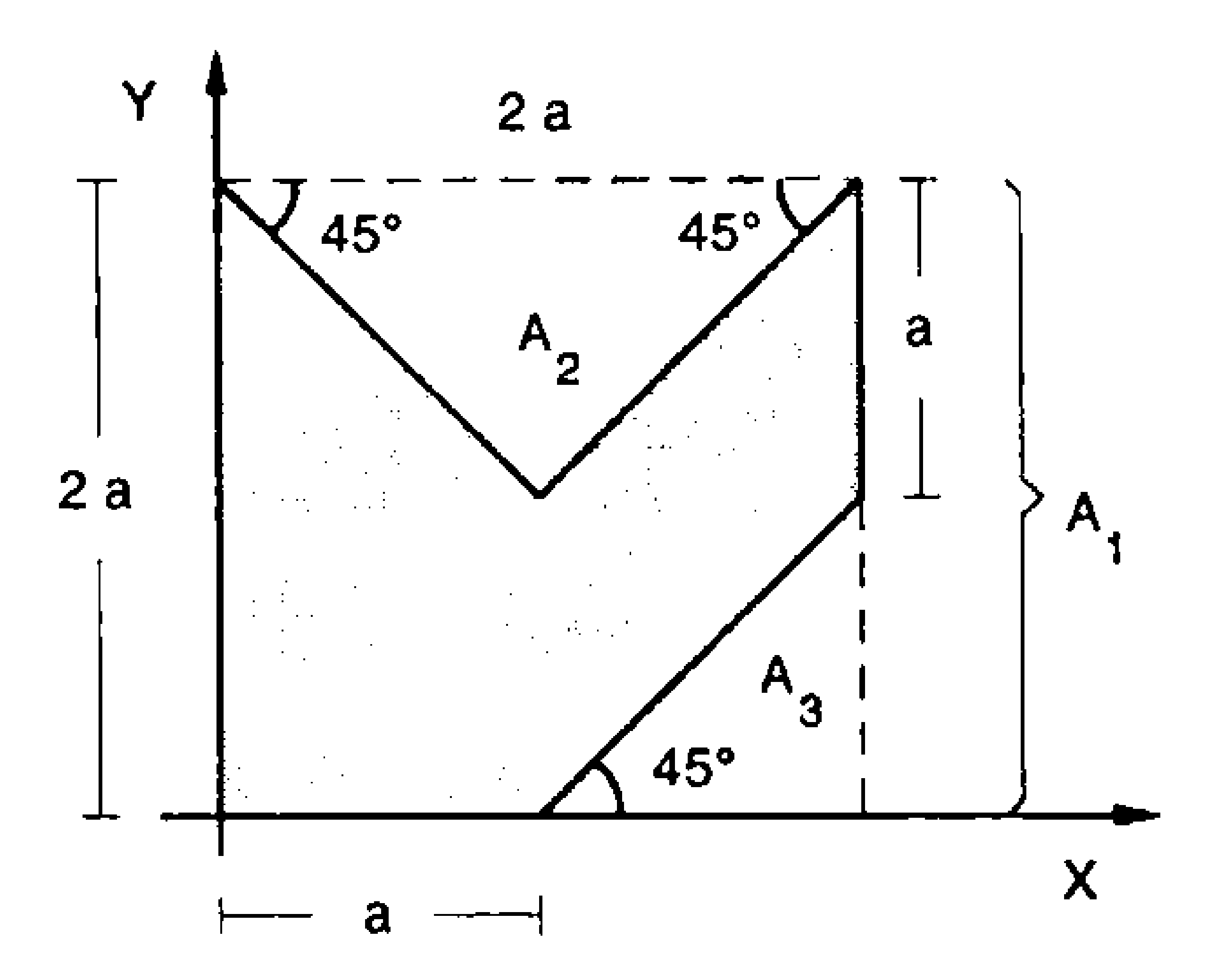
$$\bar{x}_g = \frac{24\text{ cm}^2 \times 2\text{ cm} + 4\text{ cm}^2 \times 5\text{ cm}}{24\text{ cm}^2 + 4\text{ cm}^2}$$

$$\bar{x}_g = \frac{68}{28}\text{ cm} = 2{,}43\text{ cm}$$

Finalmente:

Rpta.: C.G. (2,43 ; 2,71)

PROBLEMA 10. Determinar el centro de gravedad (C.G.) de la figura mostrada con respecto al sistema XY.



RESOLUCIÓN:

Se considera la figura un cuadrado de lado 2a y luego se le resta las áreas de los triángulos blancos.

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad (I)$$

$$\bar{x}_g = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3} \qquad (II)$$

Donde: $A_1 = 2a \times 2a = 4a^2$

$y_1 = a \quad ; \quad x_1 = a$

$A_2 = -\frac{2a \times a}{2} = -a^2$

$y_2 = a + \frac{2a}{3} = \frac{5a}{3} \quad ; \quad x_2 = a$

$A_3 = -\frac{a \times a}{2} = -\frac{a^2}{2}$

$y_3 = \frac{a}{3} \quad ; \quad x_3 = \frac{5a}{3}$

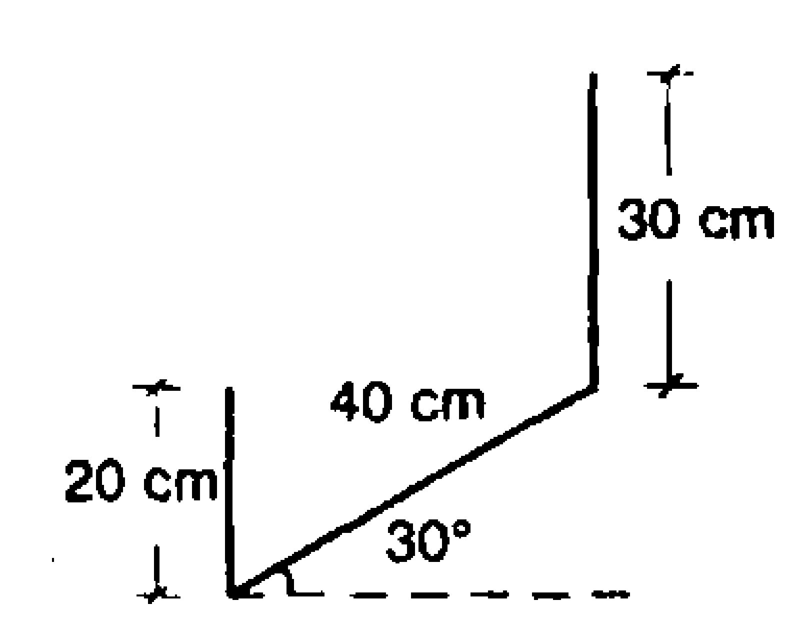
Sustituyendo en (I) y (II):

$$\bar{y}_g = \frac{4a^2.a - a^2.\frac{5a}{3} - \frac{a^2}{2}.\frac{a}{3}}{4a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{13a}{15}$$

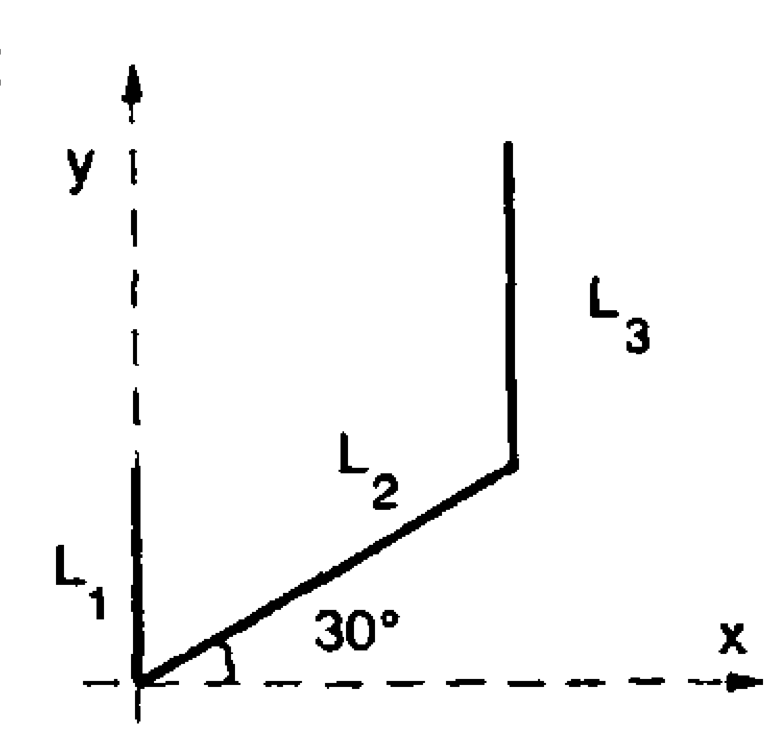
$$\bar{x}_g = \frac{4a^2.a - a^2.a - \frac{a^2}{2}.\frac{5a}{3}}{4a^2 - a^2 - \frac{a^2}{2}} = \frac{13a}{15}$$

Rpta. : $C.G.\left(\frac{13a}{15} \; ; \; \frac{13a}{15}\right)$

PROBLEMA 11. Hallar el C.G. del alambre de la figura.



RESOLUCIÓN:



Para hallar el C.G. se consideran las longitudes o porciones del alambre.

$$\bar{y}_g = \frac{L_1y_1 + L_2y_2 + L_3y_3}{L_1 + L_2 + L_3} \qquad (I)$$

$$\bar{x}_g = \frac{L_1x_1 + L_2x_2 + L_3x_3}{L_1 + L_2 + L_3} \qquad (II)$$

$L_1 = 20cm \quad ; \quad L_3 = 30cm$

$L_2 = 40cm \quad ; \quad y_1 = 10cm$

$y_2 = \frac{L_2}{2} \text{ sen } 30° = 10 \text{ cm}$

$y_3 = 15 + L_2 \text{ sen } 30° = 35 \text{ cm}$

$x_1 = 0$

$x_2 = \frac{L_2}{2} \cos 30° = 17{,}2 \text{ cm}$

$x_3 = L_2 \cos 30° = 34{,}4 \text{ cm}$

Sustituyendo valores en (I) y (II):

$$\bar{y}_g = \frac{20 \text{ cm} . 10 \text{ cm} + 40 \text{ cm} . 10 \text{ cm} + 30 \text{ cm} . 34{,}4 \text{ cm}}{20 \text{ cm} + 40 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}$$

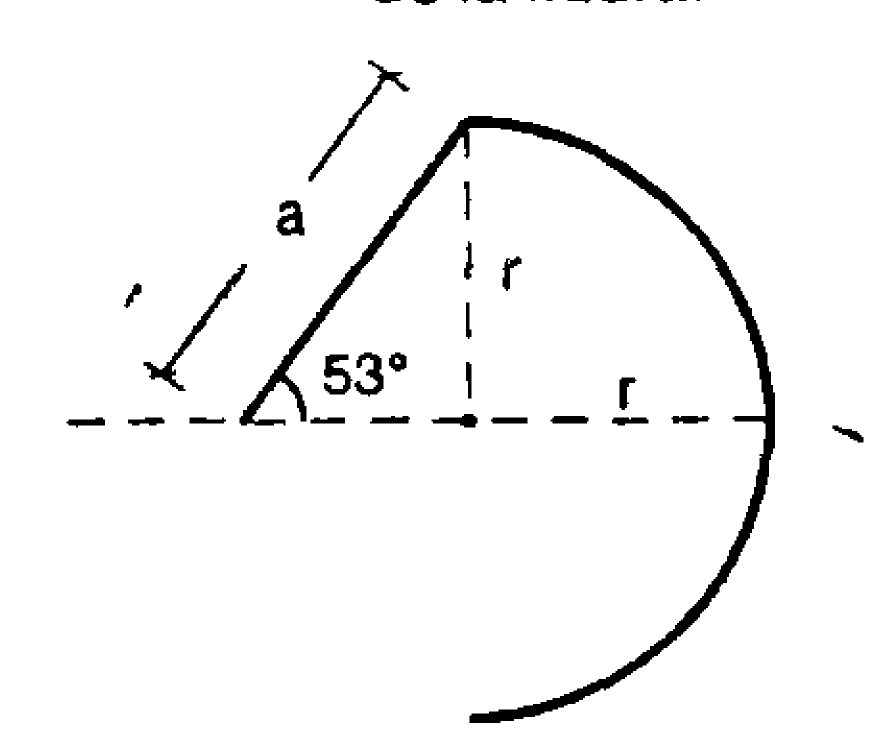
$\bar{y}_g = 18{,}34$

$$\bar{x}_g = \frac{20 \text{ cm} . 0 + 40 \text{ cm} . 17{,}2 \text{ cm} + 30 \text{ cm} . 34{,}4 \text{ cm}}{20 \text{ cm} + 40 \text{ cm} + 30 \text{ cm}}$$

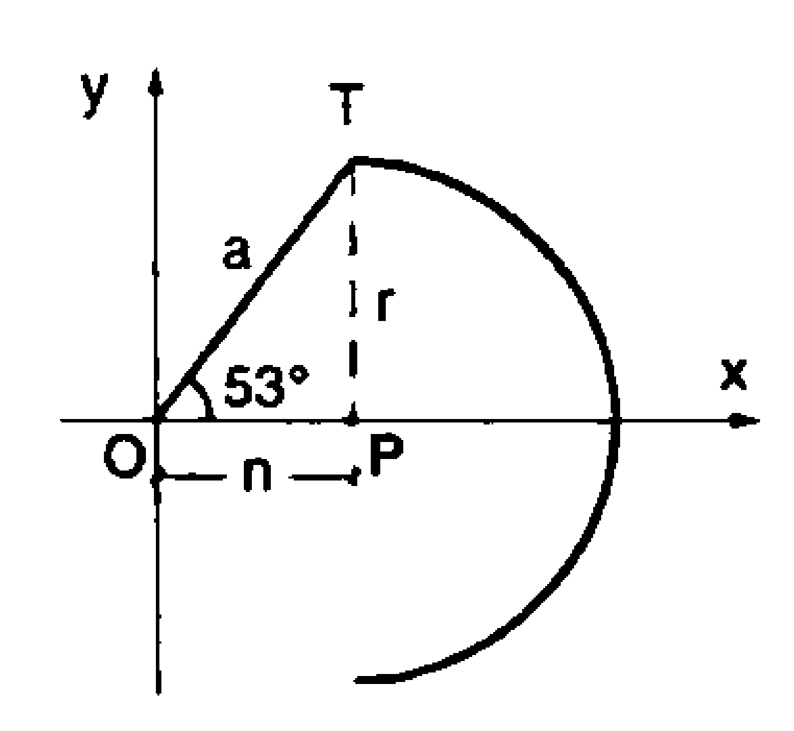
$\bar{x}_g = 19{,}11$

Rpta.: C.G. (19,11 ; 18,34)

PROBLEMA 12. Hallar el C.G. del alambre de la figura.



RESOLUCIÓN:



Un triángulo rectángulo cuyo ángulo agudo es 53°, es el clásico triángulo de lados 3, 4 y 5; o proporcionales a estos números, luego se deduce que en el triángulo OPT.

$$\frac{a}{5} = \frac{r}{4} = \frac{n}{3}$$

de donde: $r = \dfrac{4a}{5}$ y $n = \dfrac{3a}{5}$

Además recordando que el centro de gravedad de una semicircunferencia está a $2r/\pi$ de la base:

$$\bar{y}_g = \frac{L_1 y_1 + L_2 y_2}{L_1 + L_2} \qquad (I)$$

$$\bar{x}_g = \frac{L_1 x_1 + L_2 x_2}{L_1 + L_2} \qquad (II)$$

1) Para la barra: $L_1 = a$

$$y_1 = \frac{a}{2} \cdot \text{sen}\, 53° = \frac{a}{2} \cdot \frac{4}{5} = \frac{2a}{5}$$

$$x_1 = \frac{n}{2} = \frac{3a}{10}$$

2) Para la semicircunferencia:

$$L_2 = \pi r = \frac{4\pi a}{5}$$

$$y_2 = 0$$

$$x_2 = n + \frac{2r}{\pi} = \frac{3a}{5} + \frac{2 \cdot 4a}{5\pi} = \frac{3\pi a + 8a}{5\pi}$$

Sustituyendo en (I) y (II):

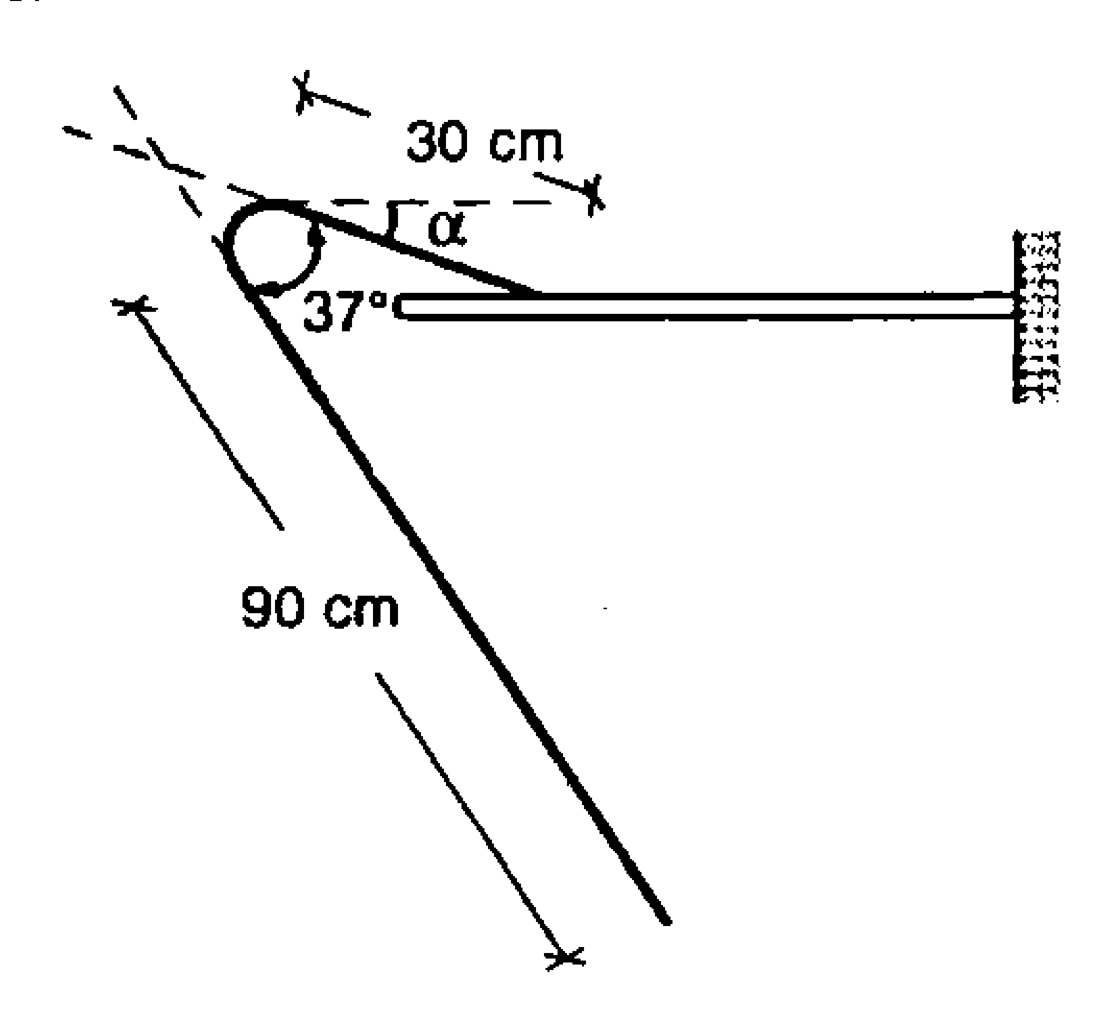
$$\bar{y}_g = \frac{a \cdot \frac{2a}{5} + \frac{4\pi a}{5} \cdot 0}{a + \frac{4\pi a}{5}} = \frac{2a}{5 + 4\pi}$$

$$\bar{x}_g = \frac{a \cdot \frac{3a}{10} + \frac{4\pi a}{5}\left(\frac{3\pi a + 8a}{5\pi}\right)}{a + \frac{4\pi a}{5}}$$

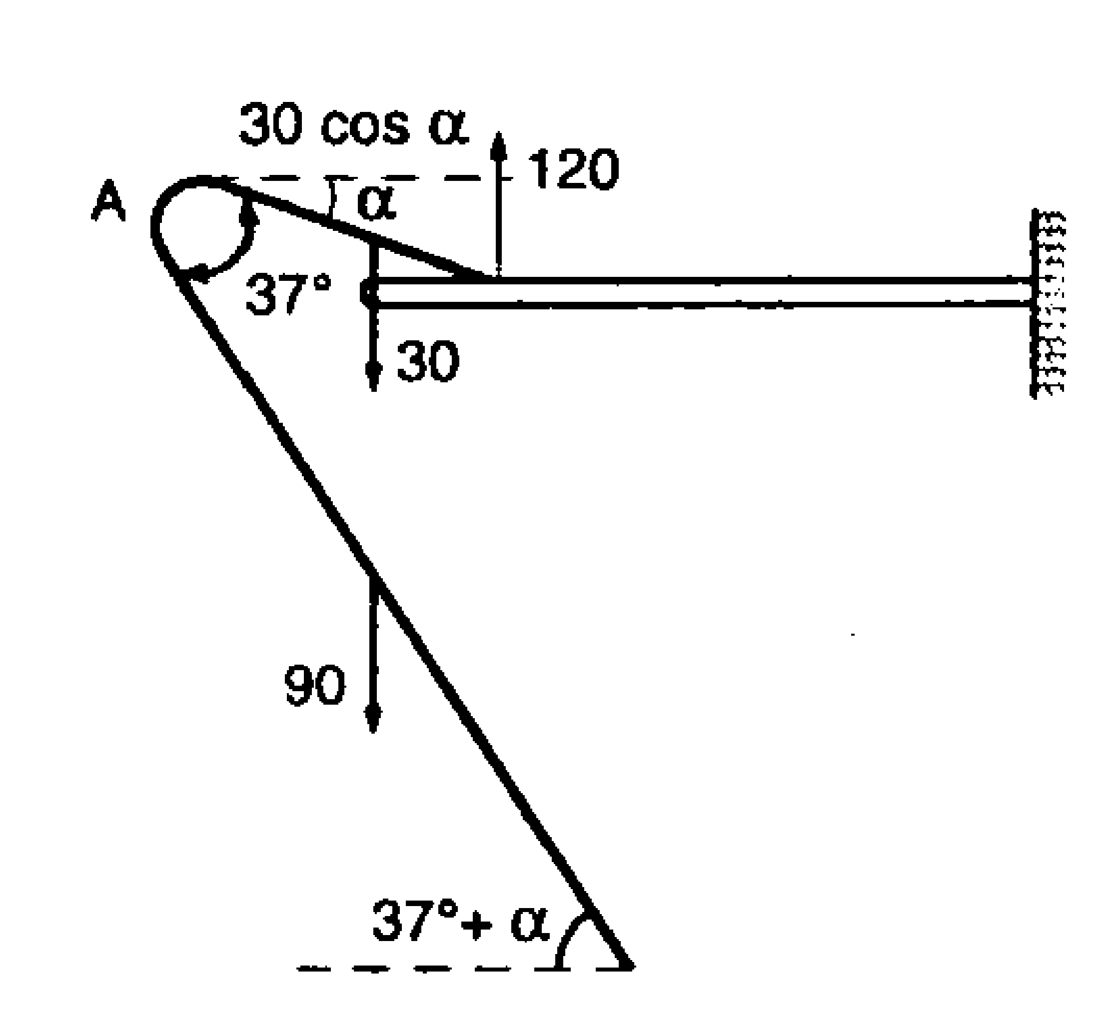
$$\bar{x}_g = \frac{a\,(79 + 24\pi)}{10(5 + 4\pi)}$$

Rpta.: C.G. $\left(\dfrac{a\,(79 + 24\pi)}{10\,(5 + 4\pi)} \;;\; \dfrac{2a}{5 + 4\pi}\right)$

PROBLEMA 13. Se tiene un alambre doblado como se indica en la figura, un brazo mide 30 cm y el otro 90 cm. Calcular el ángulo α para la posición de equilibrio.



RESOLUCIÓN: Si el alambre doblado está en equilibrio, entonces el Centro de Gravedad está en la vertical que pasa por el apoyo. Asimilando sus pesos a su longitudes, así la barra mayor pesa como 90, la barra menor como 30 y el conjunto como 120.



Basado en el Teorema de Varignon con respecto al punto A:

Momento de la resultante = suma de momentos de las fuerzas presentes

$$120 \,.\, 30\cos\alpha = 30 \,.\, 15\cos\alpha + 90 \,.\, 45\cos(37° + \alpha)$$

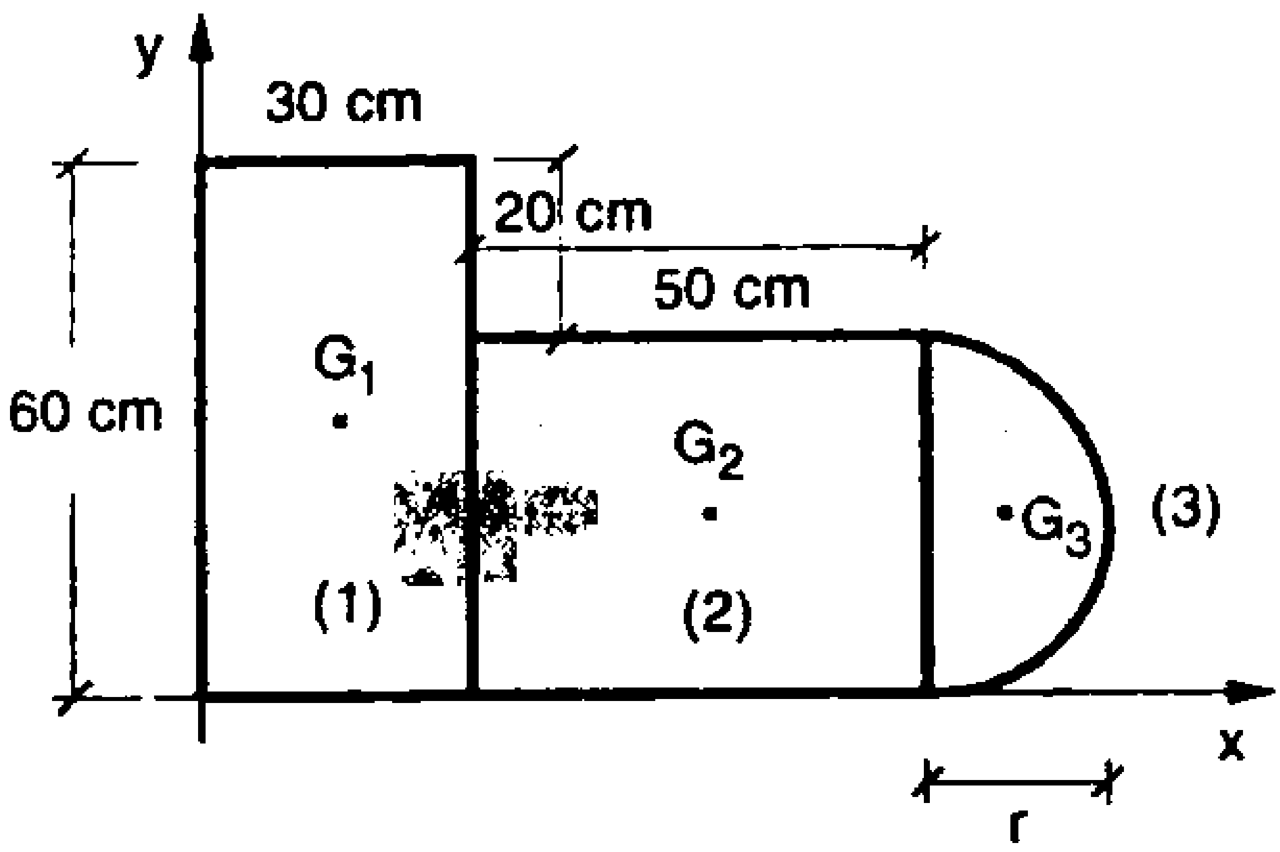
$$12 \,.\, 30\cos\alpha = 3 \,.\, 15\cos\alpha + 9 \,.\, 45(\cos 37° \cos\alpha - \text{sen } 37° \text{ sen }\alpha)$$

$$40\cos\alpha = 5\cos\alpha + 45\left(\frac{4}{5}\cos\alpha - \frac{3}{5}\text{sen }\alpha\right)$$

$$\frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha} = \frac{1}{27} \quad ; \quad \text{tg }\alpha = \frac{1}{27}$$

Rpta.: $\alpha = \text{arc tg } \frac{1}{27} \cong 2° \ 07' \ 16''$

PROBLEMA 14. Hallar el centro de gravedad de una lámina metálica homogénea y de espesor uniforme cuya forma y dimensiones se indica en la figura.



RESOLUCIÓN: Numerando las figuras con (1), (2) y (3):

$$A_1 = 60 \text{ cm} \,.\, 30 \text{ cm} = 1\,800 \text{ cm}^2$$

$$A_1x_1 = 1\,800 \text{ cm}^2 \,.\, 15 \text{ cm} = 27\,000 \text{ cm}^3$$

$$A_2 = 50 \text{ cm} \,.\, 40 \text{ cm} = 2\,000 \text{ cm}^2$$

$$A_2x_2 = 2\,000 \text{ cm}^2 \,.\, 55 \text{ cm} = 110\,000 \text{ cm}^3$$

$$A_3 = \frac{1}{2}\pi r^2 = \frac{1}{2} \,.\, 3{,}14\,(20 \text{ cm})^2$$

$$A_3x_3 = 628 \text{ cm}^2 \,.\left(80 + \frac{4r}{3\pi}\right)$$

pero: $r = 20 \text{ cm} \Rightarrow A_3x_3 = 55\,570 \text{ cm}^3$

$$\bar{x}_g = \frac{A_1x_1 + A_2x_2 + A_3x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

$$\bar{x}_g = \frac{2\,700 \text{ cm}^3 + 110\,000 \text{ cm}^3 + 55\,570 \text{ cm}^3}{1\,800 \text{ cm}^2 + 2\,000 \text{ cm}^2 + 628 \text{ cm}^2}$$

$$\bar{x}_g = 42{,}5 \text{ cm}$$

$$A_1y_1 = 1\,800 \text{ cm}^2 \,.\, 30 \text{ cm} = 54\,000 \text{ cm}^3$$

$$A_2y_2 = 2\,000 \text{ cm} \,.\, 20 \text{ cm} = 40\,000 \text{ cm}^2$$

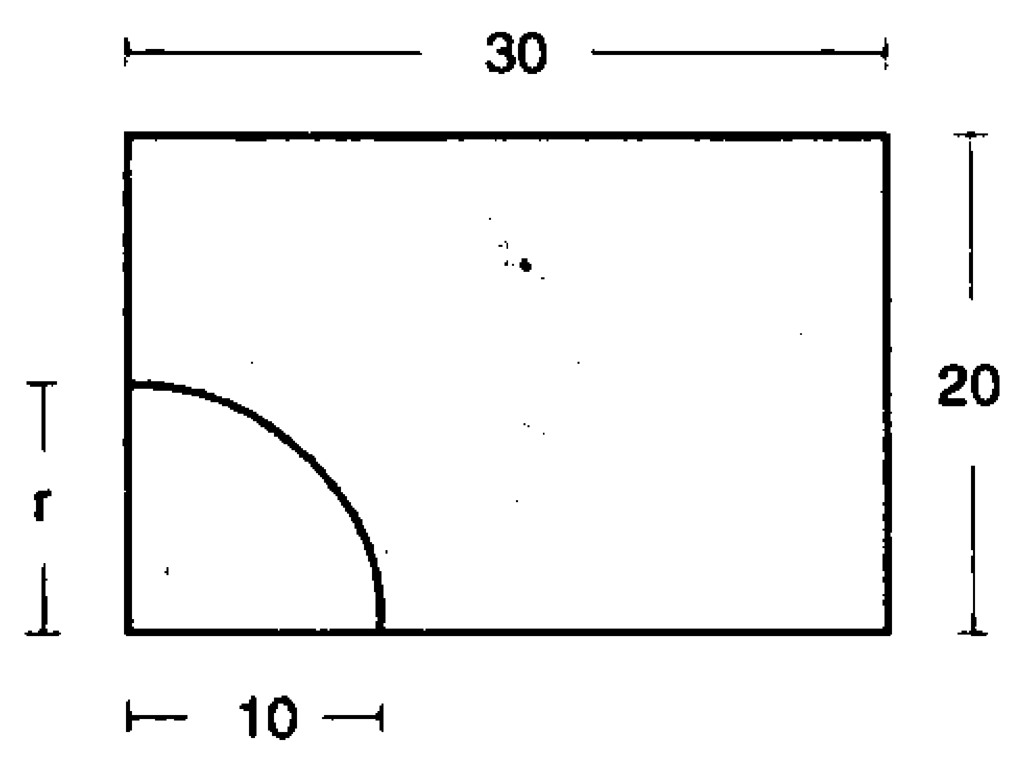
$$A_3y_3 = 628 \text{ cm}^2 \,.\, 20 \text{ cm} = 12\,560 \text{ cm}^2$$

$$\bar{y}_g = \frac{54\,000 \text{ cm}^3 + 40\,000 \text{ cm}^3 + 12\,560 \text{ cm}^3}{1\,800 \text{ cm}^2 + 2\,000 \text{ cm}^2 + 628 \text{ cm}^3}$$

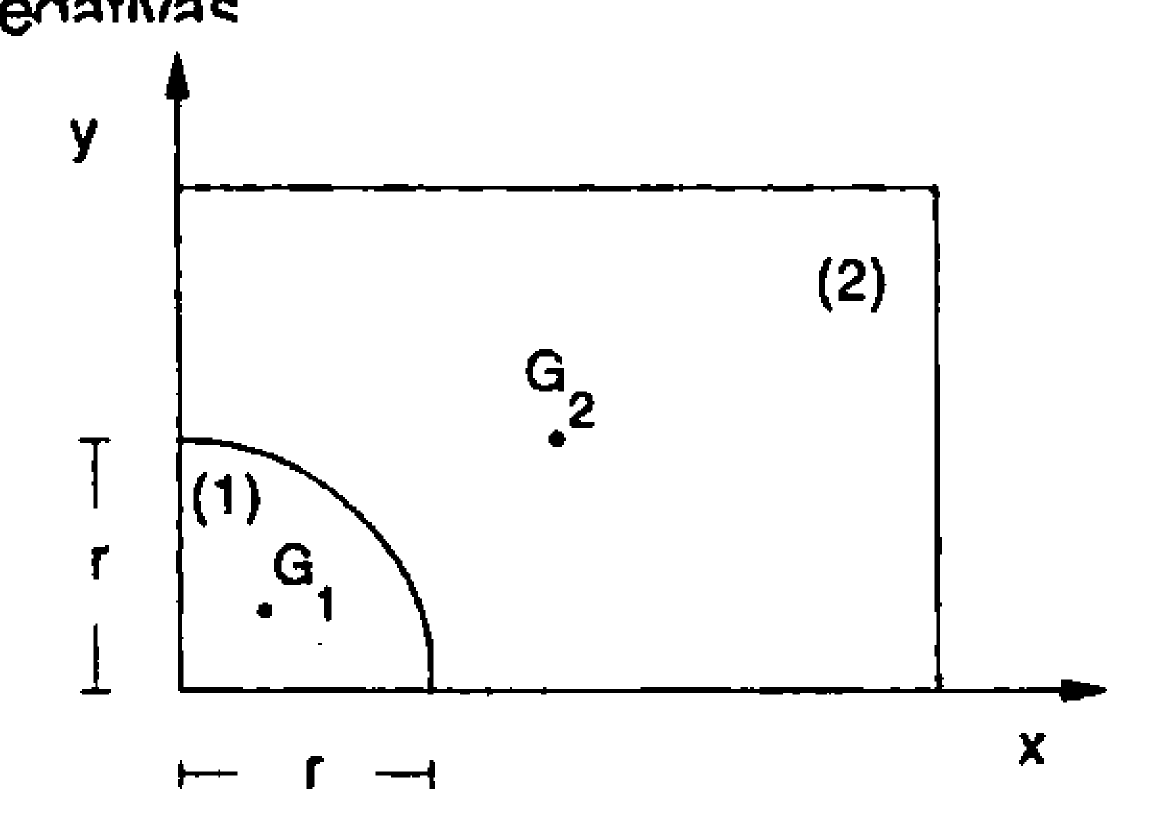
$$\bar{y}_g = 24 \text{ cm}$$

Rpta.: C.G. (43,5 cm ; 24 cm)

PROBLEMA 15. Hallar el C.G. de la figura siguiente:



RESOLUCIÓN: Las áreas llenas son positivas y las áreas huecas son negativas



$$A_1 = -\frac{1}{4}\pi r^2 = -\frac{1}{4}.3{,}14.10^2$$

$$A_1 = -78{,}5$$

$$A_2 = 30.20 = 600$$

$$A_2 - A_1 = 600 - 78{,}5 = 521.5$$

$$A_1\ x_1 = -78{,}5 . \frac{4r}{3\pi} = -333{,}2$$

$$A_2\ y_2 = 600.10\,cm = 6\,000$$

$$\bar{x}_g = \frac{A_2x_2 - A_1x_1}{A_2 - A_1} = \frac{9\,000 - 333{,}2}{521{,}5}$$

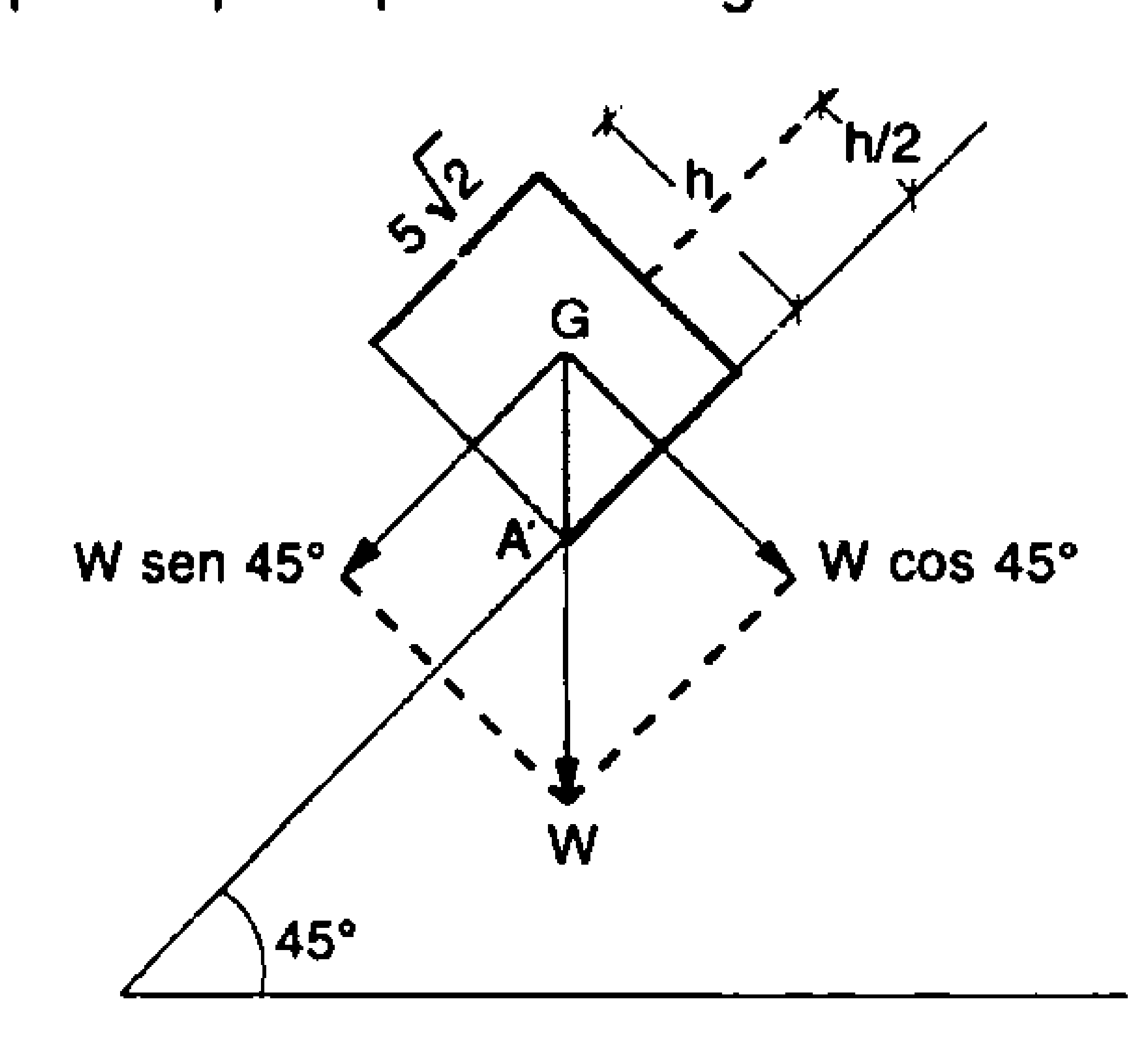
$$\bar{x}_g = 16{,}6$$

$$\bar{y}_g = \frac{A_2\,y_2 - A_1\,y_1}{A_2 - A_1} = \frac{6\,000 - 333{,}2}{521{,}5}$$

$$\bar{y}_g = 10{,}9$$

Rpta.: C.G. (16,6 ; 10,9)

PROBLEMA 16. Sobre un plano inclinado de 45° está reposando un prisma rectangular de base cuadrada de $5\sqrt{2}$ de lado. ¿Cuál será la altura máxima del prisma para que no se caiga?



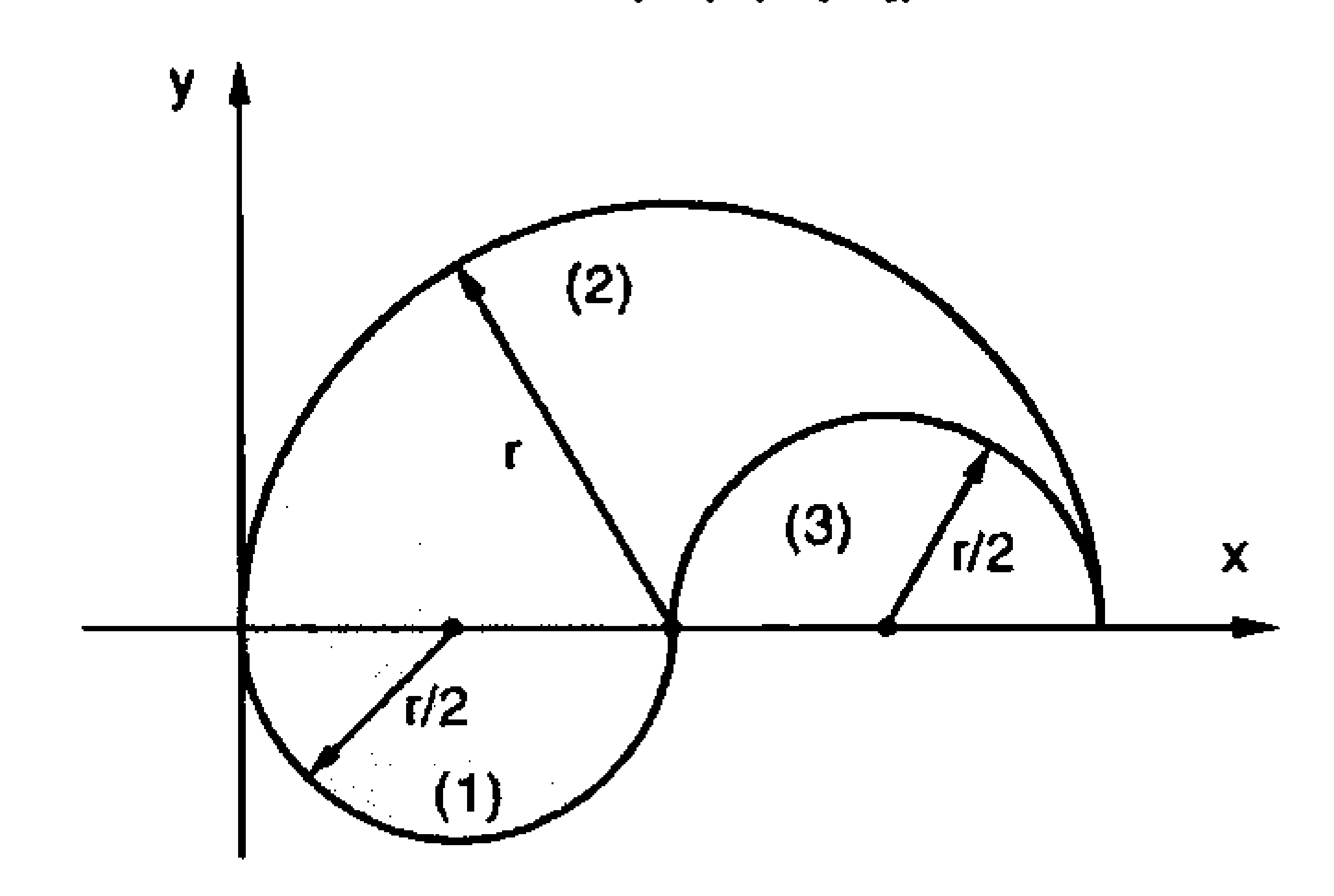
RESOLUCIÓN: Cuando la línea de acción del peso considerado en el centro de gravedad "G" del prisma, pase por "A" el prisma estará en una situación inestable, un poco más y se cae.

$$\Sigma M_A = 0$$

$$W\,sen\,45° . \frac{h}{2} = W\cos 45° . \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

De donde: Rpta.: $h = 5\sqrt{2}$

PROBLEMA 17. Hallar el centro de grave- . . . . .



RESOLUCIÓN: Sean (1) ; (2) y (3) las áreas:

$$A_1 = \frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = \frac{\pi r^2}{8}$$

$$A_2 = \frac{1}{2}\pi r^2$$

$$A_3 = -\frac{1}{2}\pi\left(\frac{r}{2}\right)^2 = -\frac{\pi r^2}{8}$$

$$A_1 x_1 = A_1\frac{r}{2} = \frac{\pi r^2}{8}.\frac{r}{2} = \frac{\pi r^3}{16}$$

$$A_2 x_2 = A_2\, r = \frac{\pi r^2}{2}.r = \frac{\pi r^3}{2}$$

$$A_3 x_3 = A_3\frac{3r}{2} = \frac{\pi r^2}{8}.\frac{3r}{2} = -\frac{3\pi r^3}{16}$$

$$A_1 y_1 = A_1\left(-\frac{4r}{6\pi}\right) = -\frac{\pi r^2}{8}.\frac{4r}{6\pi} = -\frac{r^3}{12}$$

$$A_2 y_2 = A_2 . \frac{4r}{3\pi} = -\frac{\pi r^2}{2}.\frac{4r}{3\pi} = -\frac{2r^3}{3}$$

$$A_3 y_3 = A_3 . \frac{4r}{6\pi} = -\frac{\pi r^2}{8}.\frac{4r}{6\pi} = -\frac{r^3}{12}$$

$$\bar{x}_g = \frac{A_1 x_1 + A_2 x_2 + A_3 x_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

http://librosysolucionarios.net

$$\bar{x}_g = \frac{\frac{\pi r^3}{16} + \frac{\pi r^3}{2} + \frac{3\pi r^3}{16}}{\frac{\pi r^3}{8} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{8}}$$

$$\bar{x}_g = \frac{3}{4} r$$

$$\bar{y}_g = \frac{A_1 y_1 + A_2 y_2 + A_3 y_3}{A_1 + A_2 + A_3}$$

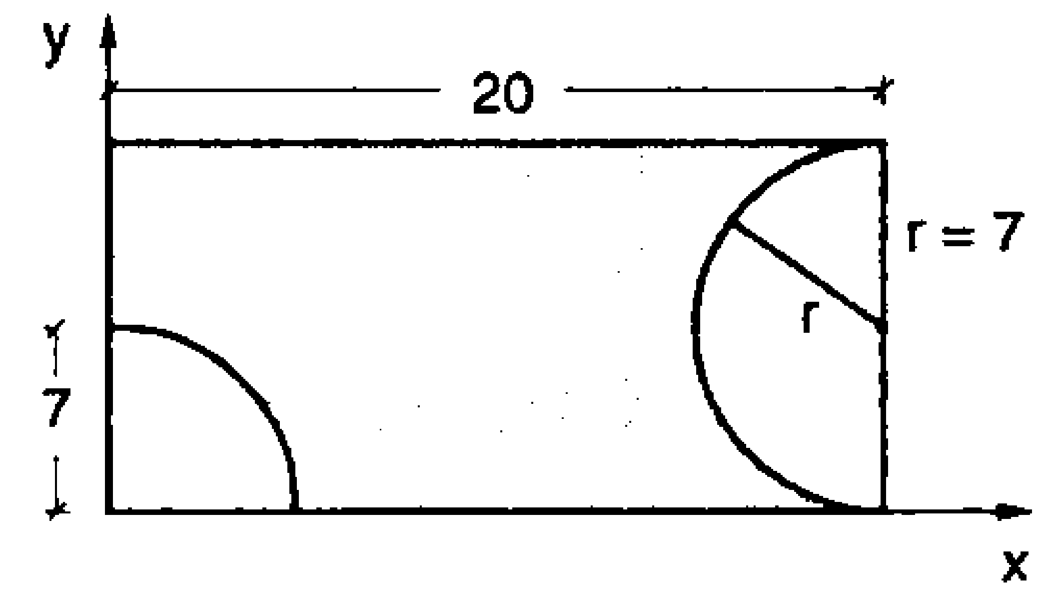
$$\bar{y}_g = \frac{-\frac{r^3}{12} + \frac{2r^3}{3} - \frac{r^3}{12}}{\frac{\pi r^2}{8} + \frac{\pi r^2}{2} - \frac{\pi r^2}{8}}$$

Luego: $\bar{y}_g = \frac{r}{\pi}$

Rpta. : $C.G.\left(\frac{3}{4} r \; ; \; \frac{r}{\pi}\right)$

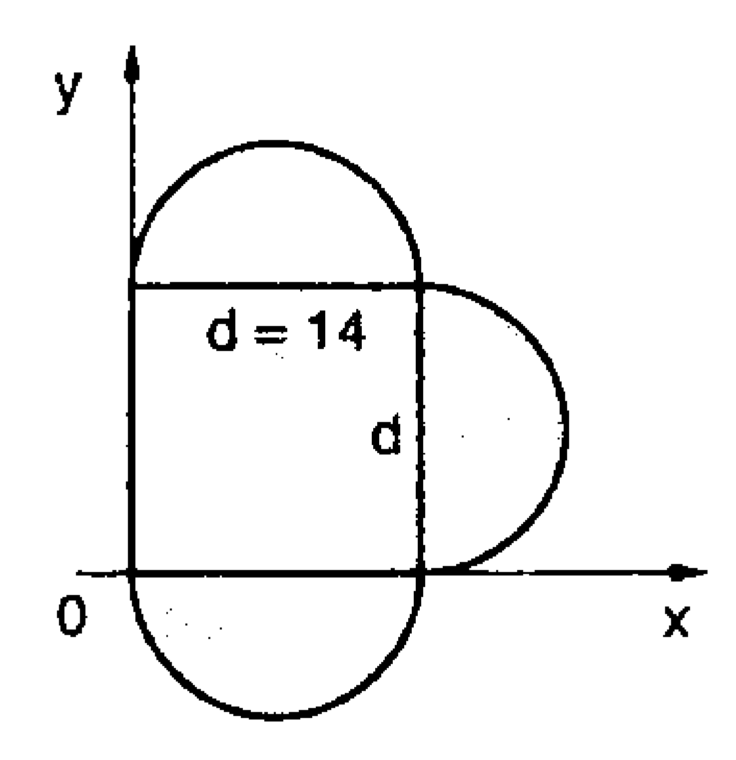
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar el C.G. de la figura.



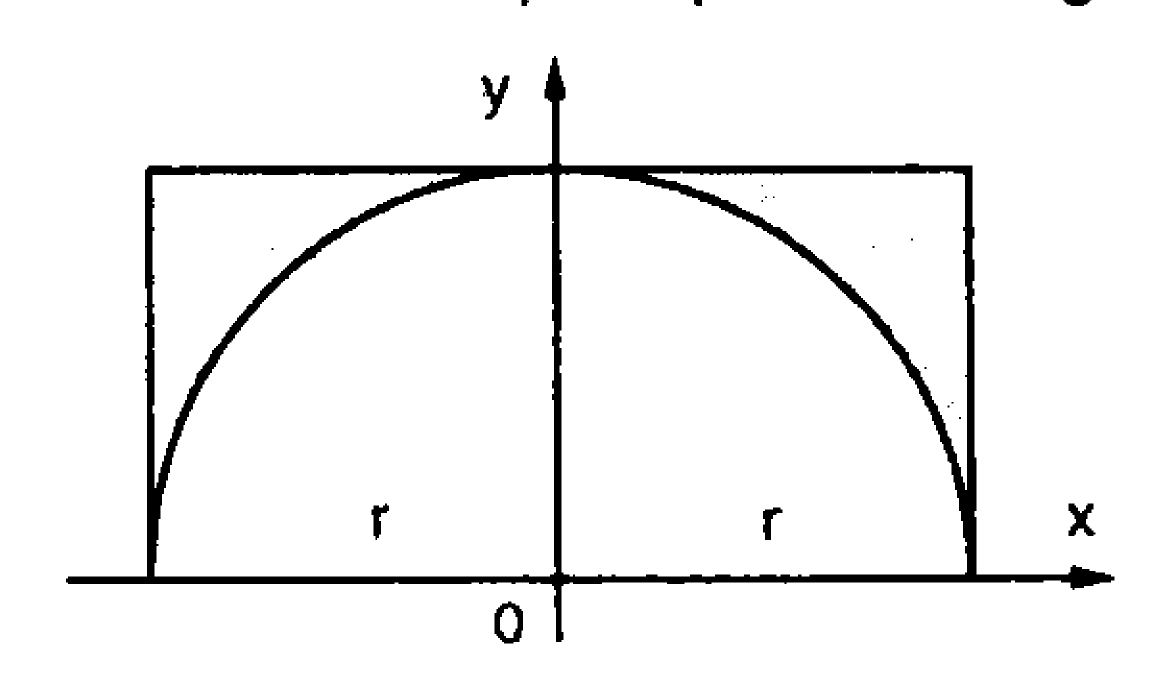
Rpta.: C.G. (8,4 ; 7,9)

2. Hallar el centro de gravedad de la figura.



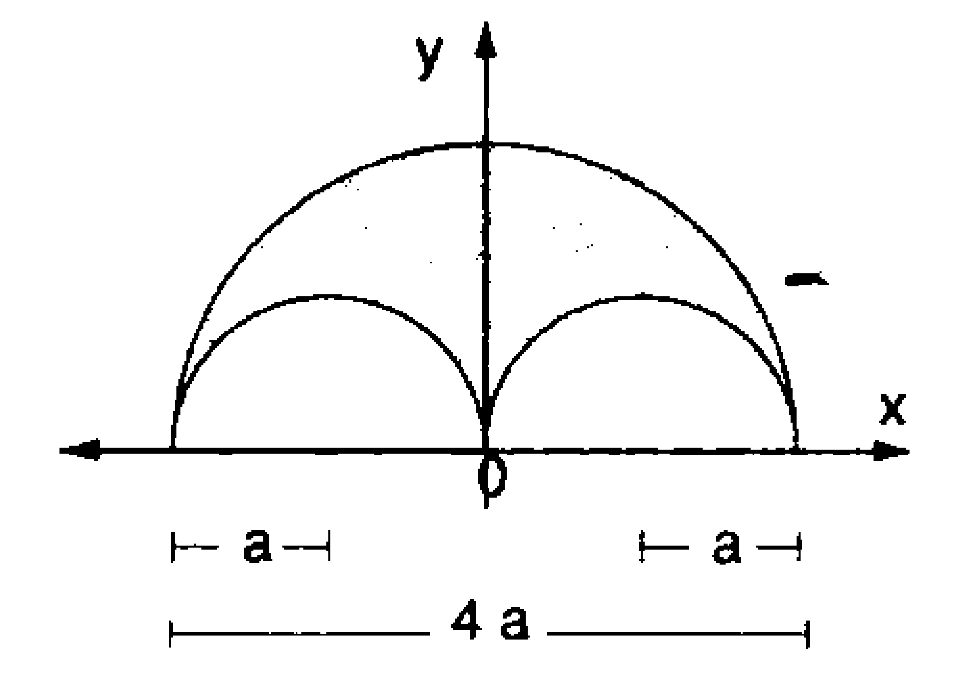
Rpta.: C.G. (8,8 ; 14)

3. ¿Cuánto de altura debe tener el cilindro de radio 10 cm para que no se caiga?



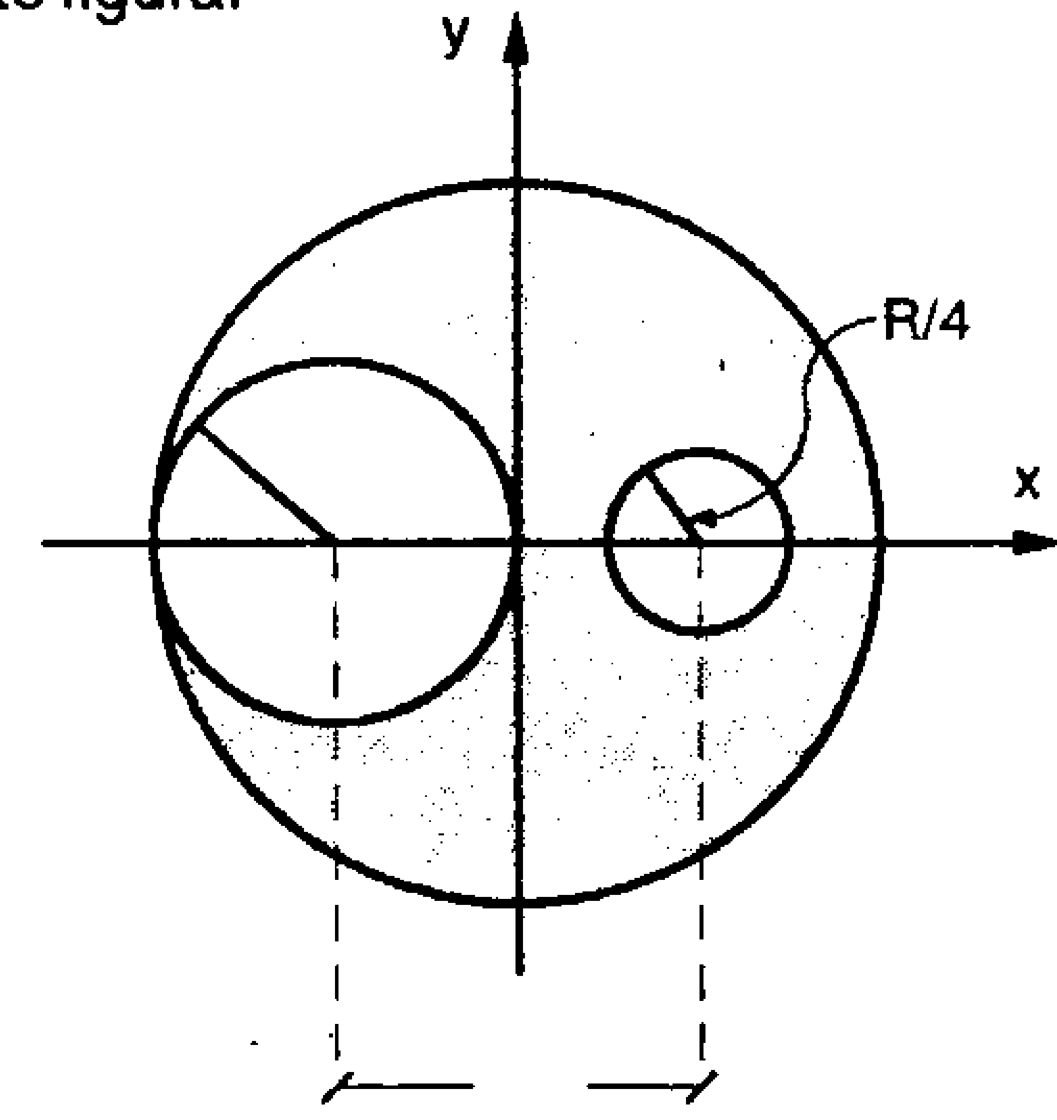
Rpta.: h = 26,67 cm

4. Hallar el centro de gravedad de la figura.



Rpta.: $C.G.\left(0 \; ; \; \frac{4a}{\pi}\right)$

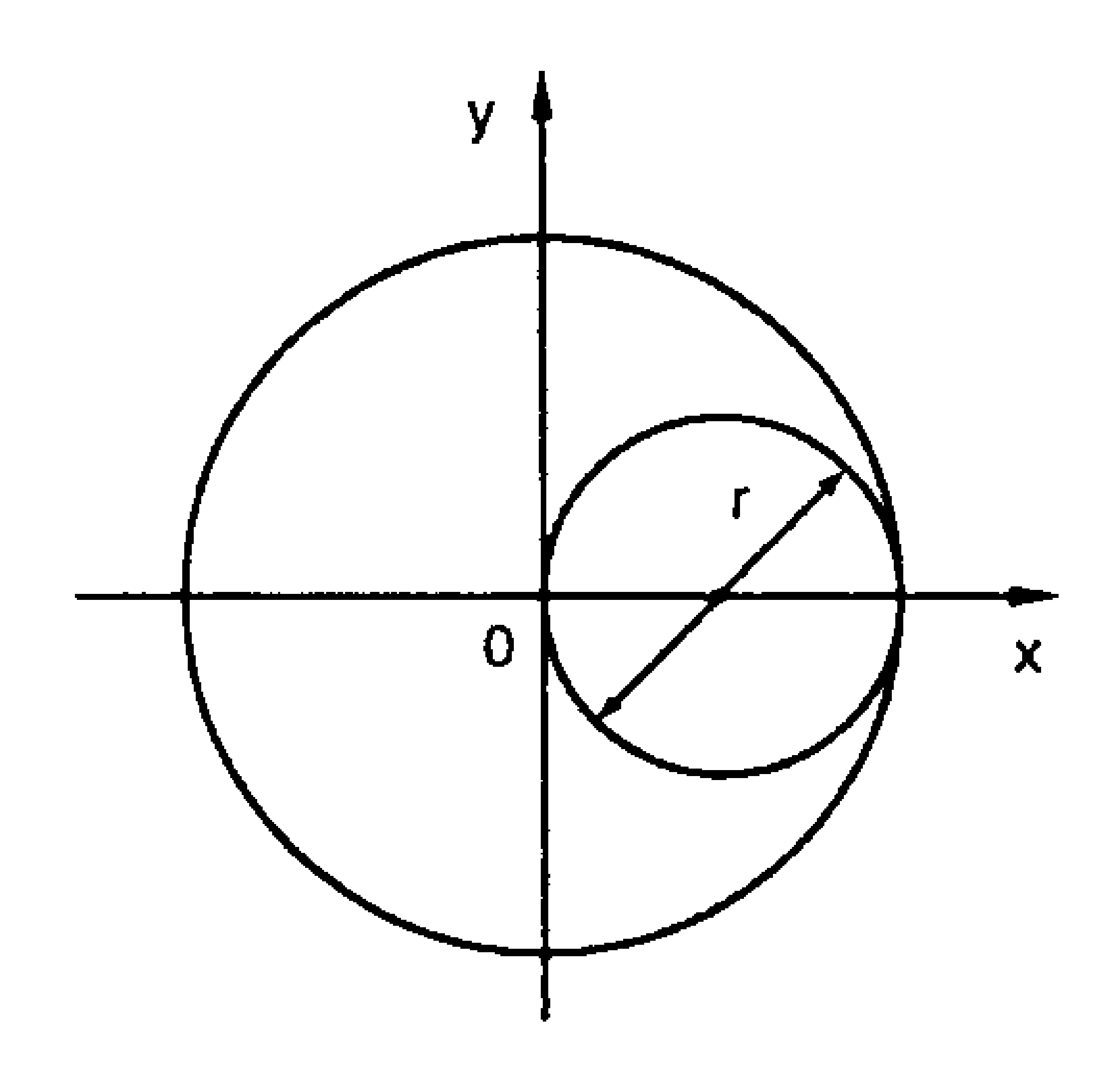
5. Hallar el centro de gravedad de la siguiente figura:



Rpta.: $\left(\frac{3R}{22} \; ; \; 0\right)$

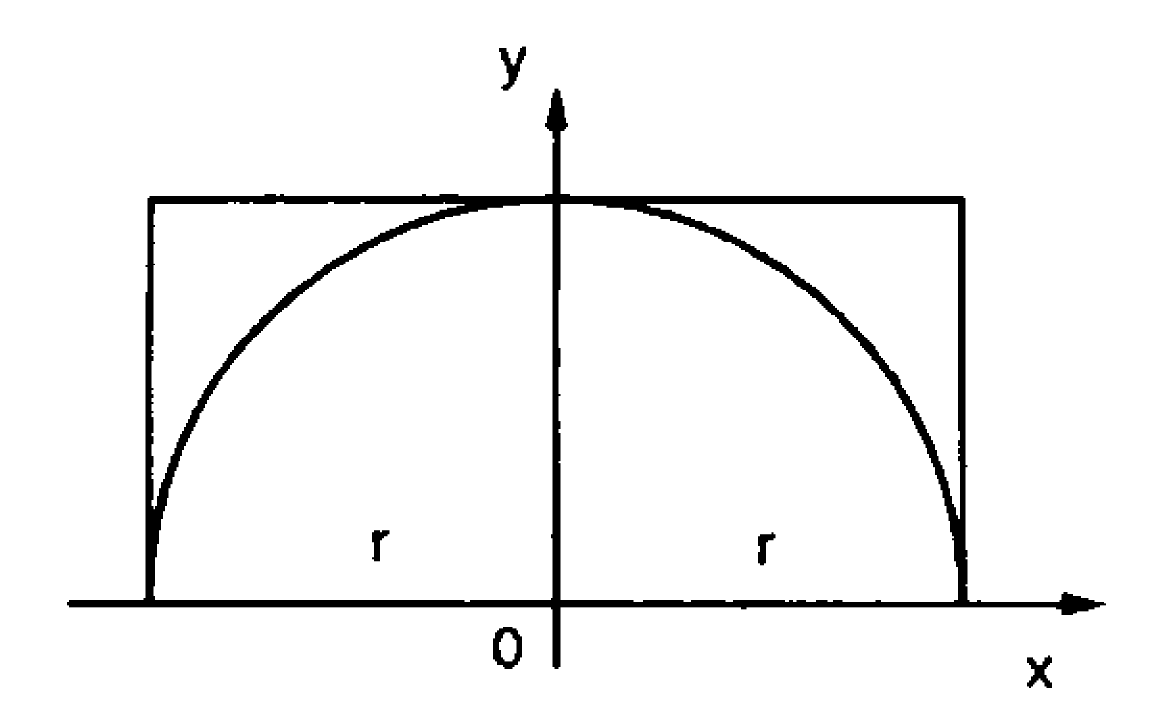
6. Hallar el centro de gravedad de la siguiente figura:

http://librosysolucionarios.net



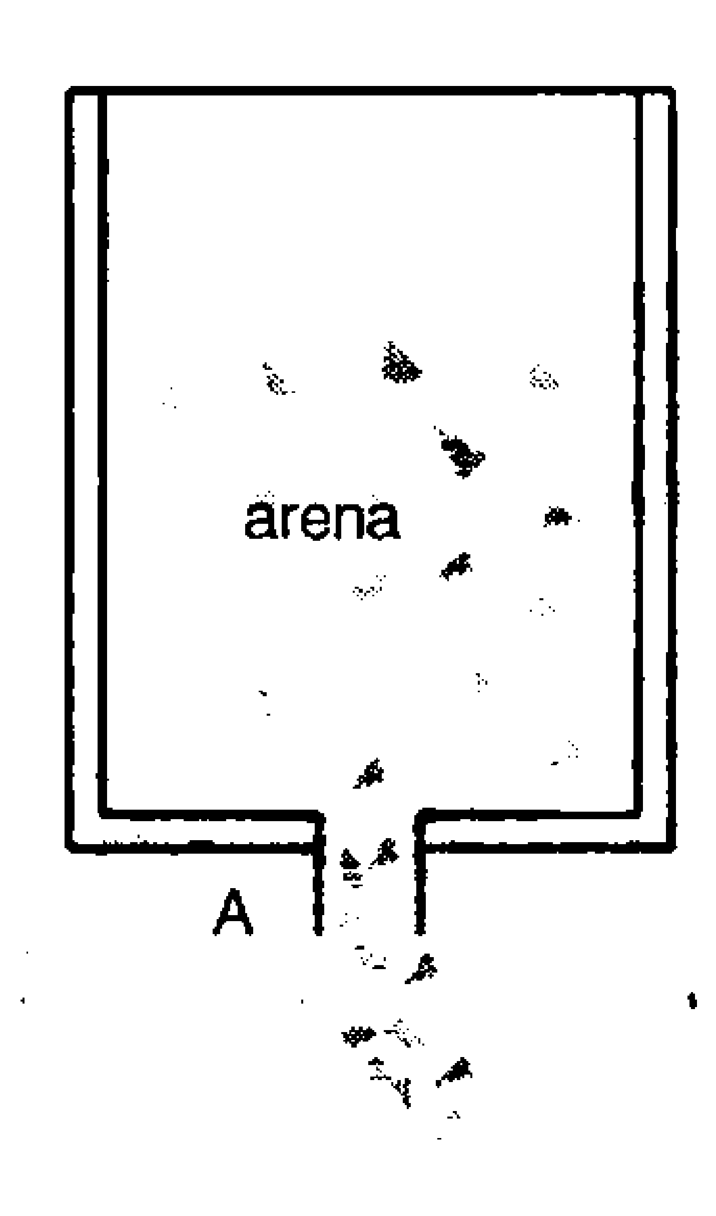
Rpta.: C.G. $\left(-\frac{1}{6}r \ ; \ 0\right)$

7. Hallar el centro de gravedad de la siguiente figura:



Rpta.: C.G. $\left(0 \ ; \ \frac{2r}{12-3\pi}\right)$

8. Se tiene un frasco sin fondo, que contiene arena. Si la arena sale pro el agujero "A" de modo que la superficie libre de la arena desciende uniformemente a razón de 4 cm/s. Calcular con qué rapidez desciende el centro de masa de la arena.



Rpta.: $V_{CM} = 0{,}03 \ m/s$

"El trabajo dignifica, el ocio envilece"

Juan Goñi Galarza

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 8

TRABAJO, POTENCIA y ENERGÍA

Trabajo, potencia y energía se encuentran entre los conceptos más importantes de la Física y desempeñan igualmente papeles importantes en nuestra vida diaria.

Los empleamos diariamente, aunque de una manera vaga e imprecisa, e incluso como si fueran sinónimos. Costó mucho a la ciencia distinguir claramente entre conceptos tan íntimamente vinculados entre sí, pero ahora cada una de ellas tiene un significado perfectamente definido.

En Física, el concepto de trabajo tiene una definición precisa que difiere de nuestro uso cotidiano. Apareció en Mecánica sólo en el siglo XIX (casi 150 años después del descubrimiento de las leyes del movimiento de Newton), cuando la humanidad comenzó a utilizar ampliamente máquinas y mecanismos.

En los campos técnicos, la medición de cuánto trabajo se lleva a cabo en determinada situación es muy importante.

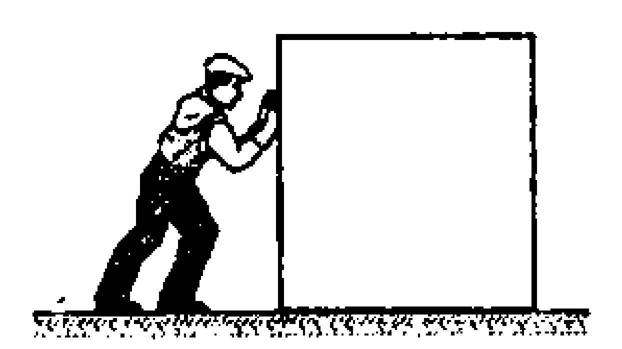
Por ejemplo, un ingeniero debe conocer la capacidad de **trabajo** de una máquina, sus requerimientos de **energía** y también la rapidez con que puede realizar el trabajo o su producción de **potencia**.

Estos conceptos básicos se definirán y explicarán a continuación.

TRABAJO MECÁNICO "T"

Es una magnitud física escalar que nos expresa la medida de la transmisión de movimiento de un cuerpo hacia otro mediante una fuerza.

Ejemplo: Consideremos el caso de un hombre que interactúa sobre un bloque.



¿Qué ejerce o trata de hacer el hombre sobre el bloque?

El hombre ejerce una fuerza **F** sobre el bloque, y trata de desplazarlo.

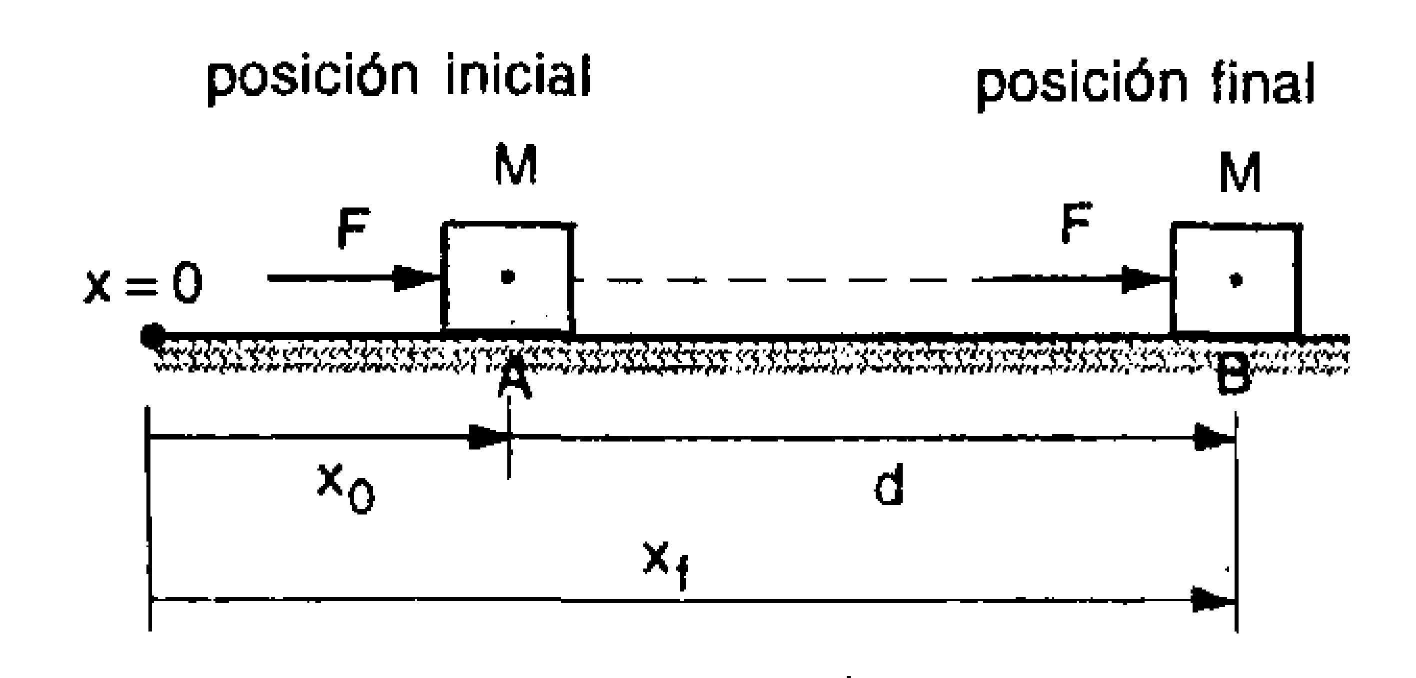
En caso de desplazar o transmitir movimiento mecánico al bloque ¿Qué actividad realiza el hombre?

Si el hombre al ejercer una fuerza F, transmite movimiento entonces realiza trabajo mecánico.

Si el hombre no logra desplazar al bloque ¿Qué realiza?

El hombre sólo aplica una fuerza pero no realiza trabajo, pues no transmite movimiento mecánico.

¿Cómo hallar el trabajo mecánico?



Para un observador fijo en el origen (x = 0), la fuerza **F** transmite movimiento

http://librosysolucionarios.net

mecánico, pues el bloque M experimenta un cambio de posición.

Por lo tanto el trabajo realizado por la fuerza **F** a lo largo del camino $A \rightarrow B$ se determina de la siguiente manera:

$$T_{A \rightarrow B}^{F} = F.d = F.\Delta x$$

$T_{A \rightarrow B}^{F}$: Trabajo realizado por la fuerza F, al desplazar un cuerpo de A a B.

F : Es una fuerza constante, en newtons "N"

d : Es la distancia que expresa la medida del cambio de posición , en metros "m", $d = \Delta x = x_f - x_o$

Los vectores $\vec{F}$ y $\vec{d}$ son colineales

UNIDADES DE TRABAJO:

La unidad de medida del trabajo mecánico en el SI es el joule "J". También se admite una unidad más pequeña, el ergio "erg".

EL JOULE : Es el trabajo realizado por la fuerza de 1 newton, que aplicado a un cuerpo lo desplaza la distancia de 1 m.

1 joule = 1 newton.1 metro	J = N.m

EL ERGIO : Es el trabajo realizado por la fuerza de 1 dina, que aplicada a un cuerpo lo desplaza la distancia de 1 cm.

1 erg = 1 dina . 1 cm

EQUIVALENCIA: 1 joule = 10^7 ergio

Demostración: Se sabe que:

1 joule = 1 newton x 1 metro

pero: 1 newton = 10^5 dina

además: 1 metro = 10^2 cm

luego, reemplazando:

1 joule = 10^5 dina x 10^2 cm

1 joule = 10^7 dina x cm

pero: dina x cm = ergio

$\therefore$

1 joule = 10^7 ergio

OBSERVACIÓN:

El trabajo realizado por una fuerza puede ser positivo, negativo o nulo.

Trabajo Positivo "T" (+)

Lo realizan las fuerzas que tienen la dirección del movimiento.

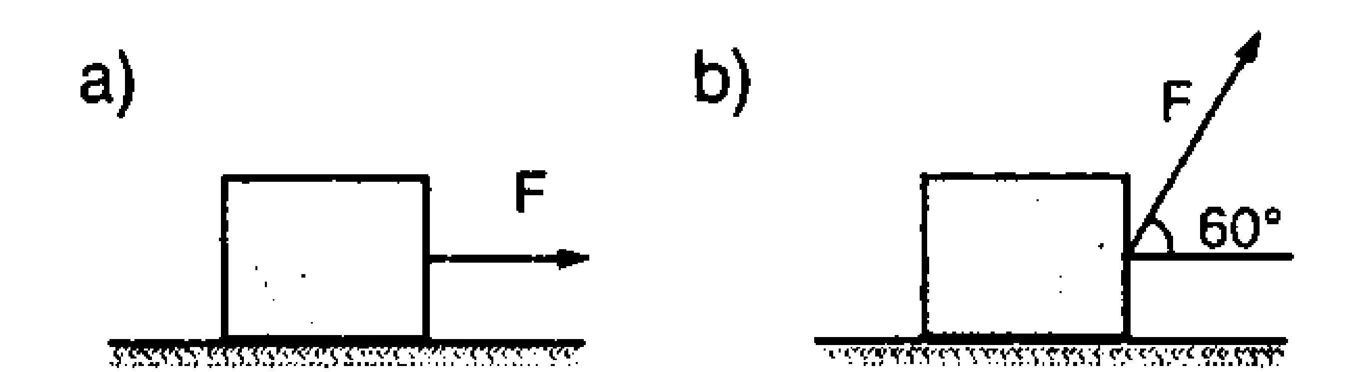
Trabajo Negativo "T" (-)

Lo realizan las fuerzas que se oponen a la dirección del movimiento.

Trabajo Nulo "T" (0)

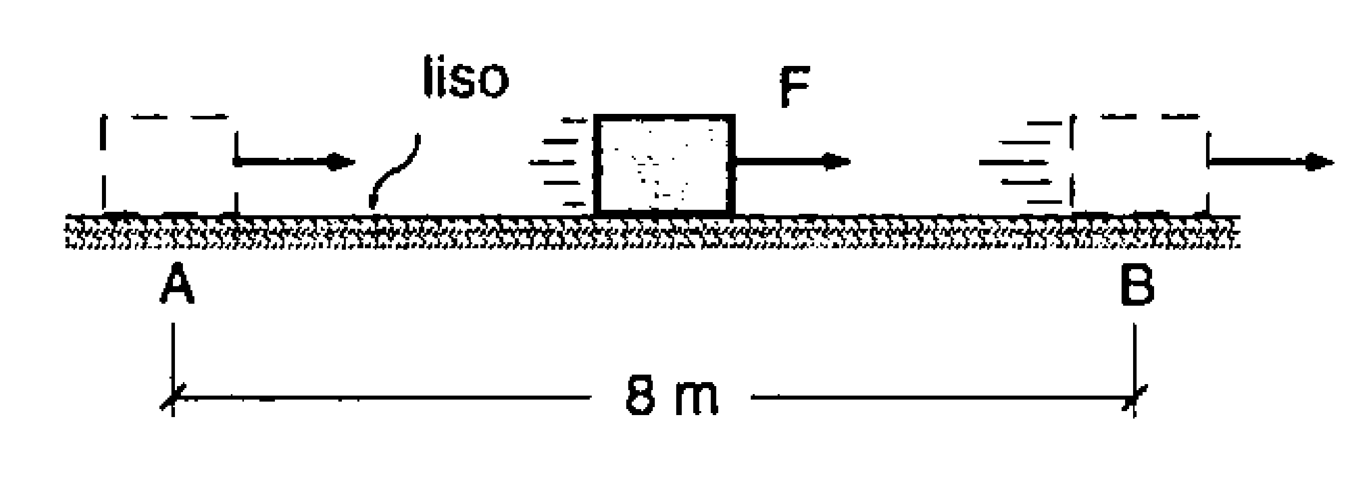
Lo realizan las fuerzas perpendiculares a la dirección del movimiento.

Ejemplo : Un cuerpo de $40\sqrt{3}$ N peso experimenta una fuerza F = 80 N y un desplazamiento de módulo 6 m. Calcular el trabajo de dicha fuerza en cada caso.



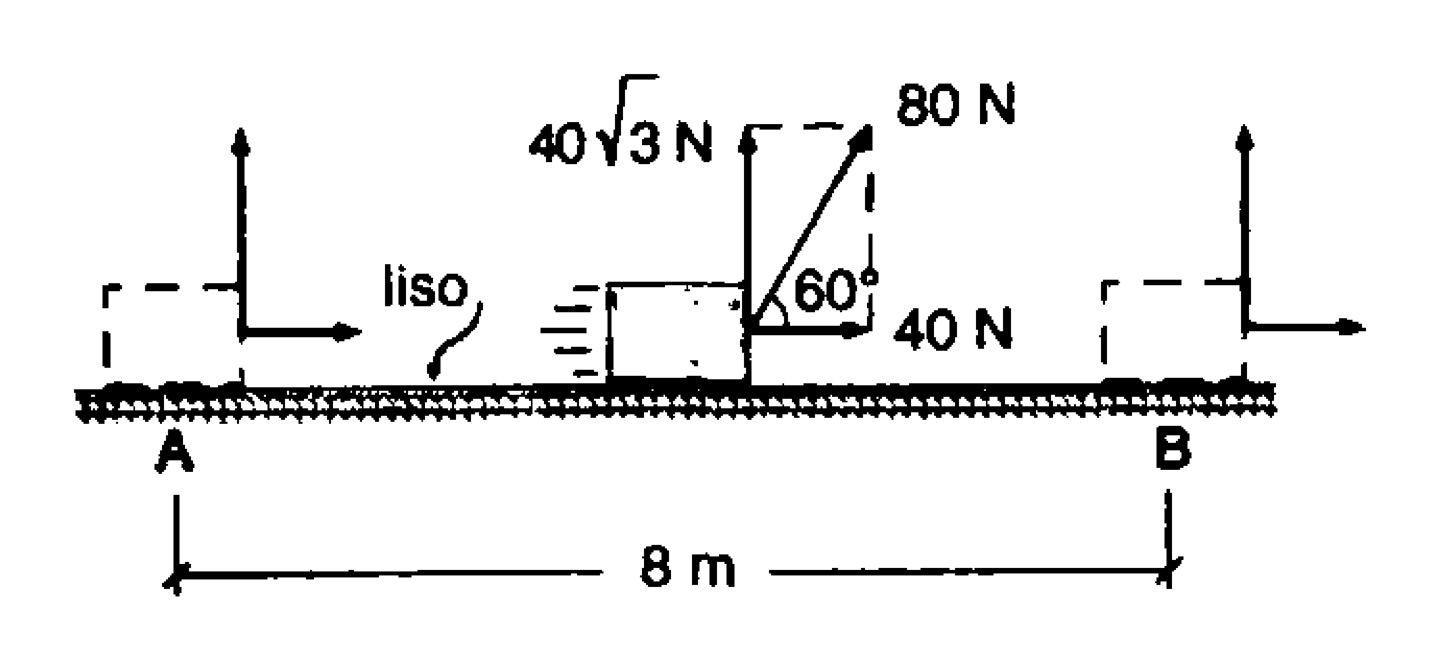
RESOLUCIÓN :

a) Vemos que la fuerza F = 80 N realiza un trabajo positivo o motriz porque le transmite movimiento al bloque



$$\therefore \quad T_{A \rightarrow B}^{F} = 80\,N \,.\, 6\,m = 480\,J$$

b) Dado que la fuerza $F = 80$ N en es-te caso es oblicua, se le descompone en los ejes vertical y horizontal. La componente vertical se anula con el peso del cuerpo, no realiza movi-miento. Luego, sólo realiza trabajo la componente horizontal de F que es la que mueve al cuerpo, $F_x = 40$ N.



$$\therefore \quad T_{A\to B}^{F_x} = 40\,N \,.\, 6\,m = 240\,J$$

NOTA : Para mover un cuerpo en una dirección diferente a la del movimiento se requiere una fuerza mayor.

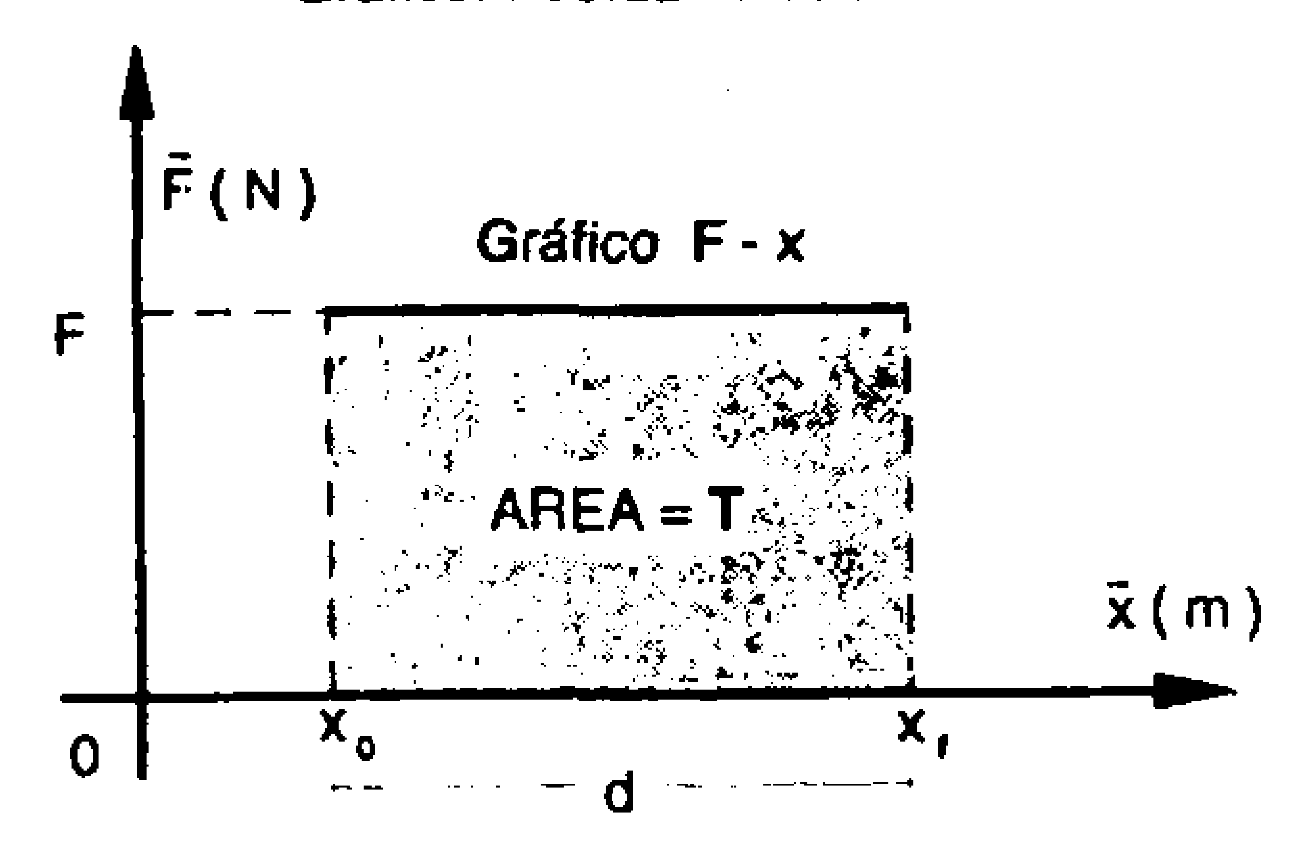
TRABAJO NETO

¿Cómo determinamos el trabajo neto?

El trabajo neto, total o resultante, se obtiene realizando la sumatoria de los trabajos realizados por todas las fuerzas que actúan sobre un cuerpo.

El trabajo neto también se puede calcular hallando el trabajo realizado por la resultante de todas las fuerzas.

Gráfico: Fuerza - Posición



F : Es una fuerza de valor constante

¿Qué nos expresa el área comprendida bajo el gráfico F - x?

Nos expresa el trabajo realizado por F.

$$T_{A\to B}^{F} = F\,(x_f - x_0) = F.d = \text{ÁREA} \square$$

$$\boxed{T_{A\to B}^{F} = \text{ÁREA} \square}$$

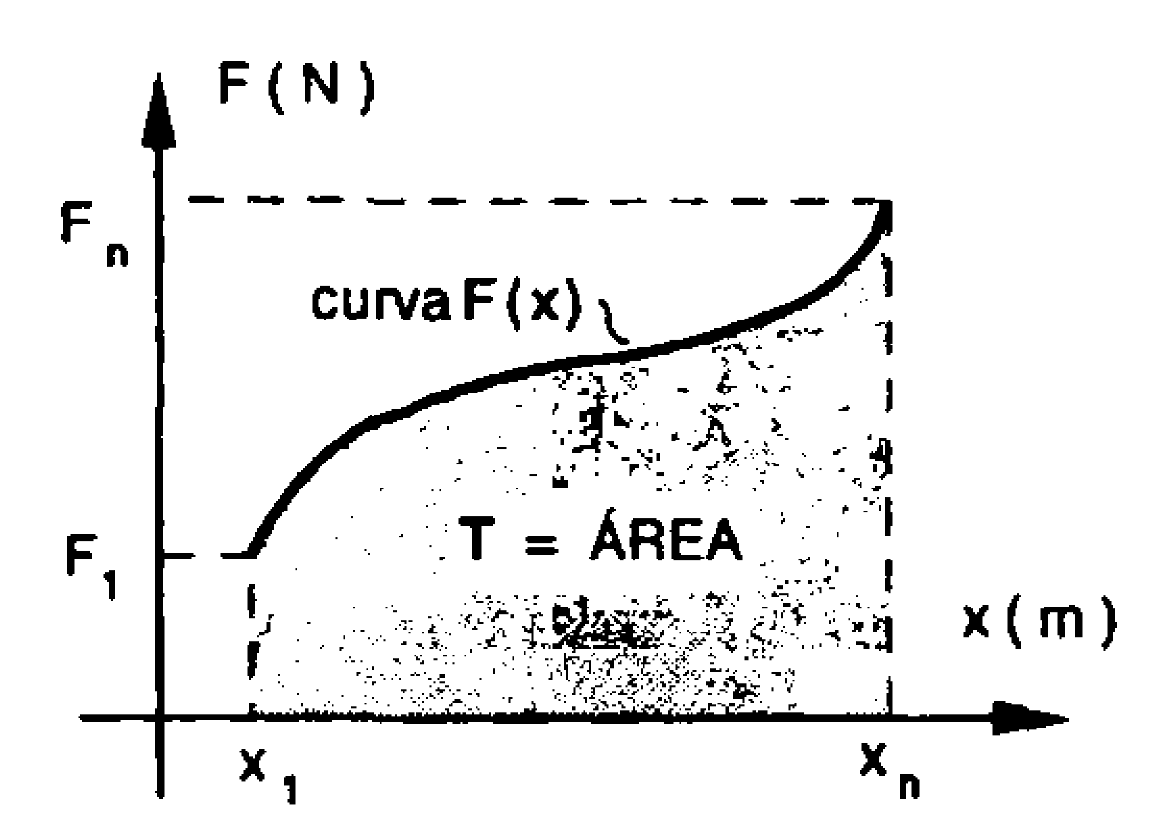
FUERZA VARIABLE

¿Cómo hallar el trabajo realizado por una fuerza variable F (x) ?

Para hallar el trabajo realizado por una fuerza variable F (x), primero se construye el gráfico F - x y luego se calcula el área comprendida bajo la gráfica F - x y el eje horizontal.

EN GENERAL:

Sea F una fuerza variable que depende de la posición x.



$$\therefore \quad \boxed{T_{A\to B}^{F(x)} = \text{ÁREA}}$$

NOTA : El área de esta figura, se calcula por medio del cálculo integral y diferencial (derivadas e integrales) porque uno de los lados es una curva F (x) cualquiera.

http://librosysolucionarios.net

ENERGÍA "E"

La energía expresa la medida escalar de las diversa formas de movimiento e interacciones de los cuerpos en la naturaleza.

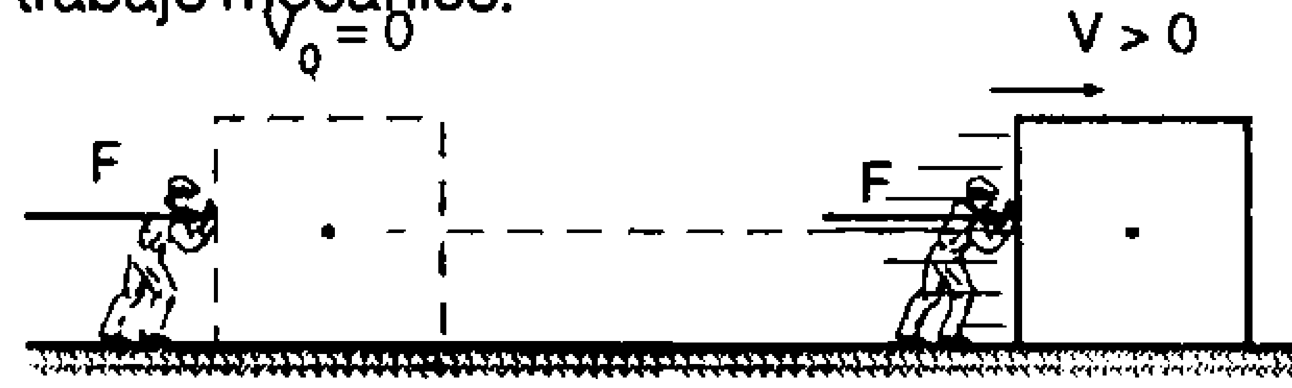
Existen muchas formas de energía como son: mecánica, térmica, eléctrica, química, nuclear, eólica, solar, luminosa, etc. Se hace la advertencia al lector, que no se puede hablar de "tipos de energía" puesto que la energía es única y lo correcto es hablar de formas de energía (la energía no se crea ni se destruye, sólo experimenta transformaciones).

UNIDAD DE MEDIDA :

La unidad de medida de la energía en el SI. es el joule "J".

¿Qué relación existe entre trabajo y energía?

Sigamos analizando el ejemplo anterior: Un hombre mediante una fuerza "F" realiza trabajo mecánico.



¿Qué sucede con el organismo de la persona luego de desplazar el bloque?
La persona se "cansa", es decir, pierde energía porque realizó un trabajo mecánico.
Si el hombre pierde parte de la energía ¿qué ocurre, a dónde se ha trasladado la energía? se ha trasladado al bloque que gana movimiento, es decir gana energía.

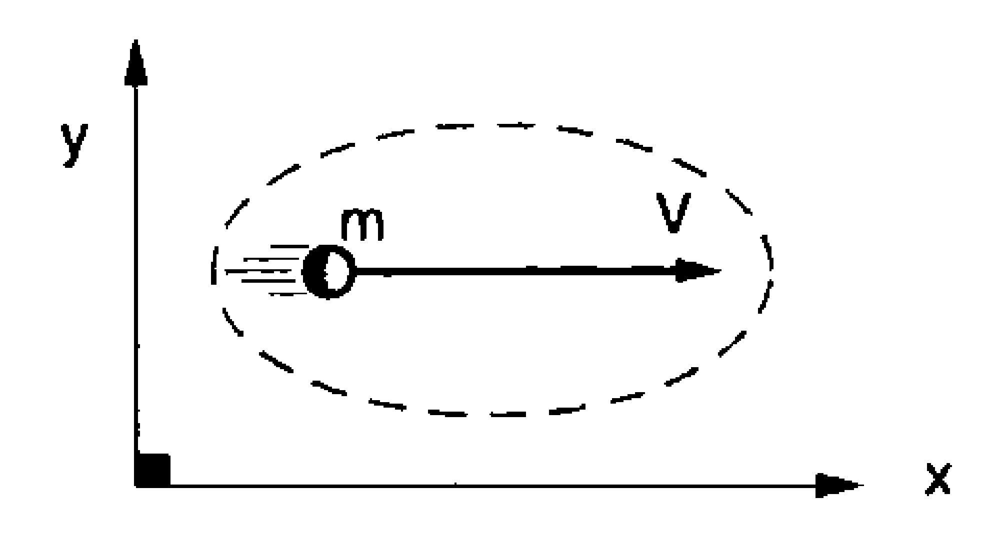
CONCLUSIÓN: El trabajo es una forma de realizar transferencia de energía de un cuerpo hacia otro. Se puede definir como la "medida escalar de la transmisión de movimiento de un cuerpo hacia otro".

FORMAS DE LA ENERGÍA MECÁNICA

La energía mecánica puede presentarse de 2 formas: cinética y potencial. Esta última puede ser gravitatoria y elástica o de resorte.

ENERGÍA CINÉTICA "E_C"

Es la energía que posee un cuerpo cuando está en movimiento mecánico. Si un cuerpo tiene velocidad respecto a un sistema de referencia, entonces diremos que el cuerpo tiene energía cinética respecto a dicho sistema.



Ecuación: $E_C = \frac{1}{2} m.V^2$

m : Es la masa del cuerpo en movimiento, en kilogramos "kg"

V : Valor de la velocidad (rapidez): en m/s

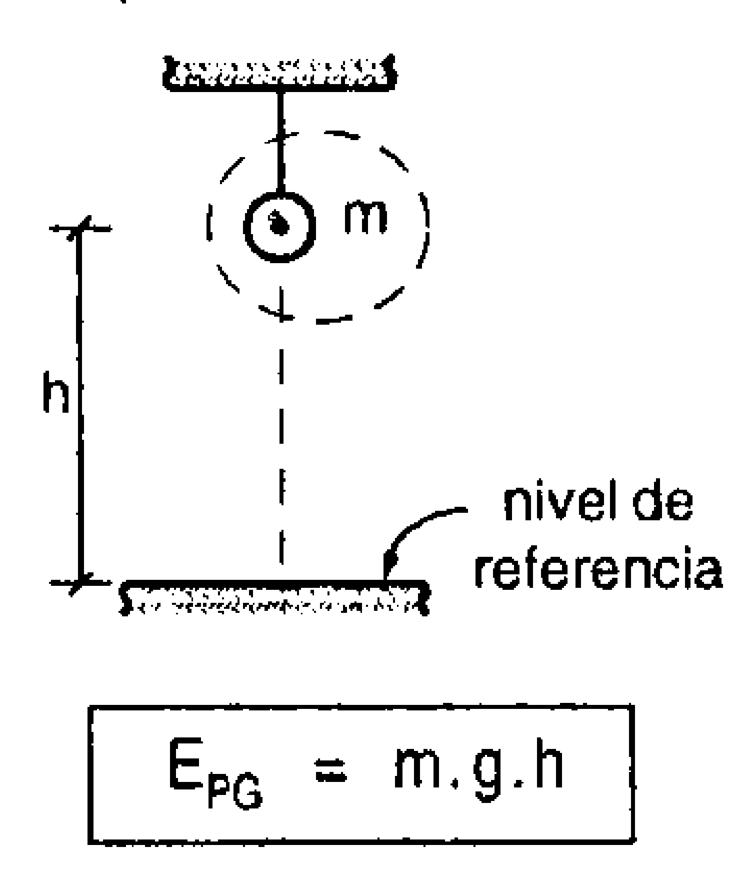
E : Energía cinética, en joule "J".

ENERGÍA POTENCIAL E_P

Puede ser: Energía potencial gravi-tatoria o Energía potencial elástica.

ENERGÍA POTENCIAL GRAVITATORIA "E_{PG}"

Es aquella energía que mide en forma escalar la interacción gravitatoria entre dos cuerpos. Diremos que un cuerpo posee energía potencial gravitatoria debido a la posición que ocupa (altura) respecto de un nivel de referencia.



$$E_{PG} = m.g.h$$

m : Es la masa del cuerpo, en "kg".
g : Es la aceleración de la gravedad $g = 9{,}8\ m/s^2$
h : Altura medida respecto del nivel de referencia, en "m".
E_{PG}: Energía potencial gravitatoria, en "J"

ENERGÍA POTENCIAL ELÁSTICA " E_{PE} "

Es aquella energía que almacena todo cuerpo elástico (resorte) al ser deformado.

Ecuación: $$E_{PE} = \frac{1}{2}k.x^2$$

k : Es la constante de rigidez propia del resorte, en "N/m".
x : Es la longitud de deformación del resorte, en "m".
E_{PE}: Es la energía potencial elástica, en joule "J".

ENERGÍA MECÁNICA " E_M "

Se define como la suma de todas las formas de energía mecánica.

$$E_M = E_C + E_{PG} + E_{PE}$$

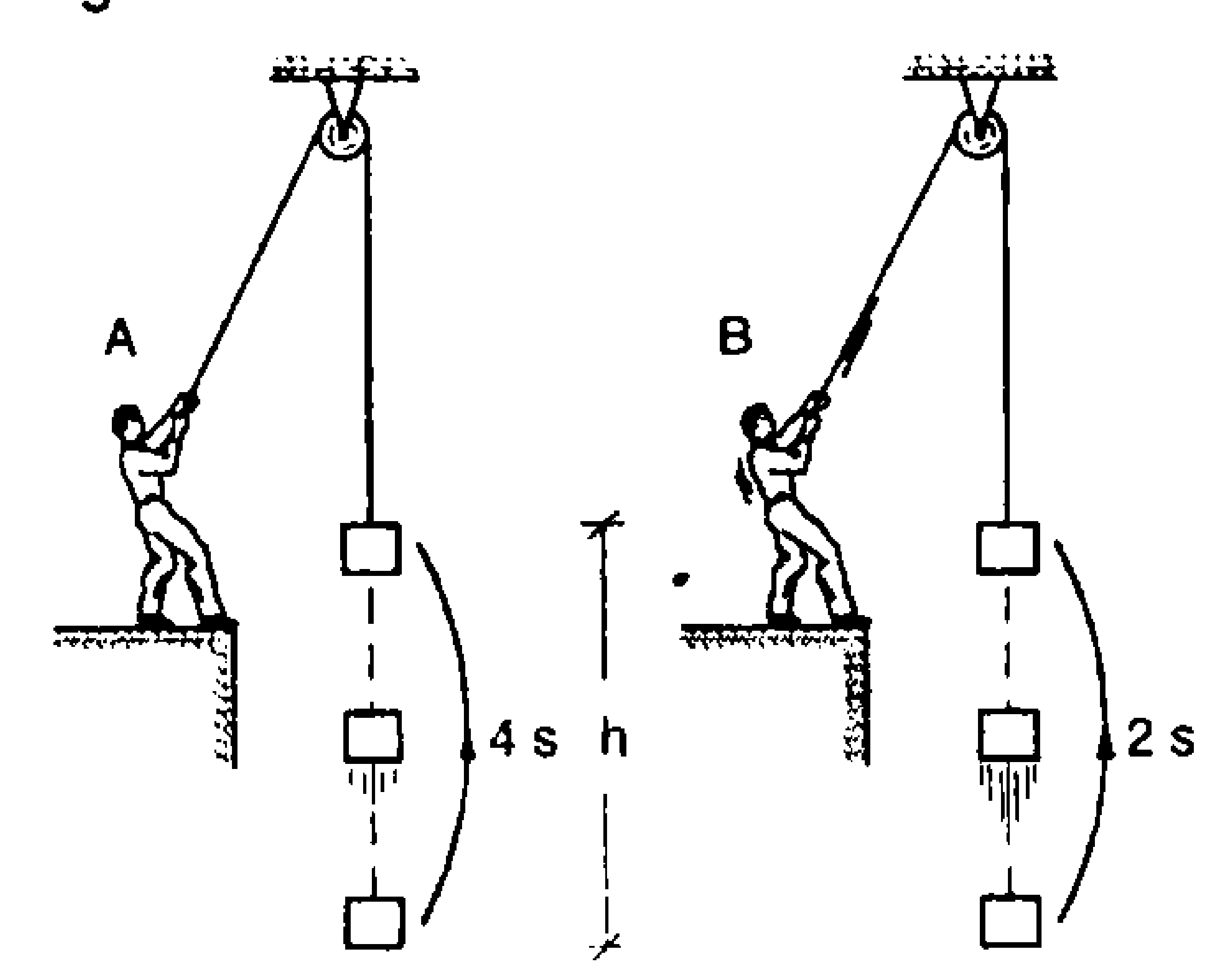
FUERZA CONSERVATIVA

Se denomina así a aquellas fuerzas que se caracterizan por conservar la energía mecánica de un cuerpo o sistema.
Son ejemplos de fuerzas conservativas:
1. La fuerza de gravedad
2. La fuerza elástica
3. La fuerza eléctrica

POTENCIA MECÁNICA "P"

Es una magnitud escalar que mide la rapidez con que se transfiere energía; es decir la rapidez con que se realiza un trabajo mecánico.

Ejemplo: Dos personas A y B elevan bloques idénticos, las mismas alturas "h". A lo hace en 4 segundos, "B" en 2 segundos.



Las personas A y B transfieren energía a los bloques. Si los trabajos son iguales:

$$T_A = T_B$$

y se cumple que B realiza el trabajo en menos tiempo que A. Entonces se tiene que la potencia desarrollada por B es mayor que la potencia desarrollada por A.

$$P_B > P_A$$

Se define:

$$\text{POTENCIA} = \frac{\text{ENERGÍA TRANSFERIDA}}{\text{TIEMPO}}$$

$$P = \frac{T^F_{A\to B}}{t}$$

$T^F_{A\to B}$: Es el trabajo desarrollado, en joule "J"
t: Es el tiempo empleado, en segundos "s"
P: Es la potencia desarrollada, medida, en watt $"W" = \frac{J}{s}$

equivalencia: $$1\ \text{watt} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{segundo}}$$

OTRAS UNIDADES DE POTENCIA:

1 kilowatt = 1 kW = 10^3 W

1 Mega watt = 1 MW = 10^6 W

1 Caballo de Fuerza = 1 Horse Power

= 1 HP = 745 W

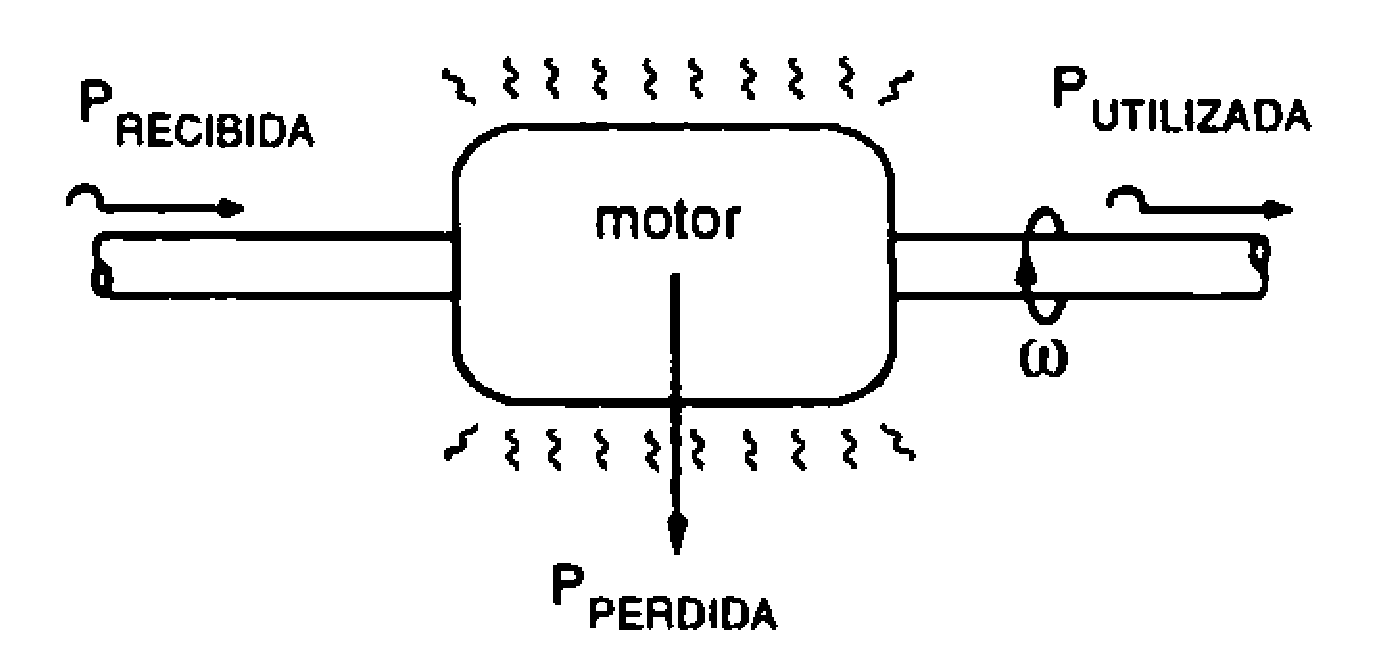
1 Caballo Vapor = 1 c.v. = 735 W

RENDIMIENTO O EFICIENCIA "n" DE UNA MÁQUINA

Toda máquina tiene por finalidad transformar la potencia que recibe a otra forma de potencia.

Así por ejemplo: un motor eléctrico recibe o absorbe potencia eléctrica y la transforma en potencia mecánica de rotación, pero al realizar esta transformación, en el interior del motor se originan pérdidas que reducen su eficiencia (n) la cual se define como el cociente de la potencia útil que entrega la máquina, entre la potencia que absorbe,recibe o consume, dicha máquina.

Sea el motor eléctrico que recibe corriente y entrega o da movimiento:



Se cumple:

POTENCIA RECIBIDA = POTENCIA ÚTIL + POTENCIA PERDIDA

$$n = \frac{P_{ÚTIL}}{P_{RECIBIDA}}$$

$$(0 < n < 1)$$

n : Es el rendimiento o eficiencia, sin unidades

$P_{ÚTIL}$: Es la potencia útil que da la máquina, en watt "W"

$P_{RECIBIDA}$: Es la potencia que se le entrega a la máquina, en "W".

$P_{PERDIDA}$: Es la potencia que no se utiliza, en "W".

En porcentaje: $n\% = \left(\frac{P_{ÚTIL}}{P_{RECIBIDA}} \cdot 100\right)\%$

$$(0\% < n < 100\%)$$

¿Qué nos expresa la unidad denominada kilo watt.hora (kW.h)?

Es la unidad de trabajo realizado, o energía transferida, por una máquina que desarrolla una potencia de 1 kW.

EQUIVALENCIA EN JOULES:

1 kW . h = 1 kW . 1 hora

1 kW . h = 1 000 W . 3 600 s

$$1 \text{ kW . h} = 3{,}6 \cdot 10^6 \text{ J}$$

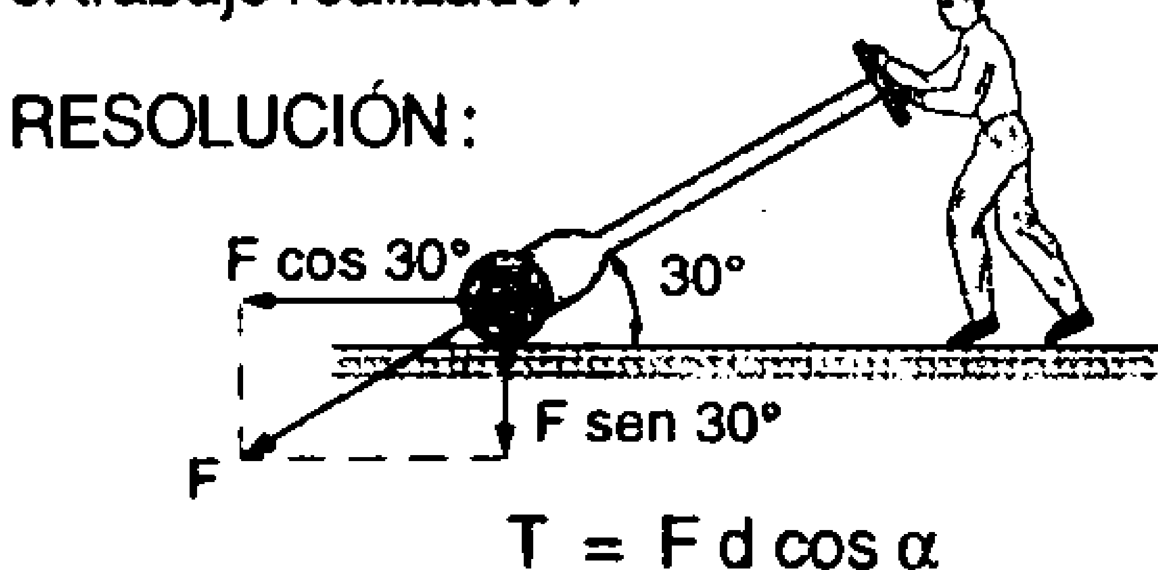
PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. ¿Cuál es el trabajo realizado por un hombre que carga un sillón de 100 N hasta el segundo piso de una casa de 2,5 m de alto?

RESOLUCIÓN : T = F x d = 100 N x 2,50 m
Rpta.: T = 250 N.m = 250 J

PROBLEMA 2. Un hombre empuja una cortadora de gras con un ángulo de 30° con la horizontal, con una fuerza de 200 N, una distancia de 10 m. ¿Cuál es el trabajo realizado?

RESOLUCIÓN :



$$T = F\,d\cos\alpha$$

http://librosysolucionarios.net

$$T = 200\ N \times 10\ m \times \cos 30°$$

Rpta.: $T = 1\,732\ N.m = 1\,732\ J$

PROBLEMA 3. Calcular el trabajo realizado al subir un cuerpo de masa 4 kg a la altura de 3 m en 4 s
a) En joules;
b) En ergios.

RESOLUCIÓN : $T = F \times d$ (1)

El dato tiempo no interviene:

a) $F = mg = 4\ kg \times 9{,}8\ m/s^2$

$$F = 39{,}2\ kg \times \frac{m}{s^2}$$

$$F = 39{,}2\ N \quad (2)$$

sustituyendo en (1):

$$T = 39{,}2\ N \times 3\ m = 117{,}6\ N \times m$$

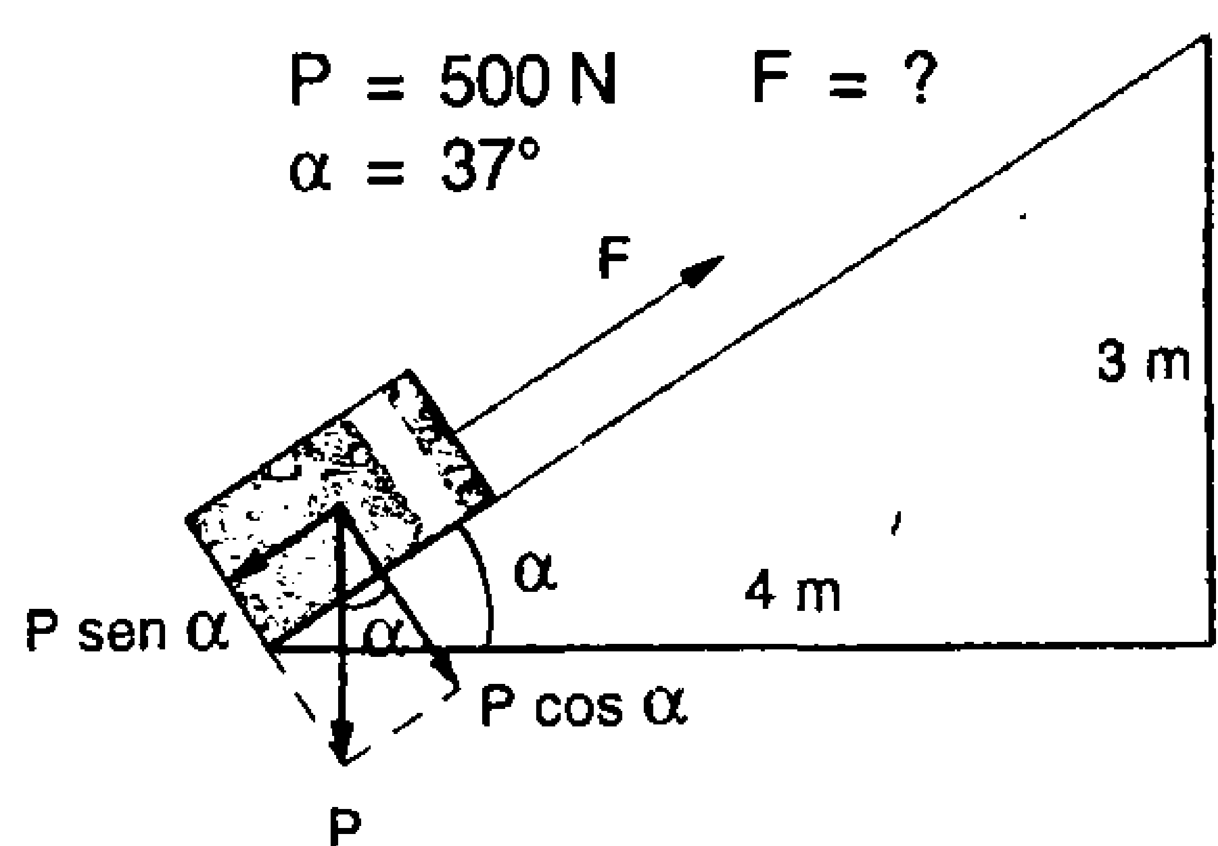
Rpta.: $T = 117{,}6\ J$

b) Sólo se transforman los joules a ergios:

$$T = 117{,}6\ J$$

Rpta.: $T = 117{,}6 \times 10^7$ ergios

PROBLEMA 4. Un cuerpo que pesa 500 N está al pie de un plano inclinado cuyos datos están en la figura. Calcular:
a) La fuerza F para llegar a la cumbre.
b) Calcular el trabajo realizado por esa fuerza, en joules y ergios.



RESOLUCIÓN: $F = P \text{ sen } \alpha = 500\ N \times \frac{3}{5}$

$$F = 300\ N$$

$$F = 300\ N$$

$$T = F \times d = 300\ N \times 5\ m$$

$$T = 1\,500\ N.m$$

$$T = 1\,500\ J$$

En ergios: $T = 1\,500 \times 10^7$ ergios

PROBLEMA 5. Un hombre hace un fuerza de 200 N para halar un cuerpo una distancia de 15 m empleando 10 segundos. ¿Cuál es la potencia desarrollada?

RESOLUCIÓN : $F = 200\ N$
$t = 10\ s$ $d = 15\ m$

$$P = \frac{T}{t} \quad (I)$$

$$T = F \times d = 200\ N \times 15\ m$$

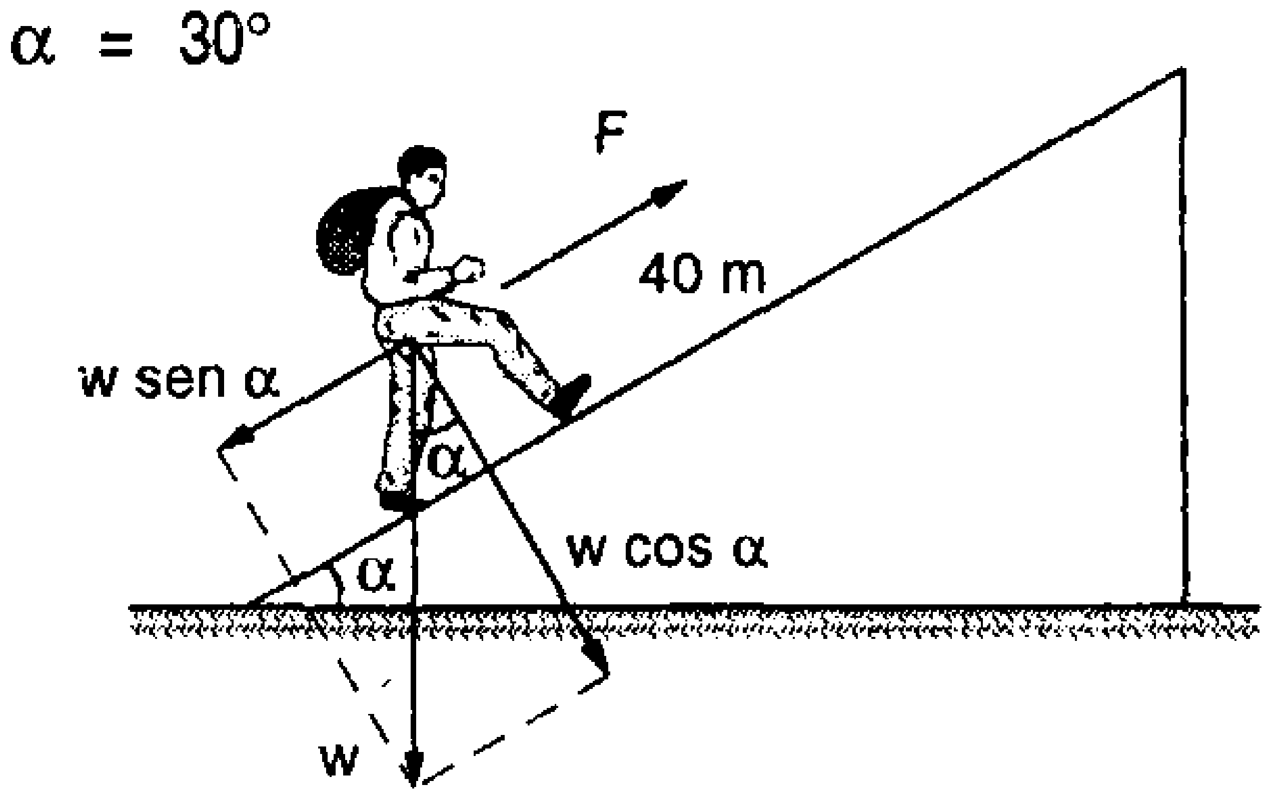
$$T = 3\,000\ N.m = 3\,000\ J$$

Sustituyendo en (I): $P = \frac{3\,000\ J}{10\ s}$

Rpta.: $P = 300\ \frac{J}{s} = 300\ W$

PROBLEMA 6. Calcular la potencia, en watts, que desarrollará un hombre al llevar sobre sus espadas un bulto que pesa 300 N a lo largo de una pendiente de 30° de inclinación y de 40 m de longitud y que tarda 20 s.

RESOLUCIÓN : $d = 40\ m$
$w = 300\ N$ $t = 20\ s$
$\alpha = 30°$



$$P = \frac{T}{t} = \frac{F \times d}{t} = \frac{w \text{ sen } \alpha \times d}{t}$$

$$P = \frac{300\,N \times sen\,30° \times 40\,m}{20\,s}$$

$$P = 300\,\frac{N\,.\,m}{s}$$

Transformando a joules: $P = 300\,J/s$

Finalmente:

Rpta.: $P = 300\,W$

PROBLEMA 7. Calcular ¿cuántos HP desarrolla un camión que carga 2Ton durante 10 minutos al desplazarse por una pista de 3 km, si hace una fuerza de 10^4 N?

RESOLUCIÓN: $F = 10^4\,N$

$t = 10\,min$

$d = 3\,km$

$$P = \frac{T}{t} \qquad (a)$$

$$T = Fd = 10^4\,N \times 3\,000\,m$$

$$T = 3 \times 10^7\,N.m = 3 \times 10^7\,J$$

En (a): $P = \frac{3 \times 10^7\,J}{10 \times 60\,s}$

$$P = 0,5 \times 10^5\,\frac{J}{s} = 0,5 \times 10^5\,W$$

$$P = 0,5 \times 10^5 \times \frac{H.P.}{745}$$

Rpta.: $P = 67,1\,HP$

PROBLEMA 8. Una máquina eléctrica tiene una potencia de 15 kW. Calcular ¿cuánto cuesta el trabajo realizado en 2 horas, sabiendo que el kilo watt . hora cuesta S/. 4.00?

RESOLUCIÓN: $T = P \times t$

$$T = 15\,kW \times 2 \times hora$$

$$T = 30\,kW\,.\,hora$$

$$costo = 30\,kW\,.\,hora \times 4\,\frac{soles}{kW\,.\,hora}$$

Rpta.: costo = 120 soles

PROBLEMA 9. Calcular, del problema anterior, la potencia de la máquina en H.P.

RESOLUCIÓN: $P = 15\,kW = 15\,000\,W$

$$P = 15\,000 \times \frac{H.P.}{745}$$

Rpta.: $P = 20,134\,H.P.$

PROBLEMA 10. Un hombre jala un auto que pesa 10^4 N durante 2 horas con una fuerza de 600 N una distancia de 200 m. Calcular el trabajo realizado por el hombre en joules y ergios.

RESOLUCIÓN: $F = 600\,N$

$w = 10^4\,N$ (no se usa) $\quad d = 200\,m$

$t = 2$ horas (no se usa)

a) $T = F \times d = 600\,N \times 200\,m$

$T = 12 \times 10^4\,N\,.\,m$

O también: $T = 12 \times 10^4\,J$

b) $T = 12 \times 10^4\,J$

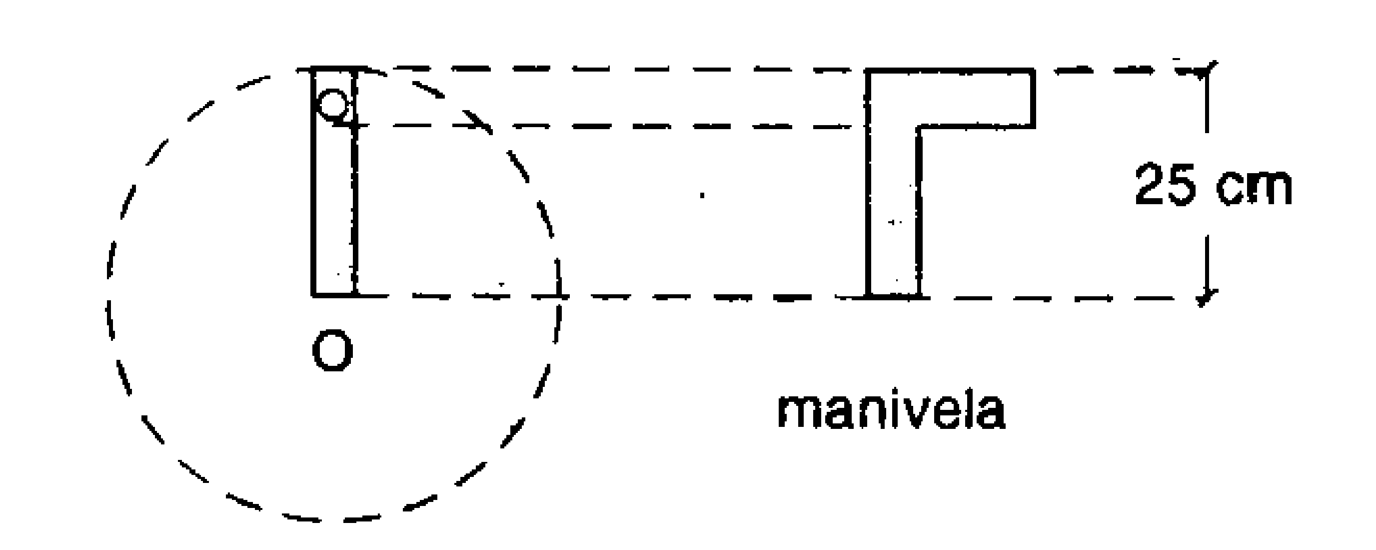
$T = 12 \times 10^4 \times 10^7\,erg$

$T = 12 \times 10^{11}\,erg$

PROBLEMA 11. Aplicando una fuerza de 100 N a una manivela de 25 cm de brazo, un hombre le da 12 vueltas y media para arrancar una "carcocha".

a) ¿Qué trabajo en joules ha realizado el hombre?

b) Si demora 5 s ¿cuál es la potencia en watts?



http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : sabiendo que:

a) $T = F \times d$ (I)

Cálculo de d:

La distancia "d" es el arco que ha descrito durante las 12 vueltas y media.

$$d = n \times 2\pi r$$

$$d = 12{,}5 \times 2 \times 3{,}1416 \times 0{,}25 \text{ m}$$

$$d = 19{,}63 \text{ m}$$

sustituyendo valores en (I) :

$$T = 100 \times 19{,}63 \text{ m} = 1\,963 \text{ N . m}$$

$$T = 18{,}63 \text{ m}$$

b) $$P = \frac{T}{t} = \frac{1\,963 \text{ J}}{5 \text{ s}}$$

Rpta.: $P = 392{,}6$ W

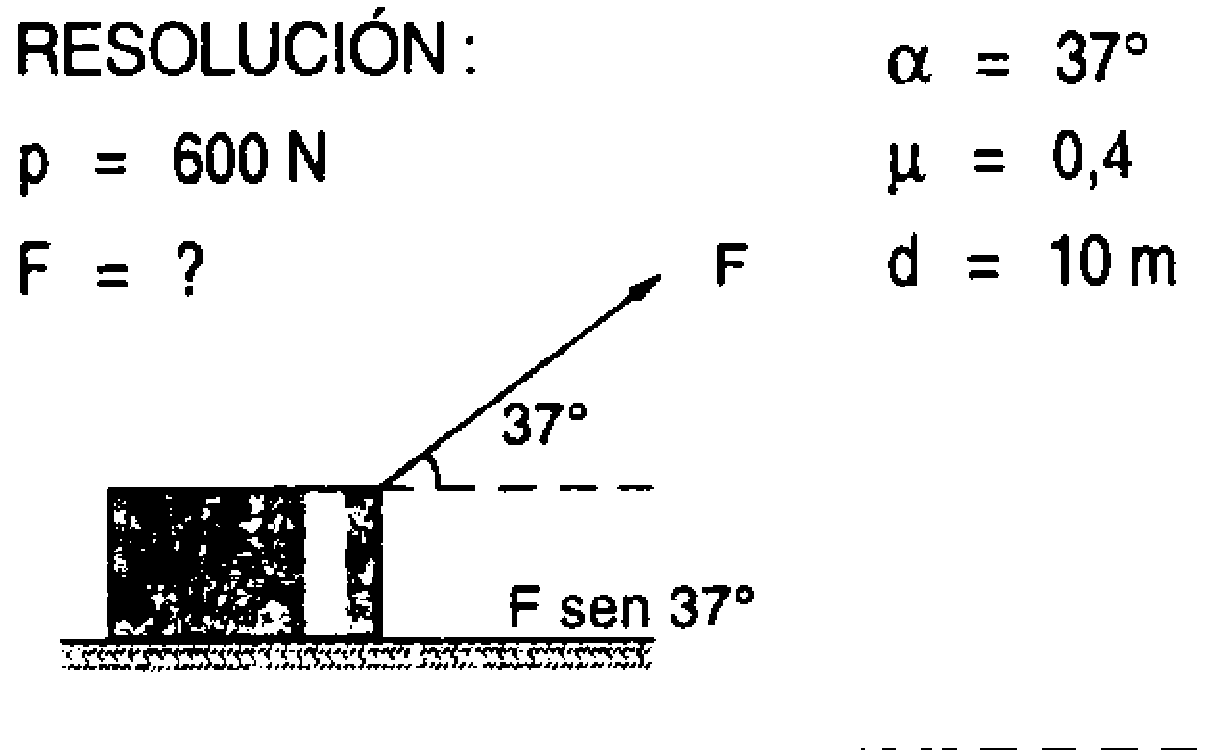
PROBLEMA 12. Se jala un cuerpo que está sobre el piso una distancia de 10 m con una cuerda, haciendo un ángulo de 37° con la horizontal, conforme se muestra en la figura. El cuerpo pesa 600 N, el coeficiente de rozamiento con el piso es de 0,4. ¿Cuál será la fuerza necesaria para mover el cuerpo y cuál el trabajo realizado en joules y en ergios?

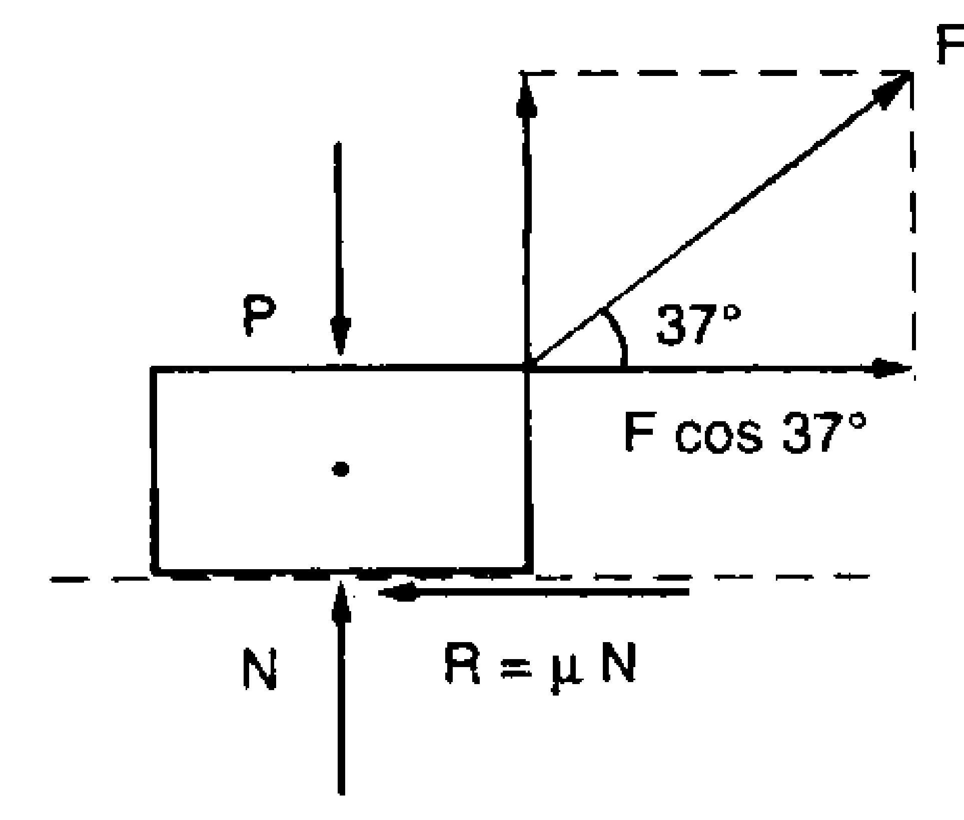
RESOLUCIÓN :

$p = 600$ N $\quad \alpha = 37°$

$F = ?$ $\quad \mu = 0{,}4$

$d = 10$ m





a) Cálculo de F: $\Sigma F_x = 0$

$$F \cos 37° = R$$

Pero: $R = m N$, luego:

$$F \cos 37° = \mu N \qquad (II)$$

Cálculo de N : $\Sigma F_y = 0$

$$N + F \text{ sen } 37° - P = 0$$

$$N = P - F \text{ sen } 37°$$

Sustituyendo en (II) :

$$F \cos 37° = \mu (P - F \text{ sen } 37°)$$

despejando F:

$$F = \frac{\mu P}{\text{sen } 37° + \mu \text{ sen } 37°}$$

$$F = \frac{0{,}4 \times 600 \text{ N}}{\frac{4}{5} + 0{,}4 \times \frac{3}{5}}$$

Rpta.: $F = 230{,}8$ N

b) $$T = F . d$$

$$T = 230{,}8 \text{ N} \times 10 \text{ m}$$

$$T = 2\,308 \text{ N . m}$$

$$T = 2\,308 \text{ J}$$

$$T = 2\,308 \times 10^7 \text{ erg}$$

PROBLEMA 13. Una caída de agua tiene una velocidad media de $\sqrt{8}$ m / s . Si en cada segundo caen 200 litros (gasto). ¿Cuál es la energía cinética del agua?

RESOLUCIÓN : $V = \sqrt{8}$ m/s

gasto = 200 litros/s

Se sabe: $$E_C = \frac{1}{2} m V^2 \qquad (I)$$

Como cada litro de agua tiene 1 kg de masa, quiere decir que en cada segundo cae una masa de 200 kg, a una velocidad de $\sqrt{8}$ m/s.

En (I) : $$E_C = \frac{1}{2} 200 \text{ kg} \times (\sqrt{8} \text{ m/s})^2$$

http://librosysolucionarios.net

$$E_C = 800\,kg\,\frac{m^2}{s^2}$$

Que se puede escribir:

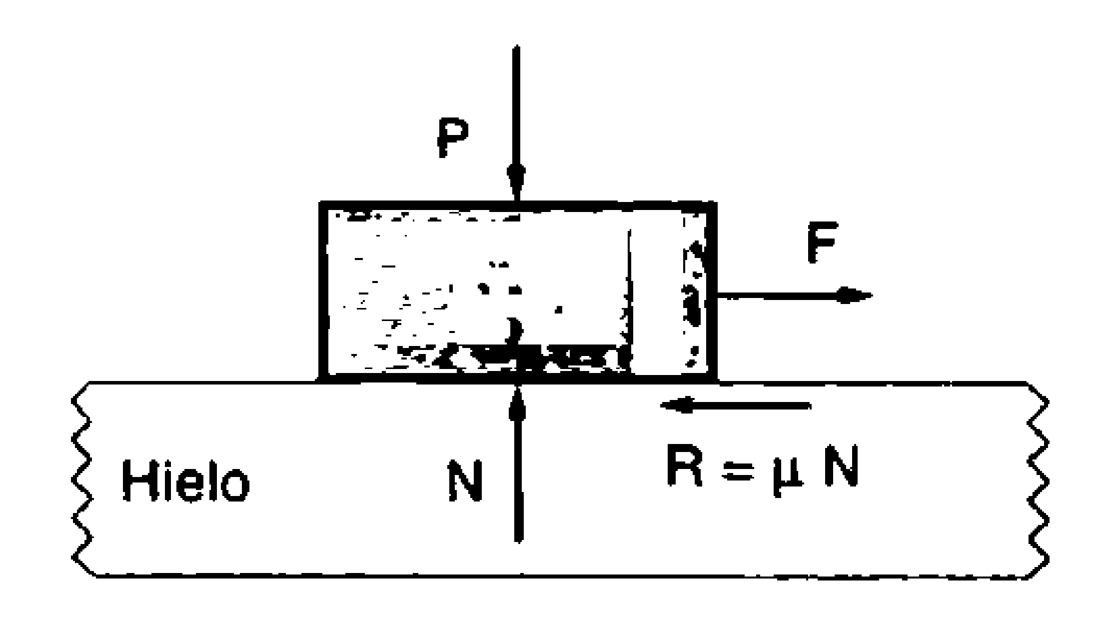
$$E_C = 800\left(kg \times \frac{m}{s^2}\right) \times m$$

$$E_C = 800\,.\,N \times m$$

Rpta.: $E_C = 800\,J$

PROBLEMA 14. Un cuerpo que pesa 20 N es impulsado sobre una pista de patinaje con una fuerza de 5 N durante 0,3 s. El coeficiente de rozamiento cinético es 0,02. ¿Qué distancia se desplaza el cuerpo con el impulso?

RESOLUCIÓN :



Cálculo de la aceleración:

$$\Sigma F_x = m\,a$$

$$F - R = m\,a$$

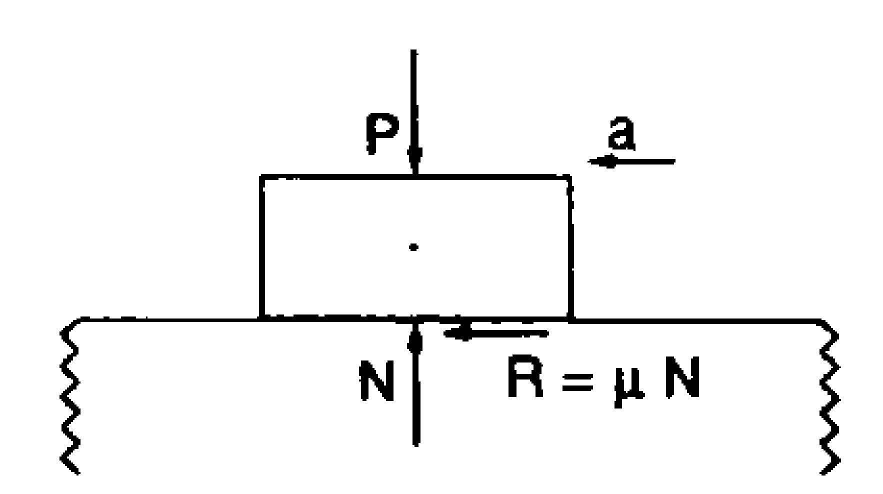
$$F - \mu N = m\,a$$

De donde:

$$a = \frac{F - \mu N}{m} = \frac{5\,N - 0{,}02 \times 20\,N}{\dfrac{20\,N}{9{,}8\,m/s^2}}$$

$$a = 2{,}254\,m/s^2$$

Con esta aceleración se suelta al cuerpo y a partir de este momento el cuerpo empieza a



detenerse por la acción de la fricción, o rozamiento.

Cálculo de esta velocidad inicial:

$$V_i = a \cdot t = 2{,}254\,\frac{m}{s^2} \cdot 0{,}3\,s$$

$$V_i = 0{,}676\,2\,\frac{m}{s}$$

Cálculo de la distancia recorrida con esta velocidad inicial: $V_f^2 = V_i^2 - 2\,a\,d$

Pero: $V_f = 0 \quad \therefore \quad d = \dfrac{V_i^2}{2\,a}$

$$d = \frac{(0{,}676\,2\,m/s)^2}{2 \times 2{,}254\,m/s^2}$$

Rpta.: $d = 0{,}15\,m$

PROBLEMA 15. Calcular la potencia en kwatts que absorbe un motor eléctrico que da 8 H.P. si trabaja con un rendimiento de 90%.

RESOLUCIÓN : Si el motor da 8 H.P. y está trabajando solo con el 90%, quiere decir que 8 H.P. representa el 90% luego la potencia total que absorbe o consume para funcionar será mayor, es decir:

$$P = 8\,H.P. \times \frac{100}{90} = 8{,}89\,H.P.$$

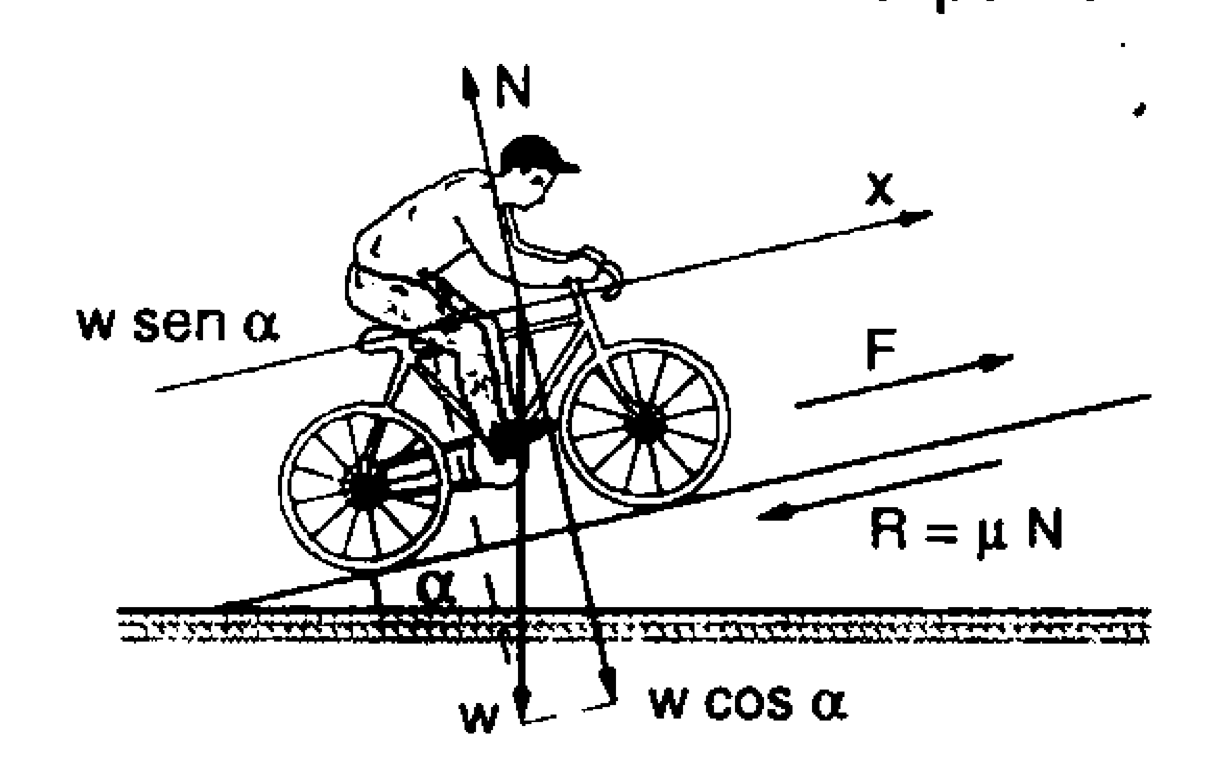
Pero $1\,H.R = 745\,W$; luego:

$$P = 8{,}89 \times 745\,W$$

$$P = 8{,}89 \times 0{,}745\,k\,W$$

Rpta.: $P = 6{,}623\,k\,W$

PROBLEMA 16. ¿Cuál será la potencia en HP desarrollada por un



http://librosysolucionarios.net

ciclista al subir una pendiente de 10% con una velocidad de 15 km/h, si ciclista y bicicleta pesan juntos 750 N?

RESOLUCIÓN :

$$V = 15\,km/h \qquad tg\,\alpha = \frac{10}{100}$$

$$w = 750\,N \quad ; \quad P = ?\,HP$$

Considerando un sistema de ejes XY con el eje X paralelo al plano inclinado:

$$P = \frac{T}{t}$$

Pero: $T = F\,d$, luego: $P = \frac{F\,.\,d}{t}$

$$\Sigma F_x = 0$$

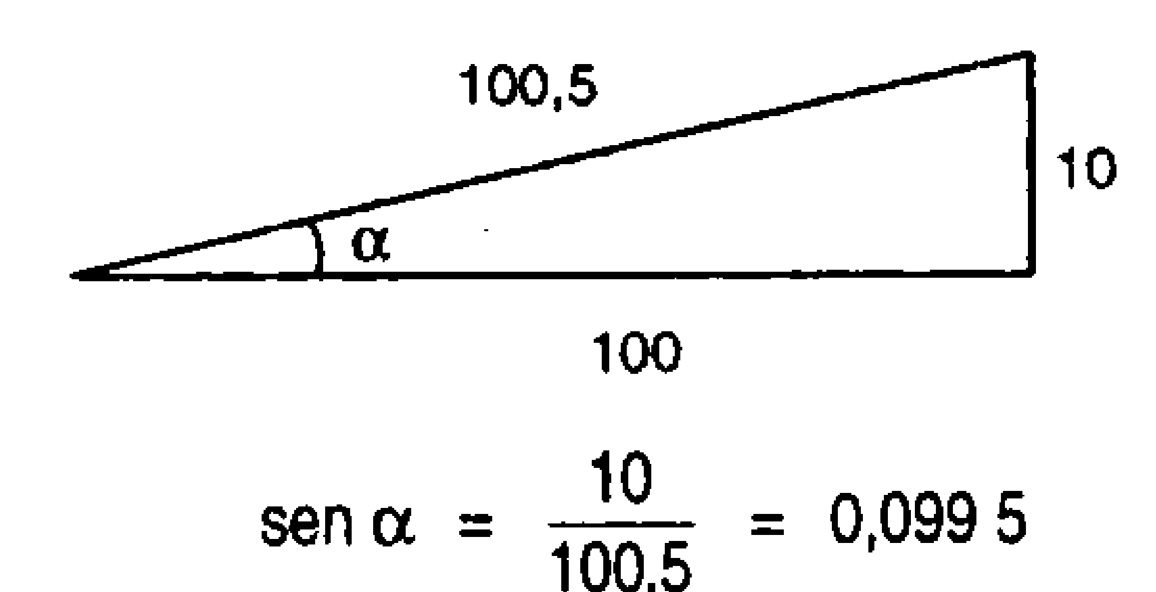
$$F = \mu\,N + w\,sen\,\alpha$$

Pero: $N = w\,\cos a$

$$\therefore \quad F = \mu\,w\cos\alpha + w\,sen\,\alpha$$

$$F = w(\mu\cos\alpha + sen\,\alpha) \qquad (II)$$

Cálculo de sen a y cos a :



$$sen\,\alpha = \frac{10}{100{,}5} = 0{,}099\,5$$

$$\cos\alpha = \frac{100}{100{,}5} = 0{,}995$$

Sustituyendo valores en (II) :

$$F = 750\,N\,(0{,}3 \times 0{,}995 + 0{,}099\,5)$$

$$F = 298{,}5\,N$$

Sustituyendo valores en (I) :

$$P = 298{,}5\,N \times 15\,km/h$$

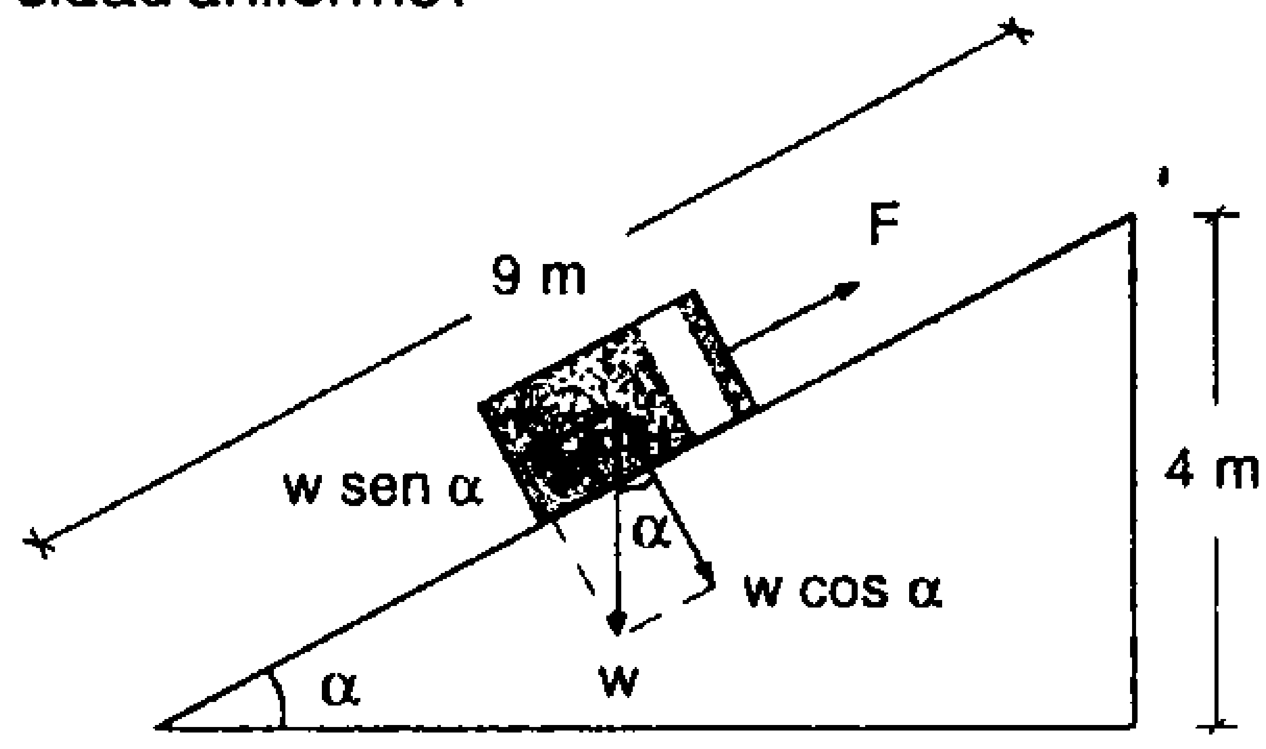
$$P = 4\,477{,}5\,N \times km/h$$

$$P = 4\,477\,N \times \frac{1\,000\,m}{3600\,s}$$

$$P = 1\,243{,}8\,\frac{N \times m}{s} = 1\,243{,}8\,W$$

$$P = 1\,243{,}8\,N\,\frac{HP}{745} = 1{,}67\,HP$$

PROBLEMA 17. Una masa de 20 kg se quiere subir a lo largo de un plano inclinado de 9 m de largo y a 4 m de arriba del suelo. Si no hay fricción, ¿cuál es el trabajo que se realiza, con una fuerza paralela al plano que haga subir al cuerpo con velocidad uniforme?



RESOLUCIÓN : Como el cuerpo va a subir con una velocidad constante, entonces, suponiendo un sistema "XY" que "X" sea paralelo al plano:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F - w\,sen\,\alpha = 0$$

pero: $w = m\,g$, luego:

$$F - m\,g\,sen\,\alpha = 0$$

de donde: $F = m\,g\,sen\,\alpha$

$$F = 20\,kg \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times \frac{4}{9}$$

$$F = 87{,}11\,kg \times \frac{m}{s^2}$$

$$F = 87{,}11\,N$$

Cálculo del trabajo:

$$T = F\,.\,d = 87{,}11\,N \times 9\,m$$

$$T = 784\,N.\,m$$

Rpta.: $T = 784\,J$

http://librosysolucionarios.net

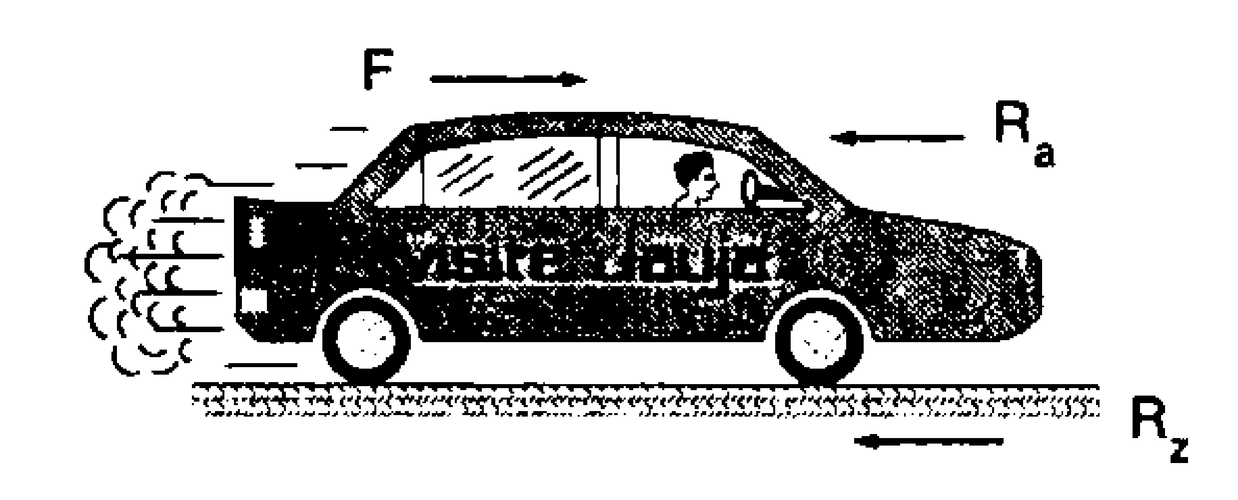
PROBLEMA 18. Un auto de 1,2 Ton de masa, se desplaza a una velocidad de 60 km/h. Si su coeficiente de rozamiento con el piso es de 0,4 y ofrece un área de encuentro con el aire de 2 m², el cual le ofrece resistencia, y si la densidad del aire es de 1,2 g / lit, calcular la potencia que debe desarrollar el auto para vencer el rozamiento y la resistencia del aire en:

a) HP, b) watt, c) kwatt

RESOLUCIÓN: $m = 1{,}2\ \text{Ton}$

$A = 2\ m^2$ $V = 60\ km/h$

$d = 1{,}2\ g/lit$ $\mu = 0{,}4$



Recordando: $P = \dfrac{T}{t}$ (I)

Como no se ha dado el tiempo, se va a tomar como referencia la potencia de 1 segundo.

Cálculo de la velocidad en m/s :

$$V = 60\ \frac{km}{h} = 60\ \frac{1\,000\ m}{3\,600\ s}$$

$$V = 16{,}67\ m/s$$

Cálculo del volumen de aire que ofrece resistencia en 1 s:

$$vol = 16{,}67\ \frac{m}{s} \times 2\ m^2 = 33{,}34\ \frac{m^3}{s}$$

$$vol = 33{,}34 \times 10^3\ L$$

Cálculo de la masa de aire que ofrece resistencia en cada segundo:

$$m = vol \times d$$

$$m = 33{,}34 \times 10^3\ \frac{L}{s} \times 1{,}2\ \frac{g}{L}$$

$$m = 40\ \frac{kg}{s}$$

Cálculo de la energía cinética desarrollada para vencer la resistencia de esta masa:

$$E_C = \frac{1}{2}\, m\, V^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \times 40\ kg \times \left(16{,}67\ \frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_C = 5\,557{,}78 \left(kg\ \frac{m}{s^2}\right) m$$

$$E_C = 5\,557{,}78\ N.m$$

$$E_C = 5\,557{,}78\ J \qquad (II)$$

Cálculo del trabajo que se realiza para vencer el rozamiento, durante 1 s :

$$T_1 = F \,.\, d = R_2\, d = \mu\, N\, d = \mu\, m\, g\, d$$

$$T_1 = 0{,}4 \times 1\,200\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 16{,}67\ m$$

$$T_1 = 8\,001{,}6 \left(kg \times \frac{m}{s^2}\right) m$$

$$T_1 = 8\,001{,}6\ N\,m$$

$$T_1 = 8\,001{,}6\ J \qquad (III)$$

Trabajo total para desplazarse los 16,67 m:

$$T = E_C + T_1$$

$$T = 5\,557{,}78\ J + 8\,001{,}6\ J$$

$$T = 13\,568{,}38\ J$$

Sustituyendo en (I) :

$$P = \frac{13\,568{,}38\ J}{1\ s} = 13\,568{,}38\ W$$

De aquí:

a) $P = 13\,568{,}38 \times \dfrac{HP}{745} = 18{,}21\ HP$

b) $P = 13\,568{,}38\ W$

c) $P = 13{,}57\ kW$

PROBLEMA 19. Una grúa cuyo rendimiento es del 50% está instalada a un motor cuyo rendimiento es del 80%. Al motor se le proporciona una potencia de 8 kW. Calcular la velocidad con que la grúa subirá un peso de 10^4 N.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : El rendimiento final o total de la instalación será:

$$R = 50\% \times 80\% = 0{,}50 \times 0{,}80 = 0{,}40$$

$$R = 40\%$$

Por consiguiente la potencia utilizada será:

$$P = 0{,}40 \times 8\,kW = 3{,}2\,kW$$

Por otro lado, $P = F\,V$ De donde:

$$V = \frac{P}{F} = \frac{3{,}2\,kW}{10^4\,N}$$

$$V = \frac{3{,}2 \times 1{,}34\,HP}{10^4\,N}$$

$$V = \frac{3{,}2 \times 1{,}34 \times 745\,N\,.\,m/s}{10^4\,N}$$

Rpta.: $V = 0{,}32\,m/s$

PROBLEMA 20. Un motor consume 2 kW de potencia y con ello mueve una máquina a una velocidad de 4 p rad/s y necesita una fuerza de 120 N. Calcular el rendimiento del motor. El radio de giro de la máquina es de 0,8 m.

RESOLUCIÓN : $\omega = 4\pi\,rad/s$

$P = 10\,kW$ $r = 0{,}8\,m$

$F = 120\,N$ $R = ?$

Sabiendo: $R = \dfrac{\text{potencia utilizada}}{\text{potencia consumida}} \times 100$ (I)

Cálculo de la potencia utilizada por la máquina:

$P_u = \dfrac{T}{t}$ Pero: $T = F\,.\,d$

$$\therefore\ P_u = \frac{F.d}{t}$$

Pero: $\dfrac{d}{t} = V$, luego:

$P_u = F\,V$; (ya conocida)

Pero: $V = w\,r$, luego:

$$P_u = F\,.\,\omega\,.\,r$$

$$P_u = 120\,N \times 4\pi \times \frac{1}{s} \times 0{,}8\,m$$

$$P_u = 1\,206{,}4\,\frac{N \times m}{s}$$

$$P_u = 1\,206{,}4 \times \frac{J}{s}$$

$$P_u = 1\,206{,}4\,W$$

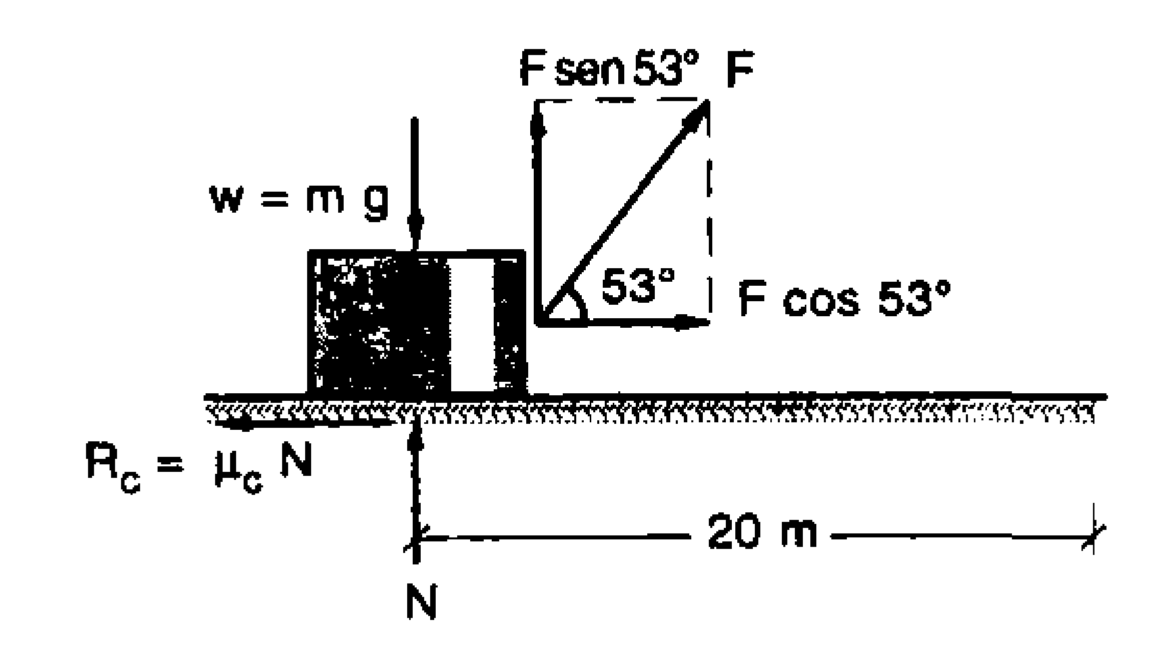
$$P_u = 1{,}2\,kW$$

sustituyendo valores en (I) :

$R = \dfrac{1{,}2\,kW}{2\,kW} \times 100$ de donde:

Rpta.: $R = 60\%$

PROBLEMA 21. ¿Qué trabajo desarrolla una persona al halar una distancia de 20 m un bloque de 500 N de peso que descansa sobre un plano horizontal de coeficiente de rozamiento cinético igual a 0,4 ; sabiendo que emplea una cuerda que forma 53° con la horizontal y asumiendo que que la velocidad es constante?



RESOLUCIÓN : $w = 500\,N$

$\mu = 0{,}4$ $d = 20\,m$

$a = 0$ $V = cte$

$\alpha = 53°$ $T = ?$

a) $\Sigma F_x = m\,a$

$$\therefore\ F\cos 53° - R_C = m\,a$$

Por enunciado: $a = 0$

$$F\cos 53° = R_C$$

$$F\cos 53° = \mu_C\,N \qquad (1)$$

b) $\Sigma F_y = m\,a$

Por dato: $a = 0$

$\therefore \quad F \text{ sen } 53° + N - m g = 0$

$N = m g - F \text{ sen } 53° \qquad (2)$

Reemplazando (2) en (1):

$$F \cos 53° = \mu_C (m g - F \text{ sen } 53°)$$

$$F \cos 53° = \mu_C m g - \mu_C F \text{ sen } 53°$$

$$F (\cos 53° + \mu_C \text{ sen } 53°) = \mu_C m g$$

$$F = \frac{\mu_C m g}{\cos 53° + \mu_C \text{ sen } 53°}$$

Reemplazando valores y efectuando

$$F = \frac{10\,000}{46} N = 217{,}39 \text{ N}$$

c) El trabajo realizado es igual a:

$$T = F \cos 53° \times 20 \text{ m}$$

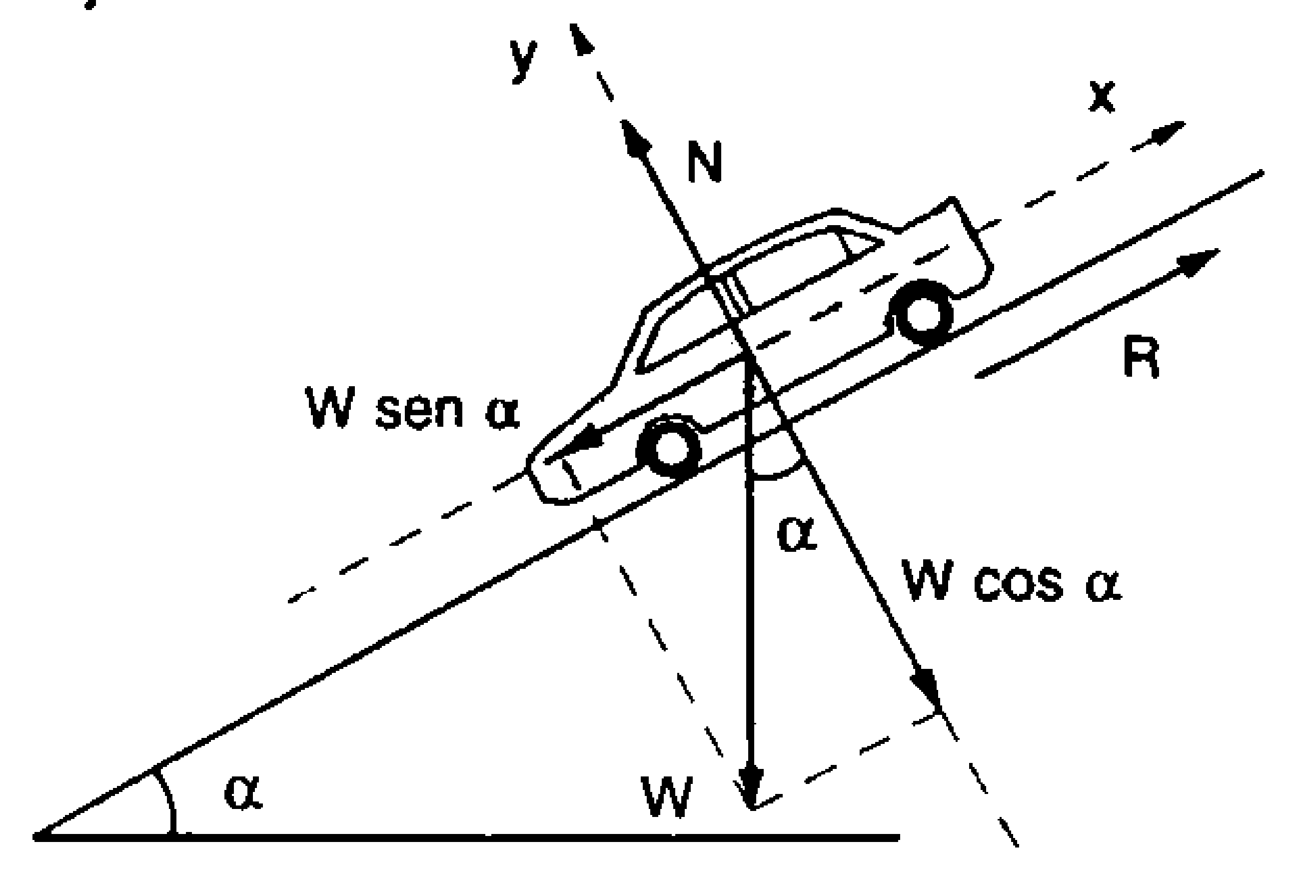
$$T = 217{,}39 \text{ N} \times \frac{3}{5} \times 20 \text{ m}$$

$$T = 285{,}7 \text{ J}$$

PROBLEMA 22. Un automóvil de peso "W" baja de una cuesta con el motor apagado y a una velocidad "V". ¿Qué potencia debe desarrollar el motor para subir la misma cuesta a la misma velocidad? (El ángulo de inclinación de la cuesta es α).

RESOLUCIÓN:

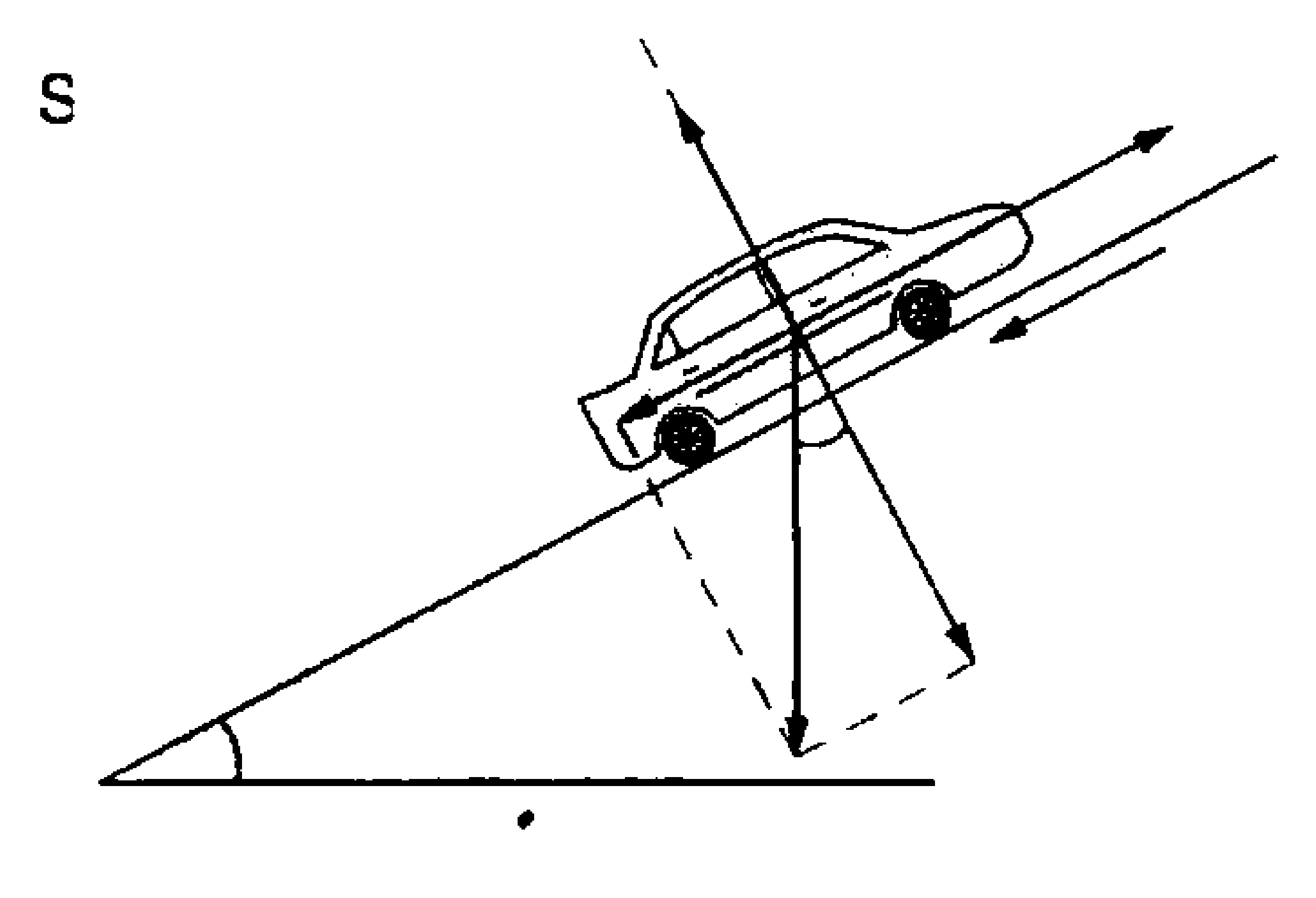
Bajada:



Se observa del gráfico:

$$R = W \text{ sen } \alpha \qquad (1)$$

S



$$F_{motor} = R + W \text{ sen } \alpha \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$F_{motor} = 2 W \text{ sen } \alpha$$

Por otro lado:

$$P_{motor} = F_{motor} . V = 2 W V \text{ sen } \alpha$$

$$\therefore \quad P_{motor} = 2 W V \text{ sen } \alpha$$

PROBLEMA 23. Un avión vuela a una altura de 100 m a una velocidad de 720 km/h; su masa es de 98 100 kg. Calcular su energía potencial en joules.

RESOLUCIÓN: Para resolver este problema no interesa la velocidad de vuelo.

Sabemos que: $E_P = m g h \qquad (1)$

Donde: $m = 98\,100$ kg

$g = 9{,}8 \text{ m/s}^2$

$h = 100$ m

Reemplazando en (1):

$$E_P = (98\,100)(9{,}8)(100)$$

Rpta.: $E_P = 96{,}14 \times 10^6$ J

PROBLEMA 24. Un bloque compacto de 2 kg descansa en una superficie horizontal. Si se le aplica una fuerza vertical dirigida hacia arriba de módulo 22 N, calcular:

a) La energía cinética para el instante $t = 6$ s.

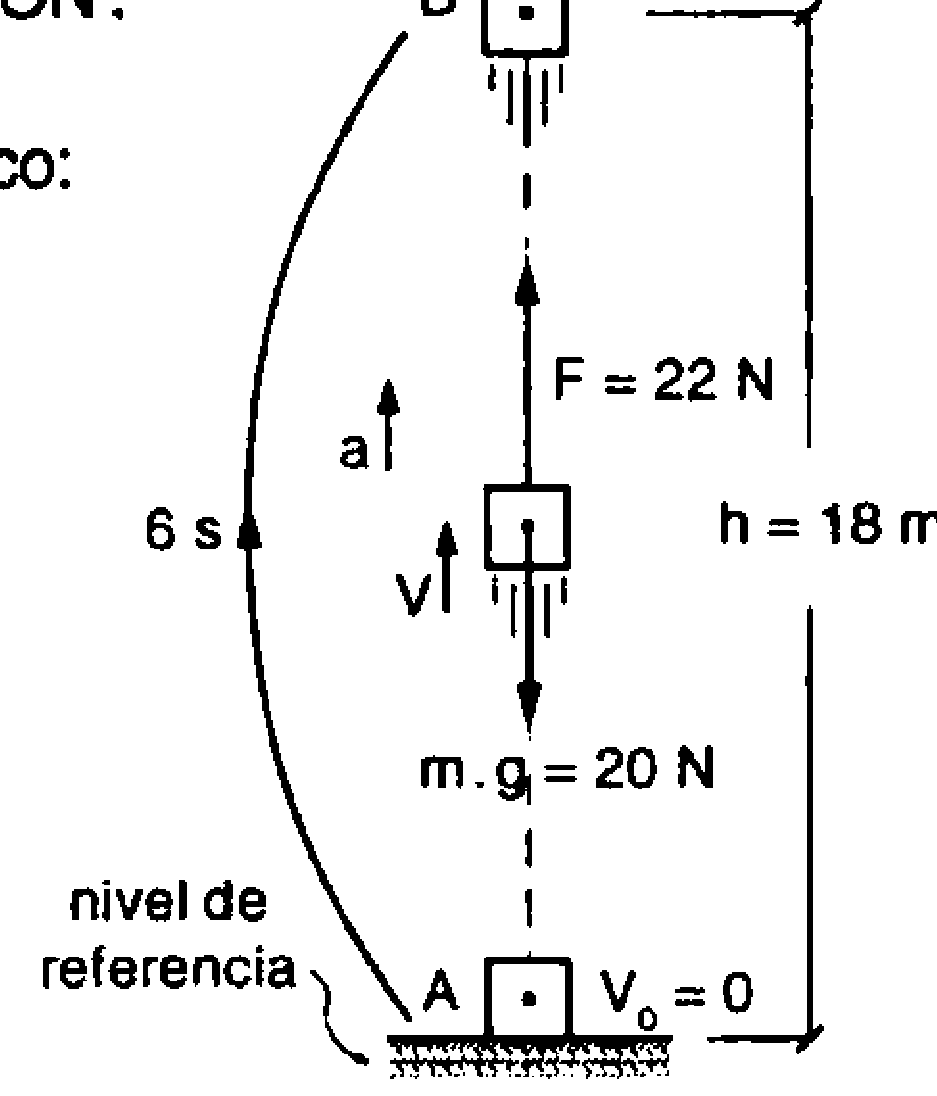
http://librosysolucionarios.net

b) La energía potencial gravitatoria para el instante $t = 6$ s.
c) La energía mecánica para $t = 6$ s.

Considerar : $g = 10\ m/s^2$

RESOLUCIÓN :

Sea el gráfico:



El bloque experimenta un M.R.U.V. acelerado. Hallamos el valor de la aceleración:

De la 2da. Ley de Newton:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{22 - 20}{2} = 1\ m/s^2$$

Hallamos la velocidad del bloque para el instante $t = 6$ s.

De la Cinemática: $V_f = V_0 + a\,t$

$$V_f = 0 + 1\ .\ 6 = 6\ m/s$$

Hallamos la altura a la que asciende el bloque para $t = 6$ s. Del M.R.U.V. :

$$d_{AB} = \left(\frac{V_A + V_B}{2}\right) \cdot t_{AB}$$

$$d_{AB} = \left(\frac{0 + 6}{2}\right) \cdot 6 = 18\ m = h_B$$

a) Hallamos la energía cinética en el punto B":

$$E_{C_B} = \frac{1}{2}\, m\, V_B^2$$

$$E_{C_B} = \frac{1}{2}\ 2\ .\ 6^2 = 36\ J$$

b) Hallamos la energía potencial gravitatoria en "B":

$$E_{P_B} = m\,g\,h_B = 2\ .\ 10\ .\ 18$$

$$E_{P_B} = 360\ J$$

c) Finalmente, hallamos la energía mecánica para $t = 6$ s, es decir en el punto "B":

$$E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B}$$

$$E_{M_B} = 36 + 360 = 396\ J$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un automóvil de peso P = 16 000 N recorre d = 120 km de una carretera en rampa ascendente de desnivel h = 400 m en t = 3 horas. Las resistencias al avance del automóvil son R = 200 N/t. Además los mecanismos del automóvil absor-ven el 10% de la potencia total. Calcular la misma en C.V.

Rpta.: P = 6,38 C.V.

2. ¿Cuál es la potencia en C.V. de una máquina que levanta un martillo de 2 000 N de peso a 0,77 m de altura 84 veces en 1 minuto, si el rendimiento es 0,7?

Rpta.: P = 4 C.V.

3. Un automóvil pesa $9{,}81 \times 10^3$ N. Sobre el automóvil en movimiento actúa una fuerza de rozamiento constante igual a 0,1 de su peso. ¿Qué cantidad de gasolina consumirá el motor para aumentar la velocidad del coche de 10 km/h hasta 40 km/h en una distancia de 0,5 km? El rendimiento del motor es igual al 20% ; el poder calorífico de la gasolina es $4{,}6 \times 10^7$ J/g.

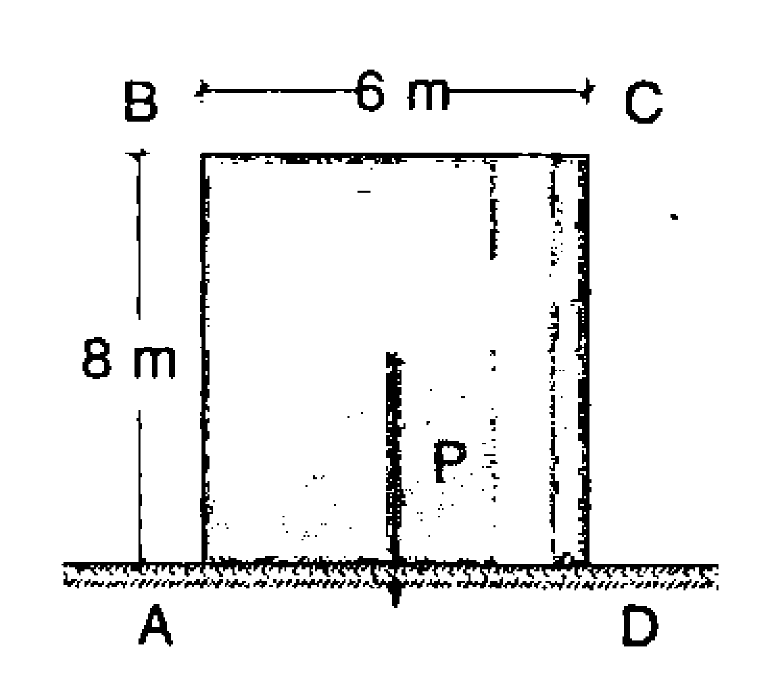
Rpta.: m = 0,06 kg

PODER CALORÍFICO: Es una propiedad

http://librosysolucionarios.net

de toda sustancia combustible, y se define como el trabajo que es capaz de realizar la unidad de masa de dicha sustancia al entrar en combustión. Se denota con "p.c."

4. El peso de un bloque macizo homogéneo ABCD cuyas dimensiones están indicadas en el gráfico, es P = 40 000 N. Determinar el trabajo que se debe realizar para volcar el macizo girándolo alrededor del canto D.



Rpta.: T = 160 000 J

5. Cuando la velocidad de un barco de turbina es de 15 nudos, la turbina desarrolla una potencia de 5 144 C.V. Determinar la fuerza de resistencia del agua al movimiento del barco conociendo que el rendimiento de la turbina y de la hélice es igual a 0,4 y 1 nudo = 0,514 4 m/s.

Rpta.: $F = 196 \times 10^3$ N

6. Un pozo cilíndrico tiene 1,5 m de diámetro y 10 m de profundidad. Si hay 2 m de agua en el fondo del pozo, calcúlese el trabajo realizado bombeando toda el agua hasta la superficie.

Rpta.: T = 314 361,4 J

7. Refiriéndose al problema anterior, ¿qué trabajo ha de realizar una bomba que tiene un rendimiento de 60%?

Rpta.: T = 577 269 J

8. Un generador de corriente eléctrica recibe energía de 200 kW . h y trabaja con una eficiencia de 80%. Hallar ¿cuántas lámparas de 100 watts cada una será capaz de alimentar, por hora de trabajo?

Rpta.: 1 600 lámparas.

9. Una bola de acero, pulimentada, de 98 N, es lanzada hacia arriba desde el suelo, con una velocidad inicial de $v = 20\sqrt{g}$ m/s. Determinar:

a) ¿Qué altura "h" alcanzará la bola y cuánto durará la ascención?
b) Calcular la energía cinética y la energía potencial en joules cuando la bola esté a 50 m del suelo.

Rpta.: a) h = 200 m ; t = 6,36 s
b) E_k = 14 715 J ; E_p = 4 905 J

10. Un punto material, cuyo peso equilibra a 1 dm^3 de agua, ocupa en el instante inicial, el origen de un sistema de coordenadas rectangulares, y está sometido a la acción de fuerzas colineales, cuyos valores en newtons son las raíces de la ecuación:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

Determinar:
a) La posición de este punto al cabo de 10 segundos.
b) Su energía cinética.
c) El trabajo realizado por la fuerza resultante.

Rpta.: C = 250 m
E_k = 1 250 joules
T_{F_R} = 1 250 joules

11. Un hombre que está corriendo, tiene la mitad de la energía cinética de la que tiene un muchacho que tiene la mitad de la masa del hombre. Si el hombre aumenta su velocidad en 1 m/s, entonces tendrá la misma energía cinética que la del muchacho. Hallar la velocidad del muchacho y del hombre.

Rpta.: $V_{muchacho} = 2(\sqrt{2} + 1)$ m/s
$V_{hombre} = (\sqrt{2} + 1)$ m/s

12. Una lancha tiene un motor fuera de borda cuya potencia es de 20 HP con una eficiencia del 50%. Si al desplazarse el agua ofrece una resistencia de 100 lb. Calcular la máxima velocidad que la lancha puede adquirir.

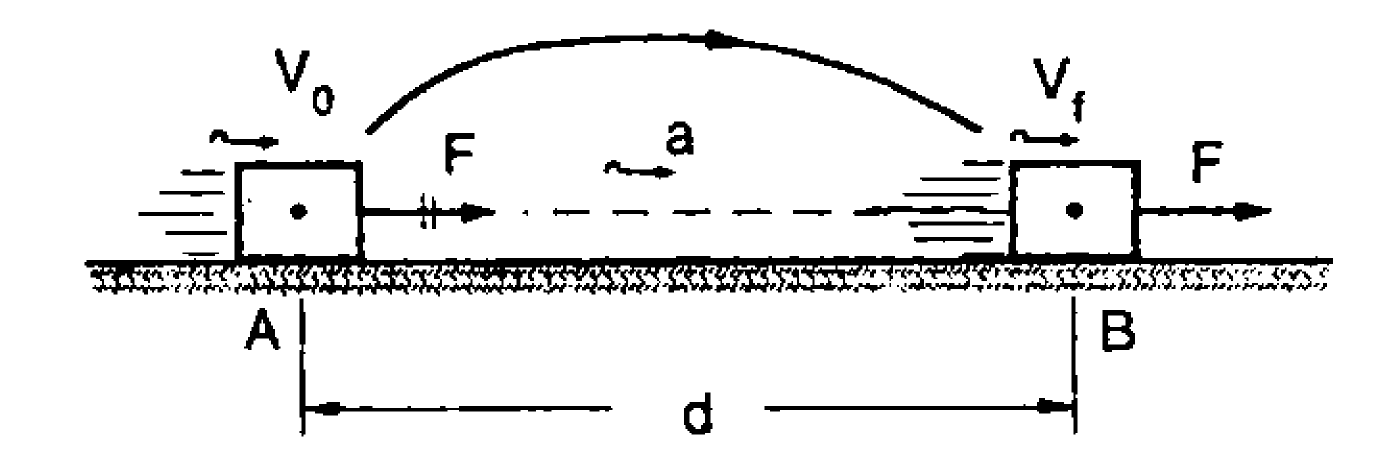
Rpta.: V = 55 pie/s

http://librosysolucionarios.net

RELACIÓN MATEMÁTICA ENTRE TRABAJO Y ENERGÍA

TRABAJO DE LA FUERZA RESULTANTE "T^F"

El bloque se desliza en una superficie lisa con V_o y sobre él se aplica una fuerza F.



F es la fuerza resultante que actúa sobre el bloque, ¿qué produce? ¡Trabajo!

$$T_{A\to B}^{F} = F.d \qquad (1)$$

De la 2° ley de Newton:

$$F = m.a \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$T_{A\to B}^{F} = m.a.d \qquad (3)$$

De la Cinemática (M.R.U.V.):

$$V_f^2 = V_0^2 + 2.a.d$$

$$\Rightarrow \frac{V_f^2 - V_0^2}{2} = a.d \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (3):

$$T_{A\to B}^{F} = m\left(\frac{V_f^2 - V_0^2}{2}\right)$$

$$T_{A\to B}^{F} = \underbrace{\frac{1}{2} m V_f^2}_{\text{energía cinética final}} - \underbrace{\frac{1}{2} m V_0^2}_{\text{energía cinética inicial}}$$

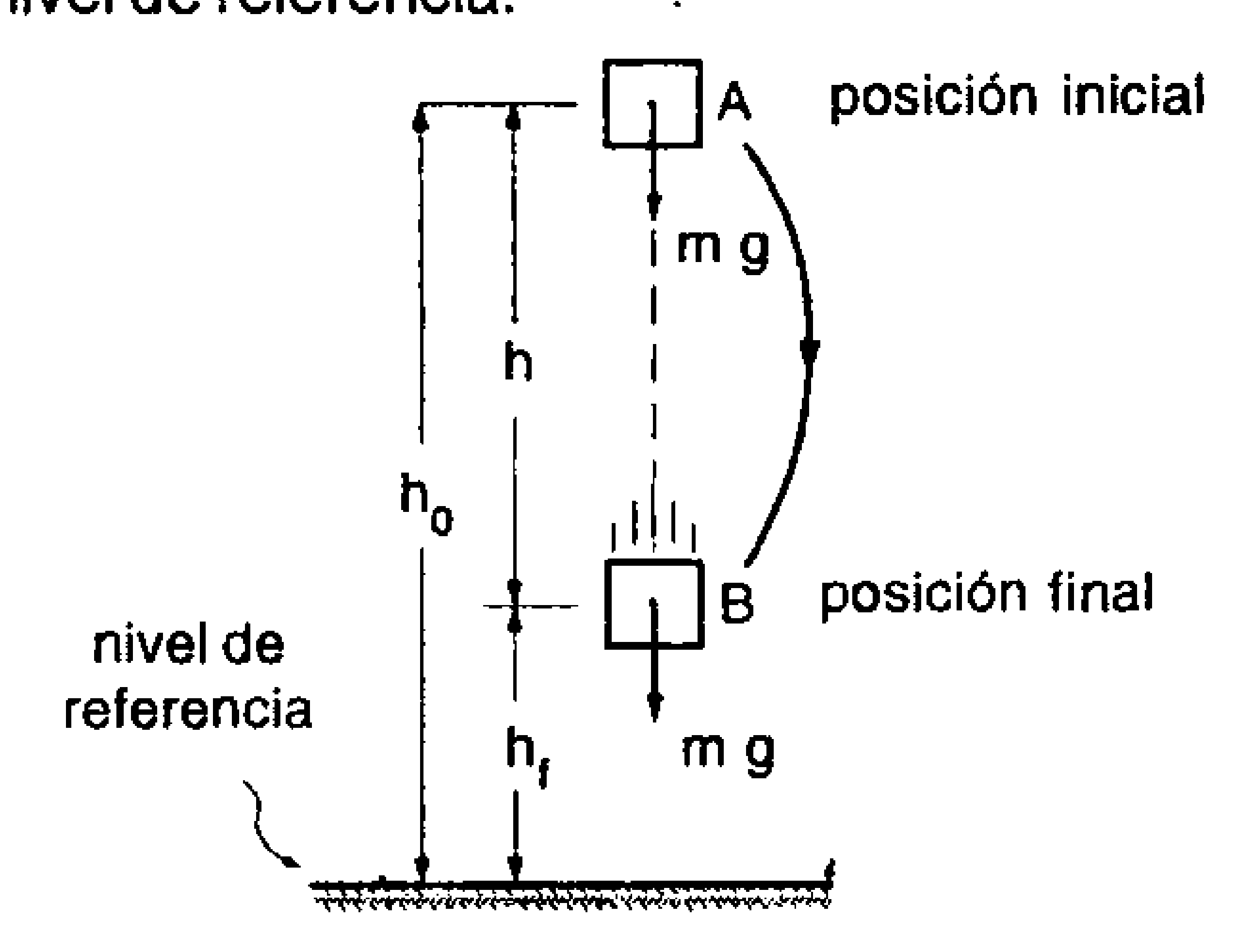
$$T_{A\to B}^{F} = E_{C_f} - E_{C_0} = \Delta E_C$$

Finalmente: $\boxed{T_{A\to B}^{F} = \Delta E_C}$

Esta ecuación indica que toda fuerza resultante F que realiza trabajo sobre un cuerpo, le cambia de velocidad, es decir modifica la energía cinética.

TRABAJO DE LA FUERZA DE GRAVEDAD " $T_{A\to B}^{mg}$ "

Considerando un cuerpo a una altura h_o del nivel de referencia.



Consideremos de la fuerza de gravedad desde A hasta B:

$$T_{A\to B}^{mg} = mg.\Delta h$$

$$T_{A\to B}^{mg} = mg(h_0 - h_f)$$

$$T_{A\to B}^{mg} = \underbrace{mgh_0}_{\text{energía potencial gravitatoria inicial}} - \underbrace{mgh_f}_{\text{energía potencial gravitatoria final}}$$

$$T_{A\to B}^{mg} = E_{PG_0} - E_{PG_f}$$

$$T_{A\to B}^{mg} = -(E_{PG_f} - E_{PG_0})$$

$$\boxed{T_{A\to B}^{mg} = -\Delta E_{PG}}$$

CONCLUSIÓN:

Cuando un cuerpo varía su velocidad ΔV, entonces varía su energía cinética ΔE_C.

Y cuando cambia verticalmente de posición Δh entonces cambia su energía potencial gravitatoria ΔE_{PG}.

La conclusión es también que al caer el

http://librosysolucionarios.net

cuerpo una altura "h" ha experimentado una pérdida de energía gravi-tatoria igual a ΔE_{PG}. Esto explica su valor negativo en la fórmula.

PRINCIPIO DE CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA MECÁNICA

"Si un cuerpo pasa de una posición inicial hasta una posición final y se verifica que sobre el cuerpo actúan sólo fuerzas conservativas; entonces se cumple que la energía mecánica del cuerpo en todo instante permanece constante".-

$$\boxed{E_{M_{inicial}} = E_{M_{final}}}$$

TEOREMA DEL TRABAJO Y LA ENERGÍA MECÁNICA

Establece que: "Si un cuerpo pasa desde una posición inicial hasta otra posición final y durante su recorrido actúan sobre él fuerzas no **conservativas**; entonces se cumple que la energía mecánica del sistema no se conserva. Además el trabajo realizado por las fuerzas no conservativas durante el recorrido es igual a la variación de la energía mecánica".

$$T^{F}_{(NO\ CONSERVATIVAS)} = E_{M\ FINAL} - E_{M\ INICIAL}$$

$$\boxed{T^{F}_{(NO\ CONSERVATIVAS)} = \Delta E_M}$$

ΔE_M : Diferencia de energías mecánicas inicial y final.

NOTA: Una típica fuerza no conservativa es la fuerza de rozamiento.

TRABAJO TRANSFORMADO Y CONSERVACIÓN DE LA ENERGÍA

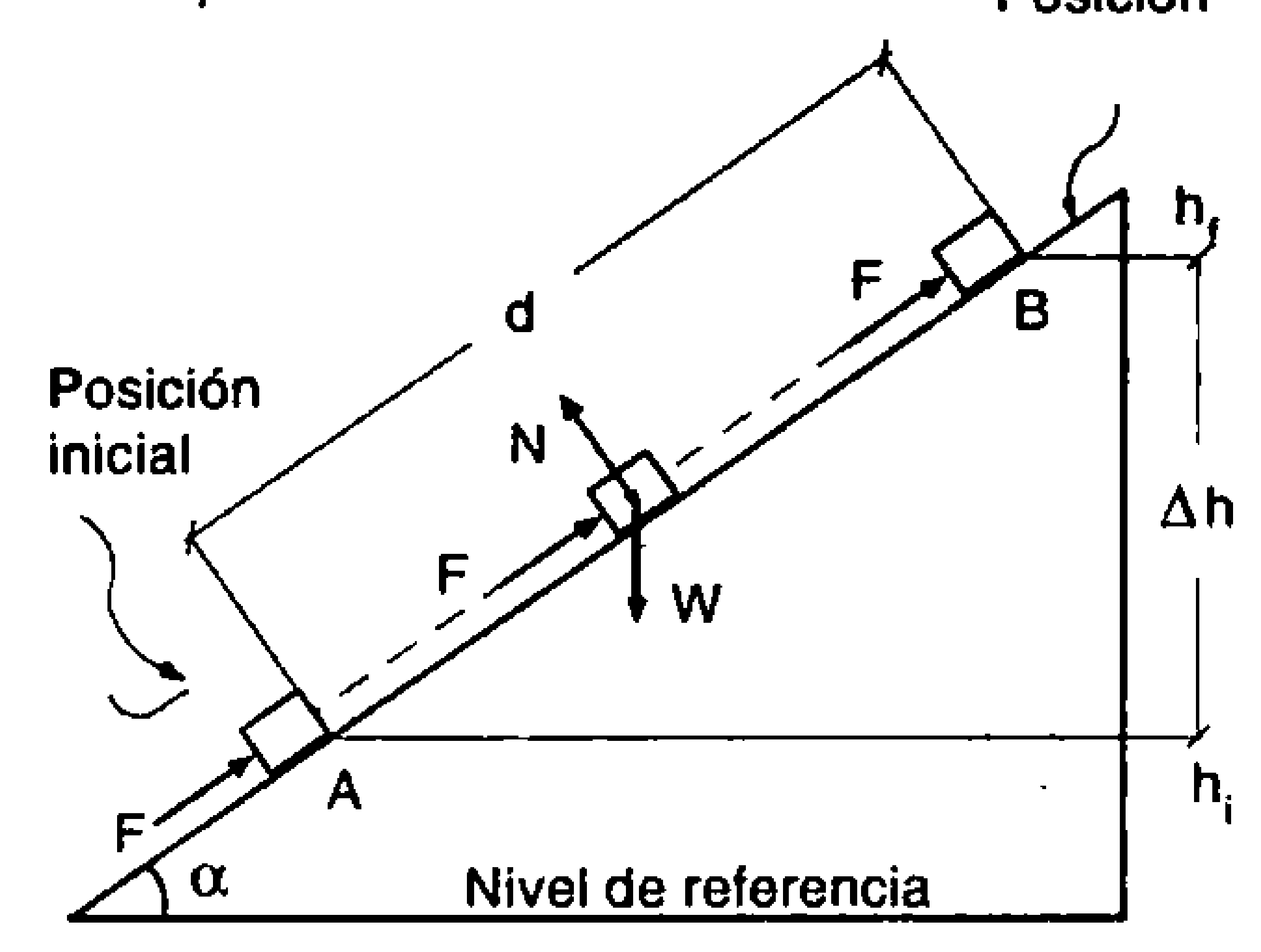
El trabajo realizado sobre un cuerpo por medio de fuerzas externas diferentes del peso "w" (fuerza de gravedad), es igual al cambio que experimenta la energía mecánica DE_M de dicho cuerpo.

$$\boxed{T^{Fzas.\ ext \neq del\ W} = \Delta E_M}$$ o:

$$\boxed{T^{Fzas.\ ext. \neq del\ W} = E_{M_f} - E_{M_i}} \quad (A)$$

Deducción de la ecuación (A):

Para ello consideremos el caso de un bloque de masa "m" que es desplazado desde A hasta B mediante una fuerza constante F a lo largo de un plano inclinado.



Al desplazarse el bloque experimenta la acción de la fuerza F, la reacción normal **N** y de su peso (W = m g).

$$T^{Resultante}_{A\to B} = F_R \cdot d$$

F_R es la resultante sobre el bloque

$$T^{Resultante}_{A\to B} = F_R \cdot d$$

$$T^{Fza.\ ext. \neq W}_{A\to B} + T^{W}_{A\to B} = m.a.d$$

$$T^{Fza.\ ext. \neq W}_{A\to B} - W(h_f - h_i) = m\left(\frac{V_f^2 - V_i^2}{2}\right)$$

$$T^{Fza.\ ext. \neq W}_{A\to B} - Wh_f + Wh_i = \frac{1}{2}mV_f^2 - \frac{1}{2}mV_i^2$$

$$T^{Fza.\ ext. \neq W}_{A\to B} = (E_{C_f} + E_{P_f}) - (E_{C_i} + E_{P_i})$$

$$\boxed{T^{Fza.\ ext. \neq W}_{A\to B} = E_{M_f} - E_{M_i}} \quad (A)$$

NOTA : Si en (A) la fuerza externa diferente al peso es el rozamiento "R",

se tiene que el trabajo del rozamiento "T^R" es:

$$T^R = T^{Fzas.\ ext. \neq W}$$

$$T^R = E_{M_f} - E_{M_i}$$

$$E_{M_f} = E_{M_i} + T^R \quad \text{ó:}$$

$$\boxed{E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f} + T^R}$$

Si en (A) ocurre que la fuerza externa diferente al peso es cero, entonces la energía mecánica final es igual a la energía mecánica inicial

$$T^{Fzas.\ ext. \neq W} = 0$$

$$0 = E_{M_f} - E_{M_i}$$

$$\boxed{E_{M_f} = E_{M_i}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un bloque de 300 g de masa que se halla en reposo en la cumbre "A" de un plano inclinado y a 2 m de altura sobre la horizontal, se desplaza, llegando a "B" con 6 m/s de velocidad, según la figura. A partir de "B" se desliza sobre una superficie horizontal, desplazándose 3 m hasta "C" donde se detiene. Calcular:

a) La energía gastada (transformada en calor) al bajar el cuerpo de "A" a "B".
b) El coeficiente de rozamiento ciné-tico por deslizamiento sobre la superficie horizontal.

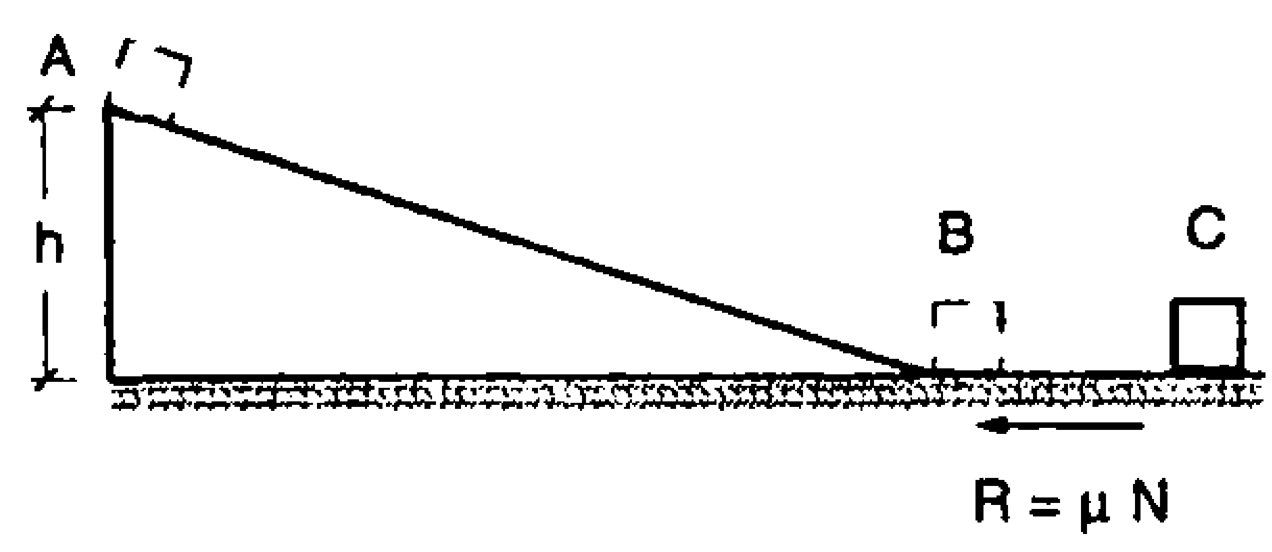
RESOLUCIÓN :

$m = 300\,g$ a) $E_g = ?$

$h = 2\,m$ b) $\mu = ?$

$d = 3\,m$

$V = 6\,m/s$



a) Tramo AB: $E_{M_i} = E_{M_f} + T_R$

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f} + T_R$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + m g h_A = \frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B + T_R$$

$$0 + m g h_A = \frac{1}{2} m V_B^2 + m g(0) + T_R$$

De donde: $T_R = m g h_A - \frac{1}{2} m V_B^2$

Sustituyendo datos:

$$T_R = E_g^{A \to B} = 0{,}3 \times 9{,}8 \times 2 - \frac{1}{2} \times 0{,}3 \times 5^2$$

Rpta.: $E_g^{A \to B} = 0{,}48\ J$

$E_g^{A \to B}$: Energía gastada al trasladarse de A a B.

b) La energía cinética presente en "B" se gastará íntegramente en desplazar la masa hasta "C", es decir se utiliza para vencer la fuerza de fricción "R", que se opone al desplazamiento:

$$E_{C_B} = T_R \quad (I)$$

pero: $E_{C_B} = \frac{1}{2} m V_B^2 \quad (1)$

y: $T_R = R \cdot d$

pero: $R = \mu_C N = \mu_C m g$

$\therefore$ $T_R = \mu_C m g \cdot d \quad (2)$

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

$\frac{1}{2} m V^2 = \mu_C m g \cdot d$; de donde:

$$\boxed{\mu_C = \frac{V^2}{2 g d}}$$

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo valores:

$$\mu_C = \frac{(6\ m/s)^2}{2 \times 9{,}8\ m/s^2 \times 3\ m}$$

$$\mu_C = \frac{36}{2 \times 9{,}8 \times 3}$$

Rpta.: $\mu_C = 0{,}612$

PROBLEMA 2. Calcular la energía cinética de un vehículo que tiene una masa de 100 kg y va a 90 km/h.

a) En joules
b) En ergios

RESOLUCIÓN : $E_C = \frac{1}{2} m V^2$ (I)

pero: $V = 90\ \frac{km}{h} = \frac{90 \times 1\,000\ m}{3\,600\ s}$

$$V = 25\ m/s$$

Sustituyendo en (I):

$$E_C = \frac{1}{2} \times 100\ kg \left(25\ \frac{m}{s}\right)^2$$

$$E_C = 31\,250 \left(kg \times \frac{m}{s^2}\right) m$$

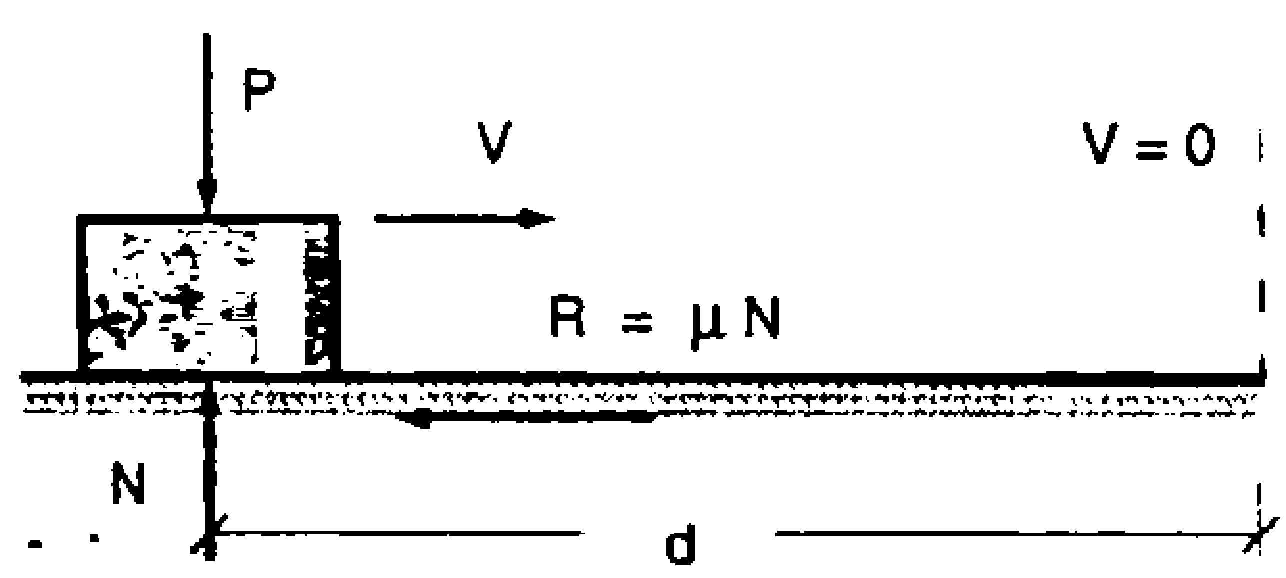
$$E_C = 31\,250\ N.m$$

$$\therefore \quad E_C = 31\,250\ J$$

b) En ergios: $E_C = 31\,250 \times 10^7$ erg

$$E_C = 3\,125 \times 10^8\ erg$$

PROBLEMA 3. Un cuerpo con una velocidad "V" se deja sometido a su inercia sobre un plano horizontal cuyo coeficiente de rozamiento es "μ". Calcular la distancia que avanza hasta detenerse.



RESOLUCIÓN : El cuerpo se desliza por inercia y con la energía cinética que posee en el momento que se le deja, realiza un trabajo al desplazarse una distancia "d" para vencer el rozamiento, luego:

$$E_C = T_R \qquad (1)$$

donde: $E_C = \frac{1}{2} m V^2$ (a)

y : $T = F d$

pero la fuerza "F" es igual a la fuerza de rozamiento "R" que se opone al desplazamiento, ya que tiene que vencer ese rozamiento "R" con una fuerza "F" para realizar el trabajo "T", luego:

$$T_R = R.d = \mu N.d$$

o : $T_R = \mu m g.d$ (b)

Sustituyendo (a) y (b) en (I):

$\frac{1}{2} m V^2 = \mu m g.d$ de donde:

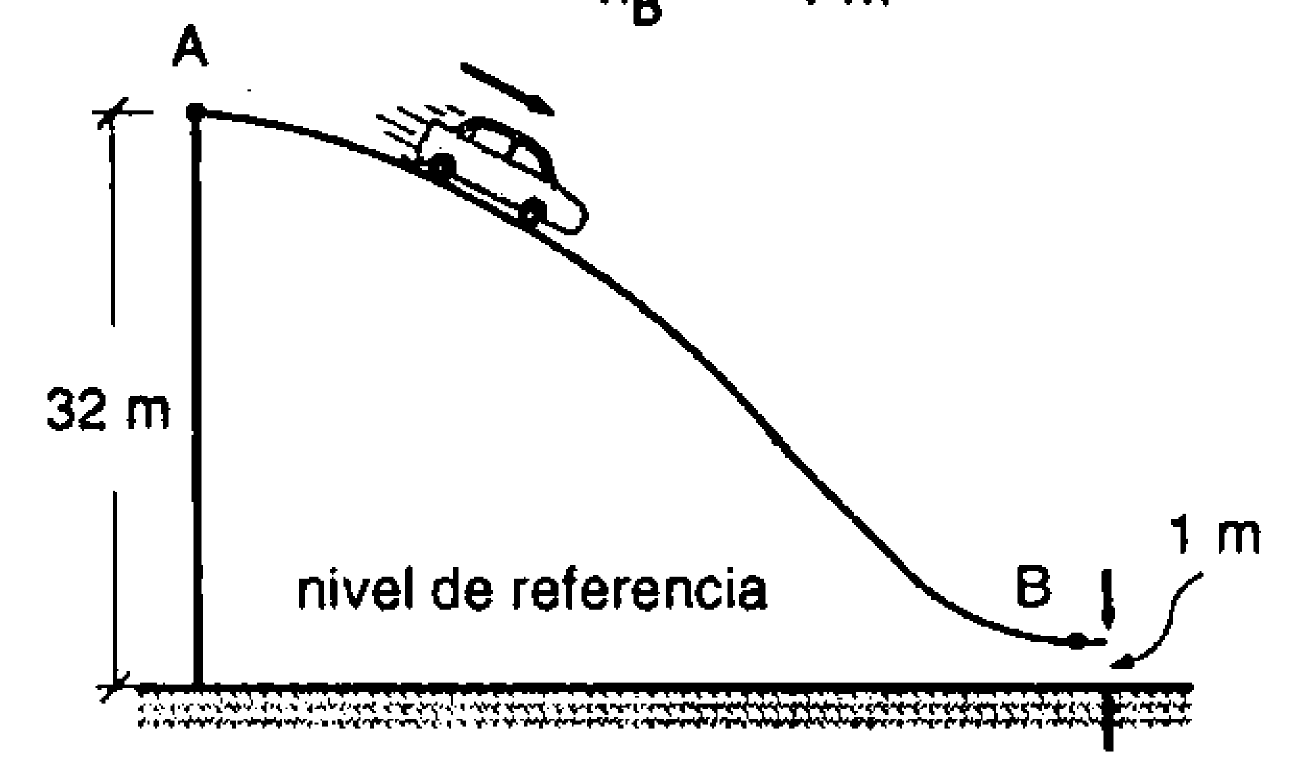
Rpta.: $d = \frac{V^2}{2 \mu g}$

PROBLEMA 4. En la figura se muestra un coche que se desliza por una vía sin fricción, pasando por A, a razón de 40 m/s. ¿Con qué velocidad pasará por B?

$V_A = 40\ m/s \qquad V_B = ?$

$h_A = 32\ m$

$h_B = 1\ m$



RESOLUCIÓN: La energía mecánica en A y en B son iguales:

$$E_{M_B} = E_{M_A}$$

$$E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B = \frac{1}{2} m V_A^2 + m g h_A$$

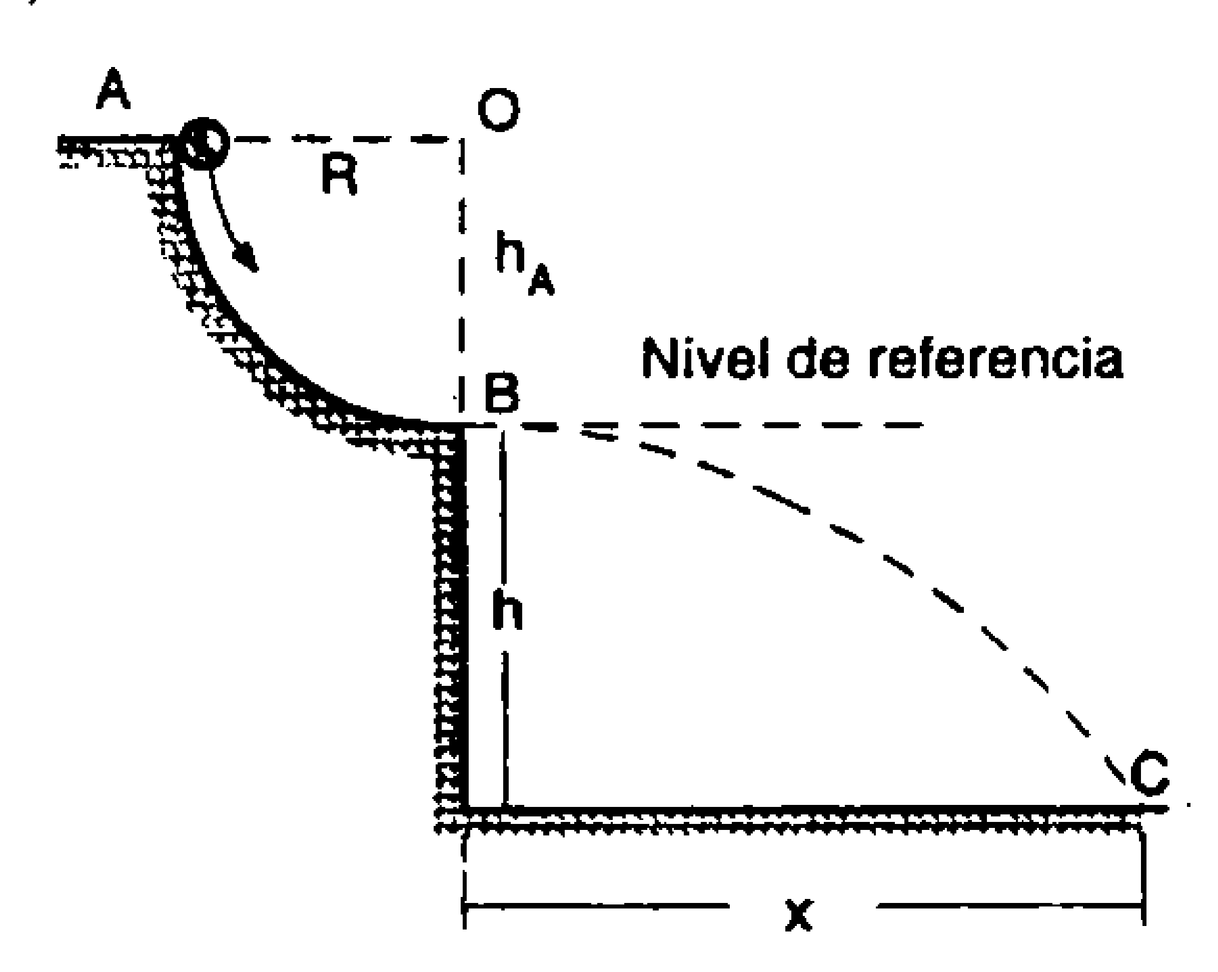
De donde, simplificando y ordenando:

$$V_B^2 = V_A^2 + 2g(h_A - h_B)$$

$$V_B^2 = \left(40 \frac{m}{s}\right)^2 + 2 \times 9{,}8 \frac{m}{s^2} (32 - 1)\, m$$

Rpta.: $V_B = 47\ m/s$

PROBLEMA 5. Una bolita se suelta desde el punto A del gráfico. Calcular "x" en función de R y h (la curva es lisa).



RESOLUCIÓN: La energía mecánica en A y en **B** son iguales:

$$E_{M_B} = E_{M_A}$$

$$E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 + m g (0) = 0 + m g h_A$$

Pero: $h_A = R$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} m V_B^2 = m g R$$

De donde: $V_B = \sqrt{2 g R}$ (1)

Ahora, a partir del punto "B" la trayectoria de la bolita es una parábola, entonces el movimiento es compuesto, luego:

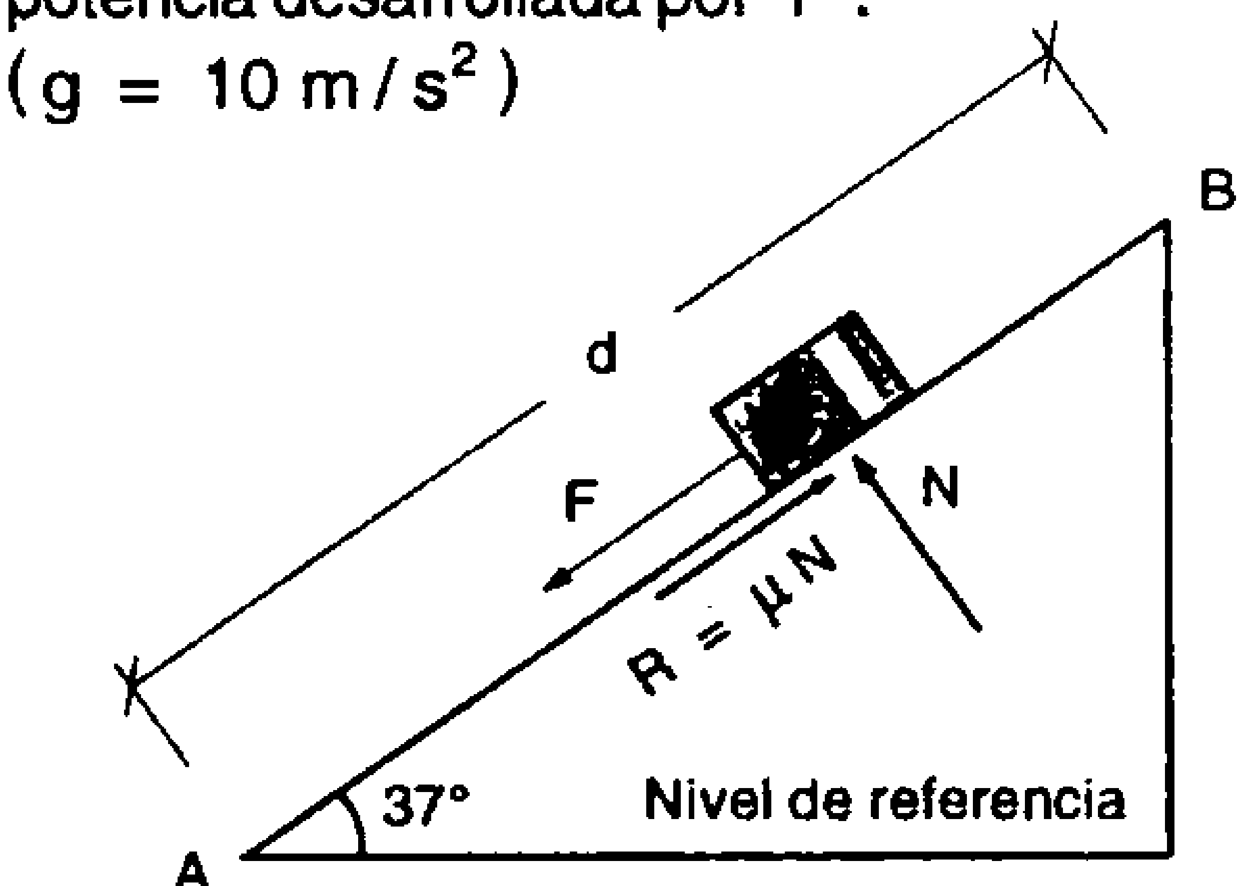
$$x = V_B t = V_B \sqrt{\frac{2h}{g}} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$x = \sqrt{2 g R} \sqrt{\frac{2h}{g}}$$

Rpta.: $x = 2\sqrt{R h}$

PROBLEMA 6. Un cuerpo de 8 kg de masa es jalado sobre la pendiente mostrada, de 1 m de longitud, con la fuerza constante "F". Partiendo del reposo, el bloque llega abajo con una rapidez de 3 m/s. Si el coeficiente de rozamiento cinético entre el cuerpo y el plano es 0,25, determinar la potencia desarrollada por "F".
$(g = 10\ m/s^2)$



RESOLUCIÓN: Calculamos primero el trabajo "T_F", realizado por la fuerza F

$$d = 1\,m \quad ; \quad P_F = ? \quad ; \quad m = 8\,kg$$

$$T_{(F \neq W)} = E_{M_f} - E_{M_i}$$

$$T_F + T_R = \left(E_{C_B} + E_{P_B}\right) - \left(E_{C_A} + E_{P_A}\right)$$

Pero el rozamiento es contrario a F, luego:

$$T_F + (-R\,d) = \left(\frac{1}{2} m V_B^2 + 0\right) - (0 + m g d \,\text{sen}\, 37°)$$

$$T_F - \mu N d = \frac{1}{2} m V_B^2 - m g d \,\text{sen}\, 37°$$

Donde: $N = m g \cos 37°$, luego:

http://librosysolucionarios.net

$$T_F - \mu\,(m\,g\cos 37°)\,d =$$

$$= \frac{1}{2}\,m\,V_B^2 - m\,g\,d\,\text{sen}\,37°$$

$$T_F - 0{,}25\,(8 \times 10 \times \frac{4}{5}) \times 1 =$$

$$= \frac{1}{2}\,(8)\,(3)^2 - 8 \times 10 \times 1 \times \frac{3}{5}$$

Efectuando operaciones: $T_F = 4\ J$

Ahora, recordando la potencia:

$$P_F = \frac{T_F}{t} \qquad (I)$$

Cálculo de "t". Por cinemática:

$$\frac{V_f + V_i}{2} = \frac{d}{t}$$

$$\frac{3 + 0}{2} = \frac{1}{t} \quad \therefore \quad t = \frac{2}{3}\,s$$

Sustituyendo valores en (I):

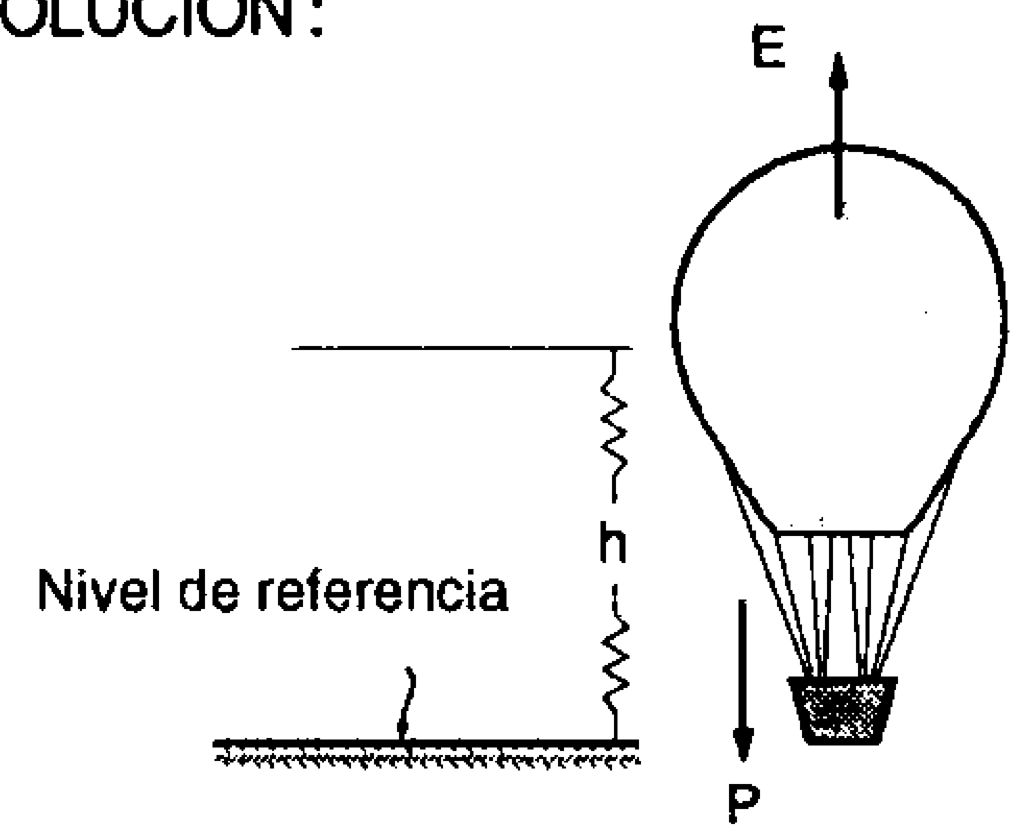
$$P_F = \frac{4\ J}{\frac{2}{3}\,s} = 6\,\frac{J}{s}$$

Rpta.: $P_F = 6\ W$

PROBLEMA 7. Un globo aerostático que pesa 400 N sufre un empuje del aire de 500 N. Calcular:

a) La energía potencial y cinética al cabo de 30 s.
b) La energía mecánica total.

RESOLUCIÓN :



a) $\Sigma F_y = m\,a$

Cálculo de la aceleración:

$$E - P = m\,a \ , \quad \text{donde} \quad P = \text{peso}$$

Pero: $m = \frac{P}{g} \quad \therefore \quad E - P = \frac{P}{g}\,a$

De donde: $a = \frac{g\,(E - P)}{P}$

Sustituyendo valores:

$$a = \frac{9{,}8\ m/s^2\ (500\ N - 400 N)}{400\ N}$$

De donde: $a = 2{,}45\ m/s^2$

Cálculo de la altura al cabo de 30 s:

$$h = \frac{1}{2}\,a\,t^2$$

$$h = \frac{1}{2} \times 2{,}45\ m/s^2 \times (30\ s)^2$$

$$h = 1\,102{,}5\ m$$

Cálculo de la energía potencial a ésta altura:

$$E_P = Ph = 400\ N \times 1\,102{,}5\ m$$

$$E_P = 441\,000\ J$$

Cálculo de la energía cinética:

$$V = a\,t = 2{,}45\ m/s^2 \times 30\ s$$

$$V = 73{,}5\ m/s^2 \quad ; \quad \text{ahora}$$

Aplicando: $E_C = \frac{1}{2}\,m\,V^2$

$$E_C = \frac{1}{2} \times \frac{400\ N}{9{,}8\ m/s^2} \times 73{,}5\ m/s^2$$

$$E_C = 110\,250\ N\,m$$

Rpta.: $E_C = 110\,250\ J$

b) La energía mecánica total es la suma de las dos energías acumuladas al cabo de 30 s

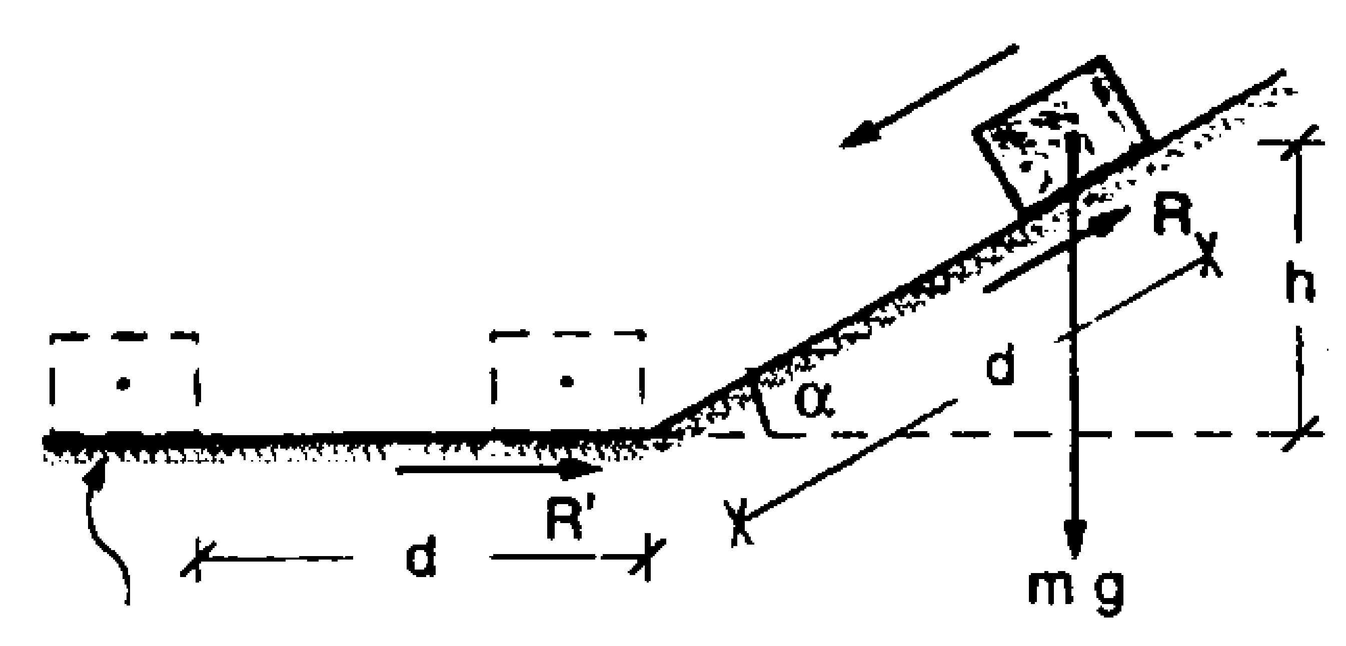
$$E = E_P + E_C$$

$$E = 441\,000\ J + 110\,250\ J$$

Rpta.: $E = 551\,250\ J$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 8. Un cuerpo se desliza primero por un plano inclinado y luego por un plano horizontal. ¿Cuál es el coeficiente de fricción, si la distancia que recorre sobre ambos planos es igual?



Nivel de referencia

RESOLUCIÓN : Por conservación de la energía:

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f} + T_{R_T}$$

$$0 + m\,g.h = 0 + 0 + T_R + T_{R'}$$

$$m\,g\,.d\,sen\alpha = R\,d + R'\,d$$

$$m\,g\,sen\alpha = R + R' \qquad (1)$$

En el plano inclinado:

$$R = \mu N = \mu\, m\,g\cos\alpha \qquad (2)$$

En el plano horizontal:

$$R' = \mu N' = \mu\, m\,g \qquad (3)$$

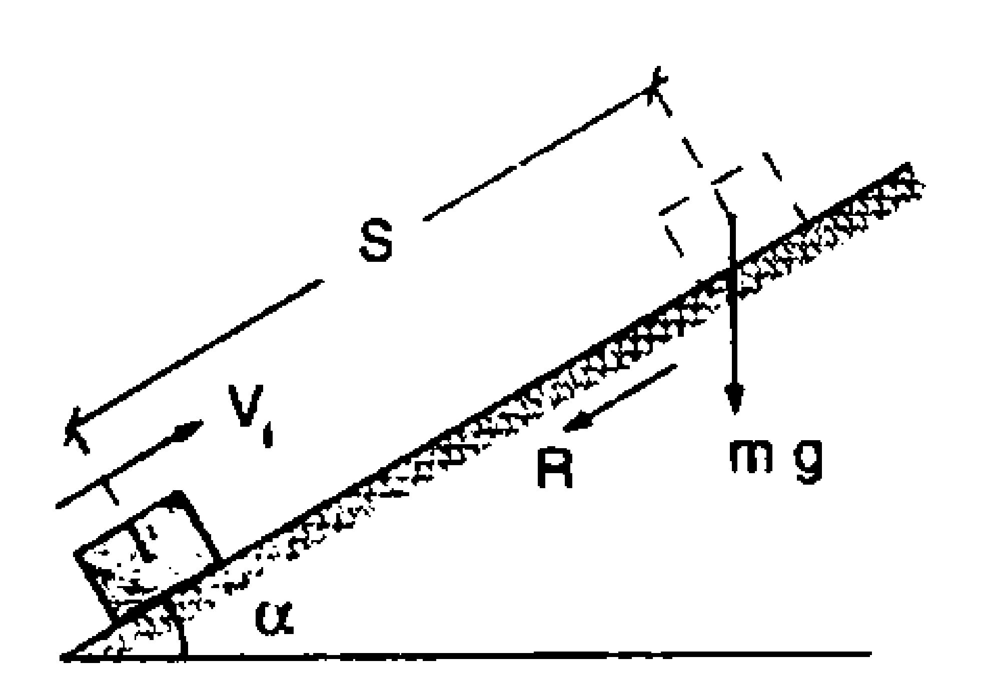
(2) y (3) en (1):

$$m\,g\,sen\,\alpha = \mu\, m\,g\,(1 + \cos\alpha)$$

Simplificando:

Rpta.: $\mu = \dfrac{sen\,\alpha}{1 + \cos\alpha} = tg\,\dfrac{\alpha}{2}$

PROBLEMA 9. Un cuerpo sube por un plano inclinado ($\alpha = 60°$). Con una velocidad inicial "V_i" una distancia



máxima "S"; si el coeficiente de rozamiento es "μ". ¿Qué velocidad tendrá el cuerpo al volver a su punto de partida?

RESOLUCIÓN :

Subida: Por conservación de la energía:

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_i} + T_R$$

$$\frac{1}{2} m\,V_i^2 = m\,g.S.\,sen\,60° + R\,S$$

$$m\,g.S.\,sen\,60° = \frac{1}{2} m\,V_i^2 - R\,S \qquad (1)$$

Bajada: Por conservación de la energía:

$$m\,g.S.\,sen\,60° = R\,S + \frac{1}{2} m\,V_x^2 \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$R\,S + \frac{1}{2} m\,V_x^2 = \frac{1}{2} m\,V_i^2 - 2\,R\,S \qquad (3)$$

Por otra parte: $R = m\,mg\cos 60°$,

luego, se tiene:

$$\frac{1}{2} m\,V_x^2 = \frac{1}{2} m\,V_i^2 - 2\,\mu\,.S.mg\cos 60°$$

Simplificando y efectuando:

Rpta.: $V_x = \sqrt{V_i^2 - 2\,g.S.\mu}$

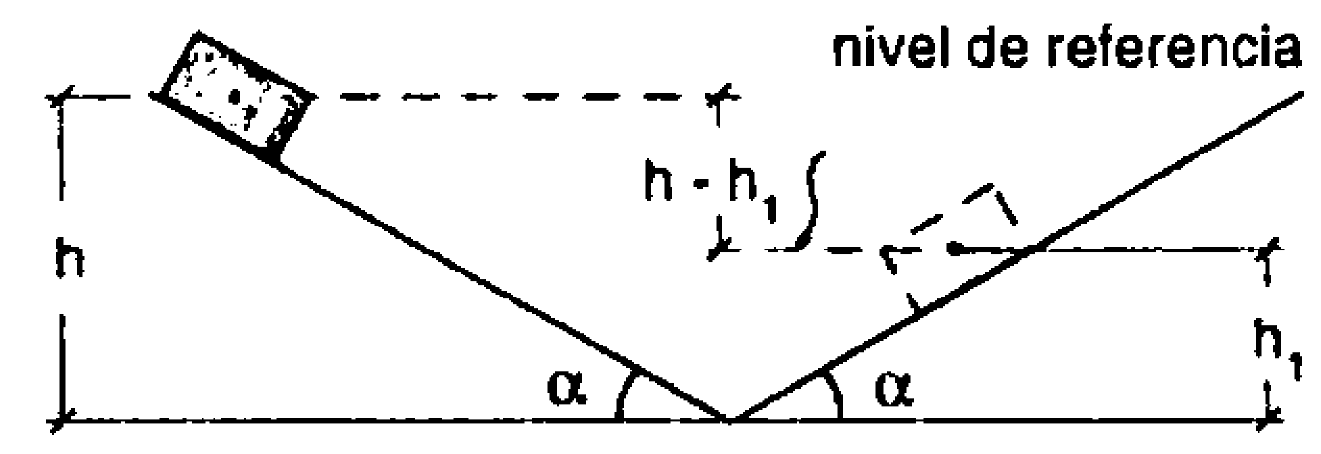
PROBLEMA 10. Un cuerpo de 50 kg de masa es dejado caer del punto A y se observa que alcanza el punto C. Determinar el trabajo hecho contra la fricción.

$$h = 30\,m$$

$$h_1 = 10\,m$$

$$\mu = 0{,}2$$

RESOLUCIÓN :



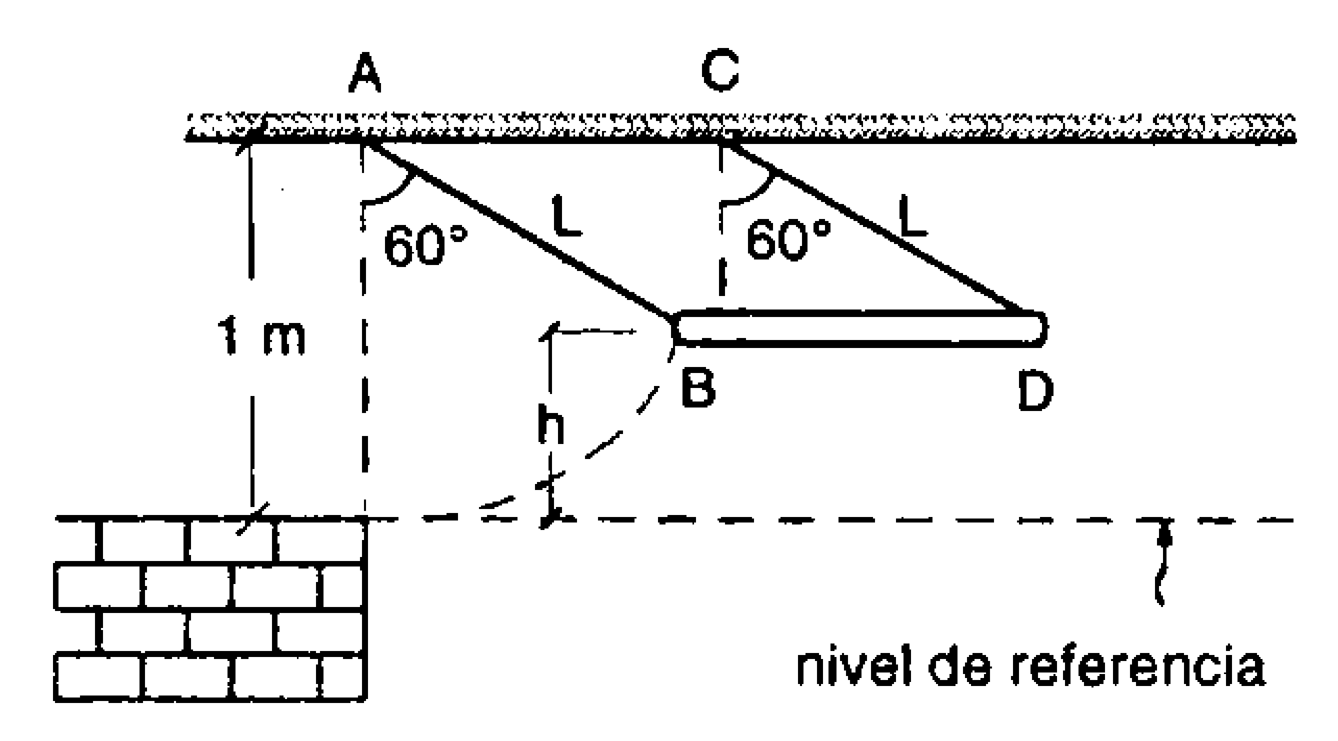
Toda la pérdida de energía potencial se convierte en calor, ya que se está venciendo la fuerza de rozamiento:

$$T_{f_r} = mg(h - h_1)$$

$$T_{f_r} = 50 \times 9{,}8 \times 20$$

Rpta.: $T_{f_r} = 9\,800$ J

PROBLEMA 11. La barra "BD" pesa 20 N y está sujeta por dos cables "AB" y "CD" de pesos despreciables. Si parte del reposo en la posición mostrada. ¿Cuál será la velocidad al chocar con la pared?



RESOLUCIÓN: Al descender la barra lo hará una altura equivalente a:

$$h = (L - L\cos 60°) \Rightarrow h = \frac{L}{2} \qquad (1)$$

Trazando el nivel de referencia en la zona de choque:

Por el principio de la conservación de la energía

$$E_{P_1} + E_{C_1} = E_{P_2} + E_{C_2}$$

Pero: $E_{C_1} = 0$ y $E_{P_2} = 0$

$$\therefore \qquad mgh = \frac{1}{2}mV^2$$

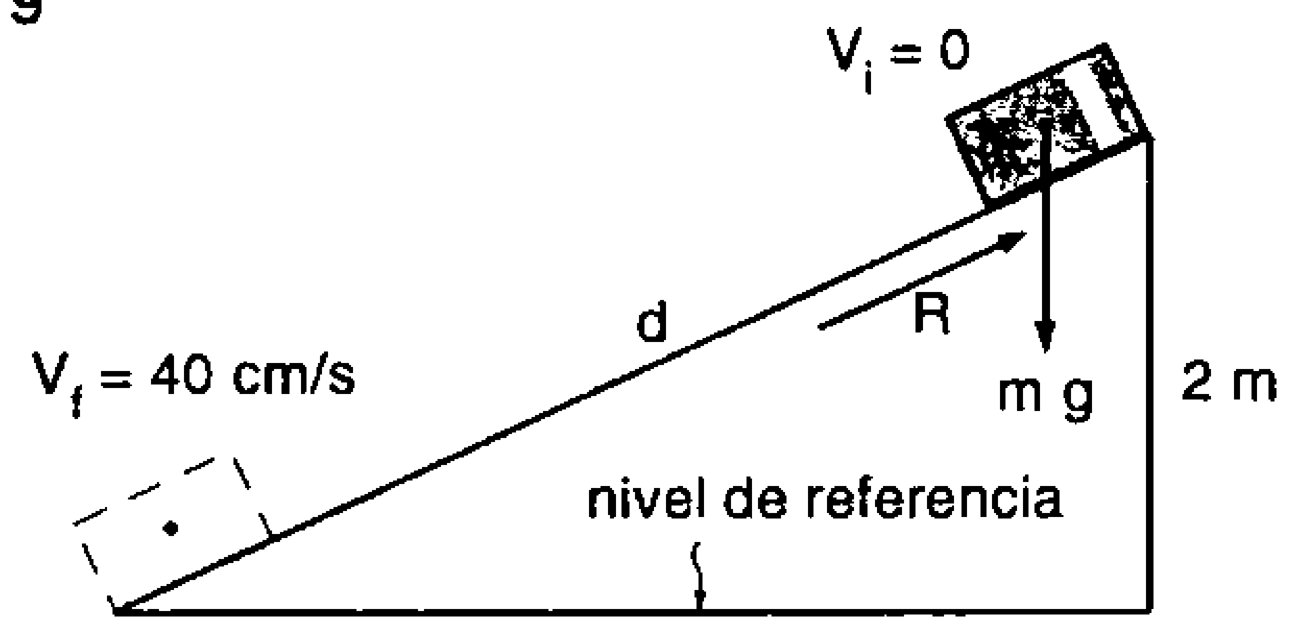
$$V = \sqrt{2gh} \qquad (2)$$

Siendo L = 1 m y sustituyendo (1) en (2):

$$V = \sqrt{9{,}8}\ \text{m/s}$$

Rpta.: V = 3,13 m/s

PROBLEMA 12. Si un bloque de 30 kg de masa se desliza hacia abajo sobre un plano inclinado comenzando en un punto que se encuentra a 2 m arriba del suelo. ¿Cuánto trabajo de fricción "T_R" se efectúa si el bloque tiene una velocidad de 40 cm/s exactamente en el momento en que lle-g



RESOLUCIÓN: Por conservación de la energía:

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{P_f} + E_{C_f} + T_R$$

$$0 + mgh_1 = 0 + \frac{1}{2}mV_f^2 + T_R$$

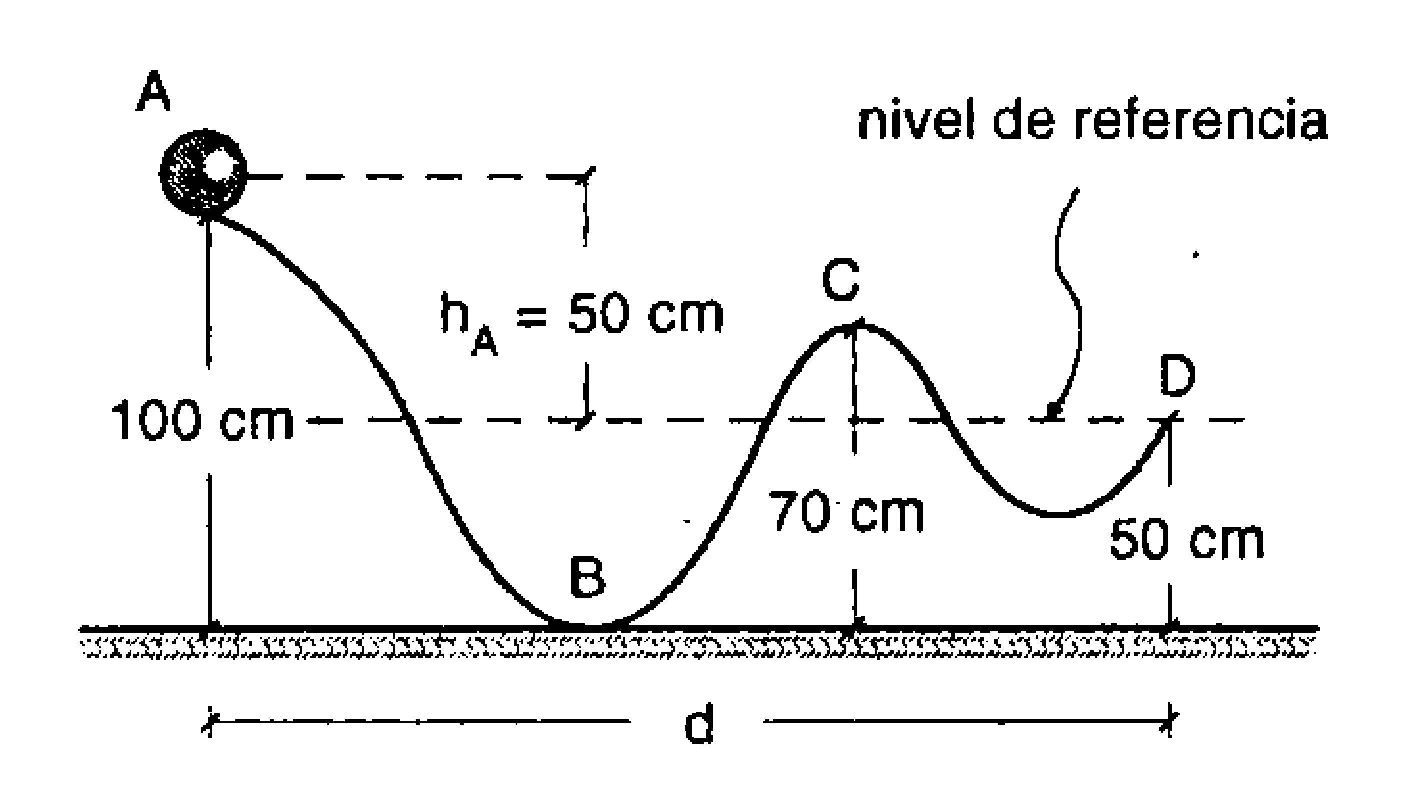
$$T_R = mgh_1 - \frac{1}{2}mV_f^2$$

$$T_R = 30\,\text{kg} \times 9{,}8\,\text{m/s}^2 \times 2\,\text{m} - \frac{1}{2} \times$$

$$\times\, 30\,\text{kg}\,(0{,}40\,\text{m/s})^2$$

Rpta.: $T_R = 585{,}6$ J

PROBLEMA 13. En la figura mostrada la distancia AD es 400 cm. Si la "cuenta" que está en A tiene una velocidad inicial de 2 m/s y al llegar a D se detiene. ¿De qué magnitud es el trabajo de rozamiento que retardó el movimiento? (La masa de la "cuenta" es 0,50 g).



RESOLUCIÓN: AD = 400 cm = d

$V_D = 0$ $\qquad$ $V_A = 2$ m/s

http://librosysolucionarios.net

$m = 0{,}50\,g$ $\quad R = ?$

$h_A = 0{,}50\,m$

Por el principio de conservación de la energía entre A y D:

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{P_D} + E_{C_D} + T_R$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + P \times h_A = 0 + 0 + T_R$$

de donde: $T_R = \frac{1}{2} m V_A^2 + P \times h_A$

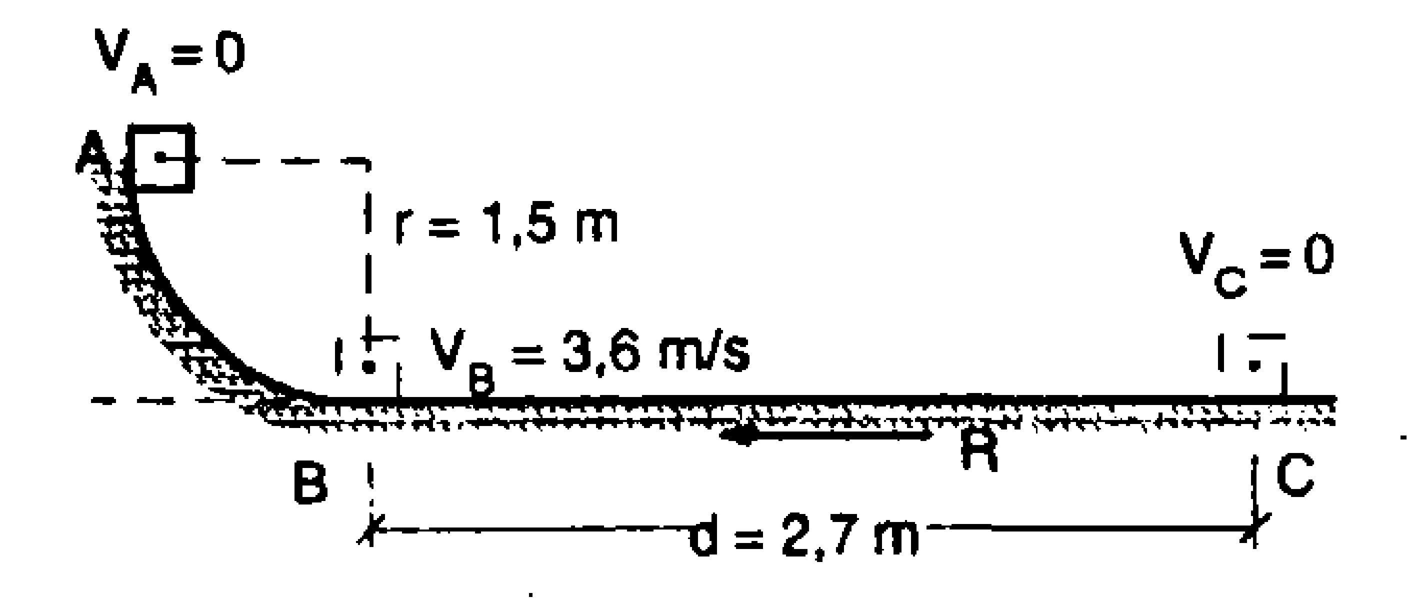
$$T_R = \frac{1}{2} \times 0{,}5 \times 10^3\,kg\,(2\,m/s)^2 +$$

$$+ 0{,}5 \times 10^3\,kg \times 9{,}8\,m/s^2 \times 1\,m$$

Rpta.: $5{,}9 \times 10^{-3}\,J$

PROBLEMA 14. Un bloque de 10 N de peso se abandona partiendo del reposo en el punto "A", sobre una pista constituida por un cuadrante de circunferencia de radio 1,5 m. Desliza sobre la pista y alcanza el punto "B" con una velocidad de 3,6 m/s. Desde el punto "B" desliza sobre una superficie horizontal una distancia de 2,7 m hasta llegar al punto "C", en el cual se detiene. Calcular:

a) ¿Cuál es el coeficiente cinético de rozamiento sobre la superficie horizontal.
b) ¿Cuál ha sido el trabajo realizado, contra las fuerzas de rozamiento mientras el cuerpo desliza desde A a B sobre el arco circular?



RESOLUCIÓN:

a) Entre los puntos "B" y "C", aplicando conservación de la energía, ya que $E_{P_B} = E_{P_C} = 0$, se tiene:

$$E_{C_B} = E_{C_C} + T_R \qquad (1)$$

T_R : Trabajo contra la fricción

Donde: $E_{C_B} = \frac{1}{2} m V_B^2$

$E_{C_C} = 0$

$T_R = R_C\,d = \mu_C\,m\,g\,d$

Reemplazando en (1):

$$\frac{1}{2} m V_B^2 = 0 + \mu_C\,m\,g\,d$$

$$\mu_C = \frac{V_B^2}{2\,g\,d}$$

$$\mu_C = \frac{(3{,}6\,m/s)^2}{2 \times 9{,}8\,m/s^2 \times 2{,}7\,m}$$

Rpta.: $\mu_C = 0{,}2448$

b) Entre "A" y "B", aplicando conservación de la energía:

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B} + T_R \qquad (2)$$

Donde: $E_{C_A} = 0$

$E_{P_A} = P\,h_A$

$E_{C_B} = \frac{1}{2} m V_B^2$

$E_{P_B} = 0$

$E_{P_B} = 0$

Reemplazando en (2):

$$0 + P\,h_A = \frac{1}{2} m V_B^2 + 0 + T_R$$

$$T_R = P\,h_A - \frac{1}{2} m V_B^2$$

$$T_R = 10\,N \times 1{,}5\,m - \frac{1}{2} \times \frac{10\,N}{9{,}8\,m/s^2} \times$$

$$\times (3{,}6\,m/s)^2$$

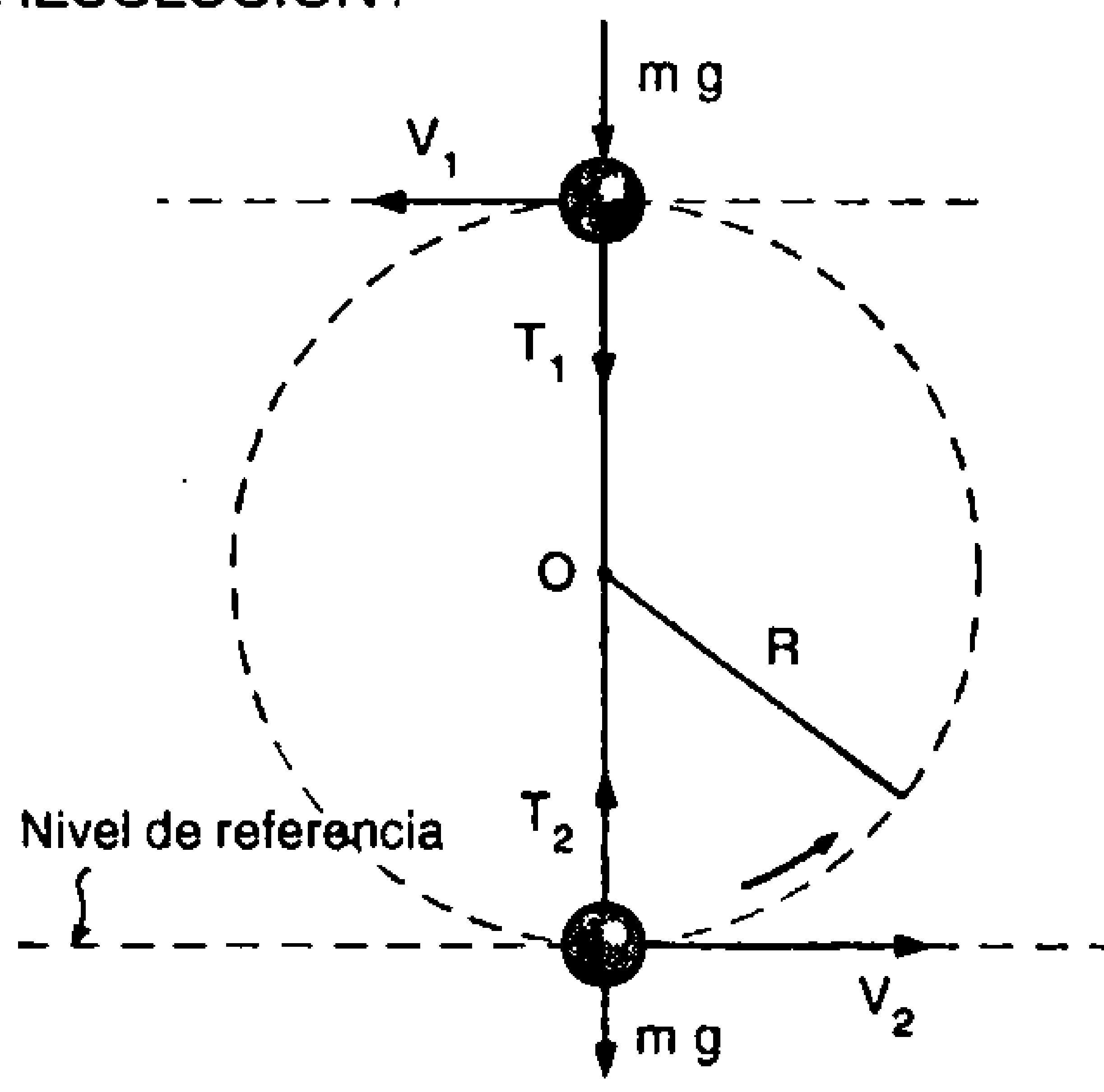
Rpta.: $T_R = 8{,}4\,N\,m = 8{,}4\,J$

PROBLEMA 15. Una pelota atada a una cuerda, se pone en rota-

http://librosysolucionarios.net

cion en una circunferencia vertical. Demostrar que la tensión de la cuerda en el punto más bajo excede de la del punto más alto en 6 veces el peso de la pelota.

RESOLUCIÓN :



En el punto más alto: $\Sigma F_y = m\,a_{C_1}$

$$m g + T_1 = m \frac{V_1^2}{R}$$

$$T_1 = m \frac{V_1^2}{R} - m g \qquad (1)$$

En el punto más bajo: $\Sigma F_y = m\,a_{C_2}$

$$m g - T_2 = m \frac{V_2^2}{R}$$

$$T_2 = m g - m \frac{V_2^2}{R} \qquad (2)$$

Restando (2) - (1):

$$T_2 - T_1 = 2 m g + \left(\frac{m V_2^2}{R} - \frac{m V_1^2}{R}\right) \qquad (I)$$

Por el principio de conservación de la energía entre (1) y (2) :

$$E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + m g \,.\, 2R = \frac{1}{2} m V_2^2 + 0$$

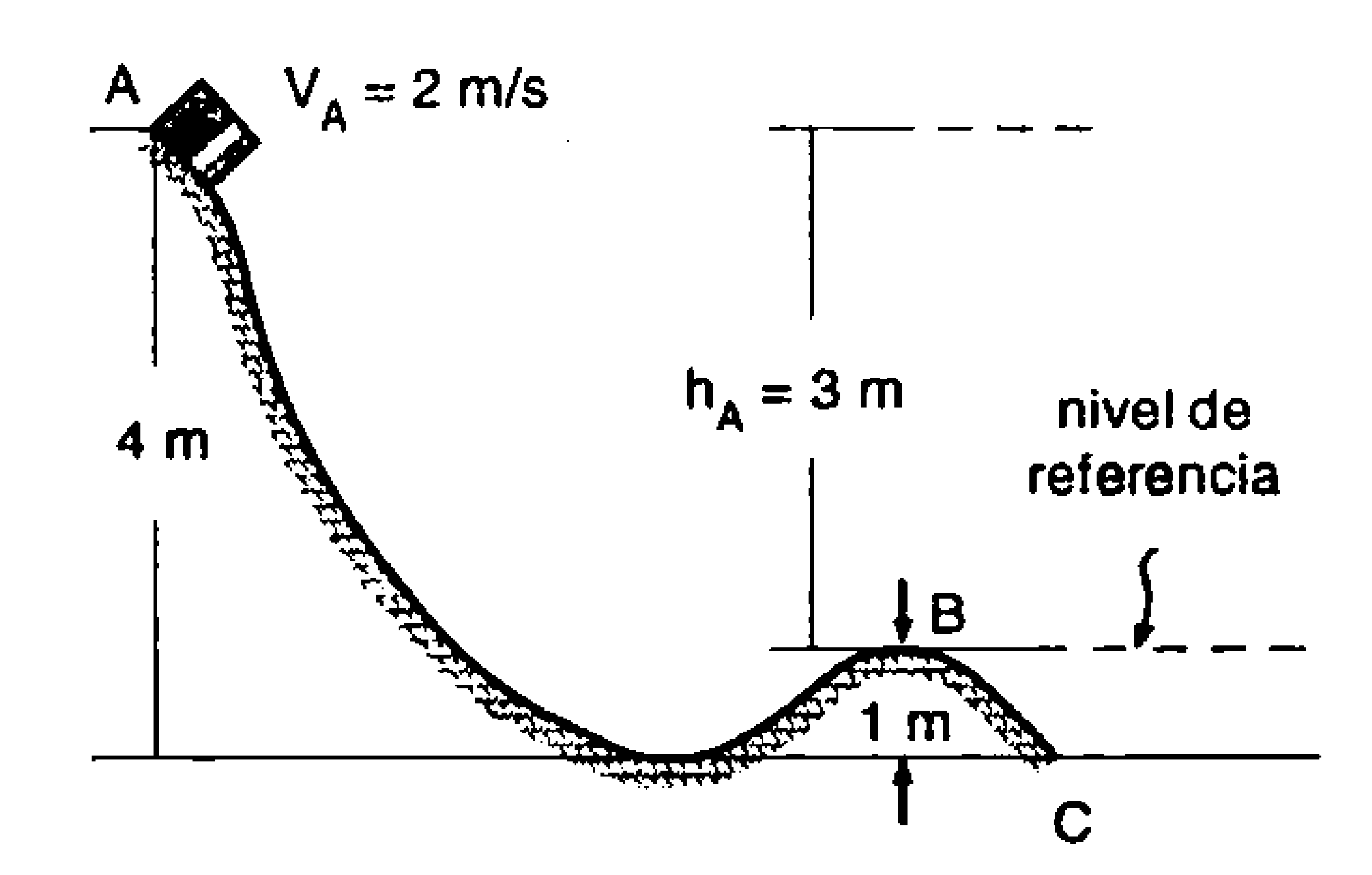
$$\left(\frac{m V_2^2}{R} - \frac{m V_1^2}{R}\right) = 4 m g$$

Sustituyendo en (I) :

$$T_2 - T_1 = 2 m g + 4 m g$$

Rpta.: $T_2 - T_1 = 6 m g$

PROBLEMA 16. Un bloque de 3 kg de masa mostrado en la figura, tiene una velocidad de 2 m/s en el punto "A" y de 6 m/s en el punto "B". Si la longitud AB a lo largo de la curva es 12 m ¿De qué magnitud es la fuerza de fricción "R" que actúa sobre ella? Considerando la misma fuerza de fricción, ¿a qué distancia de "B" se detendrá?



RESOLUCION :

I) Aplicando conservación de la energía entre A y B

$$E_{C_A} + E_{P_A} = E_{C_B} + E_{P_B} + T_R$$

$$\frac{1}{2} m V_A^2 + m g h_A = \frac{1}{2} m V_B^2 + 0 + Rd$$

$$\frac{1}{2} m (V_A^2 - V_B^2) + m g h_A = Rd$$

Reemplazando datos numéricos:

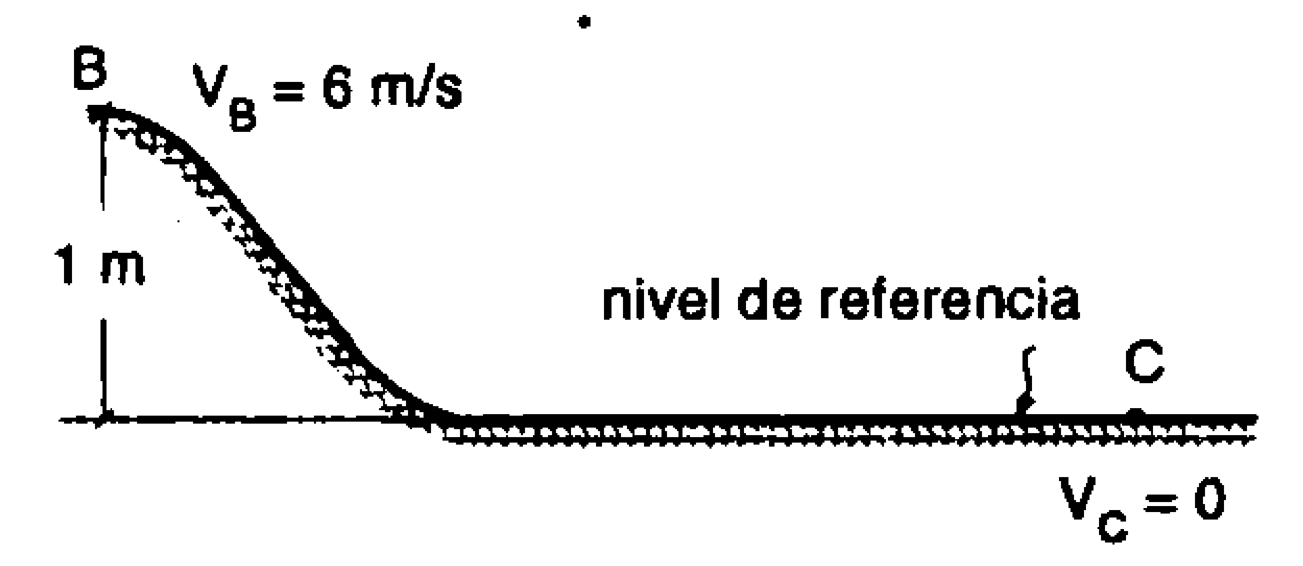
$$\frac{1}{2} \times 3 (2^2 - 6^2) + 3 \times 9{,}8 \times 3 = R \times 12$$

$$-48 + 88{,}2 = R \times 12$$

Rpta.: $R = \frac{40{,}2}{12} = 3{,}35 \text{ N}$

II) Cálculo de la distancia desde **B** al punto

que se detendrá, supongamos C.



Por conservación de la energía entre "B" y "C":

$$E_{C_B} + E_{P_B} = E_{C_C} + E_{P_C} + T_R$$

$$\frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B = 0 + 0 + R d$$

d: Longitud de la trayectoria a lo largo de BC.

$$\frac{1}{2} \times 3 \text{ kg} (6 \text{ m/s})^2 + 3 \text{ kg} \times 9{,}8 \text{ m/s}^2 \times$$

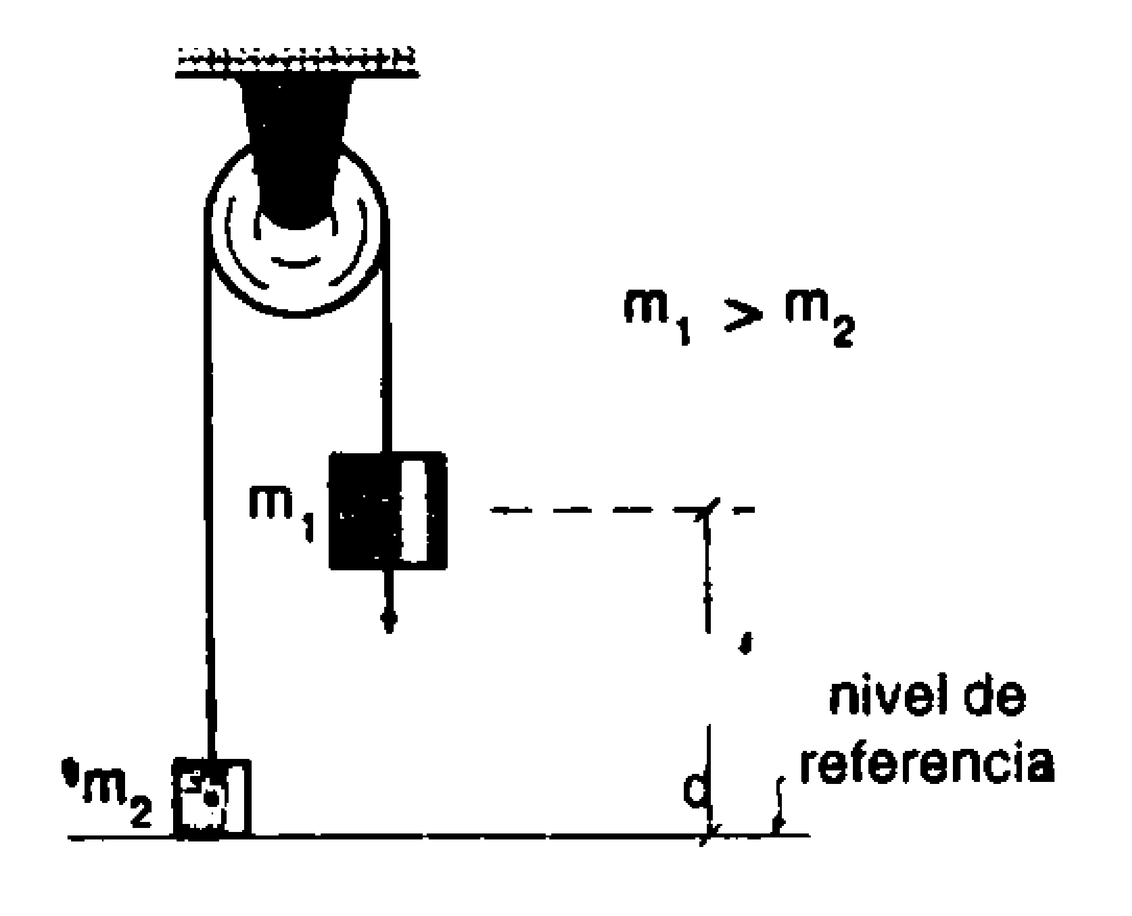
$$\times 1 \text{ m} = 3{,}35 \text{ N} \times d$$

De donde: Rpta.: $d = 24{,}9$ m

PROBLEMA 17. Si las masas de la figura mostrada se liberan a partir de las posiciones que se indican, probar que la velocidad de las masas, exactamente antes que m_1 choque contra el piso es:

$$V = \left[\frac{2 g d (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right]^{\frac{1}{2}}$$

Despreciar la masa y la fricción de la polea.



RESOLUCIÓN: Por conservación de la energía:

$$E_{M_{\text{INICIAL DEL SISTEMA}}} = E_{M_{\text{FINAL DEL SISTEMA}}}$$

$$E_{P_1} + E_{C_1} = E_{P_2} + E_{C_2}$$

$$m_1 g d = m_2 g d + \frac{1}{2} M V^2$$

$$m_1 g d = m_2 g d + \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

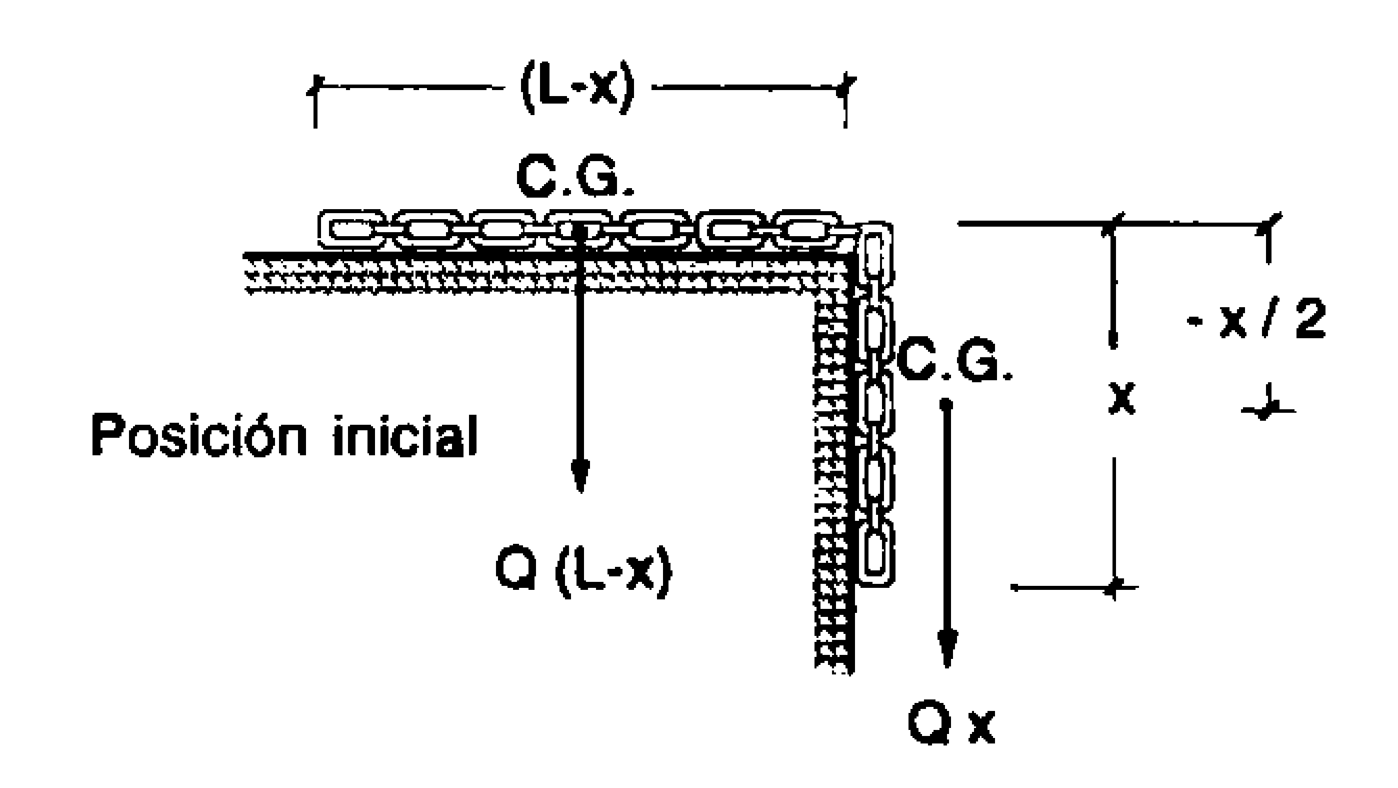
$$m_1 g d - m_2 g d = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

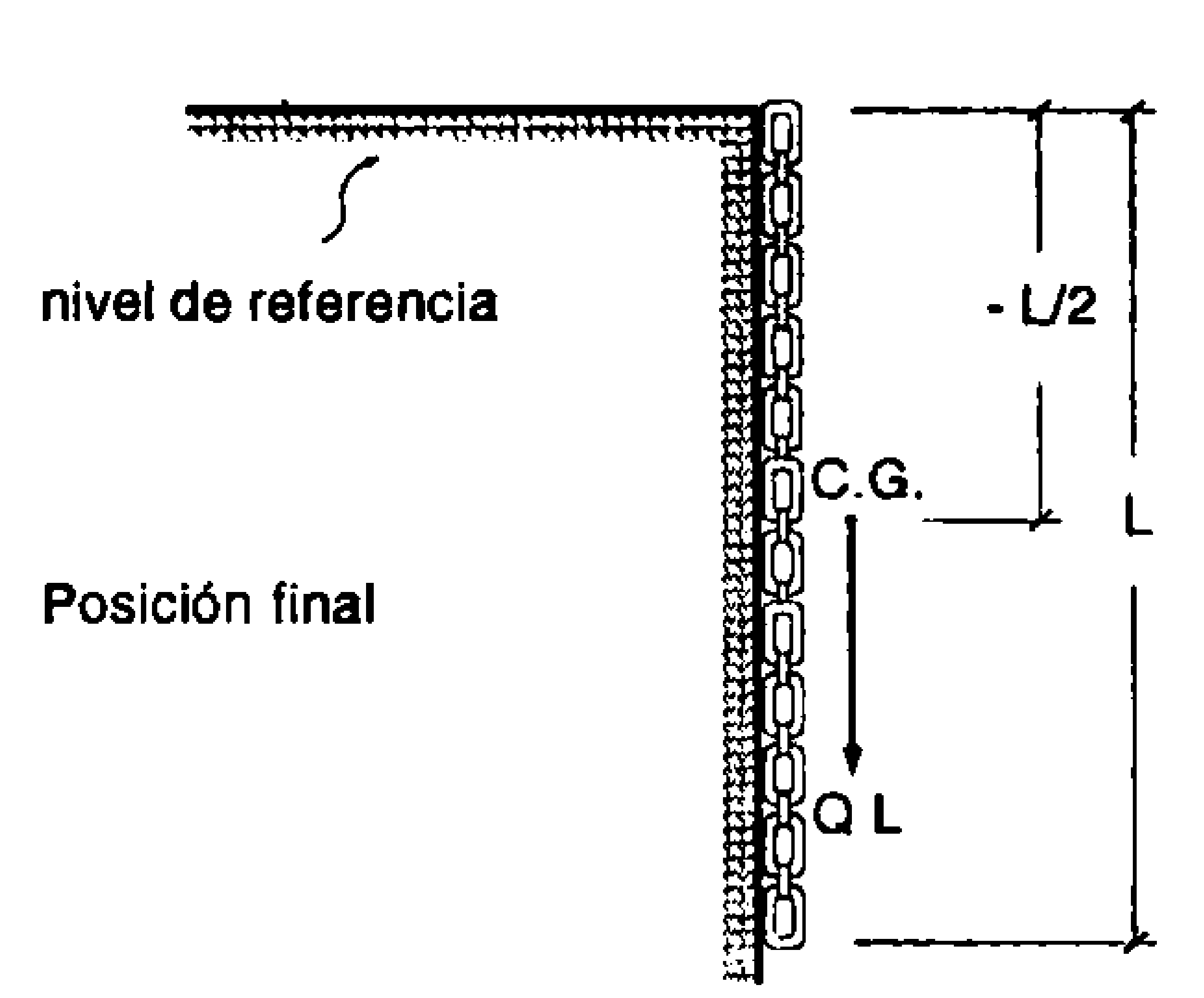
$$V^2 = \frac{2 g d (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$V = \left[\frac{2 g d (m_1 - m_2)}{m_1 + m_2}\right]^{\frac{1}{2}} \quad \text{l.q.q.d.}$$

PROBLEMA 18. Se suelta una cadena flexible de longitud "L" y peso "Q" por unidad de longitud. Si una parte de "x" metros está colgando y la otra parte está apoyada sobre una superficie horizontal lisa. Hallar la velocidad de la cadena cuando abandona superficie horizontal.

RESOLUCIÓN:





Como la cadena parte del reposo:

$$V_i = 0$$

Luego: $E_{C_1} = \frac{1}{2} m V_i^2 = 0 \qquad (1)$

La energía potencial E_{P_1}, corresponde a las dos porciones:

$$E_{P_1} = Q(L - x)0 + Qx(-x/2)$$

$$E_{P_1} = -\frac{Qx^2}{2} \qquad (2)$$

Donde:

$Q(L - x)$: Peso de la parte apoyada

Qx : Peso de la parte que cuelga

Cuando termina de caer:

$$E_{C_2} = \frac{1}{2} m V^2$$

Pero : $m = \frac{QL}{g}$

$$\therefore \ E_{C_2} = \frac{1}{2} \times \frac{QL}{g} \times V^2 \qquad (3)$$

$$E_{P_2} = (QL)(-L/2) = -\frac{QL^2}{2} \qquad (4)$$

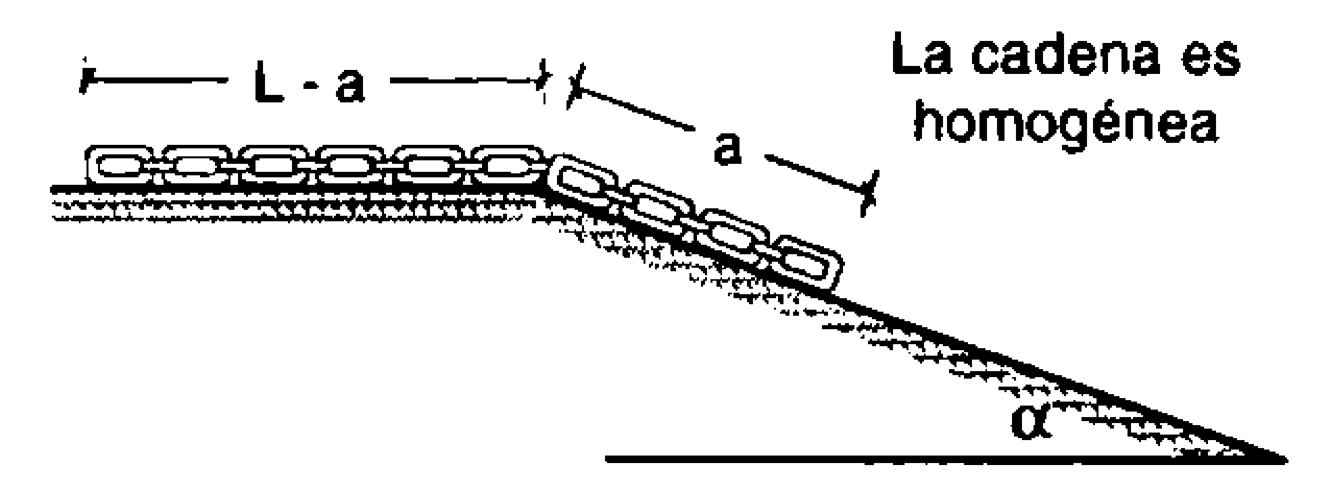
Sustituyendo (1), (2), (3) y (4) en:

$$E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$$

$$0 - \frac{Qx^2}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{QL}{g} \times V^2 - \frac{QL^2}{2}$$

Rpta.: $V = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - x^2)}$

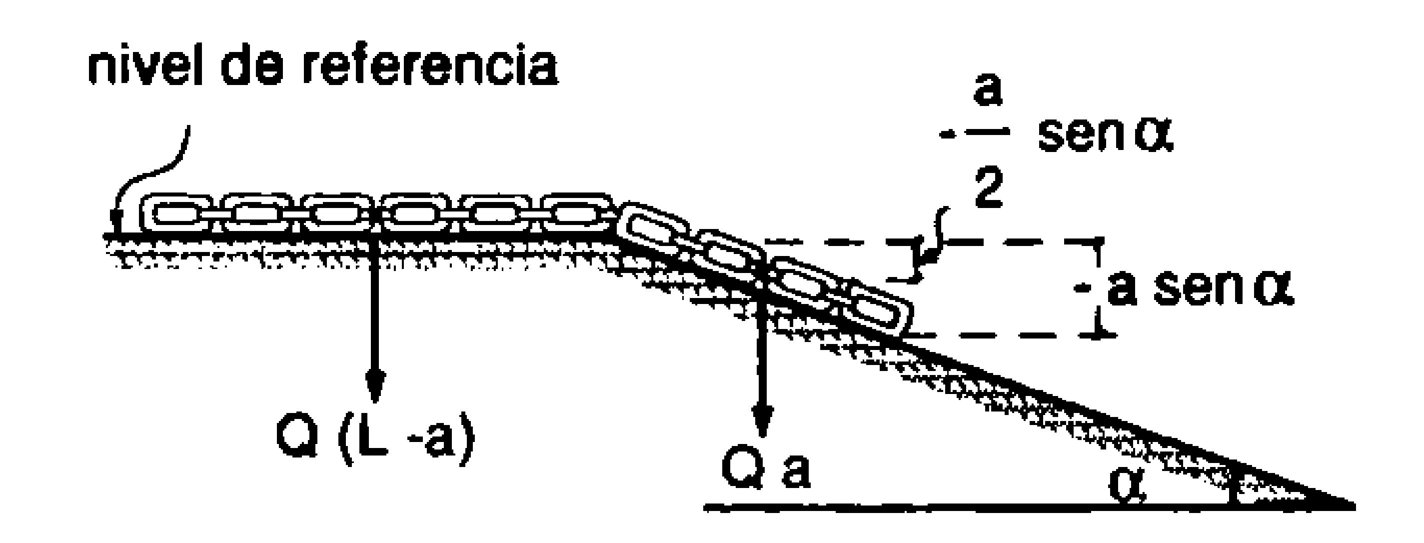
PROBLEMA 19. Una cadena flexible de longitud "L" y de peso por unidad de longitud "Q", se suelta del reposo,



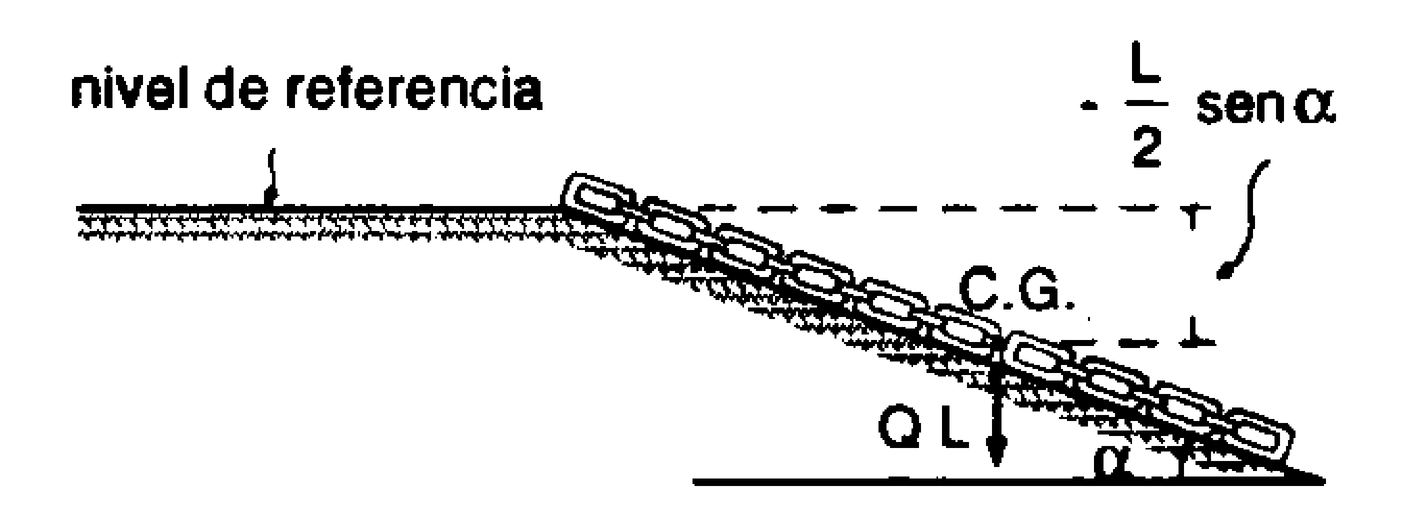
tal como se muestra en la figura. Calcular la velocidad cuando la cadena abandona la posición horizontal. (No hay fricción).

RESOLUCIÓN :

I) Posición inicial:



II) Posición final:



Aplicando conservación de la energía:

$$E_{C_i} + E_{P_i} = E_{C_f} + E_{P_f}$$

$$0 + Qa\left(-\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\alpha\right) = \frac{1}{2} m V^2 + QL\left(-\frac{L}{2}\,\text{sen}\,\alpha\right)$$

Pero : $m = \frac{QL}{g}$, entonces :

$$-\frac{Qa^2\,\text{sen}\,\alpha}{2} = \frac{QLV^2}{g} - \frac{QL^2\,\text{sen}\,\alpha}{2}$$

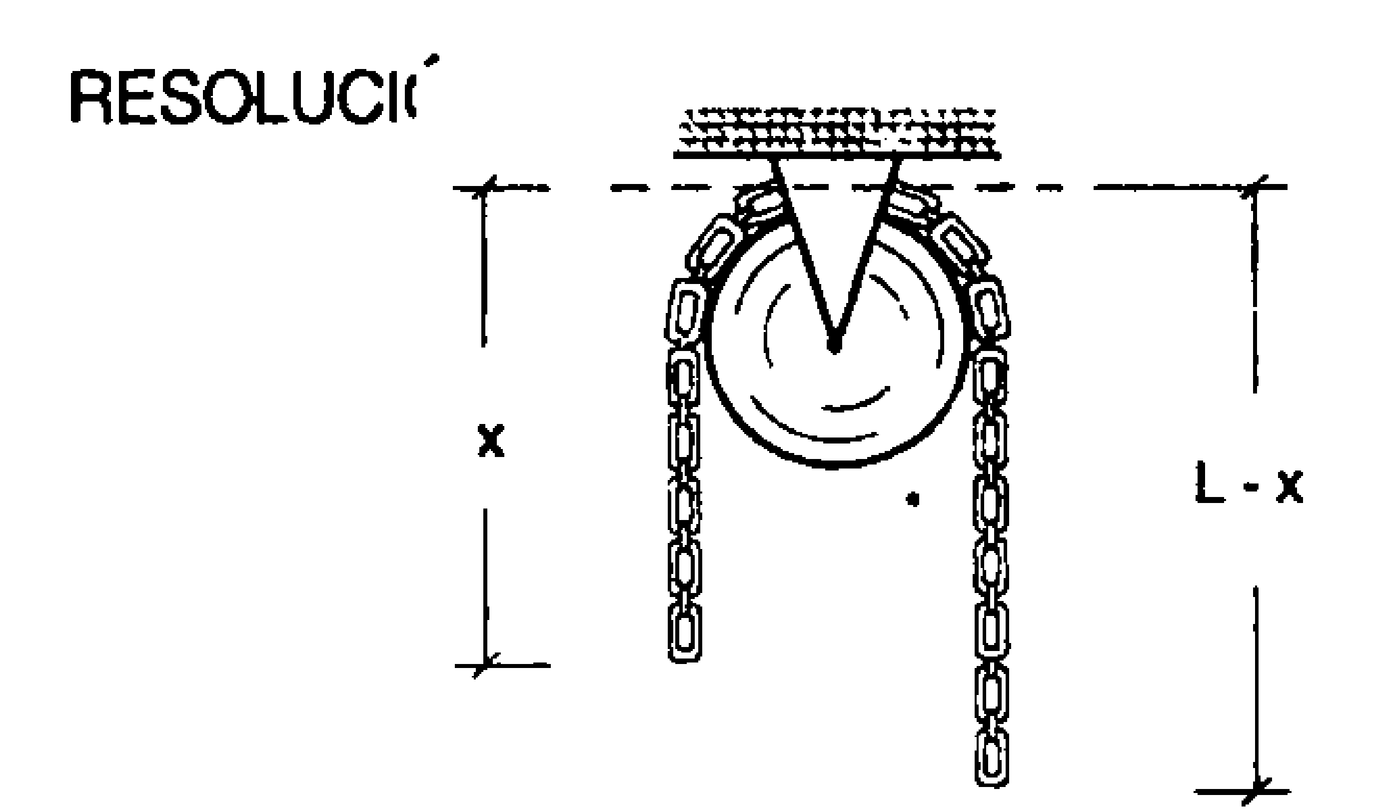
Simplificando y efectuando:

Rpta.: $V = \sqrt{\frac{g}{L}(L^2 - a^2)\,\text{sen}\alpha}$

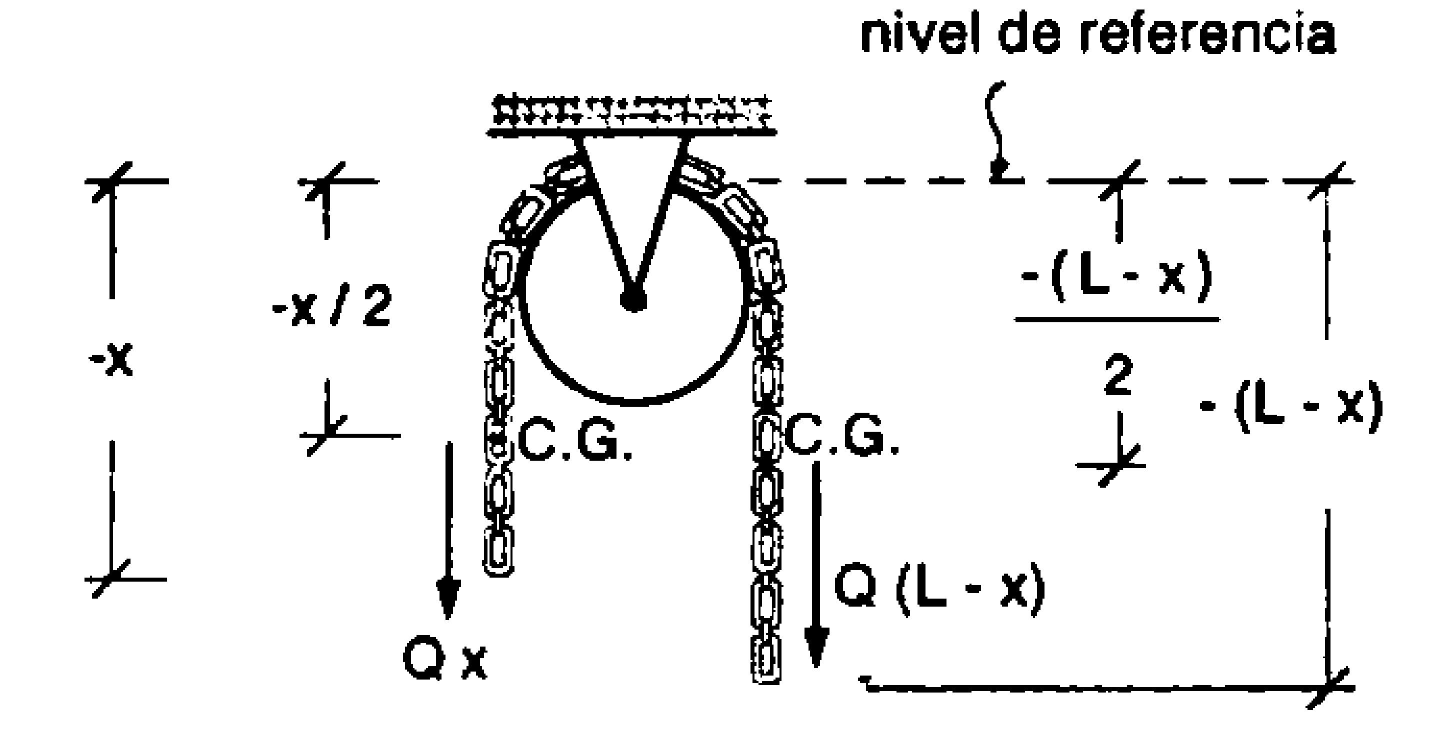
PROBLEMA 20. ¿Cuál es la velocidad de la cadena de la figura cuando el último eslabón abandone la polea? la cadena pesa "Q" kg por unidad de longitud y su longitud es "L". (Se desprecia el rozamiento y el radio de la polea). Parte del reposo.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCI(



I) Posición inicial:



II) Posición final:

Aplicando conservación de la energía:

$$E_{C_1} + \left\{E_{P_1}\right\} = E_{C_2} + E_{P_2}$$

$$0 + \left\{Qx\left(-\frac{x}{2}\right) + Q(L-x)\left[-\frac{(L-x)}{2}\right]\right\} =$$

$$= \frac{1}{2}mV^2 + QL\left(-\frac{L}{2}\right)$$

$$= \frac{1}{2}mV^2 - \frac{QL^2}{2} \qquad (1)$$

Pero: $\quad m = \dfrac{QL}{g} \qquad (2)$

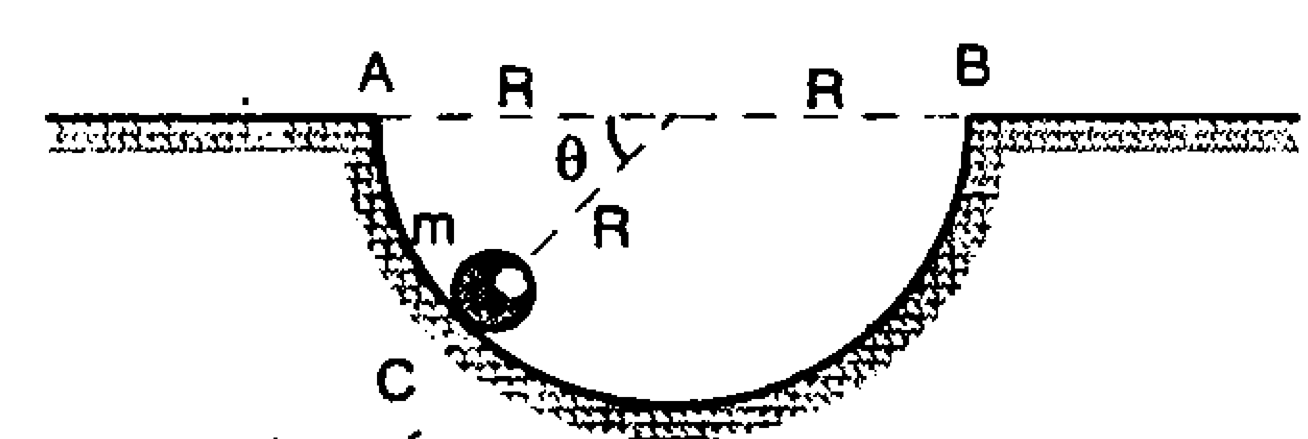
(2) en (1):

$$\therefore \; -\frac{Qx^2}{2} - \frac{Q(L-x)^2}{2} = \frac{QLV^2}{2g} - \frac{QL^2}{2}$$

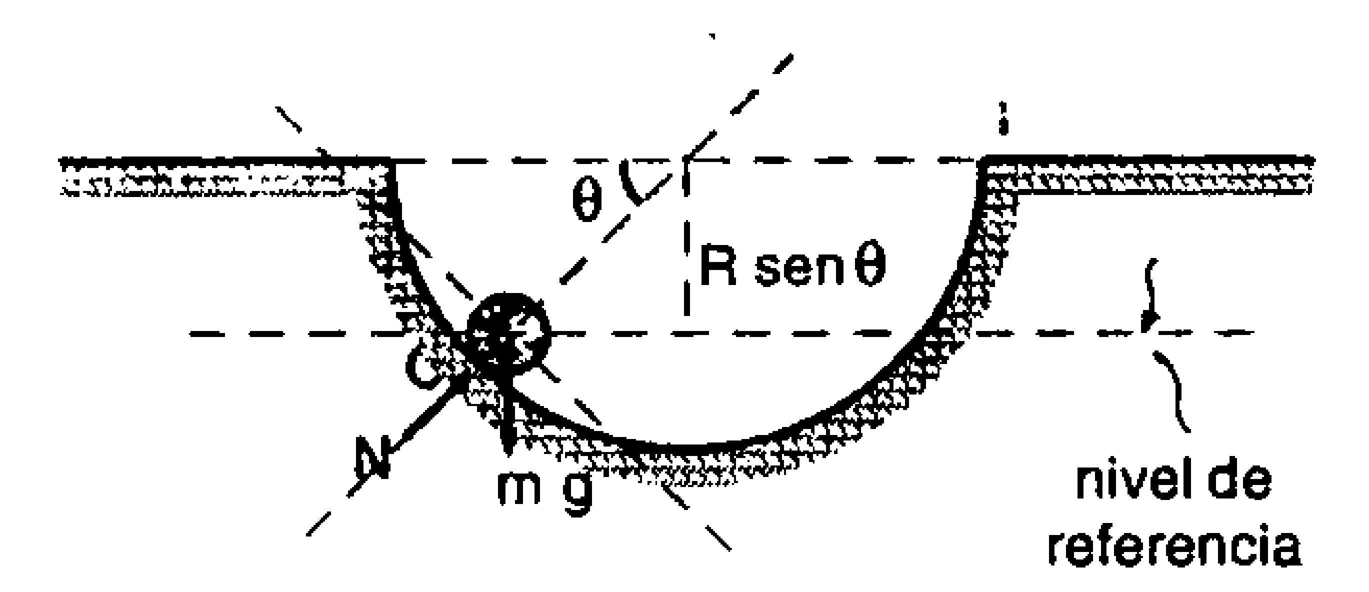
Simplificando y efectuando:

Rpta.: $\quad V = \sqrt{2gx\left(\dfrac{L-x}{L}\right)}$

PROBLEMA 21. ¿Una pequeña esfera se desliza a partir del reposo desde "A". ¿Cuál es la reacción normal de la pista semicircular en "C"?



RESOLUCIÓN :



Aplicando conservación de la energía entre A y C

$$E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$$

$$0 + m\,g.R\,\text{sen}\,\theta = \frac{1}{2}mV_C^2 + 0$$

$$\frac{mV_C^2}{R} = 2\,m\,g\,\text{sen}\,\theta \qquad (1)$$

Por dinámica circunferencial, en el punto C:

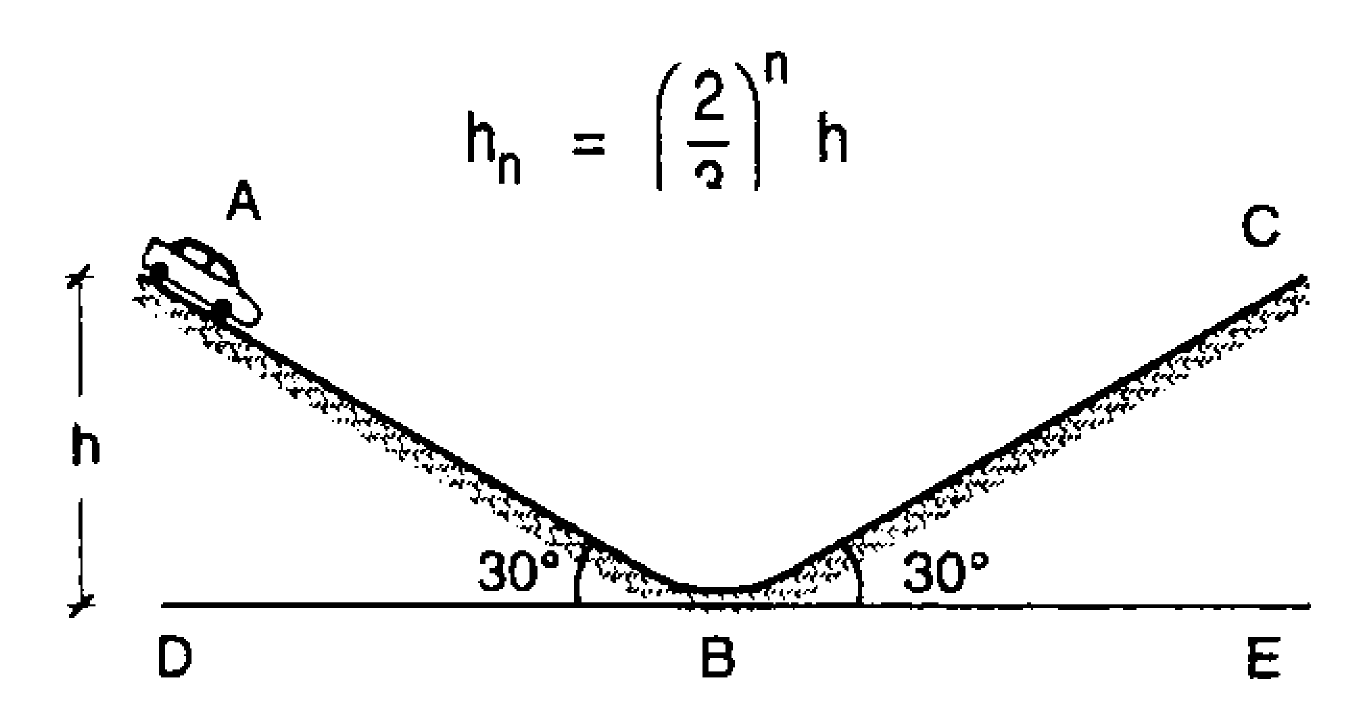
$$N - m\,g\,\text{sen}\,\theta = \frac{mV_C^2}{R} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2): $\quad N = 3\,m\,g\,\text{sen}\,\theta$

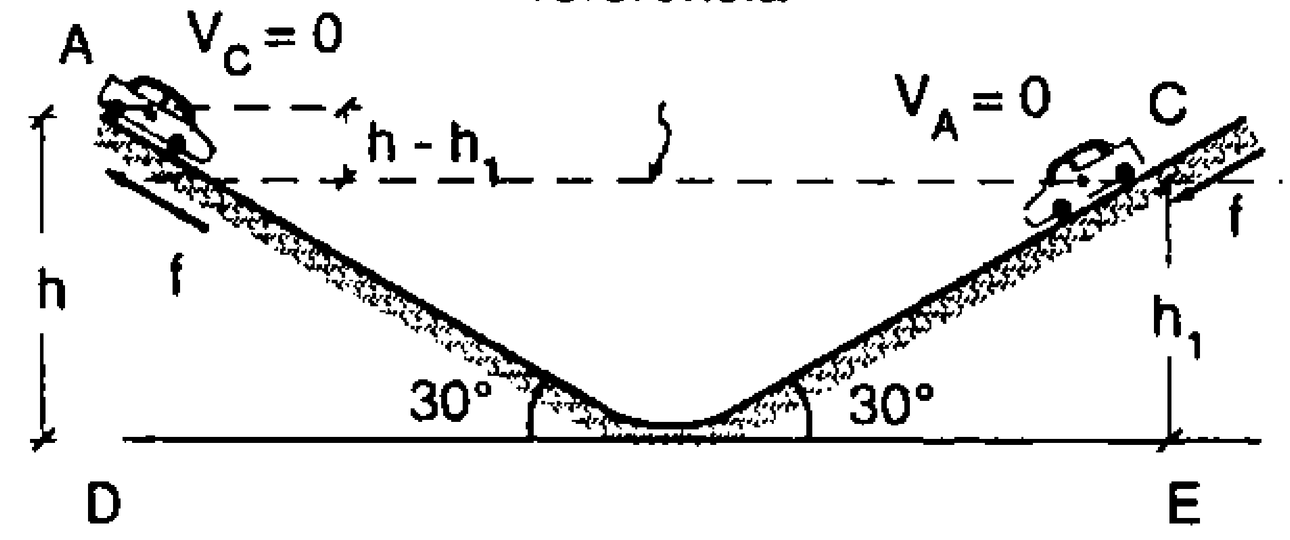
http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 22. Un pequeño vehículo detenido en el punto "A", se pone en movimiento desde una altura "h", con respecto al plano horizontal "DE", y recorre los dos planos inclinados "AB" y "BC". Si la fuerza que se opone al movimiento, debido a la resistencia del aire y al rozamiento, es constante e igual a la décima parte del peso del vehículo demostrar que la altura que éste alcanza cuando se detiene en cualquiera de los planos inclinados después de haber pasado el punto "B" n veces, será:

$$h_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n h$$



RESOLUCIÓN :



De la figura, por conservación de la energía entre A y C:

$$T_{F\,(exterior)} = E_C + E_P + T_{\text{realizado contra la fuerza de oposición "f"}}$$

$$0 = \frac{1}{2}m(0)^2 - \frac{1}{2}m(0)^2 + mg(0) - mg(h - h_1) + f(AB + BC) \qquad (1)$$

Por otra parte, de la figura tenemos:

$$\text{sen } 30° = \frac{h}{\overline{AB}} \quad ; \quad \overline{AB} = 2h \qquad (2)$$

$$\text{sen } 30° = \frac{h_1}{\overline{BC}} \quad ; \quad \overline{BC} = 2h_1 \qquad (3)$$

Reemplazando (2) y (3) en (1) y considerando:

$$f = \frac{1}{10}mg$$

$$mg(h - h_1) = \frac{1}{10}mg(2h + 2h_1)$$

$$10h - 10h_1 = 2h + 2h_1$$

$$12h_1 = 8h$$

$$\therefore \quad h_1 = \frac{2}{3}h$$

La segunda pasada por B, el vehículo alcanzará:

$$h_2 = \frac{2}{3}h_1 = \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}h\right) = \left(\frac{2}{3}\right)^2 h$$

La tercera pasada por B, el vehículo logrará:

$$h_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^3 h$$

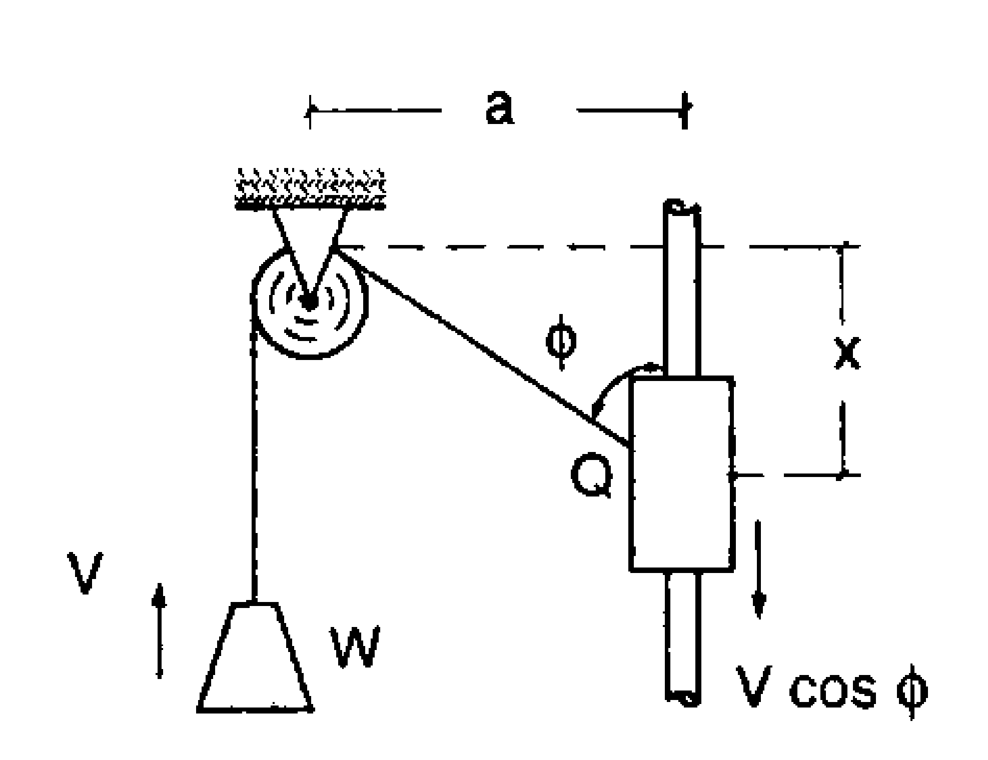
Y así sucesivamente. Para n pasadas por B, será:

$$h_n = \left(\frac{2}{3}\right)^n h \quad \text{l.q.q.d.}$$

Aplicación: Por ejemplo, a la primera pasada, o sea cuando n = 1

$$h_1 = \frac{2}{3}h$$

PROBLEMA 23. Un cordón flexible pasa por una polea, lleva en sus extremos dos pesos "W" y "Q". El segundo resbala a lo largo de una barra pulida. Hallar la velocidad de "Q" en función del camino "x", suponiendo que en el instante inicial, x = 0, "Q" está en reposo. La polea debe considerarse como muy pequeña.



RESOLUCIÓN : Q desciende x, mientras W sube:

$$\sqrt{a^2 + x^2} - a$$

Por conservación de la energía:

$$W\left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right) = Q\,x +$$

$$+ \frac{1}{2} \times \frac{Q\,V^2 \cos^2 \phi}{g} + \frac{1}{2} \times \frac{W\,V^2}{g}$$

$$Q\,V^2 \cos^2 \phi + W\,V^2 =$$

$$= 2\,g\left[W\,(\sqrt{a^2 + x^2} - a) - Q\,x\right]$$

$$V^2 = \frac{2\,g\left[W\,(\sqrt{a^2 + x^2} - a) - Q\,x\right]}{Q \cos^2 \phi + W} \qquad (1)$$

$$\cos \phi = \frac{x}{\sqrt{a^2 + x^2}}$$

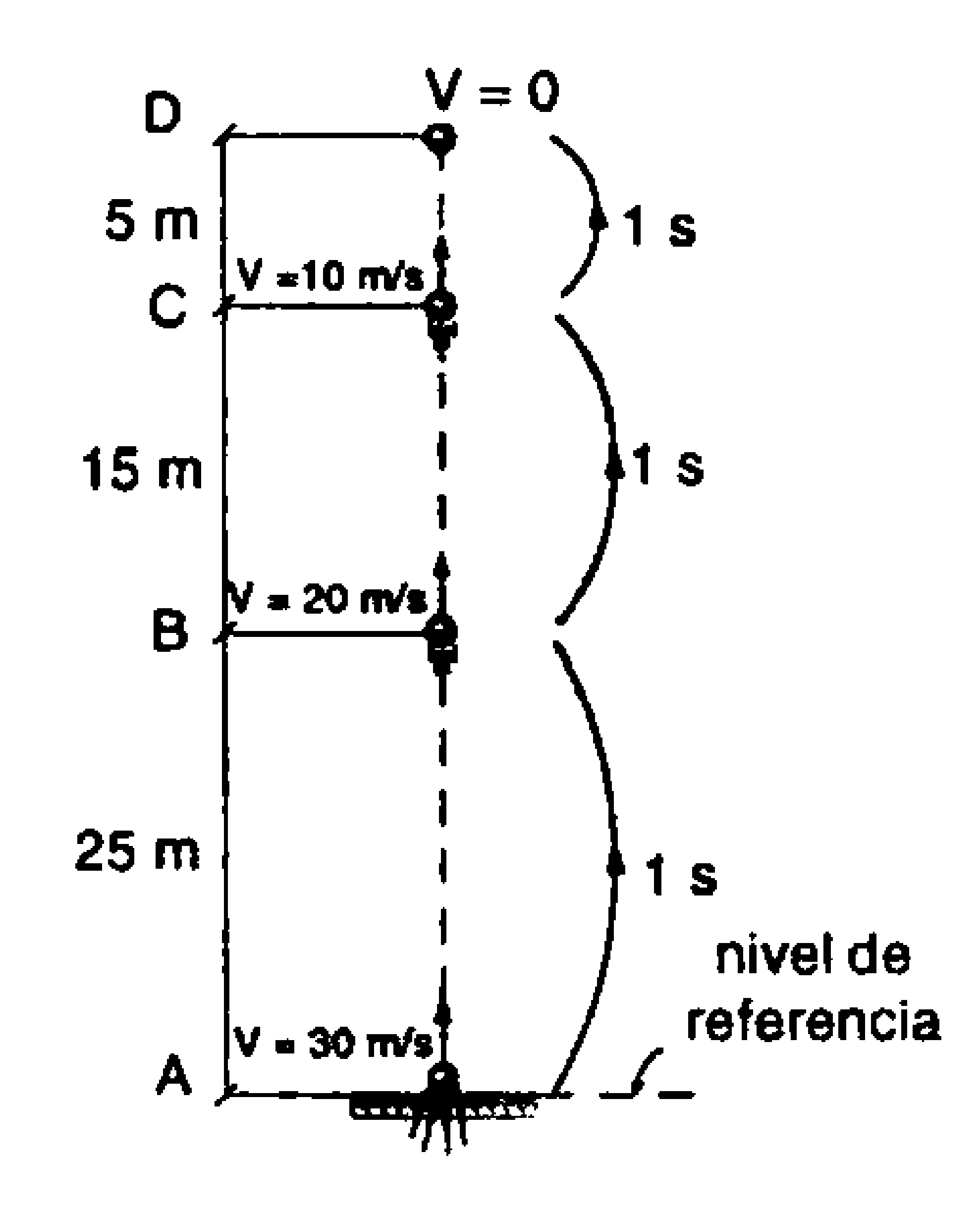
$$\cos^2 \phi = \frac{x^2}{a^2 + x^2} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$V = \left[\frac{2g\left[W\left(\sqrt{a^2 + x^2} - a\right) - Q\,x\right]}{\frac{Q\,x^2}{a^2 + x^2} + W}\right]^{\frac{1}{2}}$$

PROBLEMA 24. Una esfera de 1 kg es lanzada verticalmente hacia arriba con una rapidez inicial de 30 m/s. Calcular la energía mecánica de la esfera respecto al nivel de lanzamiento para los instantes: t = 0, t = 1 s, t = 2 s y t = 3 s. Analice el problema y considere $g = 10\ m/s^2$.

RESOLUCIÓN : Se observa que el movimiento de la esfera es rectilíneo y desacelerado (M.V.C.L.). La velocidad de la esfera disminuye por acción de la fuerza de gravedad. Mirando el gráfico, del M.V.C.L.: calculamos las alturas de B, C y D con respecto al nivel de referencia.



$$h_{AB} = \left(\frac{V_{0_A} + V_{f_B}}{2}\right) t_{AB}$$

$$= \left(\frac{30 + 20}{2}\right) 1 = 25\,m$$

$$h_{BC} = \left(\frac{V_{0_B} + V_{f_C}}{2}\right) t_{BC} =$$

$$= \left(\frac{20 + 10}{2}\right) 1 = 15\,m$$

$$h_{CD} = \left(\frac{V_{0_C} + V_{f_D}}{2}\right) t_{CD} =$$

$$= \left(\frac{10 + 0}{2}\right) 1 = 5\,mJ$$

Hallamos la energía mecánica para los instantes señalados:

1) En "A" ($t_0 = 0$ s)

$$E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$E_{M_A} = \frac{1}{2}\,m\,V_A^2 + 0$$

$$E_{M_A} = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 30^2 = 450\ J$$

2) En "B" ($t_1 = 1$ s): $E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B}$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2}\,m\,V_B^2 + m\,g\,h_B$$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2} . 1 . 20^2 + 1 . 10 . 25$$

$$E_{M_B} = 200 + 250 = 450\ J$$

3) En "C" ($t_2 = 2$ s):

$$E_{M_C} = E_{C_C} + E_{P_C}$$

$$E_{M_C} = \frac{1}{2} m V_C^2 + m g h_C$$

$$E_{M_C} = \frac{1}{2} . 1 . 10^2 + 1 . 10 . 40$$

$$E_{M_C} = 50 + 400 = 450\ J$$

4) En "D" ($t_3 = 3$ s):

$$E_{M_D} = E_{C_D} + E_{P_D}$$

$$E_{M_D} = 0 + m g h_D$$

$$E_{M_D} = 10 . 45 . 10 = 450$$

Analicemos el siguiente cuadro comparativo de las formas de energías en cada uno de los puntos señalados:

	A	B	C	D
E_C (J)	450	200	50	0
E_P (J)	0	250	400	450
E_M(J)	450	450	450	450

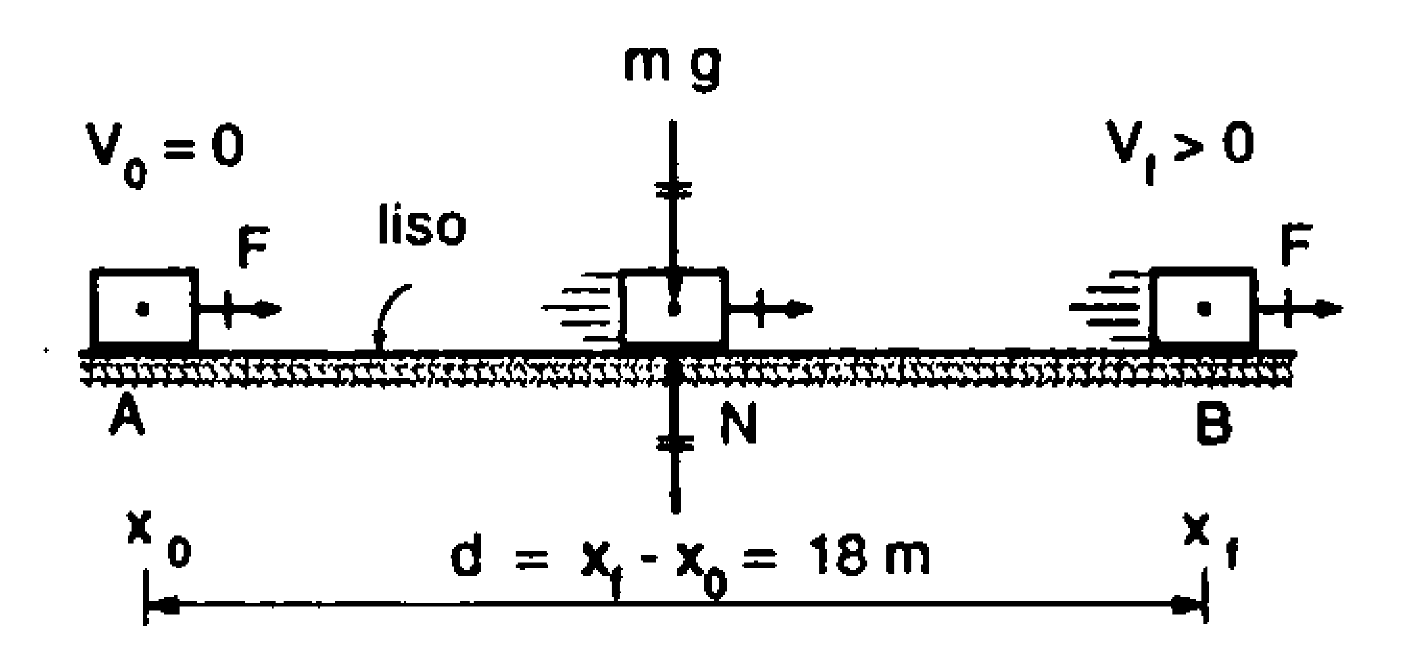
Se observa que al subir la esfera, su energía cinética disminuye mientras que simultáneamente su energía potencial gravitatoria aumenta.

También se observa que la única fuerza que afecta a la esfera es la fuerza de gravedad (es una fuerza conser-vativa).

Por lo tanto: ¡la energía mecánica se mantiene constante!

PROBLEMA 25. Un bloque de 1 kg descansa sobre una superficie horizontal lisa. Si sobre el bloque actúa una fuerza horizontal F = 4 N y desplaza al bloque desde x = 0 hasta x = 18 m. Calcular la variación de la energía cinética del bloque (considerar g = 10 m/s²)

RESOLUCIÓN:



Se observa que "F" es la fuerza resultante que transmite movimiento.

Nos piden: $\Delta E_C = E_{C_f} - E_{C_0}$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} m V_f^2 - 0$$

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} (1) (V_f)^2 \qquad (1)$$

De la cinemática (M.R.U.V.) hallamos la V_f:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2 a d$$

$$V_f^2 = 0 + 2 a (18) \qquad (2)$$

De la Segunda ley de Newton; hallamos la aceleración:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{4\ N}{1\ kg} = 4\ m/s^2$$

Reemplazando en (2):

$$V_f^2 = 2 (4) (18) = 144$$

Reemplazando en (1):

$$\Delta E_C = \frac{1}{2} (1) (144) = 72\ J$$

Además vamos a verificar que el trabajo realizado por la fuerza F sirve para incrementar la energía cinética del bloque.
Del Teorema del trabajo y la energía cinética.

$$T^F = F d = 4\ N \times 18\ m = 72\ J$$

$$\therefore \qquad T^F = \Delta E_C$$

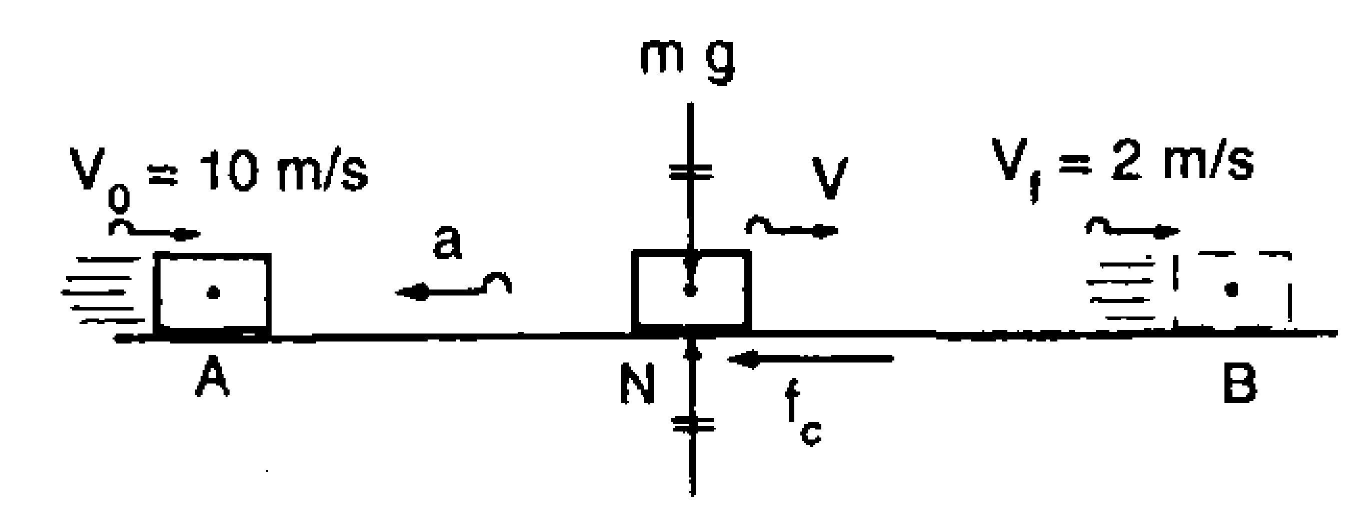
Rpta.: $\Delta E_C = 72$ J

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 26. Un bloque de 1 kg es lanzado horizontalmente con un rapidez de 10 m/s en una superficie horizontal; luego de recorrer cierto tramo su rapidez es 2 m/s. Calcular el trabajo realizado por la fuerza de rozamiento para dicho tramo.

RESOLUCIÓN :

Sea la figura que describe gráficamente el problema:



Se observa que f_c es la fuerza resultante sobre el bloque y origina una desaceleración. Veamos lo que ocurre con la energía mecánica en los puntos A y B:

En "A": $E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A}$

$$E_{M_A} = \frac{1}{2} m V_A^2 + 0$$

$$E_{M_A} = \frac{1}{2}(1)(10)^2 = 50\ J$$

En "B": $E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B}$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2} m V_B^2 + 0$$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2}(1)(2)^2 = 2\ J$$

Hallamos la variación de la energía mecánica:

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_0}$$

$$\Delta E_M = E_{M_B} - E_{M_A} = -48\ J$$

En este caso por ser un movimiento horizontal, la energía potencial gravitatoria no cambia, es 0, se puede usar la ecuación:

$$\Delta E_C = E_{C_f} - E_{C_0} = -48\ J$$

¿Por qué la energía mecánica (cinética) cambia o disminuye en 48 J? Porque la fuerza de rozamiento realiza un trabajo negativo (de freno).

$$\therefore \quad \Delta E_C = T_C^f = -48\ J$$

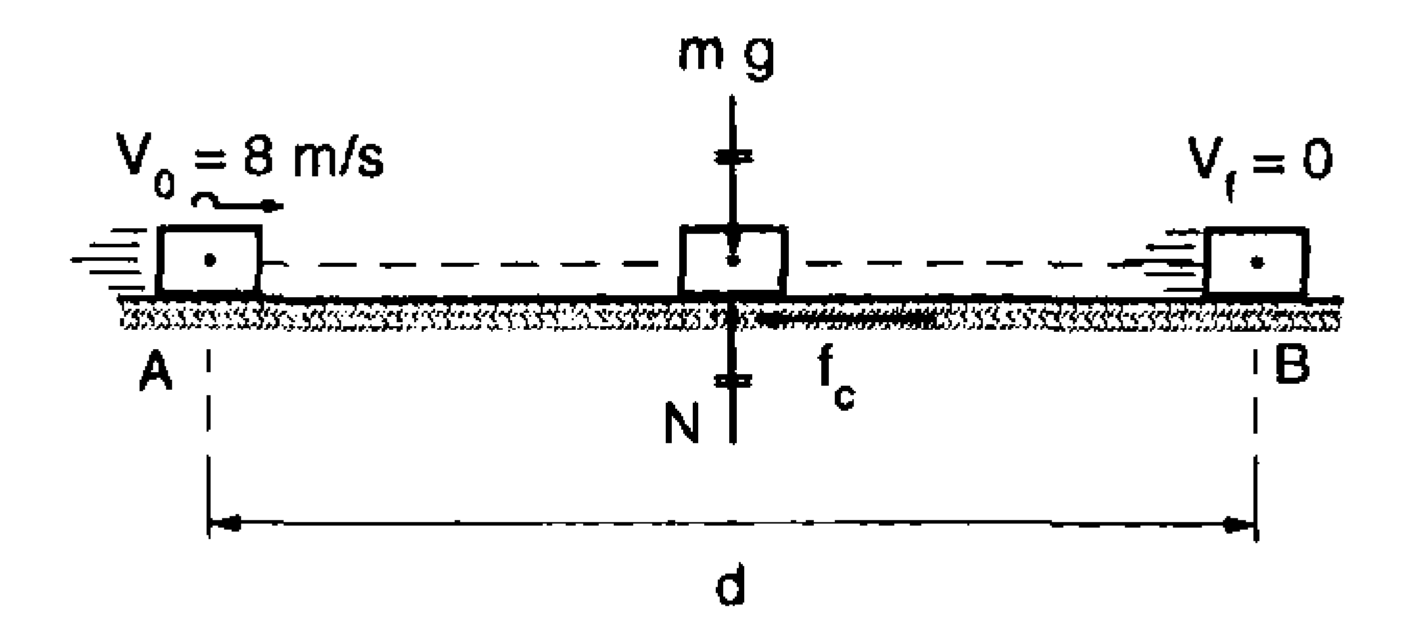
¿En qué se gastan los 48 J?. Se "gastan" en hacer trabajo para vencer el rozamiento, trabajo que se manifiesta en forma de energía térmica (sube las temperaturas del bloque, superficie y del entorno).

PROBLEMA 27. Un hombre lanza un ladrillo de 2 kg al ras del suelo áspero (m_c = 0,5), con una rapidez inicial de 8 m/s. Calcular:

a) ¿Qué trabajo realiza el hombre al lanzar el ladrillo?
b) ¿Qué sucede con la energía transferida al ladrillo? ¿En qué se transforma la energía cinética del ladrillo?
c) ¿Qué recorrido logra el ladrillo?

RESOLUCIÓN : Análisis previo:

Sea el gráfico que describe el problema; se lanza en A y se detiene en B:



Hallamos la energía mecánica del bloque en A y B.

Al inicio, en A:

$$E_{M_0} = E_{C_0} + E_{P_0}$$

$$E_{M_0} = \frac{1}{2} m V_0^2 = \frac{1}{2}(2)(8)^2 = 64\ J$$

Al final, en B: $E_{M_f} = E_{C_f} + E_{P_0}$

$$E_{M_f} = 0 + 0 = 0$$

a) El hombre transmite movimiento al ladrillo, es decir realiza un trabajo mecánico igual a la energía mecánica inicial del ladrillo.

http://librosysolucionarios.net

$$T^F = E_{M_0} = E_{C_0} = 64\ J$$

b) Hallamos la variación de la energía mecánica.

$$\Delta E_M = E_{M_f} - E_{M_0}$$

$$\Delta E_M = 0 - 64 = -64\ J$$

¿En qué se consume la energía? La energía mecánica transferida al ladrillo se gasta en realizar trabajo en contra de la fuerza de rozamiento. $T^{f_C} = \Delta E_C$

$$T^{f_C} = -64\ J$$

La energía mecánica al disiparse se transforma en energía térmica (calor) y sirve para elevar la temperatura del piso, ladrillo y del entorno.

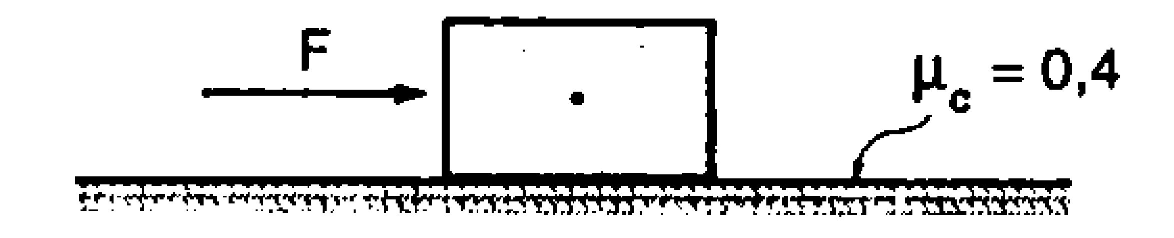
c) Hallamos la distancia $\overline{AB}$: $T_C^f = \Delta E_C$

$$-f_C \cdot d = E_{C_f} - E_{C_0}$$

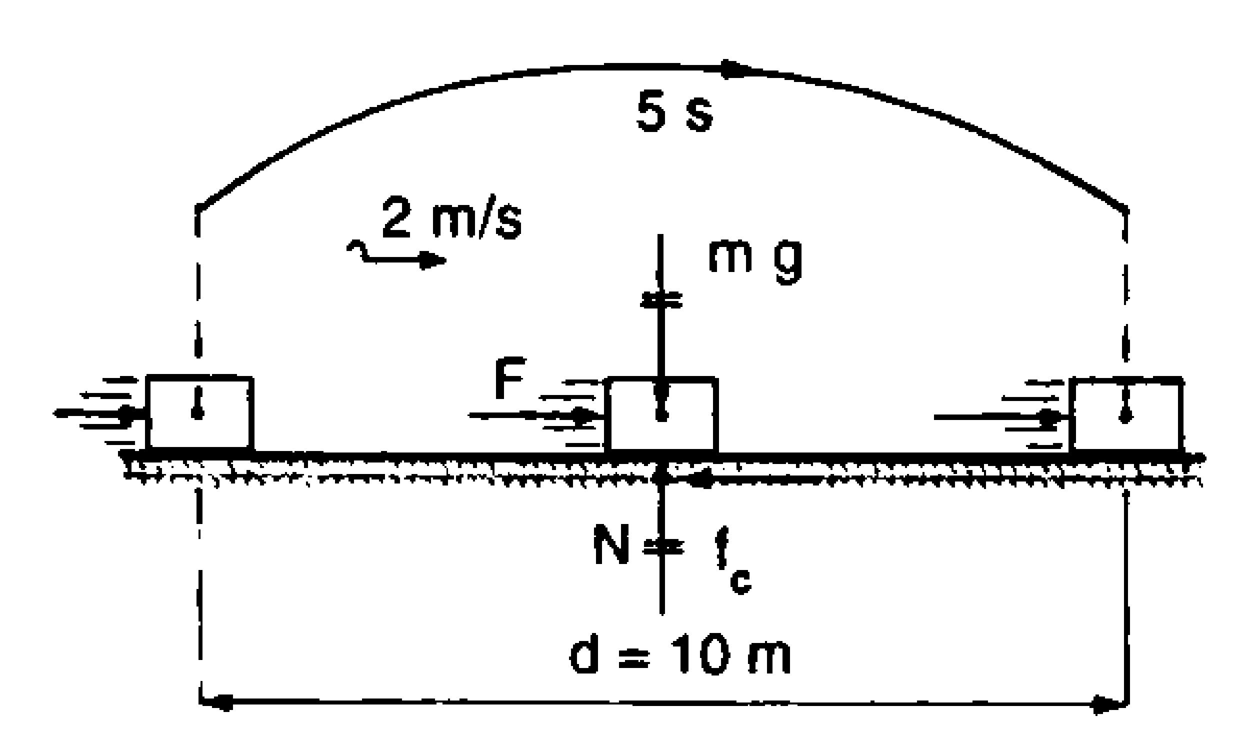
$$-\mu \cdot m g \cdot d = 0 - \frac{1}{2} m V_0^2$$

$$d = \frac{V_0^2}{2 \mu g} = \frac{8^2}{2\left(\frac{1}{2}\right)10} = 6{,}4\ m$$

PROBLEMA 28. Calcular el trabajo neto sobre el bloque de 20 N que se desplaza con velocidad constante, para un intervalo de tiempo $\Delta t = 5$ s. También calcular el trabajo de la fuerza de rozamiento, si la rapidez del bloque es 2m/s.



RESOLUCIÓN :



HORIZONTALMENTE:

El bloque posee $\overline{V}$ constante; desarrolla un M.R.U. Luego, se encuentra en equilibrio cinético.

$\therefore\ F_R = 0: \quad \Sigma F(\rightarrow) = \Sigma F(\leftarrow)$

Es decir: $F = f_C$ (1)

VERTICALMENTE:

Existe equilibrio $F_R = 0$;

$\Sigma F(\uparrow) = \Sigma F(\downarrow)$ es decir: $N = m g$

Luego: $f_C = \mu_C N = 0{,}4 \times 20 = 8\ N$

Hallamos el trabajo del rozamiento:

$T_C^f = -f_C\, d = -8\ N \times 10\ m = -80\ J$

El rozamiento realiza un trabajo resistente.

Hallamos el trabajo de F :

$$T^F = +F d = 8\ N \times 10\ m = +80\ J$$

Es un trabajo motriz.

Finalmente, hallamos el trabajo neto:

$$T^{Neto} = T^F + T_C^f + T^N + T^{mg}$$

$$T^{Neto} = +80 + (-80) + 0 + 0$$

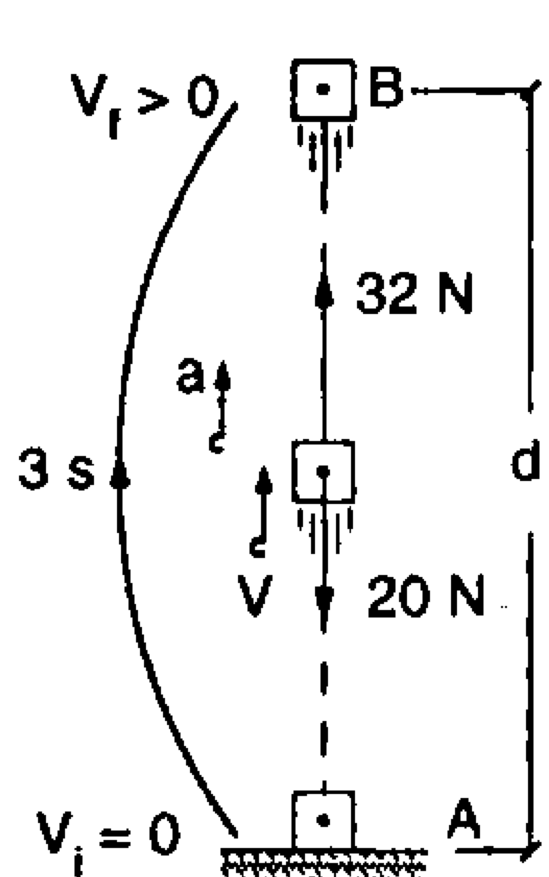
Rpta.: $T^{Neto} = 0$

PROBLEMA 29. Un cubo de 2 kg se encuentra fijo en la superficie horizontal. Se le aplica una fuerza vertical y hacia arriba de 32 N. Se pide calcular la energía cinética del bloque después de D t = 3 s de su partida.

RESOLUCIÓN :

2 kg $\cong$ 20 N

El bloque desarrolla un M.R.U.V. hallamos la aceleración; con la 2da. ley de Newton:



$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{(32-12)\,N}{2\,kg} = 6\,m/s^2$$

El bloque está subiendo con esta aceleración. Del M.R.U.V. hallamos la V_f en B:

$$V_f = V_0 + a\,t$$

$$V_f = 0 + 6 \times 3 = 18\,m/s = V_B$$

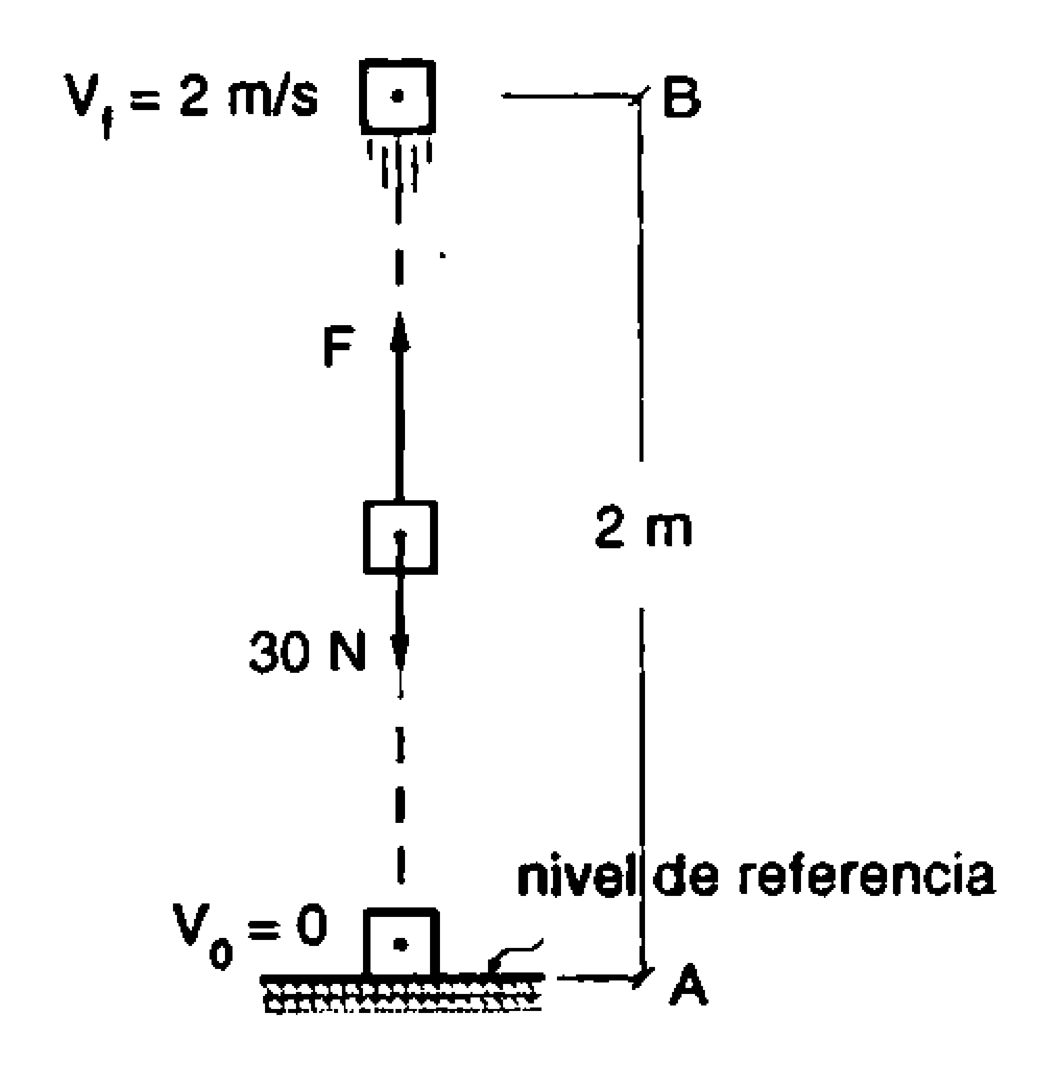
Cálculo de la energía cinética en B:

$$E_{C_B} = \frac{1}{2}\,m\,V_B^2 = \frac{1}{2}\,(2)\,(18)^2$$

Rpta.: $E_{C_B} = 324\,J$

PROBLEMA 30. Se tiene un ladrillo de 3 kg en el piso. ¿Cuánto trabajo se requiere para elevarlo verticalmente hasta una altura de 2 m de modo que llegue a dicha posición con una rapidez de 2 m/s? (Considerar $g = 10\,m/s^2$)

RESOLUCIÓN: $3\,kg \equiv 30\,N$



El ladrillo desarrolla un M.R.U.V.

Calculamos la aceleración de ascenso:

$$V_f^2 = V_0^2 + 2\,a\,d$$

$$2^2 = 0 + 2 \times a \times 2$$

$$\therefore \quad a = 1\,m/s^2$$

Hallamos la fuerza ascencional (2da. ley de Newton)

$$F_R = m\,a = 3 \times 1 = 3\,N$$

También: $F_R = F - m\,g$; luego:

$$3 = F - 30 \Rightarrow F = 33\,N$$

Luego, el trabajo desarrollado por la fuerza ascencional F es:

$$T^F = F\,d = 33\,N \times 2\,m = 66\,J$$

OTRO MÉTODO:

$$E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A}$$

$$E_{M_A} = 0 + 0 = 0$$

$$E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B}$$

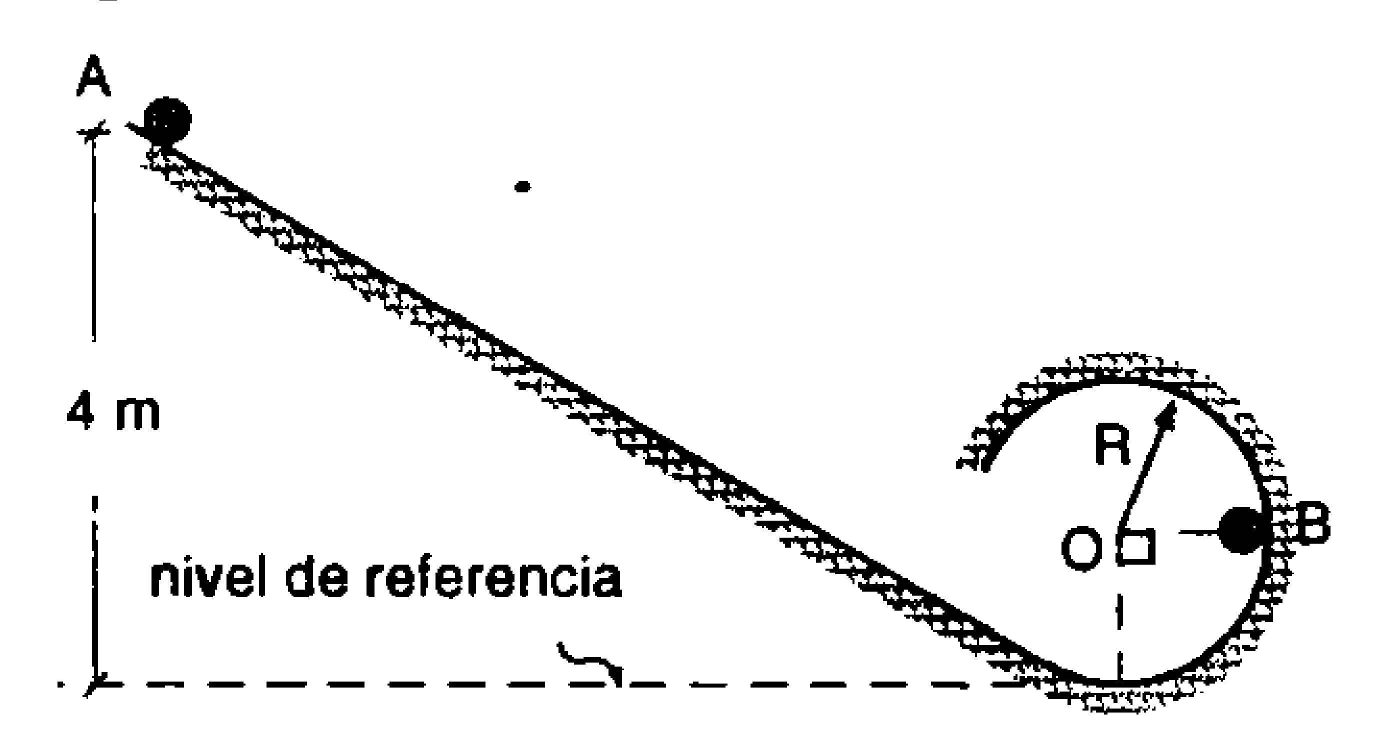
$$E_{M_B} = \frac{1}{2}\,m\,V_B^2 + m\,g\,h$$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2}\,(3)\,(2)^2 + (3)\,(10)\,(2) = 66\,J$$

Por el Teorema del trabajo y la energía mecánica, se tiene:

Rpta.: $T^F = \Delta E_M = 66\,J$

PROBLEMA 31. Una esferilla de 1 kg es soltada en "A" y desciende por una rampa lisa conectada a un rizo circunferencial de radio R = 1 m. Calcular la fuerza que ejerce la superficie del rizo sobre la esferilla en "B" y también la fuerza resultante que experimenta la esferilla al pasar por "B" ($g = 10\,m/s^2$)



RESOLUCIÓN: Hallamos la energía mecánica de la esferilla en "A" y "B" respecto al nivel de referencia:

En el punto "A": $E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A}$

$$E_{M_A} = 0 + m\,g\,h_A$$

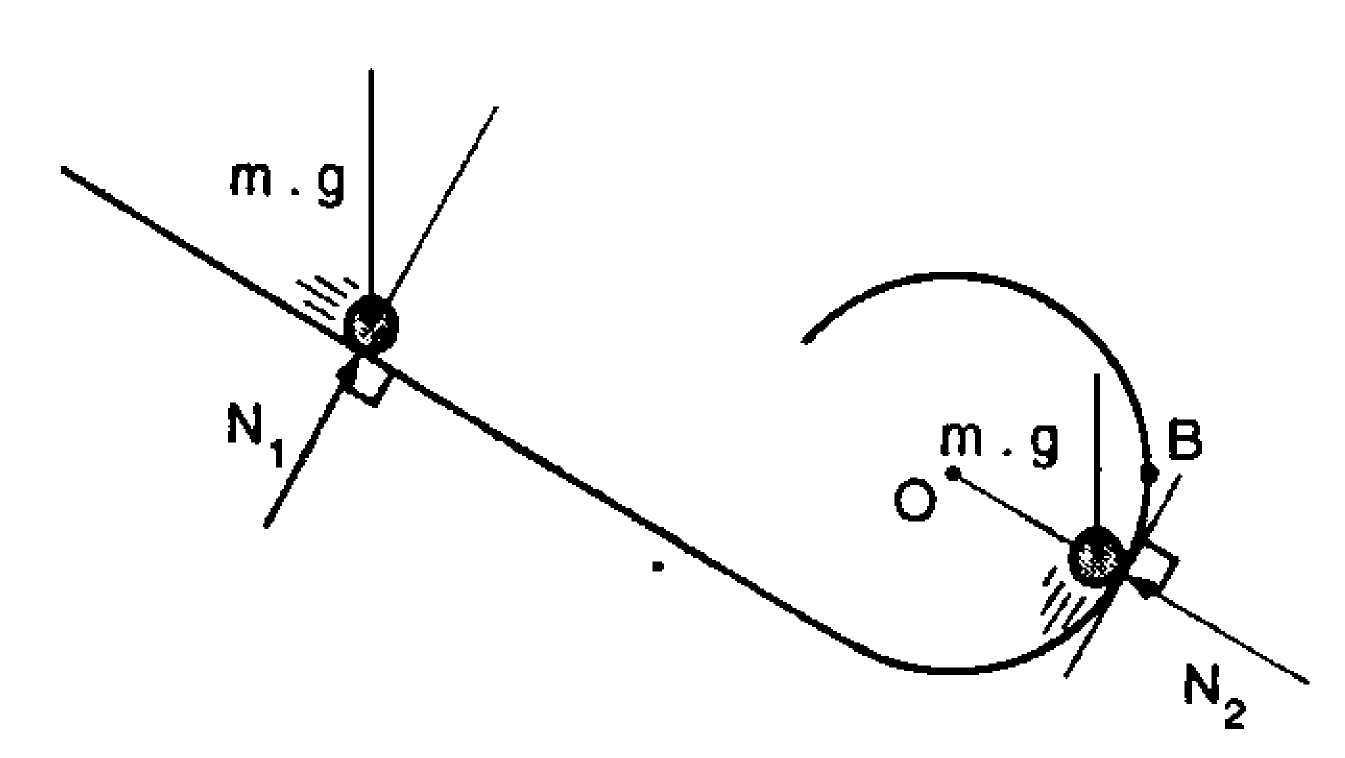
$\therefore \quad E_{M_A} = 1 \times 10 \times 4 = 40\text{ J} \qquad (1)$

En el punto "B": $\quad E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B}$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2} m V_B^2 + m g h_B$$

$$E_{M_B} = \frac{1}{2} \times 1 \times V_B^2 + 1 \times 10 \times 1$$

$$\therefore \quad E_{M_B} = \left(\frac{V_B^2}{2} + 10\right) \text{J} \qquad (2)$$



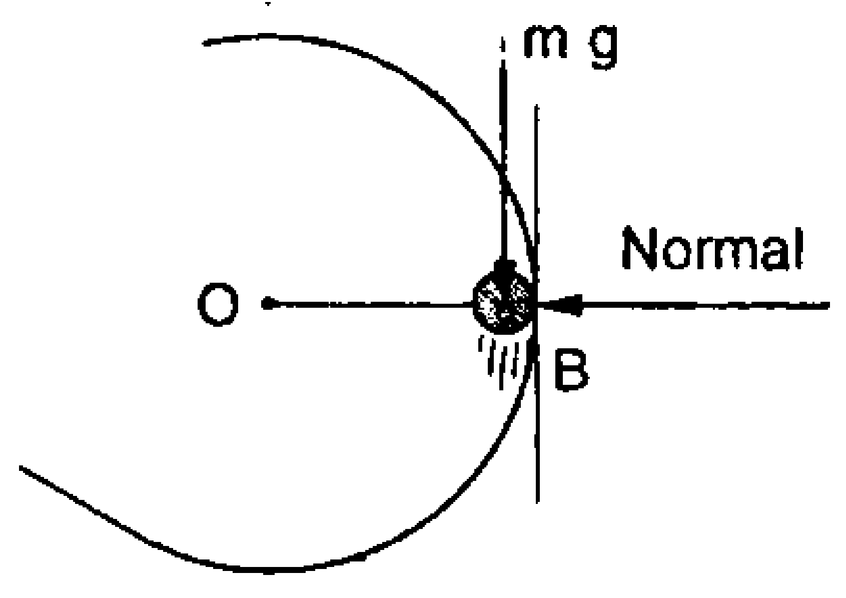
Cuando la esferilla se mueve entre las posiciones "A" y "B", sólo la fuerza de gravedad transmite movimiento y como la superficie es lisa se cumple el Principio de conservación de la energía mecánica.

$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$40 = \frac{V_B^2}{2} + 10$$

$$\therefore \quad V_B^2 = 60 \, \frac{m^2}{s^2} \qquad (3)$$

Analicemos las fuerzas que actúan sobre la esfera en "B".



En "B", de la 2da. ley de Newton:

$$F_C = m a_C$$

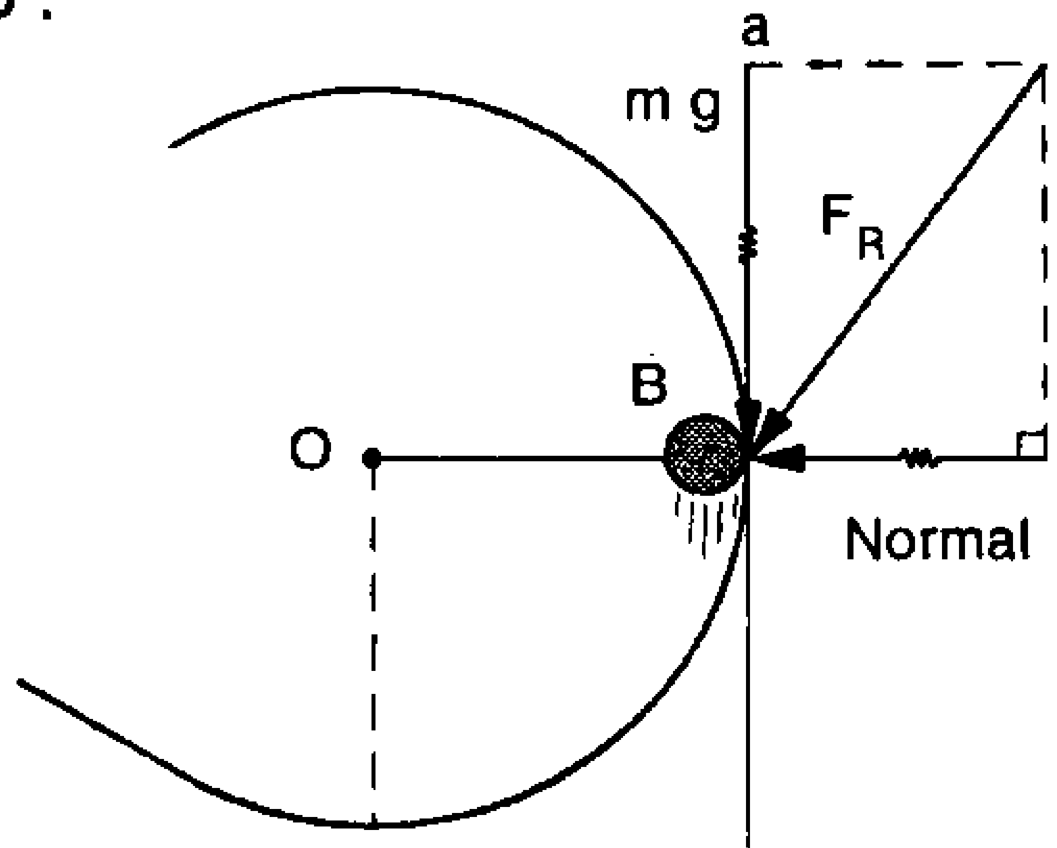
Obsérvese que F_c = Normal; luego:

$$\text{Normal} = m\left(\frac{V_B^2}{R}\right)$$

$$\text{Normal} = 1\left(\frac{60}{1}\right) = 60\text{ N}$$

Es la fuerza que ejerce el rizo sobre la esfera en "B".

Hallamos la fuerza resultante sobre la esfera en "B".

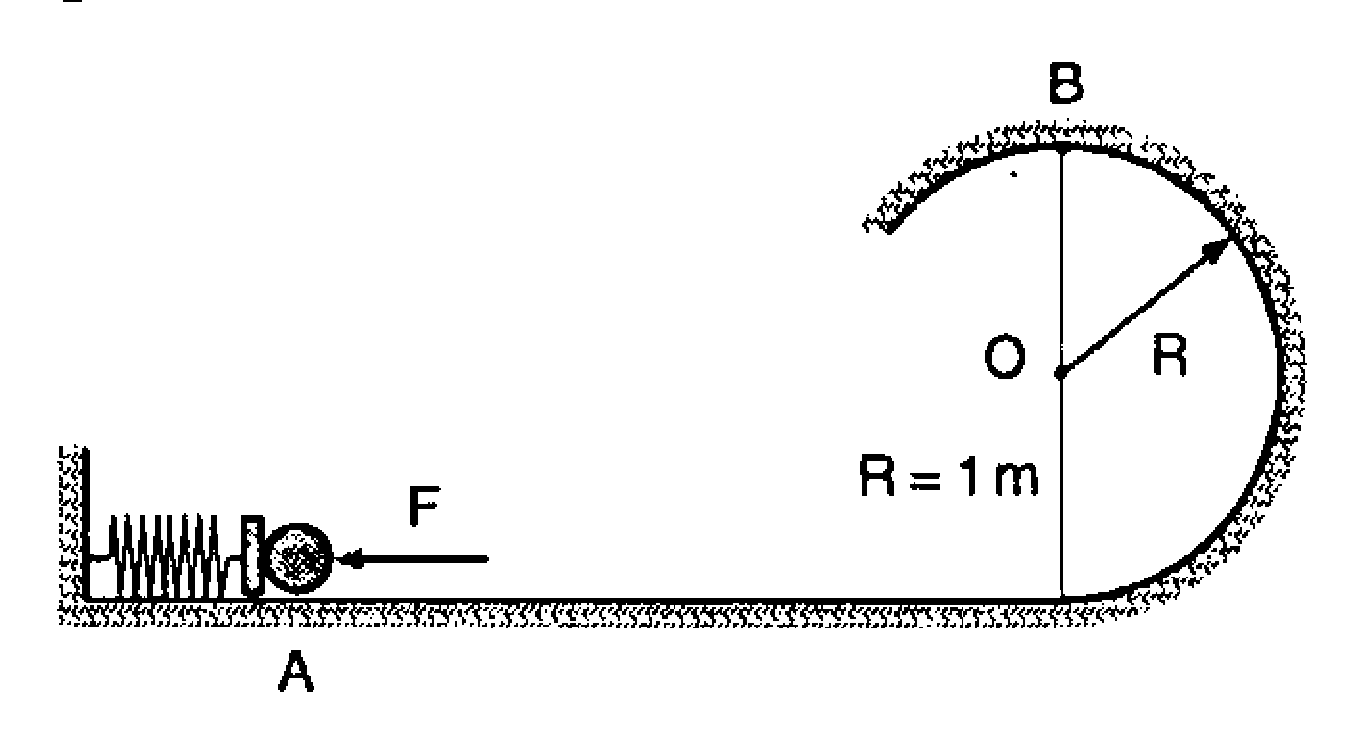


$$F_R = \sqrt{(\text{Normal})^2 + (m g)^2}$$

$$F_R = \sqrt{60^2 + 10^2} = 10\sqrt{37}\text{ N}$$

Rpta.: $\quad F_R = 60{,}82\text{ N}$

PROBLEMA 32. En la figura siguiente, se muestra una esferilla de 1 kg, al inicio fija y comprimiendo un resorte (K = 400 N/m), mediante una fuerza F = 200 N. De pronto F deja de actuar repentinamente. ¿Cuál es la es la energía cinética de la esferilla al pasar por "B"? La superficie es lisa ($g = 10\text{ m/s}^2$).

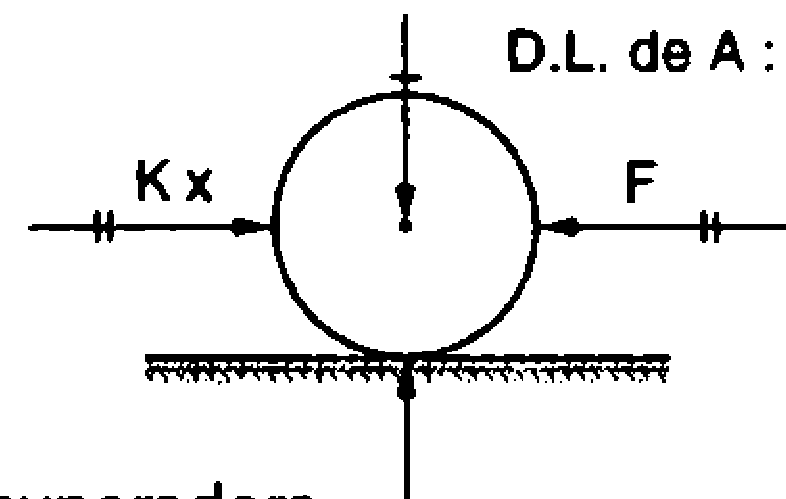


RESOLUCIÓN:

Observando la figura: al inicio, en el punto "A",

la esfera está en reposo y comprime al resorte con una fuerza de 200 N.

Hallamos la deformación "x":



Kx = Fuerza recuperadora del resorte

$$F = Kx$$

$$200 = 400x \quad \Rightarrow \quad x = \frac{1}{2}\ m$$

En el punto "A": $E_{M_A} = E_{C_A} + E_{P_A} + E_{PE_A}$

$$E_{M_A} = 0 + 0 + E_{PE_A}$$

$$E_{M_A} = \frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}(400)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = 50\ J$$

En el punto "B":

$$E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B} + E_{PE_B}$$

$$E_{M_B} = E_{C_B} + E_{P_B} + 0$$

$$E_{M_B} = E_{C_B} + 1 \times 10 \times 2$$

$$E_{M_B} = (E_{C_B} + 20)\ J$$

Por conservación de la energía mecánica, hallamos E_{C_B}:

$$E_{M_A} = E_{M_B}$$

$$50 = E_{C_B} + 20\ , \text{ de donde}$$

Rpta.: $E_{C_B} = 30\ J$

PROBLEMA 33. Calcular la potencia mecánica que desarrolla el motor de un ascensor cuando levanta una cabina de 6 kN con una velocidad constante de 4 m/s.

RESOLUCIÓN :

F

V : constante

m g = 6 k N

El motor transmite movimiento a la cabina mediante una fuerza "F".

Hallamos la potencia mecánica que desarrolla el motor:

$$P^F = \frac{T^F}{t} = \frac{Fd}{t} \qquad \text{pero: } \frac{d}{t} = V$$

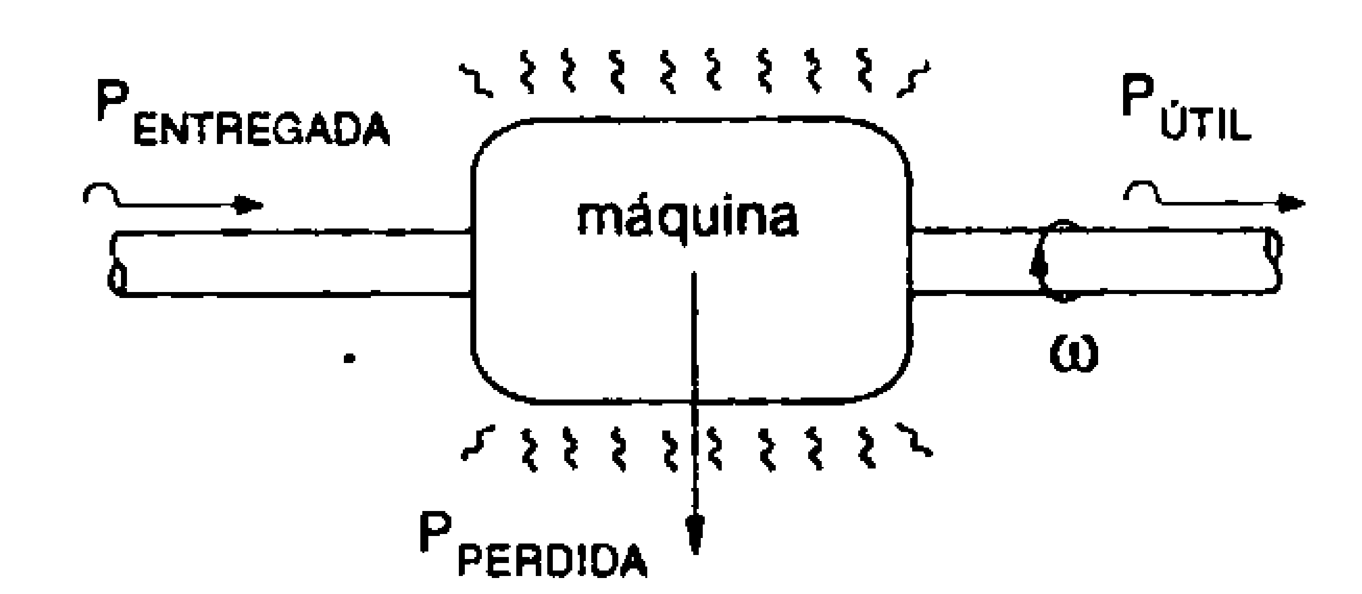
$$\therefore \qquad \boxed{P^F = F \cdot V}$$

$$P^F = (6 \times 10^3\ N)(4\ m/s)$$

Rpta.: $P^F = 24\ kW$

PROBLEMA 34. Determinar la eficiencia de una máquina, sabiendo que la potencia de pérdidas que se producen durante su funcionamiento representa un 25% de la potencia útil que entrega o da dicha máquina.

RESOLUCIÓN : Representamos a la máquina así:



En forma arbitraria y por ser práctico, designaremos como 100 W la potencia útil; luego la potencia perdida es 25 W, es decir el 25% de 100 W.

Se cumple que:

$$P_{entregada} = P_{útil} + P_{perdida}$$

$$P_{entregada} = 100\ W + 25\ W$$

$$P_{entregada} = 125\ W$$

$$\therefore \quad n = \frac{P_{útil}}{P_{entregada}}$$

$$n = \frac{100\ W}{125\ W} = \frac{4}{5} \quad ; \text{ en \%}:$$

http://librosysolucionarios.net

$$n = \left(\frac{4}{5} \times 100\right)\%$$

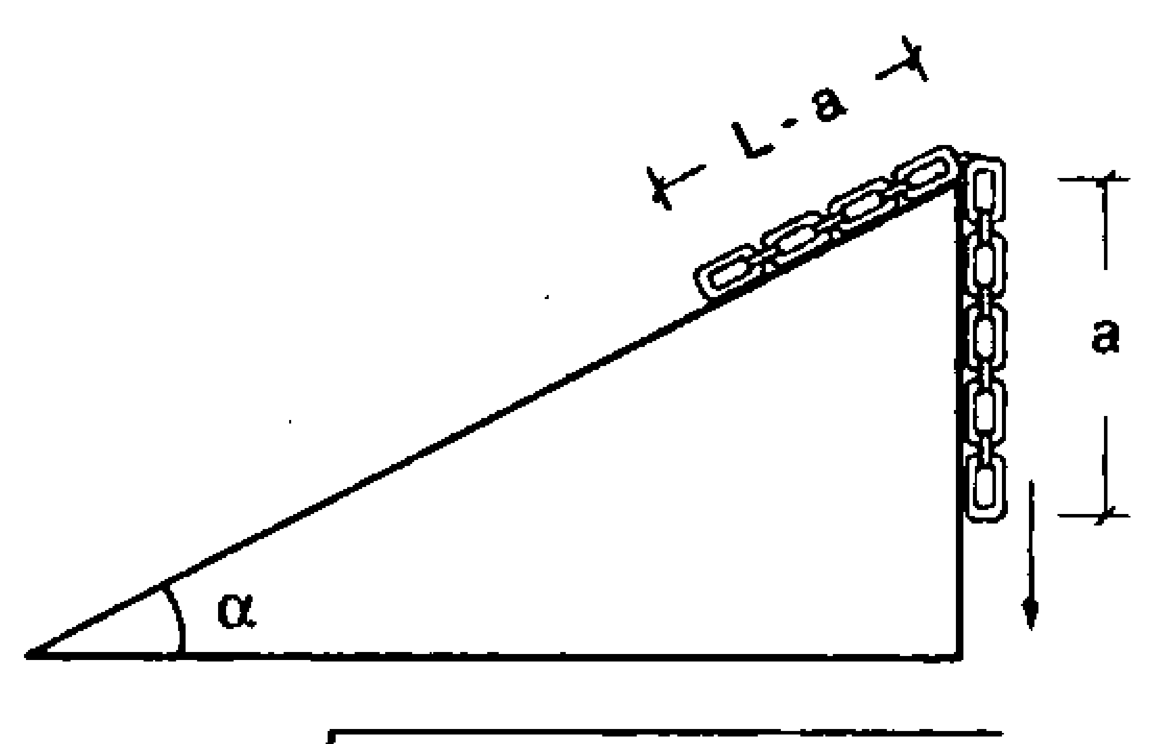
Rpta.: $n = 80\%$

NOTA: ¿Qué nos expresa un rendimiento de 80%?

Nos indica que por cada 100 W de potencia suministrada o entregada a la máquina, ésta, a su vez, nos da solamente 80 W.

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una cadena flexible de longitud "L" y de peso por unidad de longitud "Q" se suelta del reposo tal como se muestra en la figura. Calcular la velocidad cuando la cadena abandona el plano inclinado (no hay rozamiento)

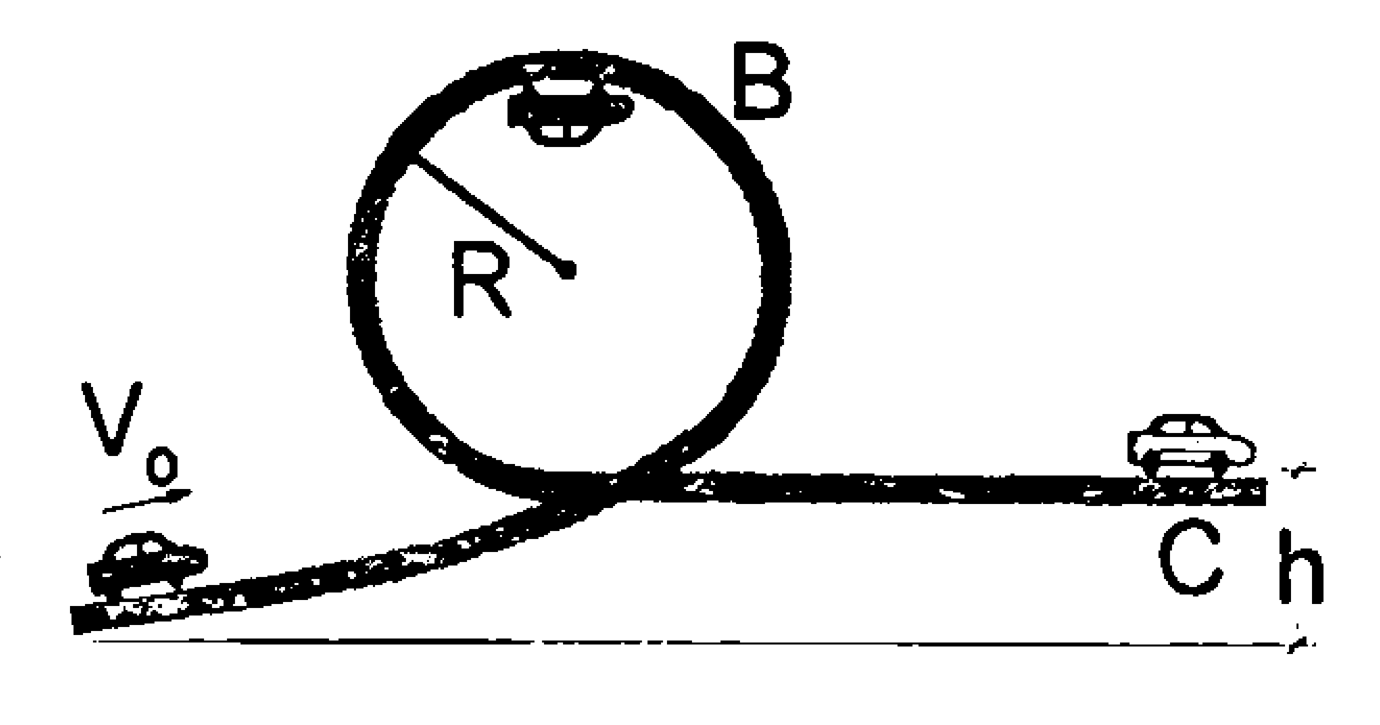


Rpta.: $V = \sqrt{\frac{g}{L}[(L^2 - a^2) - (L - a)^2 \operatorname{sen}\alpha]}$

2. Un hombre parte del reposo por una pendiente de 200 m de altura. Si su velocidad en la parte inferior es de 20 m/s. ¿Qué porcentaje en su energía potencial se perdió debido a la fricción y a la re-sistencia del aire? (considerar $g = 10\ m/s^2$)

Rpta.: 90%

3. Un carro de masa "m" desliza sobre el aparato de rizar, el rizo representado en la figura carece de rozamiento. ¿Cuál será el valor de la velocidad mínima " V_0 " con que debe ser lanzado desde A para que recorra toda la trayectoria ABC? Se sabe que $h = R/2$.



Rpta.: $V_0 = \sqrt{6\,g\,R}$

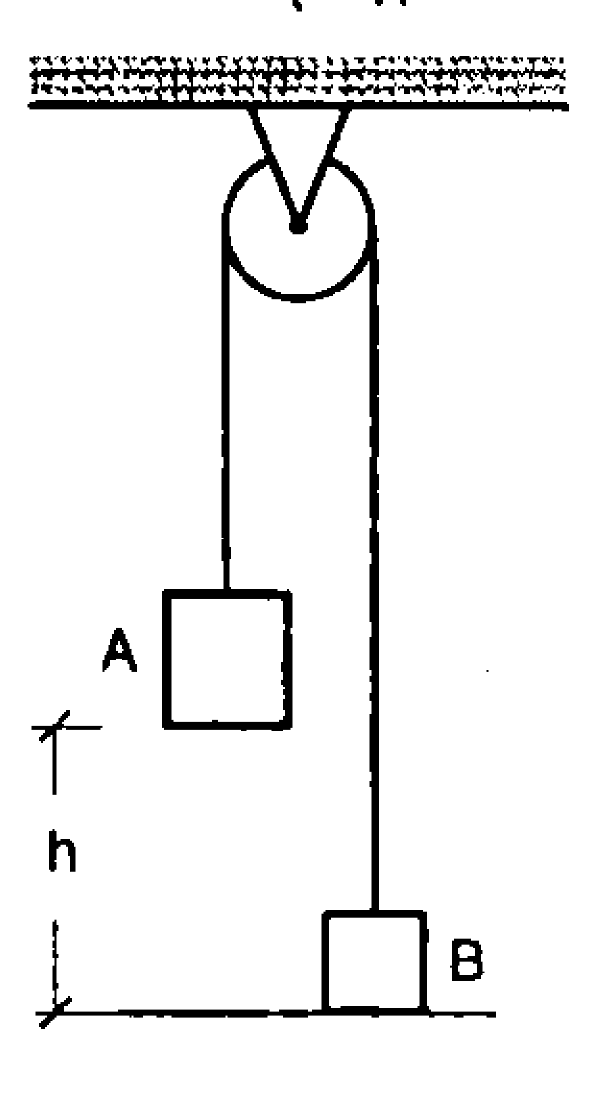
4. Una piedra está atada a una cuerda de longitud "L" y gira uniformemente en un plano vertical. Hallar a qué número de revoluciones por segundo se romperá la cuerda, sabiendo que su carga de rotura es igual a 10 veces el peso de la piedra.

Rpta.: $\omega = \frac{3}{2\pi}\left(\frac{g}{L}\right)^{\frac{1}{2}}$ rev/s

5. ¿Con qué velocidad tocaría el suelo una piedra que es lanzada verticalmente hacia arriba con una velocidad inicial de 24 m/s? Antes de empezar el retorno alcanza una altura de 20 m y se sabe que la resistencia que hace el aire es constante e igual a la mitad de su peso.

Rpta.: $V_f = 14{,}4\ m/s$

6. En la figura, calcular la velocidad de "A" en el momento que se encuentra con "B" en la misma horizontal ($M_A = 2\ M_B$).



Rpta.: $V = \frac{\sqrt{3\,g\,h}}{3}$

http://librosysolucionarios.net

7. Una lancha de 25 kg, tiene un motor que le hace desarrollar cierta aceleración constante para vencer la fuerza de resistencia del agua de 200 N. Calcular la potencia desarrollada por el motor al desplazar a la lancha una distancia de 18 m en 3 s, partiendo del reposo.

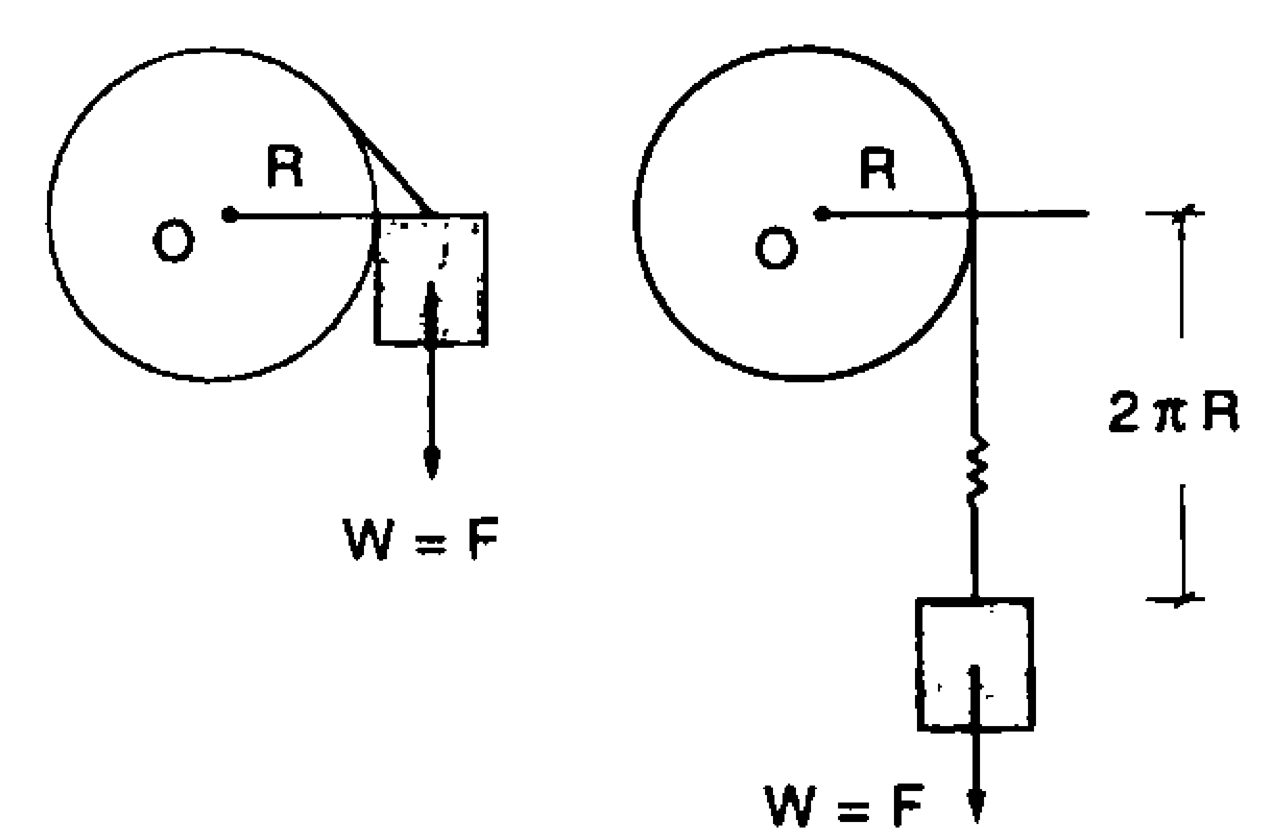
Rpta.: 1,8 kW

8. La cabina de un ascensor de 6 kN, se puede desplazar con una velocidad constante máxima de 1,5 m/s cuando trabaja a "plena carga". El motor que le hace funcionar, desarrolla una potencia máxima de 19,5 kW. Calcular el máximo número de pasajeros que dicho ascensor puede trasladar, siendo la masa promedio de los pasajeros 70 kg.

Rpta.: 10 personas

TRABAJO EN LAS ROTACIONES

Sea el cilindro A de la figura, enrrollado con una cuerda en cuyo extremo está atado un cuerpo de peso W (W = F).



Supóngase ahora, que se desenrrolle una longitud $2\pi R$, es decir, el cilindro da una vuelta, el trabajo será:

$$T = F \times d$$

$$T = F \times 2\pi R = FR \times 2\pi \text{ , pero:}$$

$FR = M$ (momento aplicado al cilindro)

$2\pi = \theta$ (ángulo girado por el cilindro)

$$\boxed{T = M\theta}$$

Ejemplo: Sobre un cilindro de 30 cm de radio está enrrollada una cuerda en cuyo extremo esta atado un peso de 2 **N**. Si la cuerda se desenrrolla una longitud de 5 m por acción del peso, ¿qué trabajo habrá desarrollado?

a) En joules.
b) En ergios.

RESOLUCIÓN : Se sabe que:

$$T = M\theta \qquad (I)$$

donde: $M = FR = 2\,N \times 0{,}3\,m$

$$M = 0{,}6\,Nm = 0{,}6\,J \qquad (1)$$

$$\theta = \frac{arco}{R} = \frac{5\,m}{0{,}3\,m}$$

$$\theta = 16{,}67\,rad \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

$$T = 0{,}6\,J \times 16{,}67\,rad$$

$$T = 10\,J\,.\,rad$$

a) En joules: $T = 10\,J$

b) En ergios: $T = 10 \times 10^7\,erg$

ENERGÍA CINÉTICA DE ROTACIÓN

Sabiendo que en su medida: $T = E_C$

luego: $E_C = T = M\theta \qquad (a)$

Pero: $M = I\alpha \qquad (1)$

I = momento de inercia mR^2

α = aceleración angular

y: $\theta = \frac{1}{2}\,.\,\alpha\,.\,t^2 \qquad (2)$

(ángulo descrito en velocidad angular)

Sustituyendo (1) y (2) en (a):

$$E_C = T = I\alpha \times \frac{1}{2}\alpha t^2 = \frac{1}{2} I(\alpha t)^2$$

pero: $\alpha t = w$ (velocidad angular)

$$\therefore \quad \boxed{E_C = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2}$$

Ejemplo: Calcular la E_c al desenrrollar 2 m la cuerda por acción de un peso de 80 N. La cuerda está errollada a un cilindro de 20 cm de radio y 10 kg de masa, el hecho demora 4 s.

RESOLUCIÓN :

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \omega^2 \qquad (I)$$

Pero: $\omega = \alpha \cdot t = \frac{M}{I} \cdot t$

$$\therefore \quad E_C = \frac{1}{2} \cdot I \cdot \left(\frac{M}{I} \cdot t\right)^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{M^2 \cdot t^2}{I} \qquad (II)$$

Por otro lado, sabemos:

$$M = F \cdot R \qquad (1)$$

$$I = m \cdot R^2 \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (II):

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(F \cdot R)^2 t^2}{m \cdot R^2}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{F^2 \cdot t^2}{m}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{(80\,N)^2 (4\,s)^2}{10 \frac{N}{m/s^2}}$$

$$E_C = \frac{1}{2} \cdot \frac{6\,400 \cdot 16\ N.m}{20}$$

Rpta.: $E_C = 2\,500\ J$

UNIDADES DE TRABAJO Y ENERGÍA			
	joule	ergio (se usa poco)	kW.h
1 joule	1	10^7	$2{,}78 \times 10^{-7}$
1 ergio	10^{-7}	1	$2{,}78 \times 10^{-14}$
1 kW.h	$0{,}36 \times 10^7$	$0{,}36 \times 10^{14}$	1

UNIDADES DE POTENCIA				
	watt "W"	kW	erg/s*	HP
1 watt "W"	1	0,001	10^7	136×10^{-5}
1 kW	1 000	1	10	1,36
1 erg/s	10^{-7}	10^{-10}	1	136×10^{-10}
1 HP	745	0,745	745×10^7	1

* se usa poco

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Una cuerda que gira a 400 R.P.M., tiene una masa de 10 kg y un radio de giro de 50 cm. Calcular:
a) su momento de inercia
b) su energía cinética.

RESOLUCIÓN : Recordando que:

a) $$I = m R^2$$

$$I = 10\,kg \times (0{,}5\,m)^2 = 2{,}5\,kg \times m^2$$

b) $$E_C = \frac{1}{2} I \omega^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} \times 2{,}5\,kg \times m^2\,(400\,R.P.M.)^2$$

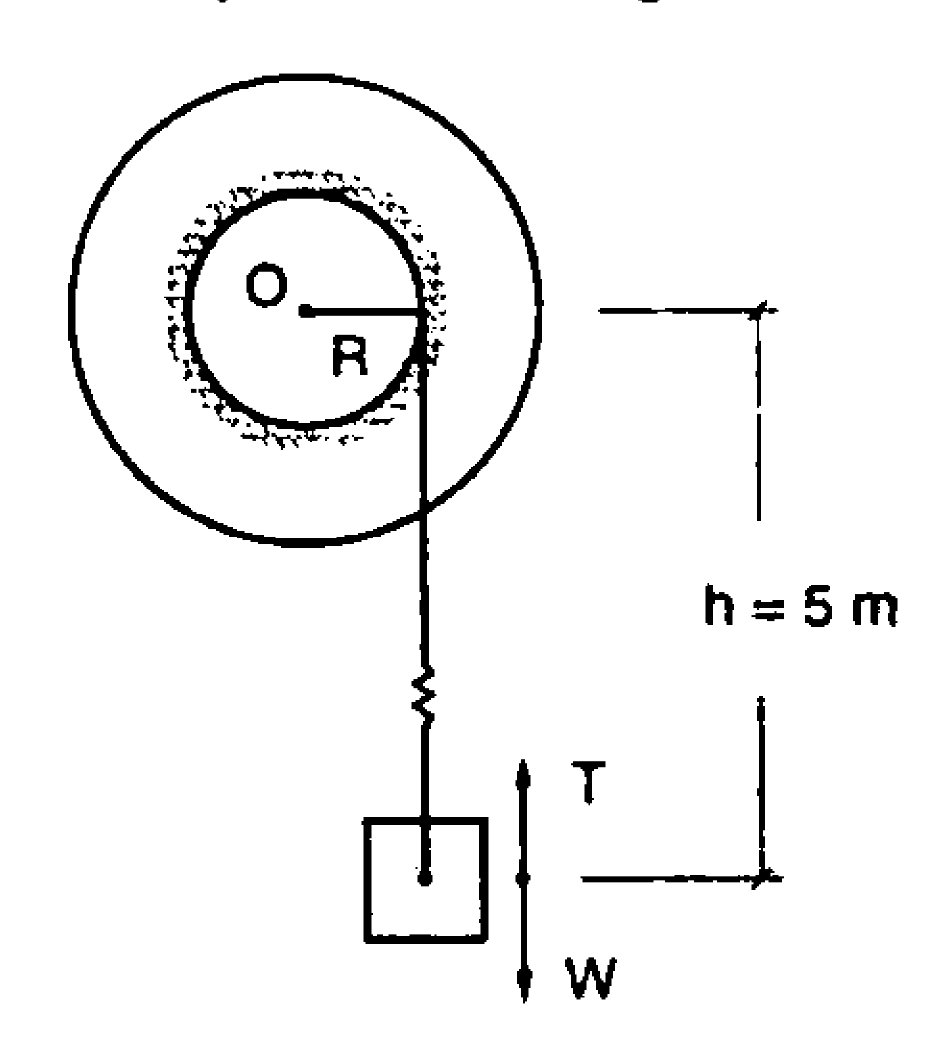
$$E_C = 1{,}25\,kg \times m^2 \left(400 \times \frac{2\pi\,rad}{60\,s}\right)^2$$

$$E_C = 2\,193{,}24\,(kg \times m/s^2)\,m$$

$$E_C = 2\,193{,}24\,N\,.\,m$$

Rpta.: $E_C = 2\,193{,}24\,J$

PROBLEMA 2. Un peso de 200 N, amarrado a una cuerda, la cual está envuelta en el eje de 15 cm de radio cae durante 8 s, recorriendo una altura de 5 m, partiendo del reposo. Calcular la energía cinética de la polea al cumplirse el 8vo. segundo.



RESOLUCIÓN : $E_C = ?$

$W = 200\,N$ $\quad R = 15\,cm$

$t = 8\,s$ $\quad h = 5\,cm$

Recordando: $$E_C = \frac{1}{2} I \omega^2 \qquad (a)$$

Cálculo de la aceleración lineal:

$$h = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$$

pero: $$V_i = 0 \quad \therefore \quad h = \frac{1}{2} a t^2$$

de donde: $$a = \frac{2h}{t^2}$$

$$a = \frac{2 \times 5\,m}{(8\,s)^2} = 0{,}156\,m/s^2$$

Cálculo de la aceleración angular:

$$\alpha = \frac{a}{R} = \frac{0{,}56\,m/s^2}{0{,}15\,m} = 1{,}04\,\frac{rad}{s^2}$$

Cálculo de la tensión del cable:

$$\Sigma F_y = m a \quad ; \quad W - T = m a$$

$$\therefore \quad 200\,N - T = \frac{200\,N}{9{,}8\,m/s^2} \times 0{,}156\,\frac{m}{s^2}$$

de donde: $T = 196{,}8\,N$

Cálculo de I : $T\,.\,R = I\alpha$ de donde:

$$I = \frac{T R}{\alpha} = \frac{196{,}8\,N \times 0{,}15\,m}{1{,}04\,rad/s^2}$$

$$I = 28{,}38\,N \times m \times s^2 \qquad (b)$$

Cálculo de ω:

$$\omega = \alpha t = 1{,}04\,\frac{rad}{s^2} \times 8\,s$$

$$\omega = 8{,}32\,\frac{rad}{s} \qquad (c)$$

Sustituyendo (b) y (c) en (a):

$$E_C = \frac{1}{2} \times 28{,}38\,N \times m \times s^2 \times \left(8{,}32\,\frac{1}{s}\right)^2$$

Prescindiendo de rad:

Rpta.: $E_C = 982{,}3\,N.m = 982{,}3\,J$

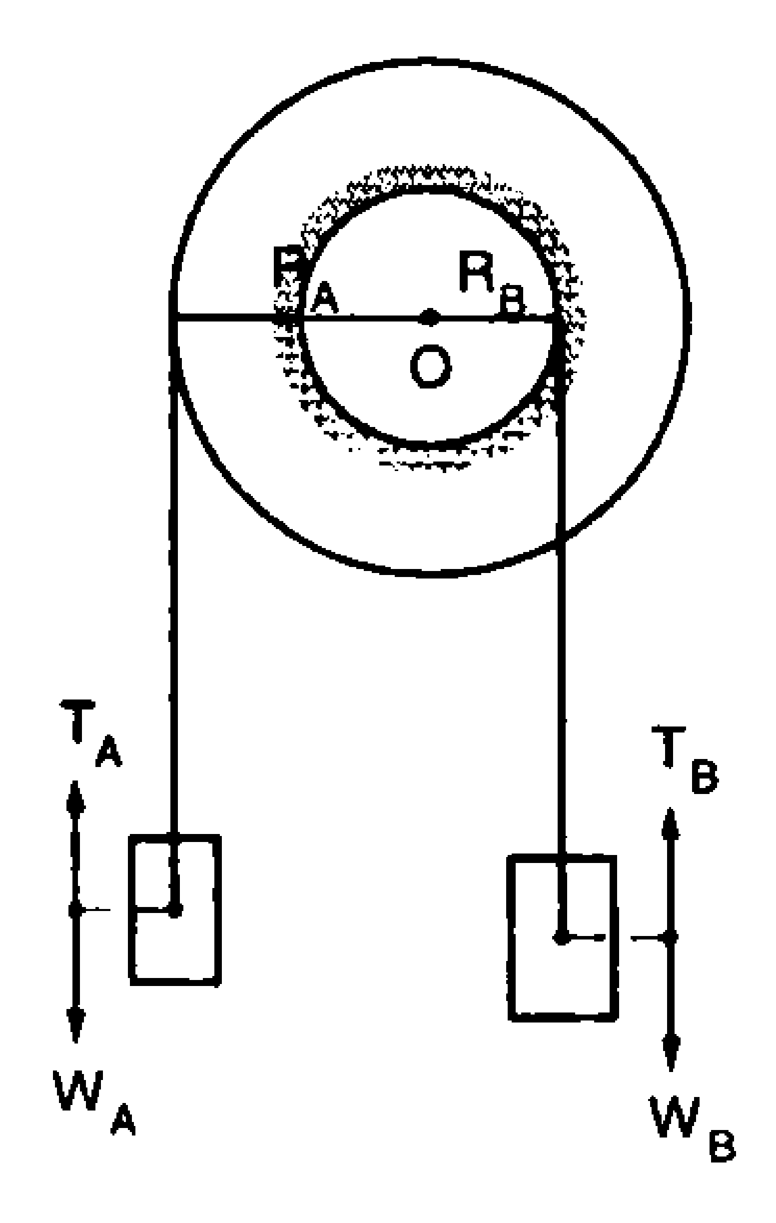
PROBLEMA 3. El momento de inercia del sistema motrado en la fi-

gura es de 20 kg x m². Los bloques "A" y "B" pesan 400 N y 700 N respectivamente. Cuando el sistema se deja libre, calcular:

a) Aceleración angular.
b) Tensiones en los cables

$R_A = 20\text{ cm}$

$R_B = 12\text{ cm}$



RESOLUCIÓN: $I = 20\text{ kg}\cdot m^2$

$W_A = 400\text{ N}$

$W_B = 700\text{ N}$

Cálculo de las aceleraciones lineales:

Recordando que: $a = \alpha R$

a) $a_A = \alpha \times 20\text{ cm}$

$a_A = \alpha \times 0{,}2\text{ m}$

b) $a_B = \alpha \times 12\text{ cm}$

$a_B = \alpha \times 0{,}12\text{ m}$

Por otro lado, aplicando $\Sigma F_y = m\,a$, para cada bloque:

A) $W_A - T_A = m_A a_A$

de donde: $T_A = W_A - m_A a_A$

$$T_A = 400\text{ N} - \frac{400\text{ N}}{9{,}8\text{ m/s}^2} \times \alpha \times 0{,}2\text{ m}$$

$$T_A = 400\text{ N} - 8{,}20\text{ N} \times s^2 \times \alpha \qquad (1)$$

B) $W_B - T_B = m_B a_B$

de donde: $T_B = W_B - m_B a_B$

$$T_B = 700\text{ N} - \frac{700\text{ N}}{9{,}8\text{ m/s}^2} \times \alpha \times 0{,}12\text{ m}$$

$$T_B = 700\text{ N} - 8{,}6\text{ N} \times s^2 \times \alpha \qquad (2)$$

$$\begin{Bmatrix}\text{Par aplicado}\\ \text{al sistema}\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}\text{Momento}\\ \text{de inercia}\end{Bmatrix} \times \begin{Bmatrix}\text{Aceleración}\\ \text{angular}\end{Bmatrix}$$

$$T_B \times 0{,}12\text{ m} - T_A \times 0{,}2\text{ m} = I \times \alpha$$

Sustituyendo equivalentes:

$$(700\text{ N} - 8{,}6\text{ N} \times s^2 \times \alpha) \times 0{,}12\text{ m} -$$
$$- (400\text{ N} - 8{,}2\text{ N} \times s^2 \times \alpha) \times 0{,}2\text{ m} =$$
$$= 20\text{ kg}\cdot m^2 \times \alpha$$

$$84\text{ N} \times m - 1{,}03\text{ N} \times m \times s^2 \times \alpha -$$
$$- 80\text{ N} \times m + 1{,}64\text{ N} \times m \times s^2 \times \alpha =$$
$$= 20\,\frac{N \times m^2}{s^2} \times \alpha$$

prosiguiendo:

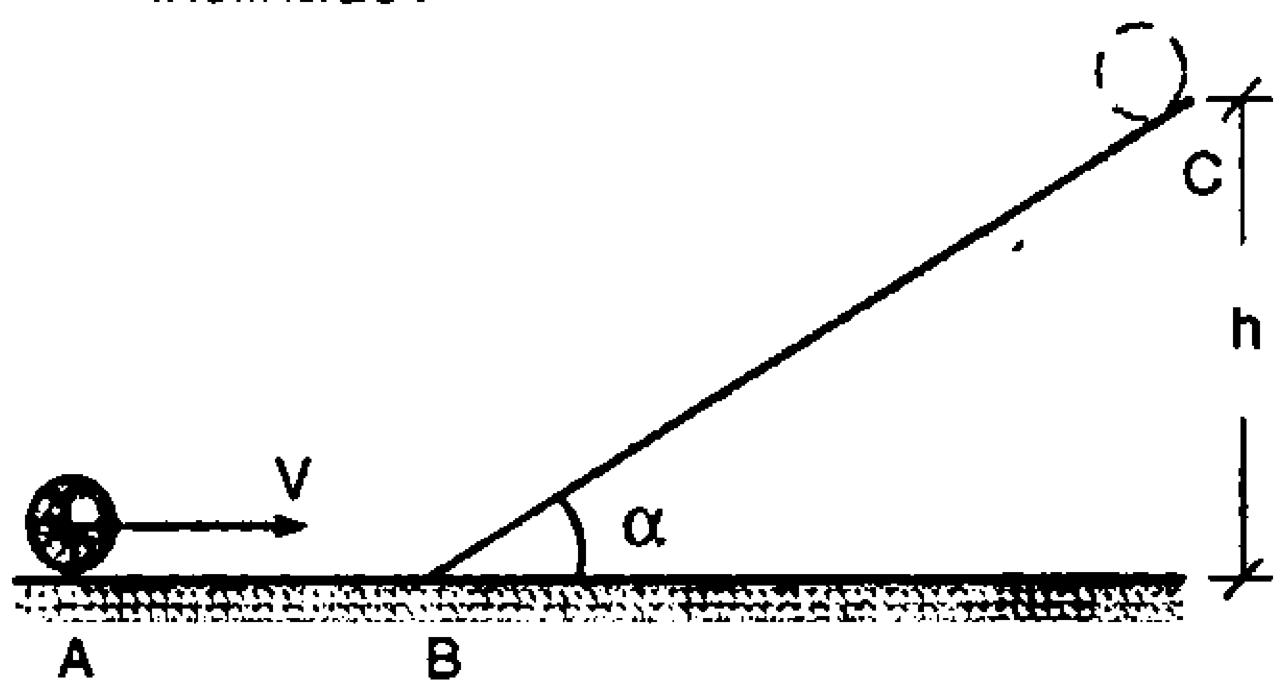
$$4\text{ N} \times m + 0{,}608\text{ N} \times m \times s^2 \times \alpha =$$
$$= 20\,\frac{N \times m^2}{m/s^2} \times \alpha$$

de donde:

Rpta.: $\alpha = 0{,}206\,\frac{1}{s^2}$

PROBLEMA 4. Una esfera de 50 N de peso, inicia el ascenso de una plano inclinado de 37° con una velocidad de 12 m/s. Calcular:

a) La energía cinética total de la esfera en el momento de llegar al pie del plano.
b) ¿Hasta qué altura asciende en el plano inclinado?



RESOLUCIÓN: $W = 50\,N$

$V = 12\,m/s$

$\alpha = 37°$

a) Cálculo de la energía cinética total

$$E_{C(total)} = E_{C(de\ rotación)} + E_{C(de\ traslación)}$$

$$E_{C(total)} = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m V^2 \qquad (2)$$

Recordando que: $I = \frac{2}{5} \times m R^2$

y ; $\omega = \frac{V}{R}$ sustituyendo en (2):

$$E_{C(total)} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times m R^2 \times \frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2} m V^2$$

$$E_{C(total)} = \frac{7}{10} \times m V^2$$

$$E_{C(total)} = \frac{7}{10} \times \frac{50\,N}{9{,}8 m/s^2} \times (12\,m/s)^2$$

$$E_{C(total)} = 514{,}29\,N.m$$

Rpta.: $E_{C(total)} = 514{,}29\,J$

b) Cálculo de la altura a la que llega:

$$E_{C(total)} = E_{P(en\ el\ punto\ en\ que\ se\ detiene)}$$

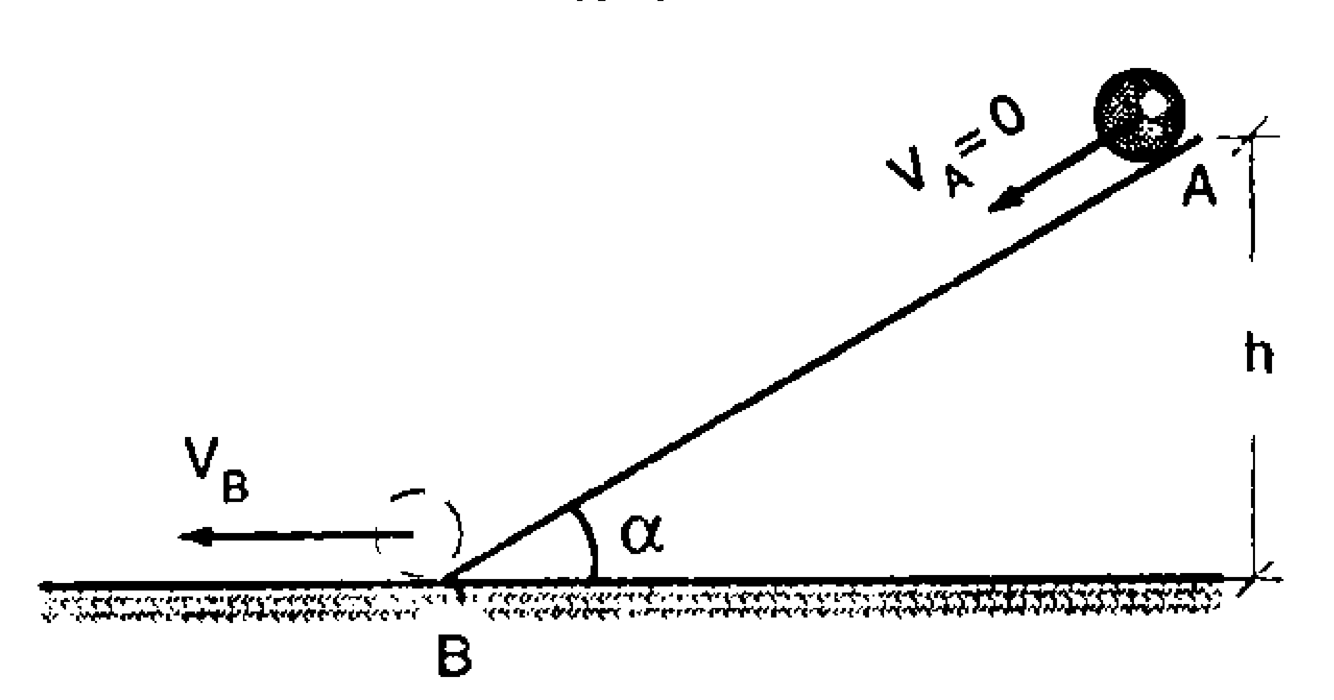
$$E_{C(total)} = W.h$$

(es independiente del ángulo del plano inclinado).

$$h = \frac{E_{C(total)}}{W} = \frac{514{,}3\,N.m}{50\,N}$$

Rpta.: $h = 10{,}28\,m$

PROBLEMA 5. Una esfera está a una altura "h" sobre la horizontal y rueda por un plano inclinado. Calcular la velocidad cuando termina el plano inclinado.



RESOLUCIÓN: Al bajar la esfera de "A" hasta "B", pierde energía potencial que transforma en energía de rotación y de traslación, es decir:

$$E_{C(perdida)} = E_{C(de\ rotación)} + E_{C(de\ traslación)}$$

$$W \times h = \frac{1}{2} I \omega^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

Pero: $W = m g$

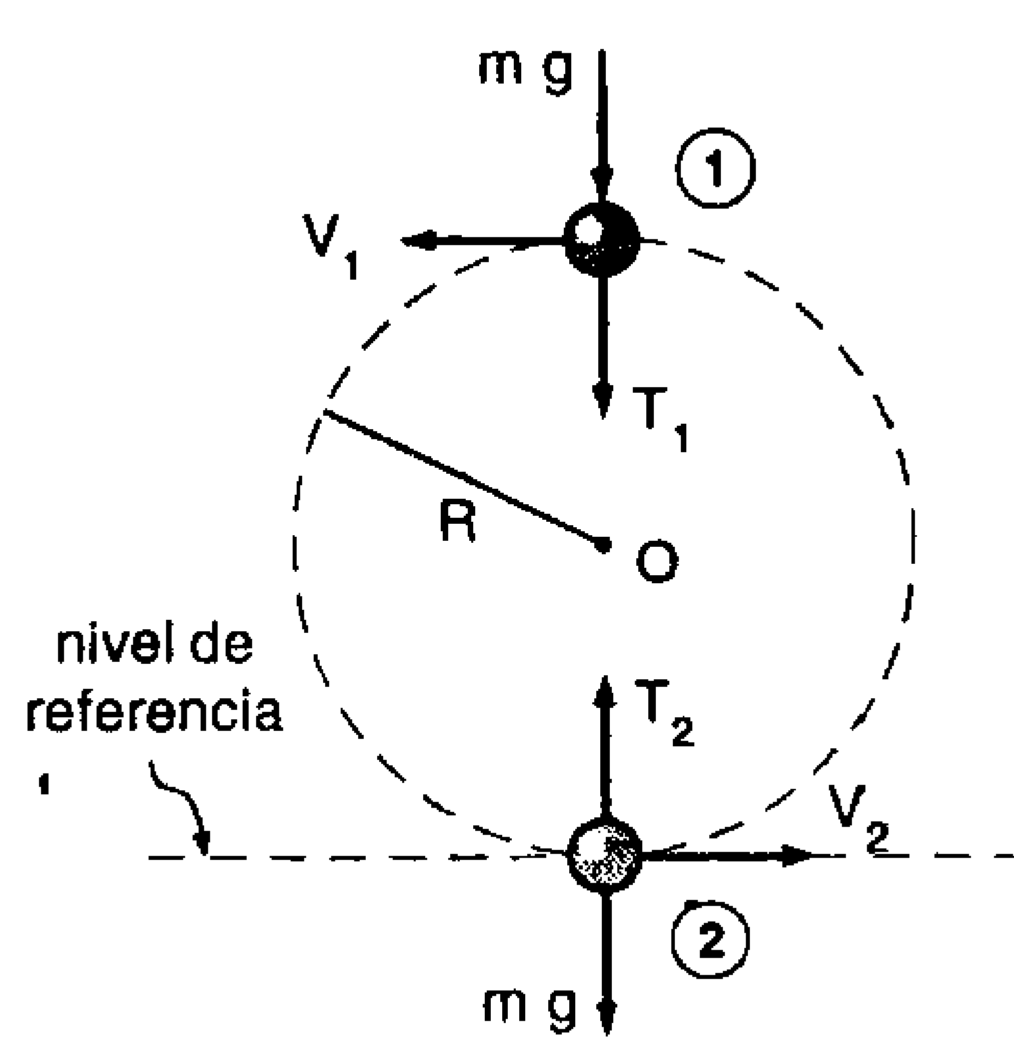
y: $I = \frac{2}{5} m R^2$; $\omega = \frac{V}{R}$ luego:

$$m g h = \frac{1}{2} \times \frac{2}{5} \times m R^2 \times \frac{V^2}{R^2} + \frac{1}{2} m V^2$$

$$g h = \frac{V^2}{5} + \frac{V^2}{2} \qquad \text{de donde:}$$

Rpta.: $V = \sqrt{\frac{10 g h}{7}}$

PROBLEMA 6. Un cuerpo gira en un plano vertical atado a una cuerda de longitud "R". ¿Cuál debe ser la velocidad horizontal que hay que comunicarle al cuerpo en su posición más alta para que la tensión de la cuerda en la posición más baja resulte 10 veces el peso del cuerpo?



RESOLUCIÓN:

I) De la figura, en la posición más baja:

http://librosysolucionarios.net

$$F_C = m a_C$$

$$\therefore \quad T_2 - m g = \frac{m V_2^2}{R}$$

Por dato: $T_2 \doteq 10 m g$

entonces: $10 m g - m g = \dfrac{m V_2^2}{R}$

$$9 m g R = m V_2^2$$

$$\frac{9 m g R}{2} = \frac{m V_2^2}{2} \qquad (1)$$

II) Por conservación de la energía mecánica:

$$E_{C_1} + E_{P_1} = E_{C_2} + E_{P_2}$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 + m g 2R = \frac{1}{2} m V_2^2 + m g (0)$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{1}{2} m V_2^2 - 2 m g R \qquad (2)$$

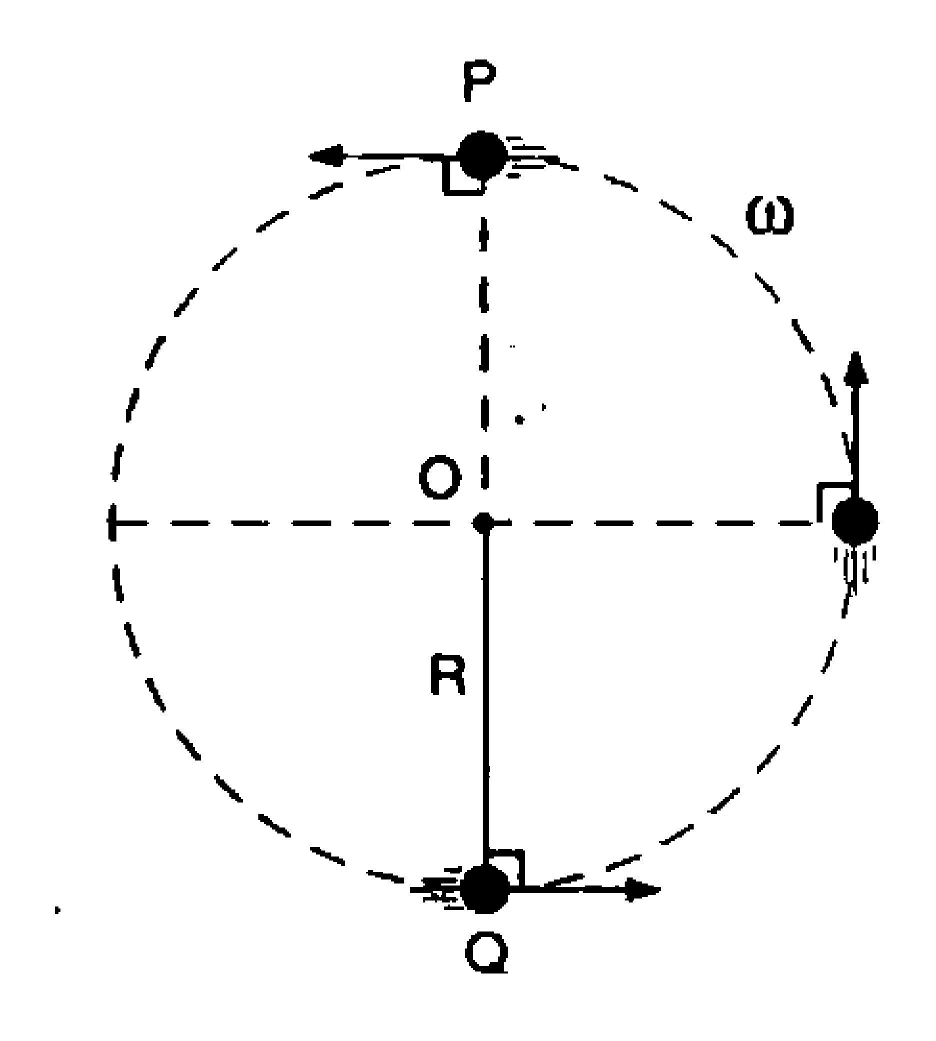
Reemplazando (1) en (2):

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{9 m g R}{2} - 2 m g R$$

$$\frac{1}{2} m V_1^2 = \frac{5}{2} m g R$$

Po lo tanto: Rpta.: $V_i = \sqrt{5 g R}$

PROBLEMA 7. Una pequeña bola de acero de 1 kg de masa está amarrada al extremo de una cuerda de 1 m de longitud girando en una circunferencia vertical alrededor del otro extremo con una velocidad angular constante de 120 rad/s. Calcular la energía cinética.



RESOLUCIÓN : $E_C = \frac{1}{2} m V^2$

Pero: $V = \omega R$, luego:

$$E_C = \frac{1}{2} m \omega^2 R^2$$

$$E_C = \frac{1}{2} (1)(120)^2 (1)^2$$

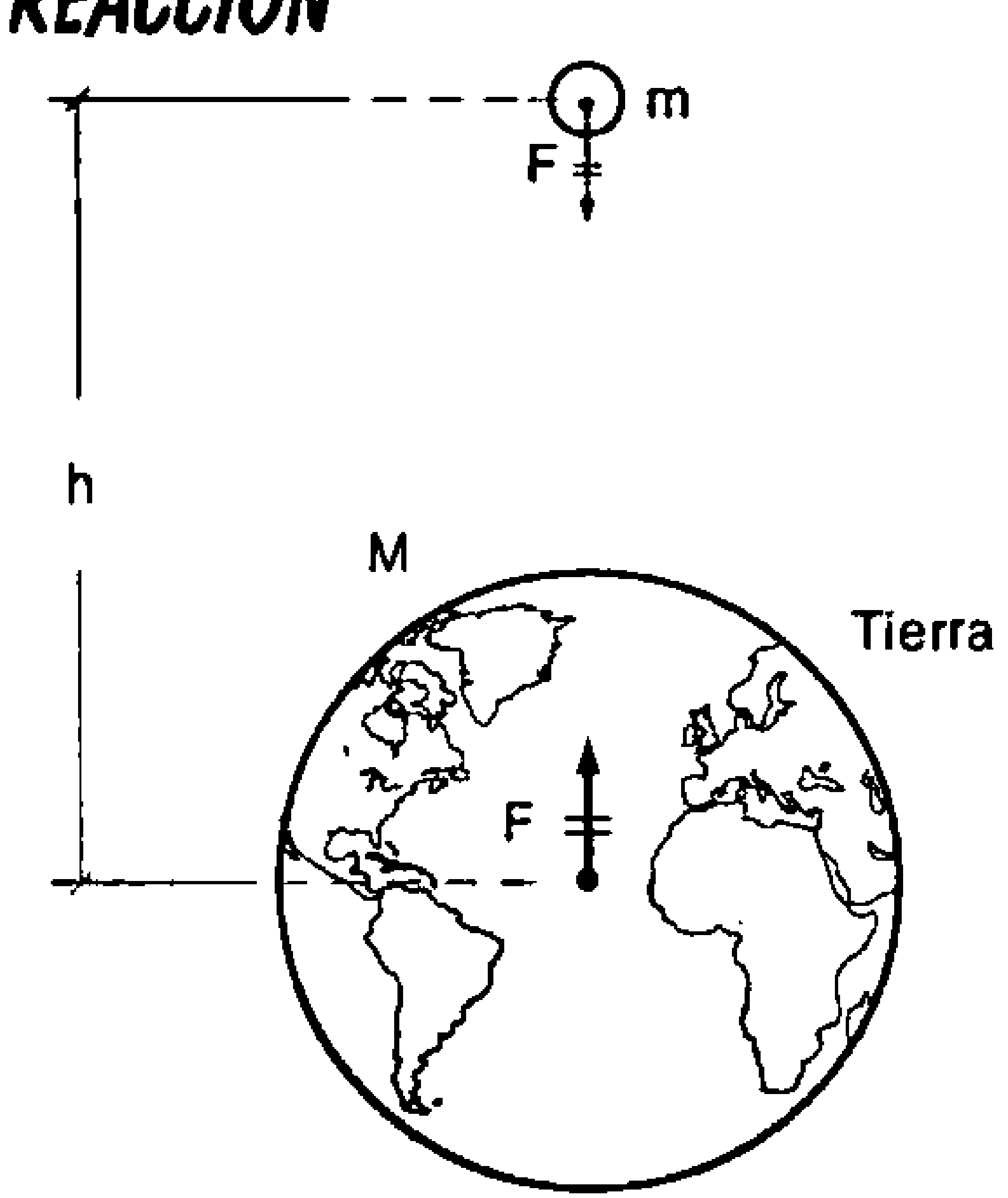
Rpta.: $E_C = 7{,}2 \cdot 10^3$ J

PRINCIPIO DE ACCIÓN Y REACCIÓN

TERCERA LEY DE NEWTON

"Siempre que un cuerpo ejerza una fuerza o acción sobre otro cuerpo, éste reacciona sobre el primero con una fuerza igual pero de sentido contrario".

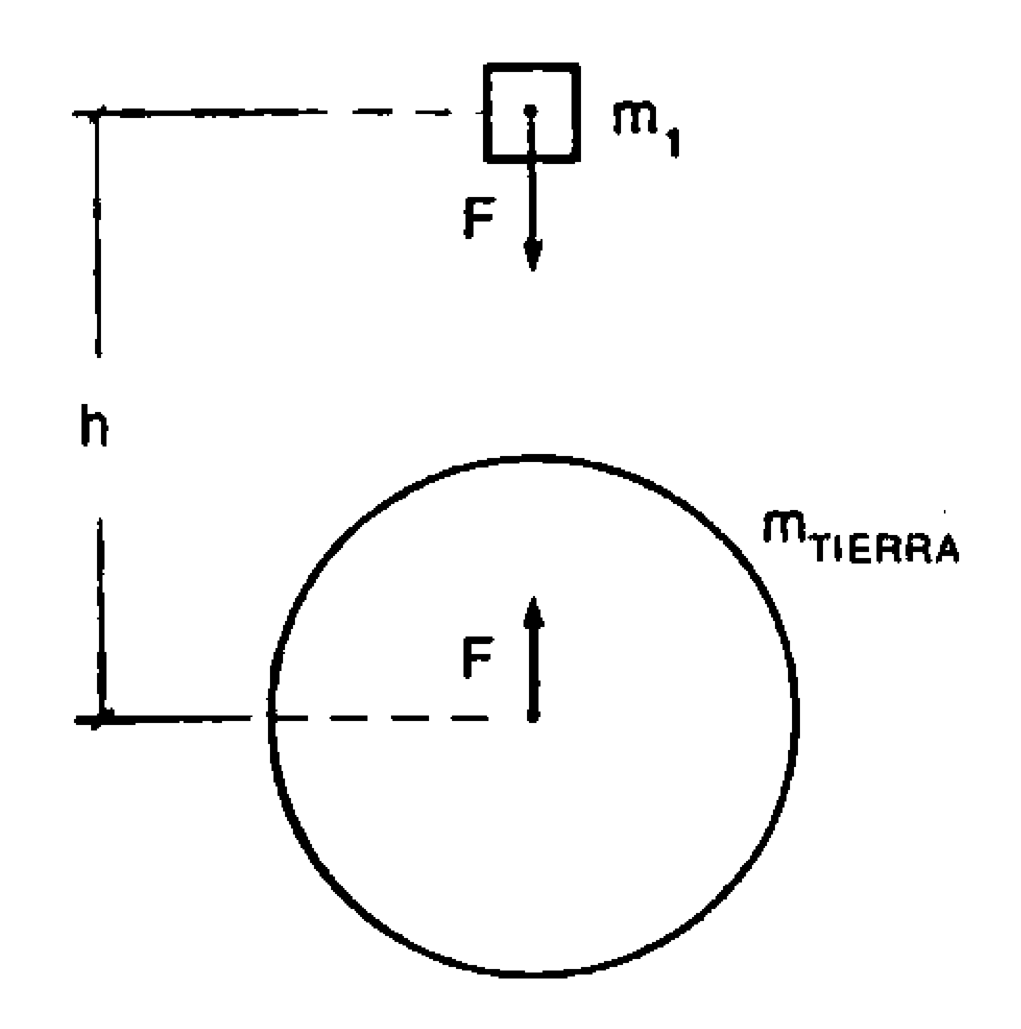
En el caso de la caída de un cuerpo, la acción de la atracción de la Tierra sobre el cuerpo, se manifiesta también en el cuerpo, pues éste reacciona y atrae a la Tierra, con una fuerza igual y de sentido contrario; y como resultado, los cuerpos caen uno hacia el otro.



* Cuando una pelota cae al suelo lleva una fuerza, en el momento que toca el suelo, éste reacciona con una fuerza igual y contraria a la de la pelota, y por eso la pelota da bote.

Ejemplo 1. Un cuerpo de 500 N de peso está a 20 km de distancia de la Tierra, se suelta y cae.

¿Cuánto se "acerca" la Tierra al cuerpo hasta el momento de tocarse, es decir, hasta el momento en que el cuerpo termina de caer? La masa de la Tierra es aproximadamente 6×10^{24} kg.



RESOLUCIÓN: $w = 500\text{ N}$; $d_1 = ?$

$d = 20\text{ km}$

masa de la Tierra $= 6 \times 10^{24}$ kg

Cálculo del tiempo que el cuerpo demora en caer:

$$h = \frac{1}{2} g t^2 \quad ; \text{ de donde:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2h}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 20\,000\text{ m}}{9{,}8\text{ m/s}^2}}$$

$$t = 63{,}88\text{ s} \quad ; \quad \text{aprox. } t = 64\text{ s}$$

Este es el tiempo en que la Tierra ha sido atraída por el cuerpo, éste es el tiempo en que la Tierra se ha estado "acercando" al cuerpo con la fuerza de atracción de 500 N.

Cálculo de la altura que "cae" la Tierra:

$$h = \frac{1}{2} a t^2 \qquad (1)$$

pero: $$a = \frac{F}{m},$$

$$\therefore \quad h = \frac{F t^2}{2m} = \frac{500\text{ N} \times (64\text{ s})^2}{2 \times 6 \times 10^{24}\text{ kg}}$$

$$h = \frac{500\text{ N} \times (64)^2\text{ s}^2}{2 \times 6 \times 10^{24}\ \dfrac{\text{N} \times \text{m}}{\text{s}^2}}$$

$$h = 170\,667 \times 10^{-24}\text{ m}$$

$$h = 1{,}7 \times 10^{-19}\text{ m}$$ De donde:

Rpta.: $h = 1{,}7 \times 10^{-16}$ mm

Es decir casi nada

Ejemplo 2. Un atleta cuya masa es de 800 kg, arroja una esfera (bala) de 8 kg de masa, aplicándole una fuerza de 400 N, durante 2 s. Calcular:

a) Velocidad con que sale la "bala".
b) Velocidad del hombre hacia atrás como consecuencia de la reacción de la "bala".

RESOLUCIÓN: $M = 80$ kg

$F = 400$ N $\qquad m = 8$ kg

$t = 0{,}2$ s

a) $V = a t$ pero: $a = \dfrac{F}{m}$

$$\therefore \quad V = \frac{F t}{m} = \frac{400\text{ N} \times 0{,}2\text{ s}}{8\ \dfrac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Rpta.: $V = 10$ m/s

b) $V_1 = a t$ pero: $a = \dfrac{F}{M}$

$$\therefore \quad V_1 = \frac{F t}{M} = \frac{400\text{ N} \times 0{,}2\text{ s}}{80\ \dfrac{\text{N}}{\frac{\text{m}}{\text{s}^2}}}$$

Rpta.: $V_1 = 1$ m/s

http://librosysolucionarios.net

IMPULSO Y CANTIDAD DE MOVIMIENTO

IMPULSO " $\vec{I}$ " (Elan)

Es el esfuerzo "F" que se hace durante un tiempo muy pequeño "D t", sobre una masa para iniciar un movimiento.

$$\boxed{\vec{I} = \vec{F} \cdot \Delta t}$$

El impulso es una cantidad vectorial cuyo módulo es el producto $F \cdot \Delta t$.

UNIDAD DE MEDIDA SI :

I : Impulso, en N.s
F : Fuerza instantánea, en N
Δt : Lapso de tiempo, en s

Ejemplos:

- Un golpe a una pelota de ping-pong.
- La percusión de una bala de cañón.
- Un puntapié a una pelota, etc.

CANTIDAD DE MOVIMIENTO " $\vec{c}$ "

Es la magnitud del esfuerzo que hay que aplicar a un cuerpo para vencer toda oposición y ponerlo en movimiento o para mantenerlo en movimiento.

$$\boxed{\vec{c} = m \cdot \vec{V}}$$

La cantidad de movimiento es una cantidad vectorial cuyo módulo es el producto: m.V

UNIDAD DE MEDIDA SI :

c : Cantidad de movimiento, en kg.m/s
m : masa que se mueve, en kg
V : Velocidad, en m/s

En efecto, todo cuerpo en reposo necesita un esfuerzo para ponerse en movimiento y también todo cuerpo en movimiento necesita un esfuerzo para mantenerse en movimiento, dado que siempre existen fuerzas externas sobre el cuerpo que se oponen al mantenimiento de estos estados. La medida de esta oposición viene dada por su **Cantidad de movimiento** llamado también **Momentum Lineal.**

EL IMPULSO Y LA CANTIDAD DE MOVIMIENTO SON IGUALES

Numéricamente sí, conceptualmente no

En efecto: $\vec{F} = m\,\vec{a}$

multiplicando por Δt :

$$\vec{F} \cdot \Delta t = m\,\vec{a} \cdot \Delta t$$

pero: $\vec{a} \cdot \Delta t = \vec{V}$, luego:

$$\boxed{\vec{F} \cdot \Delta t = m\vec{V}} \quad ó \quad \boxed{\vec{I} = \vec{c}}$$

Ejemplo 1. A una masa de 20 kg se le aplica una fuerza de 20 N durante 0,2 s. Calcular:

a) Impulso
b) Cantidad de movimiento

RESOLUCIÓN :

m = 20 kg
F = 20 N
t = 0,2 s
I = ?
c = ?

a) $I = F \times \Delta t = 20\,N \times 0{,}2\,s$

$$I = 4\,N\,.\,s$$

b) $c = m V$ (a)

como $m V = F \times D t$

$$V = \frac{F \Delta t}{m} = \frac{4\,N \times s}{20\,kg}$$

$$V = \frac{4\,N \times s}{20\,\frac{N}{m/s^2}} = 0{,}2\,m/s$$

Sustituyendo en (a) :

$$c = 20\,kg \times 0{,}2\,m/s$$

$$c = 4\,kg \times \frac{m}{s}$$

OBSERVACIÓN : En efecto, son iguales numéricamente:

$$4\,N\,.\,s = 4\,kg \times \frac{m}{s^2} \times s = 4\,kg \times \frac{m}{s}$$

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo 2. Un tanque cuyo peso es 1 500 N, descansa sobre sobre la plataforma de una báscula. Un chorro vertical llena agua en el tanque, con una velocidad de 6 m/s. La sección de chorro es 4 cm^2. ¿Cuál será la lectura de la báscula un minuto más tarde? (g = 10 m/s^2).

RESOLUCIÓN: El agua del chorro ejerce una fuerza contínua sobre el fondo del tanque, por tanto sobre ia báscula.

Según la ecuación:

Impulso = Cantidad de movimiento

considerando el agua en un instante "t" cualquiera, como un sólido libre, podemos escribir:

$$\Sigma I_{verticales} = m \Delta V$$

$$Ft = m(0 - V) \qquad (I)$$

Sea v el volumen del agua que cae,

entonces: $m = \delta v \qquad (1)$

Ahora: $v = A.h \qquad (2)$

Pero: $h = V.t \qquad (3)$

(3) en (2) y luego en (1):

$$m = \delta A V t \qquad (4)$$

Reemplazando (4) en (I):

$$Ft = -V \delta A V t = -V^2 \delta A t$$

Simplificando y reemplazando datos obtendremos el valor de la fuerza con la cual está cayendo el agua sobre el tanque.

$$F = -14,4 \text{ N}$$

El signo negativo indica que es necesaria una fuerza dirigida hacia arriba (respecto a la balanza) para detener el agua.

A los $t = 60$ s habrá caído al tanque:

$$W = (4 \times 10^{-4})(6)(60)(10\,000) \text{ N}$$

$$W = 1\,440 \text{ N de agua}$$

Por tanto, la lectura de la báscula al final del minuto será:

$$(14,4 + 1\,440 + 1\,500) \text{ N} = 2\,954,4 \text{ N}$$

FUERZAS IMPULSIVAS, CHOQUES O COLISIONES

FUERZAS IMPULSIVAS

Son fuerzas que se presentan durante un tiempo muy corto cuando un cuerpo explosiona o cuando dos cuerpos chocan.

Ejemplo: Cuando un futbolista pa-tea una pelota, la fuerza de i nteracción entre el pie y la pelota es del orden de 10^4 N y el tiempo que dura el contacto es de 10^{-2} s, aproximadamente. Estas fuerzas, a pesar de que actúan durante un tiempo muy pequeño, producen variaciones notables en la velocidad de dichos cuerpos.

CHOQUES O COLISIONES

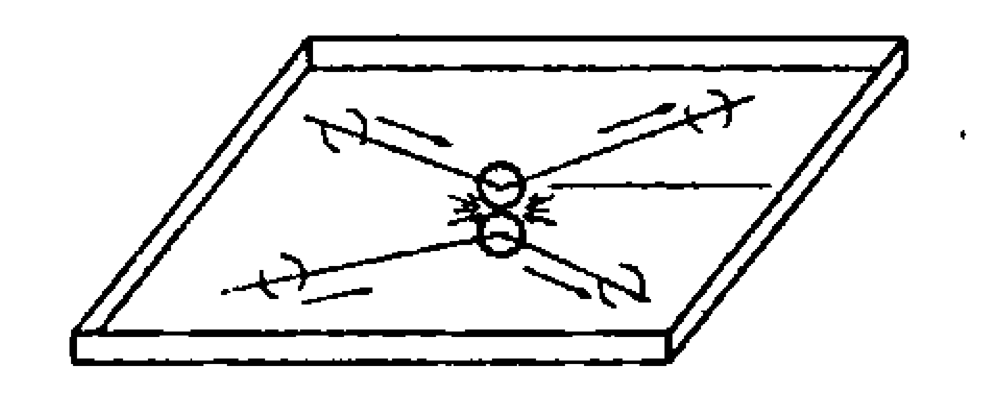
Son encuentros más o menos violentos entre dos cuerpos que alteran su movimiento en dirección y sentido. Los choques pueden ser tangenciales y colineales, llamados también oblicuos o bidimensionales y frontales o unidimensionales, respectivamente.

Por la dirección que llevan los cuerpos que chocan, éstos pueden ser pues:

a) Oblicuos o bidimensionales.
b) Frontales o unidimensionales.

a) ¿Qué son choques oblicuos o bidimensionales?

Son aquellos choques que se producen entre dos cuerpos que impactan siguiendo direcciones diferentes antes y después del choque. Ejemplo: dos bolas de billar que chocan.

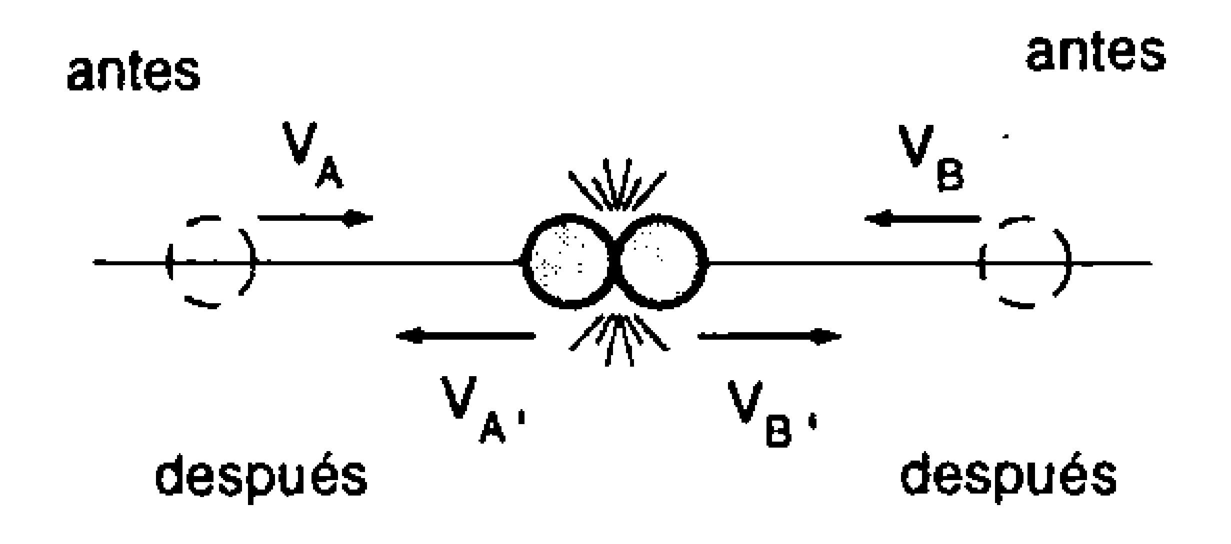


http://librosysolucionarios.net

b) ¿Que son choques frontales o unidimensionales?

Son aquellos choques que se producen entre dos cuerpos que impac-tan siguiendo una misma dirección.
Este tipo de choques se estudiará en este libro. Pueden ocurrir de dos formas:

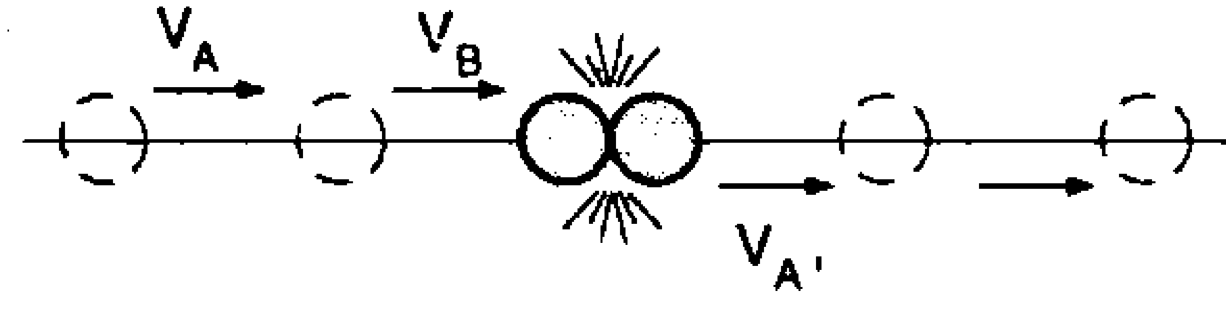
a) Siguiendo sentidos contrarios:



b) Siguiendo el mismo sentido:



antes



después después

CONSIDERACIONES GENERALES

En todo choque se cumple dos principios fundamentales físicos de la conservación.

1° PRINCIPIO: Siempre la **cantidad de movimiento** antes del choque debe ser igual a la cantidad de movimiento después del choque.

$$\vec{C}_A + \vec{C}_B = \vec{C'}_A + \vec{C'}_B$$

antes después

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B$$

NOTA: A la cantidad de movimiento también se le llama "momentum"

V : Velocidad ANTES del choque
U : Velocidad DESPUÉS del choque

2° PRINCIPIO: **La energía total de los cuerpos** antes del choque que debe ser igual a la energía total después del choque.

$$E_A + E_B = E'_A + E'_B$$

antes después

$$\frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2 = \frac{1}{2}m_A U_A + \frac{1}{2}m_B U_B$$

Ejemplo 1. Un cuerpo "A" cuya cantidad de movimiento es 5 kg. m/s, choca con otro cuerpo "B" que va en el mismo sentido y en la dirección contraria y con una cantidad de movimiento igual a 12 kg.m/s. Después del choque la cantidad de movimiento de A es 7 kg.m/s. Calcular la cantidad de movimiento de "B".

RESOLUCIÓN : Por principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$\vec{C}_A + \vec{C}_B = \vec{C'}_A + \vec{C'}_B$$

Sustituyendo los datos:

$$5\ kg.m/s + 12\ kg.m/s = 7\ kg.m/s + \vec{C}_B$$

Rpta.: $\vec{C}_B = 10\ kg.m/s$

Ejemplo 2. La energía de un cuerpo "A" es 20 J, choca con otro cuerpo cuya energía es de 16 J que se desplaza en la misma dirección pero en sentido contrario. Después del choque la energía del segundo es 12 J. ¿Cuál es la energía del primero?

RESOLUCIÓN : Por el principio de la conservación de la energía:

$$E_{C.TOTAL\ ANTES} = E_{C.TOTAL\ DESPUÉS}$$

ó: $E_{C.A} + E_{C.B} = E'_{C.A} + E'_{C.B}$

$$20J + 16\ J = E'_{C.A} + 12\ J$$

De donde:

Rpta.: $E'_{C.A} = 24\ J$

http://librosysolucionarios.net

CHOQUES ELÁSTICOS Y CHOQUES INELÁSTICOS

a) ¿Cuándo un choque es elástico?

Un coque es elástico cuando la energía cinética total antes del choque es igual a la energía cinética total después del choque.

$$E_{C.\ TOTAL.ANTES} = E_{C.\ TOTAL.DESPUÉS}$$

* Las velocidades relativas de los cuerpos antes y después de un choque elástico son iguales, pero de sentido contrario.

SU DEMOSTRACIÓN: De la conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B$$

ó: $m_A(V_A - U_A) = m_B(U_B - V_B)$ (1)

De la conservación de la energía cinética:

$$\frac{1}{2}m_A V_A^2 + \frac{1}{2}m_B V_B^2 = \frac{1}{2}m_A U_A^2 + \frac{1}{2}m_B U_B^2$$

Simplificando y ordenando convenientemente:

$$m_A(V_A^2 - U_A^2) = m_B(U_A^2 - V_A^2)$$

$$m_A(V_A + U_A)(V_A - U_A) =$$

$$= m_B(U_B + V_B)(U_B - V_B) \quad (2)$$

Dividiendo (1) entre (2):

$V_A + U_A = U_B + V_B$ de donde:

$V_A - U_A = U_B - V_B$ l.q.q.d.

b) ¿Cuándo un choque es inelástico?

Un coque es inelástico cuando la energía cinética total de los cuerpos que chocan, antes del choque, varía después del choque. Es decir aumenta o disminuye una magnitud ΔE.

$$E_{C.\ TOTAL.ANTES} = E_{C.\ TOTAL.DESPUÉS} + \Delta E$$

NOTA: ΔE es positiva cuando el choque produce energía (libera).

ΔE es negativa cuando el choque consume energía (absorbe).

Ejemplo: La energía cinética total de dos cuerpos antes de chocar es 22 J y después del choque es 30 J. ¿El choque ha liberado o absorbido calor?

RESOLUCIÓN: Por el enunciado del problema se entiende que el choque es inelástico; luego:

$$E_{C.\ TOTAL.ANTES} = E_{C.\ TOTAL.DESPUÉS} + \Delta E$$

De donde:

$$\Delta E = E_{C.\ TOTAL.DESPUÉS} - E_{C.\ TOTAL.ANTES}$$

$$\Delta E = 22\ J - 30\ J$$

$$\Delta E = -8\ J$$

Rpta.: El choque consume energía

COEFICIENTE DE RESTITUCIÓN

El coeficiente de restitución "e" es un número que establece la relación entre las velocidades relativas de los cuerpos después y antes del choque.

$$e = \frac{U_B - U_A}{V_A - V_B}$$

El coeficiente de restitución "e" depende de la naturaleza de los cuerpos que chocan.

NOTAS:

Para un choque elástico: $e = 1$

Para un choque inelástico: $0 < e < 1$

Para un choque completamente inelástico:

$$e = 0$$

¿Qué es un choque completamente inelástico?

Es aquel en el cual los cuerpos, después del choque, se desplazan juntos.

Algunos valores de "e":

Vidrio sobre vidrio de ~ 0,93 a 0,95

http://librosysolucionarios.net

Marfil sobre marfil de	0,88	a	0,89	Hierro sobre hierro de	0,11	a	0,15
Acero sobre acero de	0,50	a	0,80	Corcho sobre corcho de	0,50	a	0,60
Plomo sobre plomo de	0,12	a	0,18	Arcilla sobre arcilla (húmeda)	0		

PROBLEMAS RESUELTOS

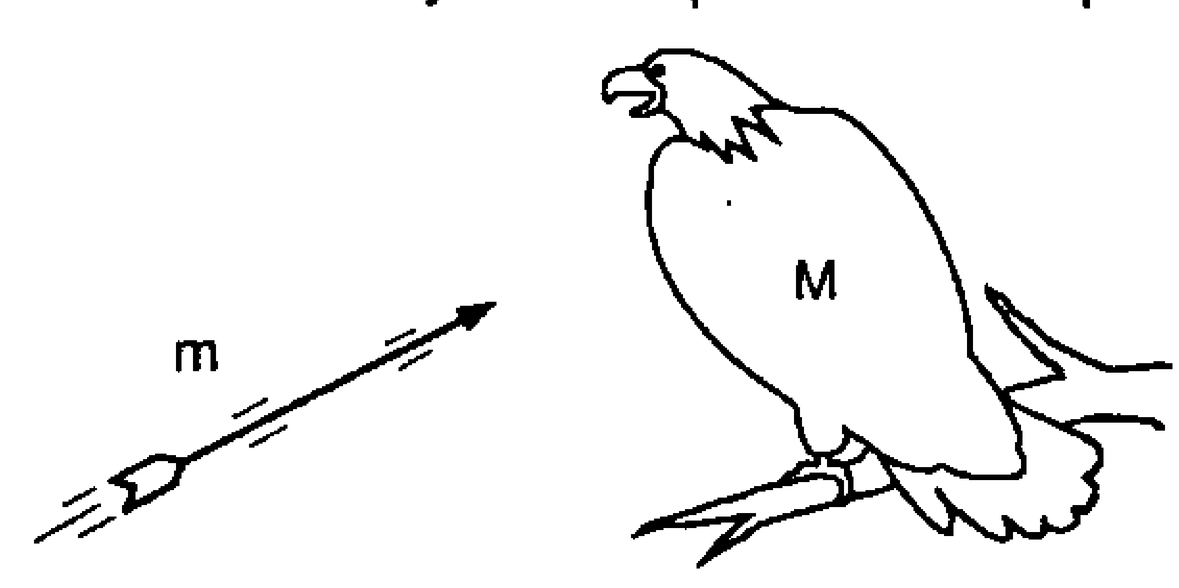
PROBLEMA 1. Una flecha de masa de 150 g es lanzada por un selvícola hacia un ave que reposa en un árbol, cuya masa es 8 kg. Si la velocidad del ave y la flecha, una vez que le da al ave es de 30 cm/s. Calcular la velocidad de la flecha en el momento de darle al ave.

RESOLUCIÓN : $m = 150\ g$

$V = ?$ $M = 8\ kg$

Del Principio de conservación de la cantidad de movimiento, se cumple:

La cantidad de movimiento del conjunto antes del choque es igual a la cantidad del movimiento del conjunto después del choque.



$$m_{FLECHA} \times V_{FLECHA} + m_{AVE} \times V_{AVE} =$$
$$= (m_{FLECHA} + m_{AVE}) \times U_{FLECHA\ Y\ AVE}$$

Reemplazando datos:

$$150\ g \times V + 8\ 000\ g \times 0 =$$
$$= (8\ 000\ g + 150\ g) \times 30\ cm/s$$

de donde: $V = 1\ 630\ cm/s$ ó:

Rpta.: $V = 16{,}30\ m/s$

PROBLEMA 2. Dos masas disparadas en sentidos contrarios, tal como se muestra en la figura, chocan y quedan pegadas. ¿Cuál será la velocidad del conjunto? si los datos son:

$V_1 = 60\ m/s$ $m_1 = 40\ g$

$V_2 = 100\ m/s$ $m_2 = 50\ g$

m_2 m_1

V_2 V_1

RESOLUCIÓN : Se cumple que:

La cantidad de movimiento del conjunto antes del choque es igual a la cantidad de movimiento del conjunto después del choque.

En forma convencional asumimos que:

$(\rightarrow) V : +$ y $(\leftarrow) V : -$

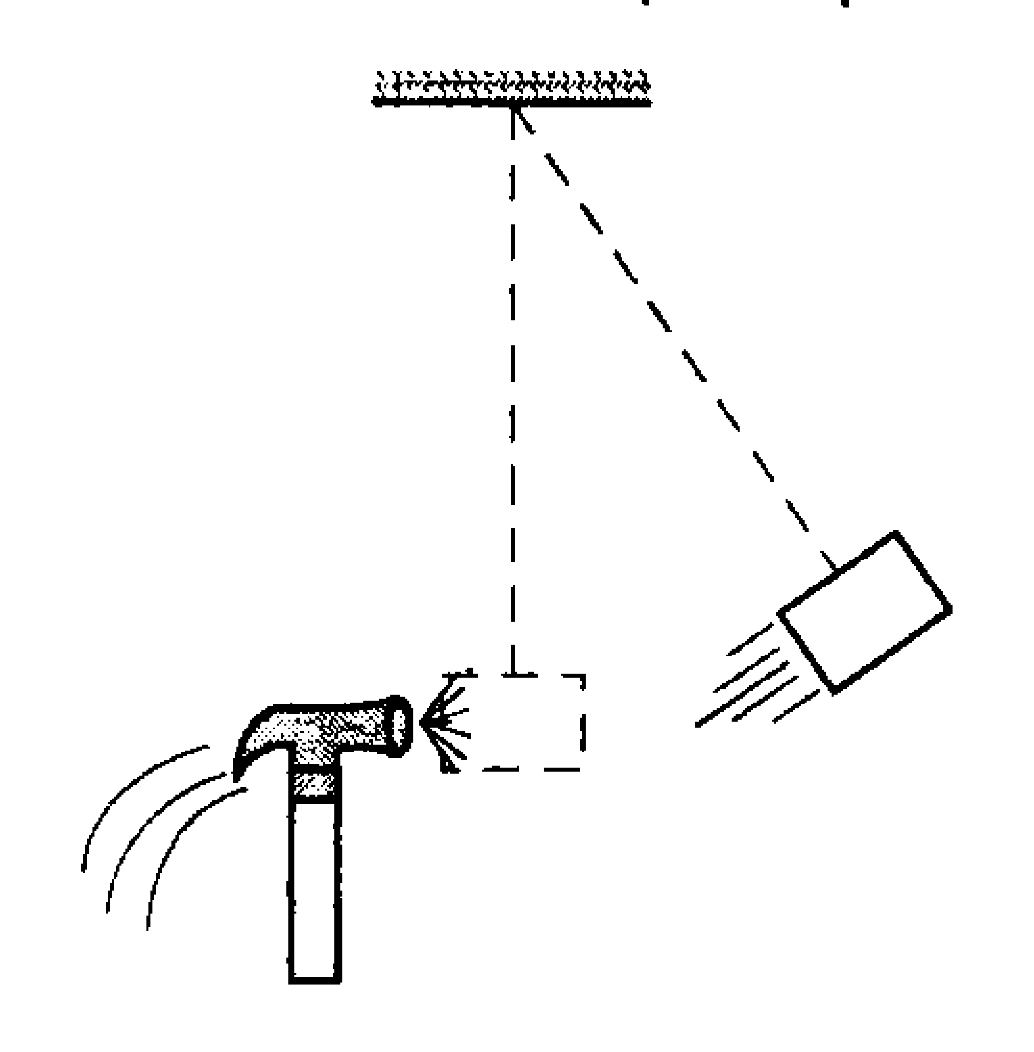
$$m_2 V_2 - m_1 V_1 = (m_1 + m_2) U$$

Reemplazando datos:

$$50\ g \times 100\ m/s - 40\ g \times 60\ m/s =$$
$$= (40g + 50\ g)\ U$$

De donde: Rpta.: $U = 28{,}89\ m/s$

PROBLEMA 3. A un péndulo de madera se le golpea con un martillo con una fuerza de 600 N, el impacto dura 0,01 s. Si la masa de la madera es de 10 kg, ¿cuál será la velocidad que adquiere?



http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN:

$V = ?$ $\quad F = 600\ N$; $\Delta t = 0{,}01\ s$; $m = 10\ kg$

Sabiendo que:

El impulso es igual a la cantidad de movimiento:

$$F.\Delta t = m V$$

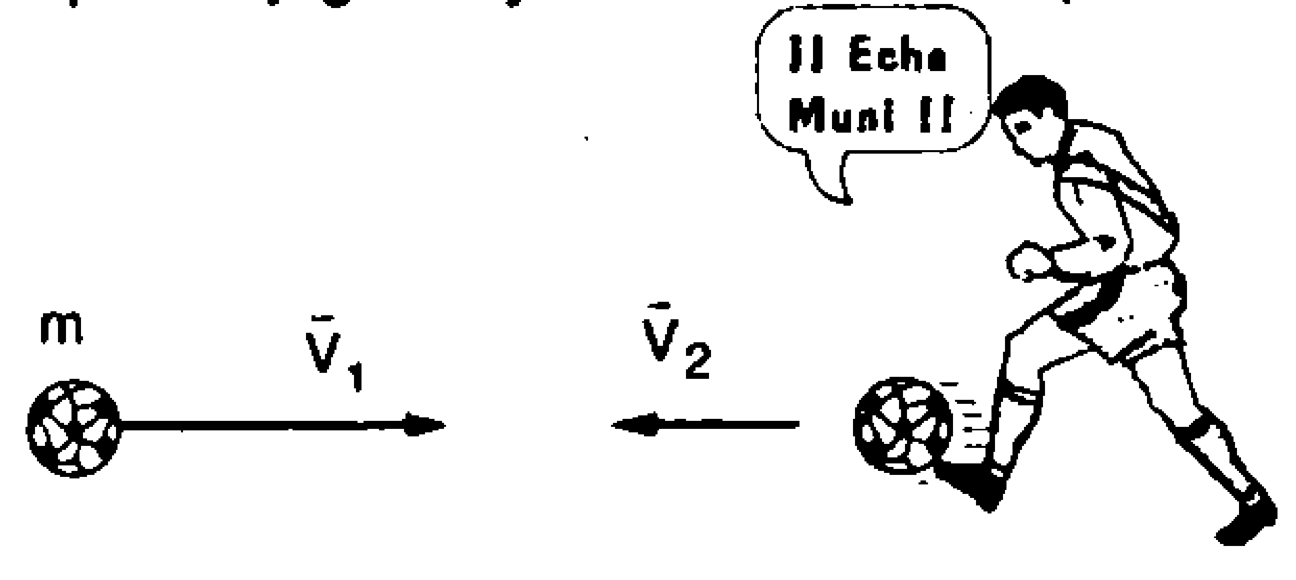
$$600\ N \times 0{,}01\ s = 10\ kg \times V$$

$$6\ N.s = 10\ kg.V$$

$$6\ kg \times \frac{m}{s^2} \times s = 10\ kg \times V$$

De donde: Rpta.: $V = 0{,}6\ m/s$

PROBLEMA 4. Una pelota de fútbol que pesa 4 N, avanza por el aire con una velocidad de 15 m/s, la recibe un jugador dándole un puntapié en sentido contrario con lo cual la pelota cambia de dirección (regresa), con una velocidad de 25 m/s. Calcular el impulso que recibió al chocar con el pie del jugador y la fuerza del choque.



RESOLUCIÓN:

$I = ?$ $\quad w = 4\ N$

$F = ?$ $\quad V_1 = 15\ m/s$; $V_2 = 25\ m/s$

La cantidad de movimiento que se le proporciona con el puntapié del futbolista es la diferencia entre la cantidad de movimiento que traía la pelota y la cantidad de movimiento que lleva después del puntapié.

Asumiendo que:

$$(\rightarrow) V: + \quad y \quad (\leftarrow) V: -$$

$$c = m V_2 - m V_1 = m (V_2 - V_1)$$

Pero: $m = \frac{w}{g}$

$$\therefore\ c = \frac{w}{g} \times (V_2 - V_1) = \frac{4\ N}{9{,}8\ m/s^2} \times$$

$$\times (-25\ m/s - 15\ m/s)$$

De donde: $c = -16{,}32\ N \times s$

Pero como el cambio en la cantidad de movimiento ($c = mV$) es igual al impulso ($I = F\ \Delta t$), se tiene:

Rpta.: $I = -16{,}32\ N.s$

El signo menos para la velocidad V_2, se toma negativo, porque para la velocidad V_1 se tomó positivo, arbitrariamente, y como son de sentidos opuestos, si uno es positivo el otro tiene que ser negativo.

b) Cálculo de la fuerza del choque:

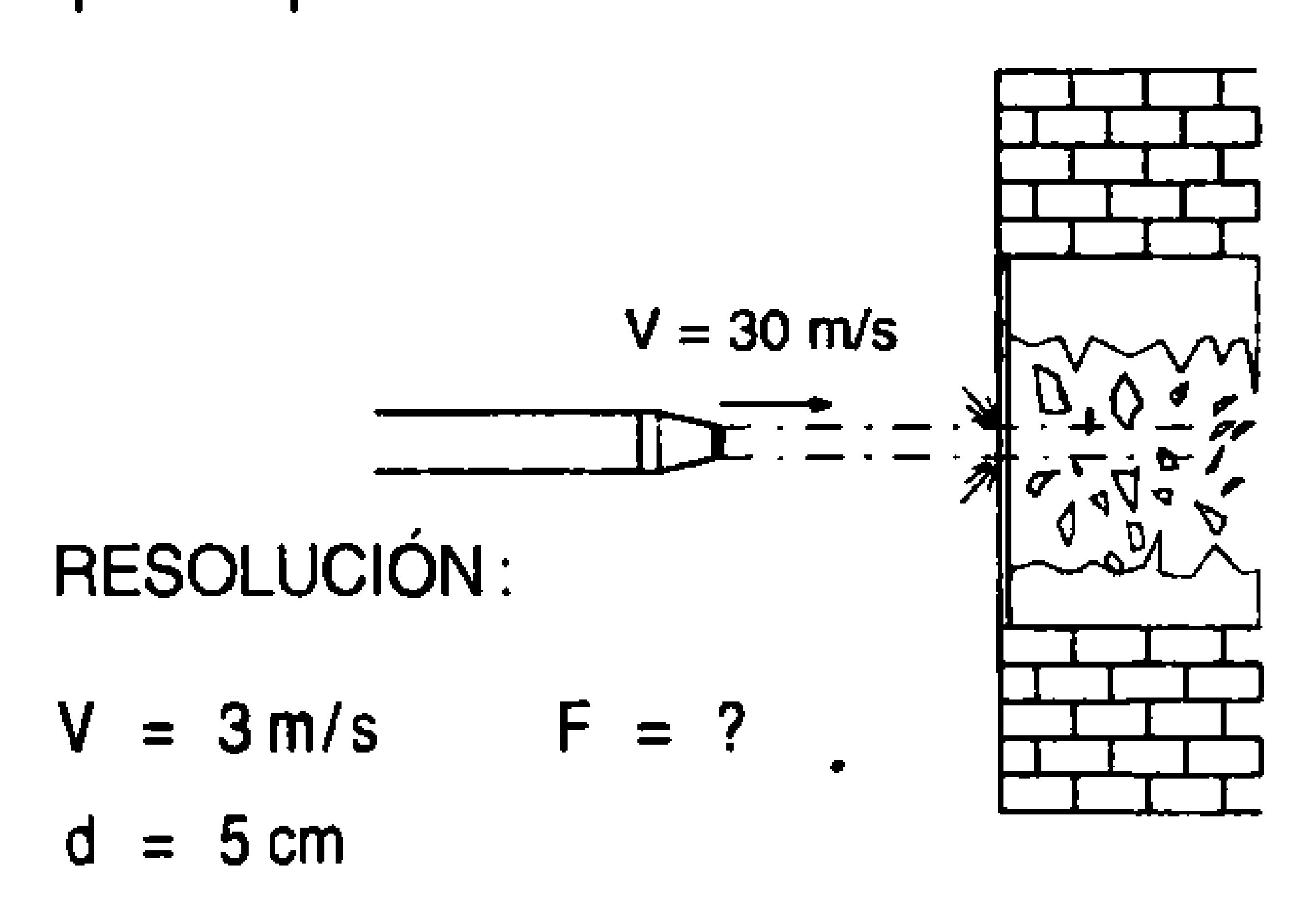
Para calcular la fuerza del choque tendría que conocerse el tiempo de contacto de la pelota con el pie, podría ser por ejemplo 0,02 s, en tal caso la fuerza sería:

$$F \times \Delta t = -16{,}32\ N \times s$$

$$F = -\frac{16{,}32\ N \times s}{0{,}02\ s}$$

Rpta.: $F = -816\ N\ (\leftarrow)$

PROBLEMA 5. Por el pitón de la manguera de una bomba, sale agua a la velocidad de 30 m/s. Si el pitón tiene un diámetro de 0,05 m e incide en forma perpendicular sobre la ventana de una casa que se incendia. ¿Cuál será la fuerza del chorro que rompe el vidrio de la ventana?



RESOLUCIÓN:

$V = 3\ m/s$ $\quad F = ?$

$d = 5\ cm$

Cálculo del volumen de agua que sale por el

pıtón en 1 s

En realidad se trata del volumen de un cilindro de 30 m de altura y una base con 5 cm de diámetro.

$$v = \frac{\pi d^2}{4} \times h = \frac{\pi (5\text{ cm})^2}{4} \times 3\,000\text{ cm}$$

$$v = 58\,905\text{ cm}^3 = 58{,}9 \times 10^{-3}\text{ m}^3$$

Cálculo de la masa de agua que sale por la manguera en 1 s.

Se sabe que: $m = v \times \delta$

$$m = V \times \delta$$

$$m = 58{,}9 \times 10^{-3} \times \frac{1000\text{ kg}}{\text{m}^3}$$

$$m = 58{,}9\text{ kg}$$

Ahora: Impulso = Cantidad de movimiento

$$F t = m(V_f - V_i) \qquad (I)$$

donde: $t = 1\text{ s}$; $m = 58{,}9\text{ kg}$

$V_f = 30\text{ m/s}$; $V_i = 0$

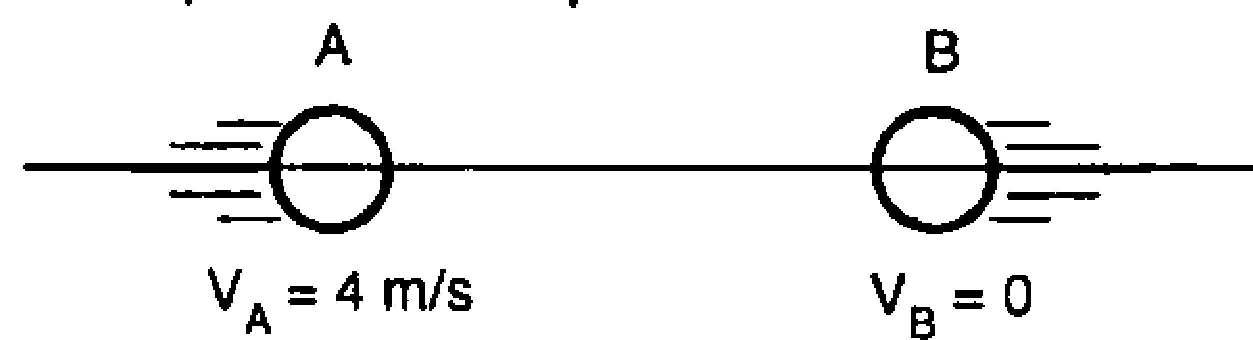
Se asume la velocidad inicial $V_i = 0$

$$F \times 1\text{ s} = 58{,}9\text{ kg}(30\text{ m/s} - 0)$$

$$F = 1\,767\text{ kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Rpta.: $F = 1\,767\text{ N}$

PROBLEMA 6. Dos "canicas" de masas iguales van a realizar un choque perfectamente elástico, y unidimensional. Si una de ellas está en reposo, y la otra posee una velocidad de 4 m/s antes del choque, determinar las velocidades que adquieren después del choque.



RESOLUCIÓN: Aplicando el principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B$$

como: $m_A = m_B = m$, se tiene

$$m \times 4 + m \times 0 = m U_A + m U_B$$

$$\Rightarrow \qquad U_A + U_B = 4 \qquad (1)$$

Como el choque es perfectamente elástico, se aplica:

$$e = \frac{U_B - U_A}{V_A - V_B} = \frac{U_B - U_A}{4 - 0} = 1$$

$$\Rightarrow \qquad U_B - U_A = 4 \qquad (2)$$

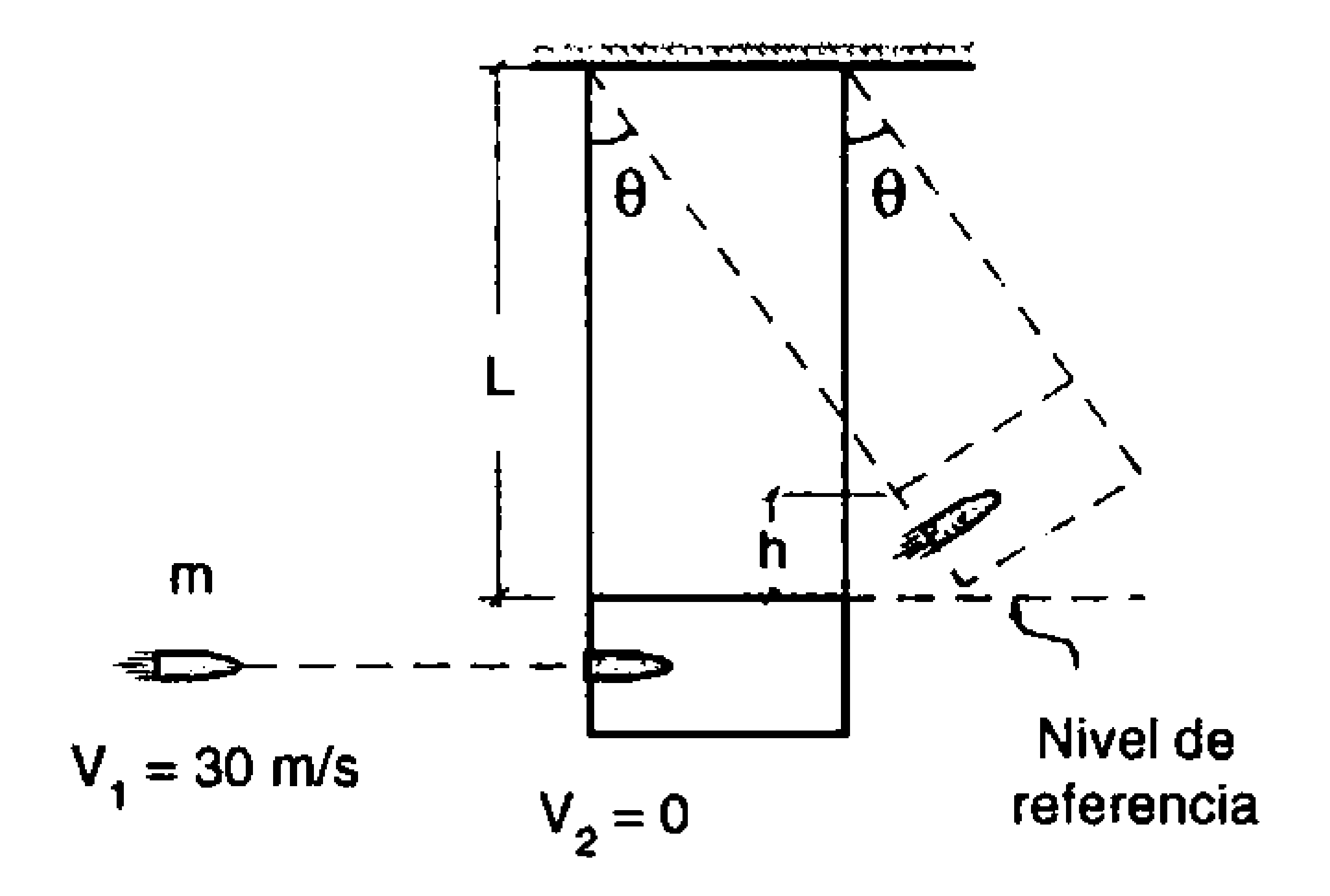
De (1) y (2): $U_A = 0$

$$U_A = 0$$

$$U_B = 4\text{ m/s } (\rightarrow)$$

Esto es cierto, porque al no haber pérdida de energía, toda la energía de A es absorbida (ganada) por B. Entonces B se mueve y A se detiene.

PROBLEMA 7. Una bala de m velocidad $V_1 = 30$ m/s y se incrusta en el bloque de madera de masa M = 99 kg. Determinar el ángulo máximo que se puede inclinar el conjunto, si la longitud de las cuerdas es L = 1,8 m.



RESOLUCIÓN: Por el principio de conservación de la cantidad de movimiento.

$$m V_1 + M V_2 = m U_1 + M U_2$$

Considerando que: $U_1 = U_2 = U$

y que: $V_2 = 0$; y el dato: $M = 99\text{ m}$

$$m V_1 + M(0) = (m + M) U$$

$$m V_1 = (m + 99m) U$$

$$U = \frac{V_1}{100} = \frac{300}{100}$$

$$U = 3 \text{ m/s}$$

Aplicando el Principio de conservación de la energía (después del impacto):

calculamos h: $E_{M_f} = E_{M_i}$

$$E_{P_f} + E_{C_f} = E_{P_i} + E_{C_i}$$

$$(M + m)\, g h + 0 = 0 + \frac{1}{2}(M + m) U^2$$

$$h = \frac{U^2}{2g} = \frac{(3 \text{ m/s})^2}{2 \times 10 \text{ m/s}^2}$$

$$h = 0{,}45 \text{ m}$$

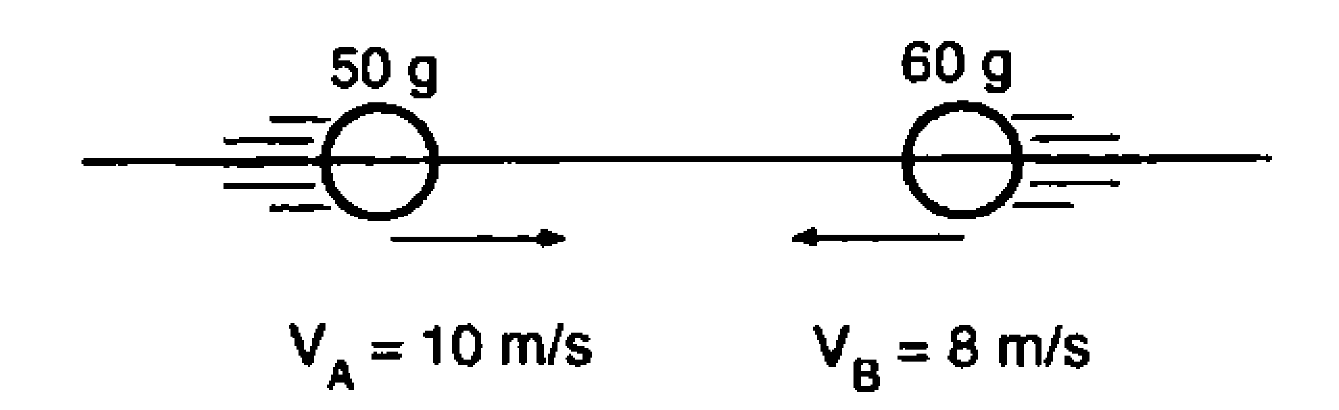
Finalmente:

$$\cos\theta = \frac{L - h}{L} = \frac{1{,}8 \text{ m} - 0{,}45 \text{ m}}{1{,}8 \text{ m}}$$

$$\cos\theta = 0{,}45$$

Rpta.: $\theta = 41° \, 24' \, 35''$

PROBLEMA 8. Dos bolas de 50 g y 60 g poseen velocidades de 10 m/s y 8 m/s respectivamente, y se desplazan en sentidos opuestos. Si el coeficiente de restitución entre ellas es e = 0,5 , determinar la energía que se pierde en forma de calor después del choque.



RESOLUCIÓN : Aplicando el Principio de conservación de la cantidad de movimiento:

$$m_A V_A + m_B V_B = m_A U_A + m_B U_B$$

$$50 \text{ g} (10 \text{ m/s}) + 60 \text{ g} (-8 \text{ m/s}) =$$

$$= 50 \text{ g} \times U_A + 60 \text{ g} \times U_B$$

$$5 U_A + 6 U_B = 2 \qquad (1)$$

Por otro lado: $e = \dfrac{U_B - U_A}{V_A - V_B}$

$$0{,}5 = \frac{U_B - U_A}{10 - (-8)}$$

$$U_B - U_A = 9 \qquad (2)$$

De (1) y (2):

$$U_A = -\frac{52}{11} \text{ m/s} = \frac{52}{11} \text{ m/s } (\overset{-}{\rightarrow})$$

$$\therefore \quad U_B = \frac{47}{11} \text{ m/s } (\overset{+}{\rightarrow})$$

Luego, aplicando:

$$E_{C(\text{antes del choque})} = E_{C(\text{después del choque})} + \Delta E_P$$

$$E_A + E_B = E'_A + E'_B + \Delta E_P$$

$$\frac{1}{2} m_A V_A^2 + \frac{1}{2} m V_B^2 = \frac{1}{2} m_A U_A^2 +$$

$$+ \frac{1}{2} m_B U_B^2 + \Delta E_P$$

$$\Delta E_P = \frac{1}{2} m_A (V_A^2 - U_A^2) + \frac{1}{2} m_B (V_B^2 - U_B^2)$$

Reemplazando valores:

$$\Delta E_P = \frac{1}{2} \times 0{,}05 \text{ kg} \left[10^2 - \left(-\frac{52}{11} \right)^2 \right] \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \times 0{,}06 \text{ kg} \left[8^2 - \left(\frac{47}{11} \right)^2 \right] \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$\Delta E_P = 3{,}31 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = 3{,}31 \text{ N} \cdot \text{m}$$

Rpta.: $\Delta E_P = 3{,}31$ J

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un muchacho que pesa 300 N está de pie en una barca de 500 N y está inicialmente en reposo. Si el muchacho salta horizontalmente con una velocidad de 2 m/s relativa a la barca, hallar la velocidad de la barca.
Rpta.: V = 0,75 m/s

http://librosysolucionarios.net

2. Una bala que pesa 0,6 N y se mueve con una velocidad de 500 m/s choca con un bloque de 50 N y se mueve en la misma dirección y sentido con una velocidad de 30 m/s. ¿Cuál es la velocidad resultante "v" de la bala y el bloque suponiendo que la bala se incrusta en el bloque?

Rpta.: v = 35,57 m/s

3. Un chorro de agua sale con una velocidad de 20 m/s de una manguera de 10 cm de diámetro. Hallar la reacción de la manguera sobre su soporte.

Rpta.: 3 145 N

4. Un chorro de agua de 5 cm de diámetro ejerce una fuerza de 1 500 N sobre un álabe plano de turbina perpendicular al chorro. ¿Cuál es la velocidad del chorro?

Rpta.: 27,4 m/s

5. Un chorro de agua sale de un conducto de 3 cm de diámetro a una velocidad de 30 m/s. Hallar la fuerza total contra el álabe de turbina de curvatura circular en el que la dirección del chorro varía 45°. Suponer que no hay rozamiento.

Rpta.: 449,84 N

6. Después de una inundación, una cabra de 200 N se encuentra a flote en un extremo de un madero de 250 N de peso y 2 m de largo. Cuando el otro extremo llega a la orilla la cabra marcha hacia ese extremo. Cuando llegue a él, ¿a qué distancia se encontrará de la orilla? Supóngase que el madero forma ángulo recto con la orilla y que el agua está casi calmada después de la torrentera.

Rpta.: 0,89 m

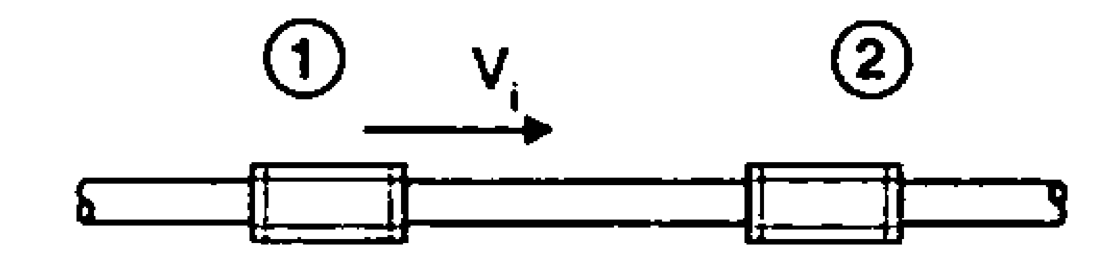
7. Un peso de 1 000 N cae libremente durante 4 s partiendo del reposo. Hallar su cantidad de movimiento en ese instante?

Rpta.: 4 000 N x s

8. Un trineo de 5 kg parte del reposo de la parte más alta de un plano inclinado de 2,5 m de altura, y lleva un niño y una niña, cuyas masas son 45 kg y 40 kg, respectivamente. Cuando el trineo llega a la parte más baja del plano, el niño salta hacia atrás con una velocidad relativa de 8 m/s. Despreciando la fricción, ¿qué velocidad adquiere el trineo?

Rpta.: 9 m/s

9. En la figura se muestra dos co-llarines de masas iguales que pueden desplazarse sin fricción a lo largo del eje horizontal. El collarín ① se desplaza a 10 m/s, mientras que el collarín ②, que inicialmente estaba en reposo, después del choque adquiere la velocidad de 8 m/s. ¿Cuál es el coeficiente de restitución entre los collarines?



Rpta.: e = 0,6

CAPÍTULO 9

MOVIMIENTO OSCILATORIO

EL PÉNDULO SIMPLE

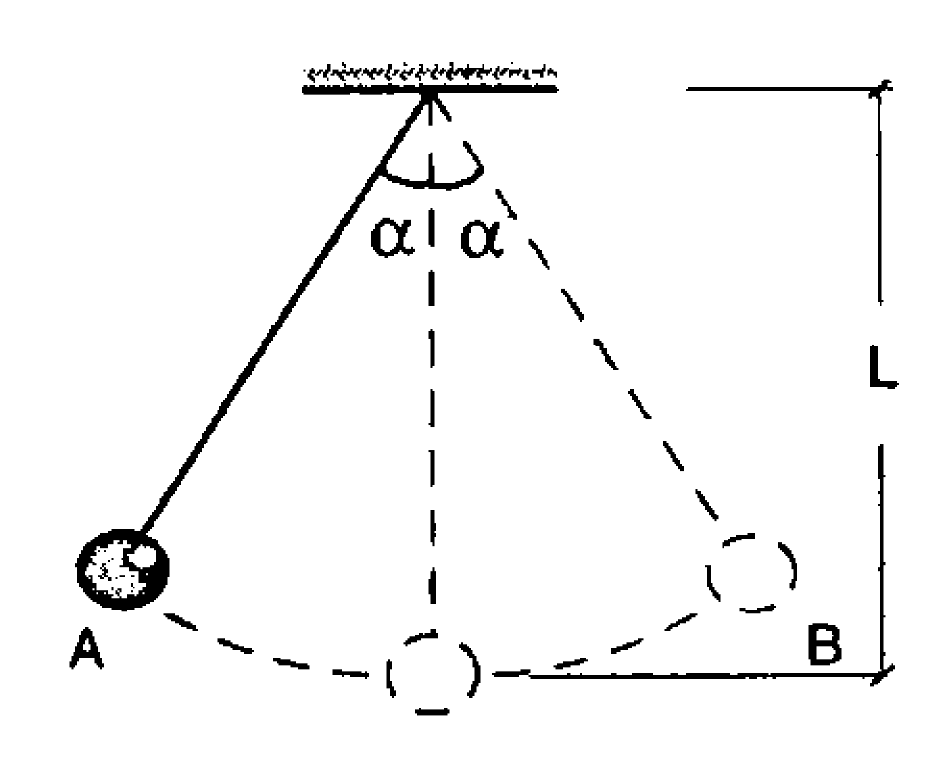
PÉNDULO

Es un objeto cualquiera que está suspendido a un punto fijo, mediante una cuerda.

ELEMENTOS DE UN PÉNDULO SIMPLE

Longitud "L" : Longitud de la cuerda desde el punto de suspensión hasta el centro del objeto suspendido.

Oscilación "2$\widehat{AB}$": Es el arco recorrido por el péndulo desde una de sus posiciones extremas hasta la otra, más su regreso hasta su posición inicial.



Período "T":
Tiempo que emplea en realizar una oscilación.

Amplitud "α":
El ángulo formado por la cuerda del péndulo en una de sus posiciones extremas con la vertical. (Las leyes del péndulo se cumplen sólo cuando $\alpha < 10°$)

Frecuencia "f": Es el número de oscilaciones en cada unidad de tiempo, se calcula así:

$$f = \frac{1}{T}$$

¿POR QUÉ OSCILA UN PÉNDULO?

1. En la posición de equilibrio, el peso "P" del cuerpo es anulado por la cuerda "R".

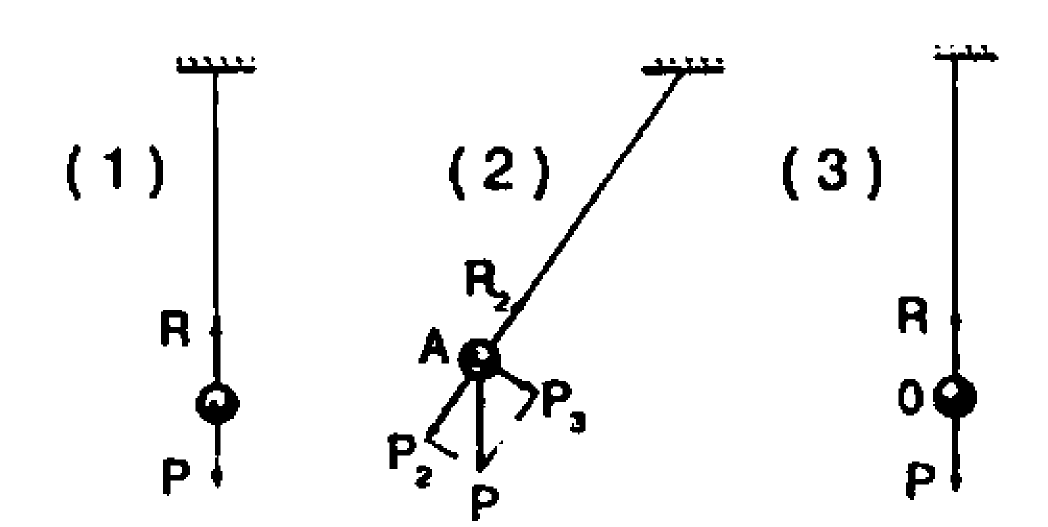
2. Si se lleva a la posición extrema "A" el peso del cuerpo es anulado por la cuerda sólo en parte.

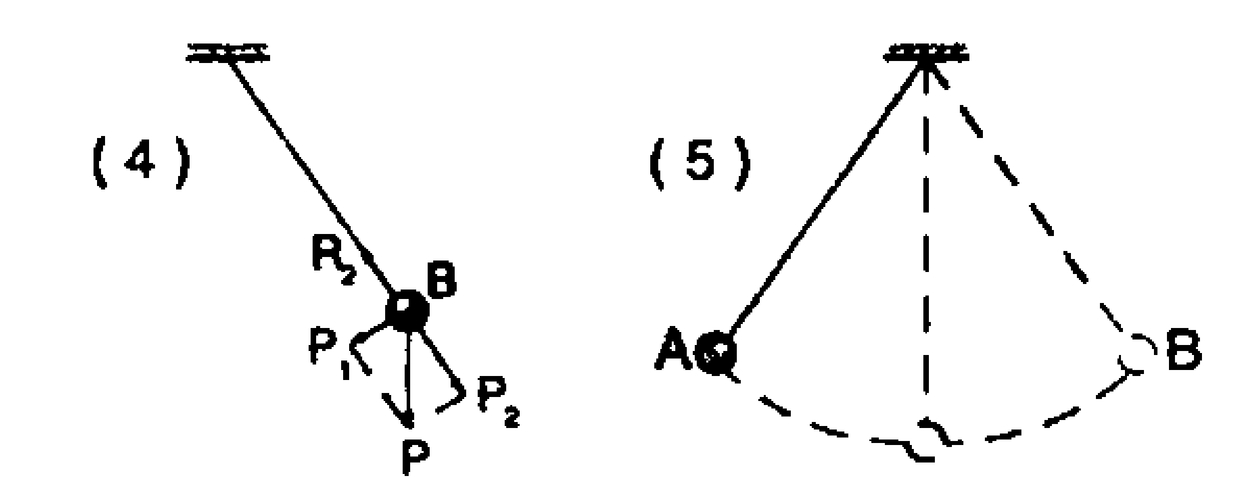
3. De la posición extrema "A" se suelta. La componente "P_1" del peso le da el movimiento uniformemente acelerado, hasta "O", posición inicial (vertical), ahora posición o instante de mayor velocidad.
   A partir de este punto "O", al cual lo pasa por inercia, empieza el movimiento desacelerado, porque la componente "P_1" aparece y cambia el sentido del movimiento.

4. La componente "P_1" va aumentando, por consiguiente va frenando al péndulo, hasta que consigue detenerlo en el punto "B".

http://librosysolucionarios.net

5. El punto "B" empieza a regresar por la presencia de la componente "P_1" y así se repite dando origen al movimiento pendular.





LEYES DEL PÉNDULO

Primera Ley:

"El período "T" de un péndulo es independiente de su oscilación 2AB".

Sean dos péndulos de la misma masa "m" y la misma longitud "L". Se ponen en posiciones extremas distintas y se sueltan, se mide el tiempo que demoran 10 oscilaciones, y se dividen entre 10, ese tiempo será el valor del período "T"; ese período en ambos casos, comprobados experimentalmente, es el mismo.

Segunda Ley:

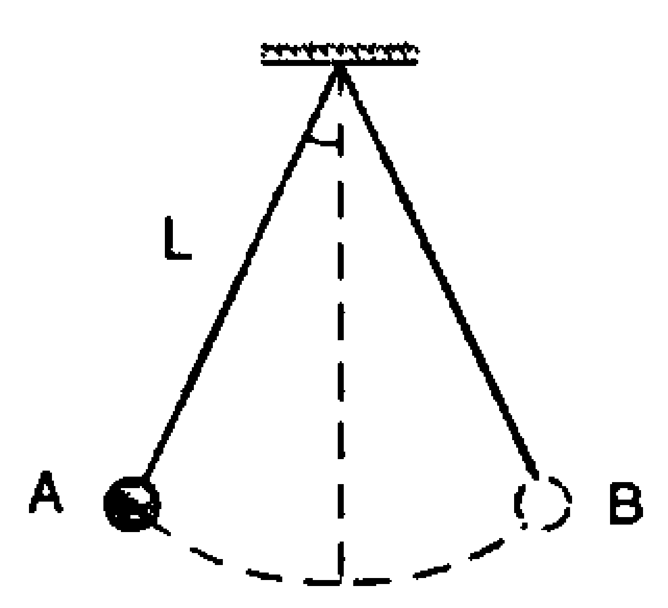
"El período "T" de un péndulo, es independiente de su masa".

Sean dos péndulos de igual longitud "L" pero de masas distintas (M y m), si se llevan a una posición inicial similar y se sueltan, ambos tienen el mismo período "T". Hecho comprobado.

Tercera Ley:

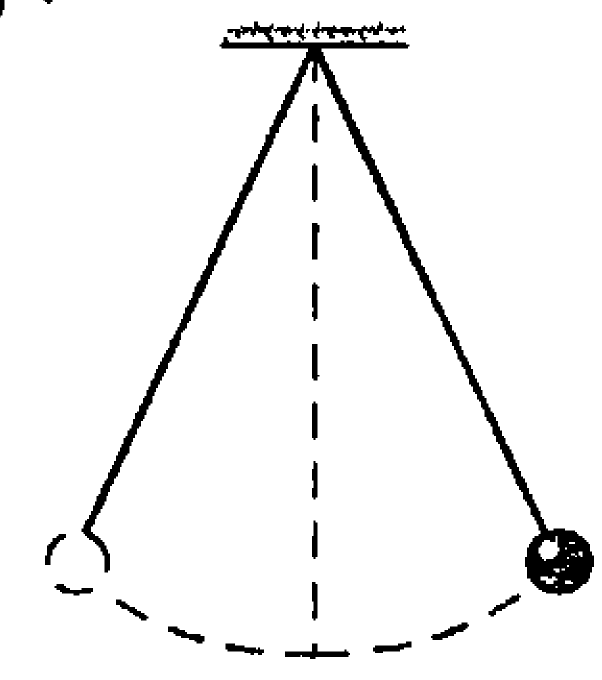
"El período "T", de un péndulo, es directamente proporcional a la raíz cuadrada de su longitud "L"

$$\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} \quad ; \quad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{L}{L_1}}$$



Cuarta Ley:

"El período "T", de un péndulo, es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la gravedad g".



$$\frac{T}{\sqrt{g_1}} = \frac{T_1}{\sqrt{g}} \qquad \frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}$$

FÓRMULA DEL MOVIMIENTO PENDULAR

Con la 3ra y 4ta Leyes se concluye:

$$\frac{T}{\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}} = \frac{T_1}{\frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{g_1}}} = \frac{T_2}{\frac{\sqrt{L_2}}{\sqrt{g_2}}} = \ldots\ldots = k$$

Dividiendo la longitud "L" y controlando el tiempo "T" se ha comprobado ex-perimentalmente que:

$$k = 6{,}2832 = 2\pi$$

Luego:

$$\frac{T}{\frac{\sqrt{L}}{\sqrt{g}}} = 2\pi$$

De donde se tiene la fórmula del péndulo:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un péndulo de longitud "L" tiene un período "T". ¿Cuántas veces se debe alargar "L" para que el período "T_1" sea el triple de "T"?

RESOLUCIÓN : $\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}}$

Se pide $L_1 = ?$ cuando $T_1 = 3T$

Sustituyendo: $\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{3T}{\sqrt{L_1}}$

Simplificando y elevando al cuadrado:

$$\frac{1}{L} = \frac{9}{L_1}$$

De donde: $L_1 = 9L$

Rpta.: Se debe alargar 8 veces mas.

PROBLEMA 2. La gravedad en la ciudad de Tacna (18° de Latitud Sur) es aproximadamente 9,799 m/s². Un reloj de péndulo funciona perfectamente en esa ciudad. En Tumbes (5° de Latitud Sur) la aceleración de la gravedad es aproximadamente de 9,785 m/s². ¿Cuánto se atrasará el reloj en1 día funcionando en la ciudad de Tumbes, si el péndulo en Tacna tiene un período de 1,5 segundos?

RESOLUCIÓN :

$$g = 9{,}799\ \frac{m}{s^2} \quad , \quad g_1 = 9{,}785\ \frac{m}{s^2}$$

$$T = 1{,}5\ s \quad ; \quad T_1 = ?$$

Se sabe que: $\frac{T}{\sqrt{g_1}} = \frac{T_1}{\sqrt{g}}$

Si T en Tacna y T_1 en Tumbes, y : g en Tacna y g_1 en Tumbes:

$$T_1 = T \times \frac{\sqrt{g}}{\sqrt{g_1}} = 1{,}5\ s \times \sqrt{\frac{9{,}799\ m/s}{9{,}785\ m/s}}$$

$$T_1 = 1{,}5\ s \times 1{,}000\,715$$

$$T_1 = 1{,}501\,072\,5\ s$$

La diferencia entre T_1 y T es el atraso del reloj en cada segundo y medio.

$$\Delta L = T_1 - T = 0{,}001\,072\,5\ s$$

Luego:

En 1,5 s se atrasa: 0,001 072 5 s

En 86 400 s (un día) se atrasará: x

$$x = \frac{0{,}001\,072\,5\ s \times 86\,400\ s}{1{,}5\ s}$$

De donde: $x = 61{,}776\ s$ o sea:

Rpta.: $x = 1$ min $1{,}776$ s por día.

PROBLEMA 3. ¿Cuánto tendría que alargarse el péndulo del problema anterior para compensar el atraso?

RESOLUCIÓN :

$$\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} \quad ; \quad \frac{T^2}{L} = \frac{T_1^2}{L^2}$$

De donde:

$$L_1 = L\frac{T_1^2}{T^2} = L \cdot \frac{(1{,}000\,715\ T)^2}{T^2}$$

$$L_1 = 1{,}001\,431\ L$$

De manera que si L en Tacna es 1 m, en Tumbes debe ser $L_1 = 1{,}001\,431$ m

Rpta.: $\Delta L = 0{,}001\,431$ m

PROBLEMA 4. Calcular el período de un péndulo de 2 pies de longitud (1 pie = 30,48 cm).

RESOLUCIÓN : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

http://librosysolucionarios.net

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{2 \times 30{,}48 \text{ cm}}{9{,}80 \times 100 \text{ cm/s}^2}}$$

Rpta.: $T = 1{,}567 \text{ s}$

PROBLEMA 5. Calcular la longitud de un péndulo para que el periodo dure 1 s

RESOLUCIÓN : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

de donde: $L = \frac{T^2 g}{4\pi^2} = \frac{(1 \text{ s})^2 \times 9{,}8 \text{ m/s}^2}{4 \times 9{,}869\,599}$

$$L = 0{,}248 \text{ m}$$

NOTA: La aplicación científica más impoıtante del péndulo es el cálculo de la aceleración de la gravedad.

PROBLEMA 5. Calcular la gravedad del lugar donde un péndulo de 62,5 cm de longitud tiene un período de 1,587 s

RESOLUCIÓN : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$g = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 L = \left(\frac{2\pi}{1{,}587 \text{ s}}\right)^2 \times 62{,}5 \text{ cm}$$

Rpta.: $g = 9{,}797 \text{ m/s}^2$

PROBLEMA 7. Un péndulo de reloj que señala el tiempo exacto en un lugar en que $g = 980$ cm/s^2 se retrasa 10 s por día en un punto situado en Ticlio. Calcular la gravedad en Ticlio.

RESOLUCIÓN : $g = 980 \text{ cm/s}^2$

$\Delta t = 10 \text{ s}$ $\quad g_1 = ?$

Sea "T" el período del péndulo donde la gravedad es g, luego:

En 86 400 s se atrasa: $\rightarrow$ 10 s

En T se atrasará: $\rightarrow$ x

$$x = \frac{T}{8\,640}$$

Si se llama T_1 al período de e Ticlio, su valor será:

$$T_1 = T + x$$

es decir: $T_1 = T + \frac{T}{8\,640} = \frac{8\,641}{8\,640}T$

Por otro lado:

$$\frac{T}{\sqrt{g_1}} = \frac{T_1}{\sqrt{g}} \quad ; \quad \frac{T^2}{g_1} = \frac{T_1^2}{g}$$

$$g_1 = \frac{g\,T^2}{T_1^2} = \frac{980 \text{ cm/s}^2 \times T^2}{\left(\frac{8\,641}{8\,640}T\right)^2}$$

Rpta.: $g_1 = 979{,}78 \text{ cm/s}^2$

PROBLEMA 8. Se tiene un péndulo cuyo período es 1,8 s. ¿Cuál será el período de otro péndulo cuya longitud es el triple del anterior?

RESOLUCIÓN : $T = 18 \text{ s}$

$L_1 = 3L$ $\quad T_1 = ?$

Sabemos que: $\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}}$

de donde: $T_1 = T\frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L}}$

Pero: $L_1 = 3L$

Reemplazando: $T_1 = T\frac{\sqrt{3L}}{\sqrt{L}}$

$$T_1 = T\sqrt{3} = 1{,}8 \times 1{,}732 \text{ s}$$

Rpta.: $T_1 = 3{,}12 \text{ s}$

PROBLEMA 9. Calcular la longitud del péndulo de un reloj que

http://librosysolucionarios.net

"bate segundos" (un péndulo que "bate segundos" es aquel cuyo me-dio período es de 1 s, lo que quiere de-cir que su período T = 2 s).

RESOLUCIÓN : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

elevando al cuadrado: $T^2 = 4\pi^2\frac{L}{g}$

de donde: $L = \frac{gT^2}{4\pi^2} = \frac{9{,}8\,\frac{m}{s^2}\times(2\,s)^2}{4\pi^2}$

Rpta.: $L = 0{,}992\,9$ m

PROBLEMA 10. La frecuencia de dos péndulos es de 120 y 180 oscilaciones por minuto. Calcular:

a) La relación en la que están sus longitudes.
b) Si se sueltan al mismo tiempo desde una posición extrema, al cabo de qué tiempo tomarán nuevamente la misma posición juntos.

RESOLUCIÓN :

$f_1 = 120$ oscilaciones por min

$f_2 = 180$ oscilaciones por min

a) Sabiendo que: $\frac{T_1}{\sqrt{L_1}} = \frac{T_2}{\sqrt{L_2}}$

pero: $T_1 = \frac{1}{f_1}$; $T_2 = \frac{1}{f_2}$

luego: $\frac{\frac{1}{f_1}}{\sqrt{L_1}} = \frac{\frac{1}{f_2}}{\sqrt{L_2}}$; $\frac{f_2}{f_1} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$

sustituyendo valores: $\frac{180}{120} = \frac{\sqrt{L_1}}{\sqrt{L_2}}$

elevando al cuadrado y simplificando:

Rpta.: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{9}{4}$

b) El primero da una oscilación de 1/120 minutos. El segundo da una oscilación de 1/180 minutos.

El M.C.M. de estos dos números:

$$\frac{1}{120} \quad y \quad \frac{1}{180}$$

es $\frac{1}{60}$ min ó 1 s

Rpta.: Se encuentran cada segundo

PROBLEMA 11. Calcular la longitud que debe tener un péndulo para que su frecuencia sea de 150 oscilaciones por minuto.

RESOLUCIÓN : $f = 150\frac{osc}{min}$

$L = ?$

Sabiendo: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

pero: $T = \frac{1}{f}$, luego:

$$\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

de donde, despejando L después de elevar al cuadrado:

$$L = \frac{g}{4\pi^2 f^2} \qquad (I)$$

Cálculo de la frecuencia en oscilaciones por segundo:

$$f = 150\,\frac{osc.}{min} = \frac{150}{60}\cdot\frac{osc.}{s}$$

$$f = 2{,}5\,\frac{osc.}{s}$$

sustituyendo valores en (I) :

$$L = \frac{9{,}8\,m/s^2}{4\pi^2\times(2{,}5\,osc/s)^2}$$

Rpta.: $L = 0{,}040$ m

PROBLEMA 12. La frecuencia de un péndulo es de 180 oscilaciones por minuto. ¿Cuánto debe alargarse el

http://librosysolucionarios.net

péndulo para que la frecuencia se reduzca a la tercera parte?

RESOLUCIÓN :

f_1 = 180 osc. por min = 3 osc. por s

f_2 = 60 osc. por min = 1 osc. por s

Recordando que: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

pero: $T = \frac{1}{f}$

luego: $\frac{1}{f} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\therefore \quad f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{L}{g}}$$

elevando al cuadrado y despejando:

$$L = \frac{g}{4\pi^2 f^2} \qquad (I)$$

Esta expresión permite calcular la longitud del péndulo según el valor de la frecuencia. Así, cuando la frecuencia es de 3 osc./s :

$$L_1 = \frac{9{,}8\ m/s^2}{4\pi^2\ (3\ osc/s)^2}$$

$$L_1 = 0{,}027\,6\ m \qquad (II)$$

Cuando la frecuencia se reduce a la tercera parte, es decir, f = 1, la longitud "L_1" aumenta en una cantidad "x" y su valor será:

$$L_1 + x = 0{,}248\ m \qquad (III)$$

Restando (III) - (II) :

$$x = 0{,}248\ m - 0{,}027\,6\ m$$

Rpta.: $x = 0{,}220\,4\ m$

PROBLEMA 13. Si la longitud de un péndulo simple aumentase en 1 m, su período aumentaría en 2/5 s. ¿Cuál es la longitud del péndulo? (Tómese $g = \pi^2\ m/s^2$).

RESOLUCIÓN : Inicialmente:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (1)$$

Por dato, T y L aumentan:

$$\therefore \quad T + \frac{2}{5} = 2\pi\sqrt{\frac{L+1}{\pi^2}} \qquad (2)$$

Restando (2) - (1) :

$$\frac{2}{5} = 2\pi\sqrt{\frac{L+1}{\pi^2}} - 2\pi\sqrt{\frac{L}{\pi^2}}$$

$$\sqrt{L} + \frac{1}{5} = \sqrt{L+1}$$

elevando al cuadrado:

$$L + \frac{2}{5}\sqrt{L} + \frac{1}{25} = L + 1$$

$$\sqrt{L} = \frac{12}{5} \Rightarrow L = \frac{144}{25}$$

Rpta.: 5,76 m

PROBLEMA 14. Un péndulo simple de 1 m de longitud hace 100 oscilaciones completas en 204 s. ¿Cuál es la aceleración de la gravedad en ese lugar?

RESOLUCIÓN : $t = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Sustituyendo datos:

$$\frac{204}{100} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{g}}$$

$$1{,}02 = \pi\sqrt{\frac{1}{g}}$$

elevando al cuadrado: $1{,}040\,4 = \pi^2 \times \frac{1}{9}$

de donde: Rpta.: $g = 9{,}486\,3\ \frac{m}{s^2}$

PROBLEMA 15. Un péndulo de 3 m de largo ejecuta 150 osc/min. Calcular la longitud de otro péndulo que en el mismo lugar ejecuta 120 osc/min.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : $L = 3\,m$

$L_1 = ?$ $f = 150\,osc/min$

$f_1 = 120\,osc/min$

$$\frac{T}{\sqrt{L}} = \frac{T_1}{\sqrt{L_1}} \quad ; \quad \frac{T^2}{L} = \frac{T_1^2}{L_1}$$

$$L_1 = L\frac{T_1^2}{T^2} = 3\,m\,\frac{\left(\frac{1}{120}\right)^2}{\left(\frac{1}{150}\right)^2}$$

Rpta.: $L_1 = 4{,}69\,m$

PROBLEMA 16. En el interior de un helicóptero que sube con una aceleración de 2 m/s^2 hay un péndulo de 50 cm de longitud. Calcular el período del péndulo en estas condiciones ($g = 10\,m/s^2$).

RESOLUCIÓN : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}}$ (I)

Pero por la 2da. Ley de Newton:

$$g_1 = g + a$$

Luego: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}50\,m}{10\,m/s^2 + 2\,m/s^2}}$$

Rpta.: $T = 1{,}28\,s$

PROBLEMA 17. ¿En cuánto debe aumentar la longitud de un péndulo de 1 m para aumentar su período en 2 s? ($g = \pi^2\,m/s^2$).

RESOLUCIÓN :

I) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Para: $L = 1\,m$ y $g = \pi^2\,m/s^2$

$$T = 2\,s$$

II) $T' = T + 2 = 4\,s$

$T' = 2\pi\sqrt{\frac{L'}{g}}$ Pero: $(L' = x + 1)$

Reemplazando datos:

$$4 = 2\pi\sqrt{\frac{x+1}{\pi^2}} \Rightarrow 2 = \sqrt{x+1}$$

elevando al cuadrado:

$4 = x + 1$ de donde:

Rpta.: $x = 3\,m$

PROBLEMA 18. Se tiene dos péndulos idénticos "P" y "Q"; "P" se encuentra en el polo y "Q" en el ecuador. ¿Qué se puede afirmar con respecto a los períodos?

RESOLUCIÓN :

Recordando que: $g_{polo} > g_{ecuador}$

Ahora: $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

Como: $g_{polo} > g_{ecuador}$;

Luego, el resultado dará que:

$$T_{ecuador} > T_{polo}$$

o sea el período de "Q" es mayor que el de "P".

PROBLEMA 19. ¿Cuánto debe variarse la longitud de un péndulo para que su período se haga 20% menor?

RESOLUCIÓN :

I) Inicialmente, se tiene:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L_i}{g}} \quad (1)$$

II) Para un 20% menor:

$$0{,}8\,T = 2\pi\sqrt{\frac{L_f}{g}} \quad (2)$$

Elevando al cuadrado (1) y (2) y dividiendo ambas expresiones

http://librosysolucionarios.net

$$\frac{T^2}{0{,}64\,T^2} = \frac{\dfrac{4\pi^2 L_i}{g}}{\dfrac{4\pi^2 L_f}{g}}$$

$$\therefore \qquad L_f = 0{,}64\,L_i$$

$$\Delta L = L_i - L_f = L_i - 0{,}64\,L_i$$

$$\Delta L = 0{,}36\,L_i$$

Si se quiere expresar en porcentaje será 36% menor

PROBLEMA 20. ¿En cuánto deberá ser aumentada la longitud de un péndulo para que al ser llevado a un planeta donde la aceleración de la gravedad es 4 veces la de la Tierra, mantenga el mismo período que en la Tierra?

RESOLUCIÓN :

I) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ (Tierra) (a)

II) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L_1}{4g}}$ (Planeta) (b)

Igualando (a) y (b): $2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} = \frac{1}{2}2\pi\sqrt{\frac{L_1}{g}}$

$$\sqrt{L} = \frac{1}{2}\sqrt{L_1}$$

Elevando al cuadrado:

$$L = \frac{1}{4}L_1 \quad \Rightarrow \quad L_1 = 4L$$

como: $L_1 = 4L$

La longitud inicial será aumentada en 3L. ($L_1 = L + 3L$)

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿En qué relación están las longitudes de dos péndulos si en un minuto el primero realiza $f_1 = 144$ osc/s y el segundo $f_2 = 180$ osc/s?

Rpta.: $\frac{L_1}{L_2} = \frac{25}{16}$

2. El período de un péndulo es 3 segundos ¿Cuál será su período si su longitud aumenta en un 60%?

Rpta.: $T = 3{,}79$ s

3. Un péndulo da 120 osc/s ¿Cuántas oscilaciones dará si su longitud se hace 4 veces mayor?

Rpta.: 60 osc/s

4. La longitud de un péndulo simple es de 2,8 m y ejecuta 30 oscilaciones en 80 s. Calcular el valor de la aceleración de la gravedad.

Rpta.: $g = 15{,}54$ m/s²

5. Un cuerpo en la Luna pesa 1/6 de lo que un péndulo en la Luna si la frecuencia en la Tierra es F.

Rpta.: 0,41 F

6. En el interior de un cohete que sube con una aceleración de 10 m/s² hay un péndulo de 1 m de longitud. Calcular el período del péndulo en este instante y bajo estas circunstancias.

Rpta.: $T = 1{,}4$ s

7. El período de vibración de un péndulo de 80 cm de longitud en un lugar donde "g" es 980 cm/s² es:

Rpta.: 1,79 s

8. El período de un péndulo es de 3 s. ¿Cuál es su período si su longitud disminuye en un 60%?

Rpta.: 1,9 s

9. ¿Cuál es el porcentaje de cambio de longitud de un péndulo a fin de que tenga el

http://librosysolucionarios.net

mismo período cuando se le desplaza de un lugar en el cual $g = 9,8\ m/s^2$ a otro lugar donde $g = 9,81\ m/s^2$?

Rpta.: Disminuye 0,1%

10. Un péndulo simple es desviado de su posición de equilibrio, un ángulo de 5°. Encontrar la velocidad de la esfera del péndulo cuando pasa por la posición de equilibrio, si la frecuencia circular de las oscilaciones es igual a $2\ s^{-1}$.

Rpta.: V = 0,43 m/s

11. El período de un péndulo simple es $\sqrt{10}$ s, si su longitud disminuye en un 10%. Calcular el nuevo período del péndulo.

Rpta.: T = 3 s

12. Un péndulo simple que en la Tierra posee un período de 2 s es llevado a cierto planeta en donde su frecuencia disminuye en 0,10 Hz. Determine la aceleración de la gravedad de dicho planeta. Considere $g = 10\ m/s^2$.

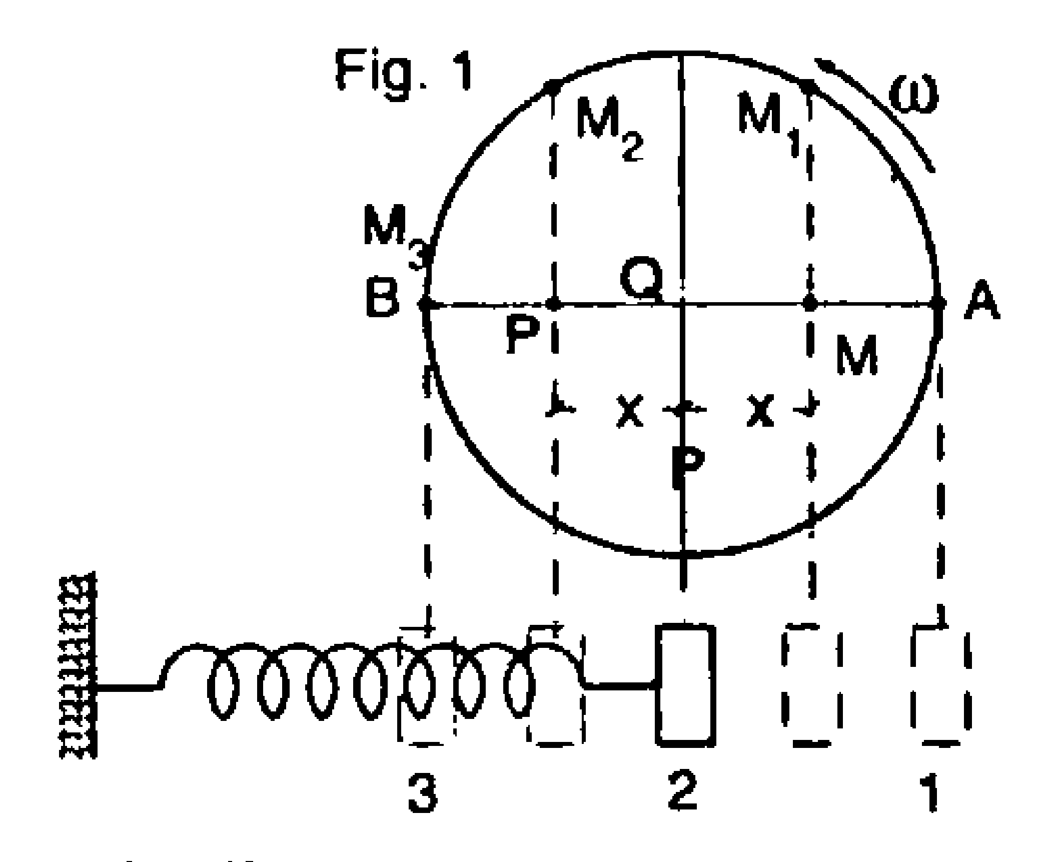
Rpta.: $g_{planeta} = 6,4\ m/s^2$

MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE M.A.S

El "Movimiento Armónico Simple" llamado también "Movimiento Vibratorio Armónico" es un movimiento periódico y lineal, cuya aceleración es directamente proporcional a su desplazamiento, pero en sentido contrario.

$$a = -kx$$

Es similar al movimiento lineal que realiza la proyección "P", sobre el diámetro, de un punto "M" que se desplaza sobre una circunferencia referencial, con movimiento circunferencial uniforme.



EXPLICACIÓN :

Cuando el móvil "M" va desplazándose sobre la circunferencia, su proyección "P" se va desplazando sobre el diámetro con velocidad variada, esta velocidad aumenta desde A hasta Q donde alcanza su mayor velocidad.

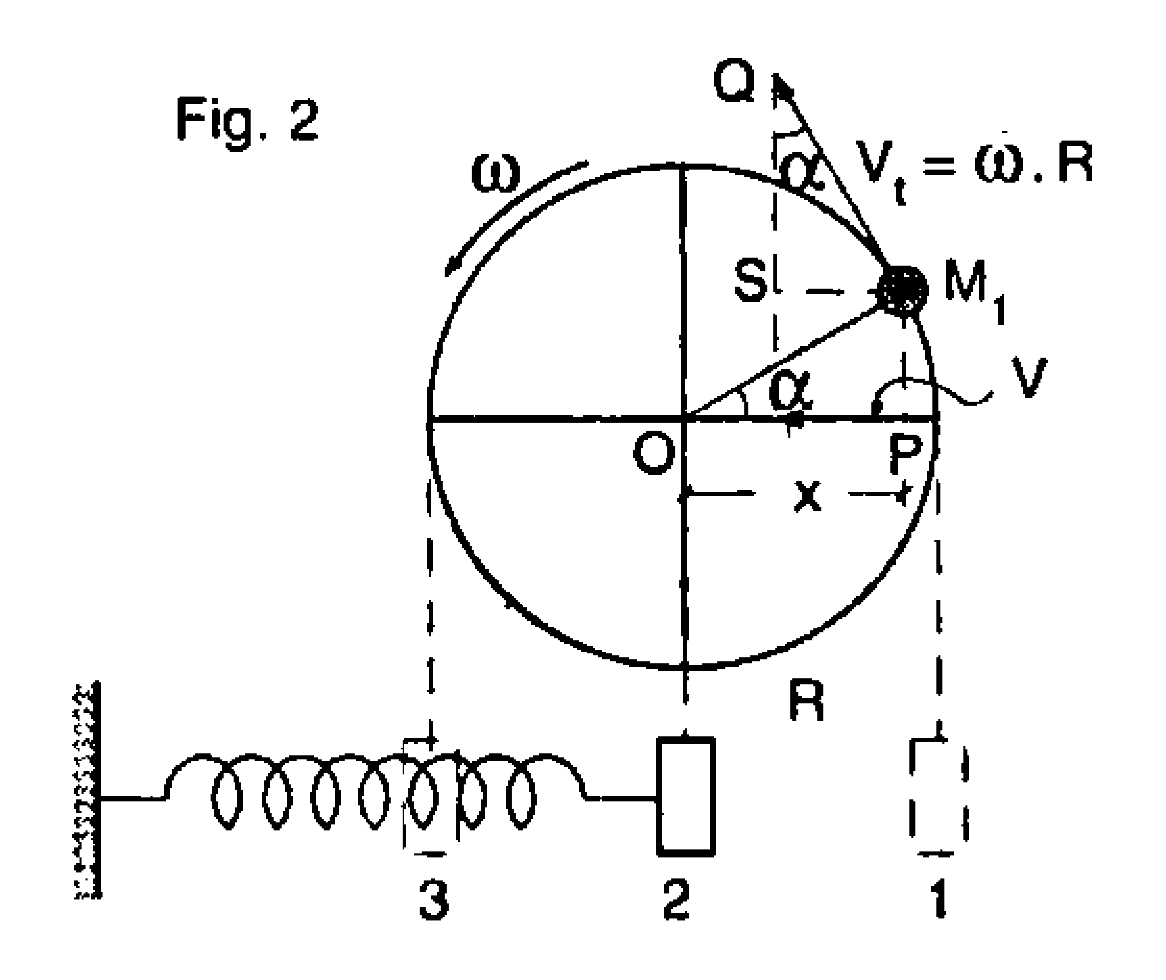
A partir de este punto empieza a disminuir la velocidad del punto "P", de tal manera que cuando el punto móvil llega a "B" su proyección "P" y el punto móvil "M" se confunde, donde la velocidad de "P" es cero.

El punto "M" prosigue su recorrido, la proyección "P", después de llegar a "B", donde su velocidad a cero, empieza el retorno con velocidad creciente hasta Q donde alcanza, su mayor velocidad.

A partir de este punto Q, la velocidad disminuye hasta llegar, de regreso, al punto A donde su velocidad es cero y como el móvil "M" prosigue sobre la circunferencia, su proyección empieza a regresar sobre el diámetro, estableciéndose de este manera el "movimiento armónico simple" o "movimiento vibratorio armónico" del punto "P" sobre el diámetro de la circunferencia (va y viene).

Un resorte estirado, con un cuerpo en uno de sus extremos, al ser soltado realiza un movimiento armónico simple.

ELEMENTOS DEL MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE



http://librosysolucionarios.net

Elongación "x" : Es medida desde el centro Q de la circunferencia (centro de vibración) hasta el punto "P".

Amplitud "R" : Es la elongación máxima (Q A).

Período "T" : Es el tiempo que demora el móvil "P" en realizar una oscilación completa, es decir, una ida y vuelta (AB + BA = 4R); en general el período se determina mediante la siguiente ecuación:

$$T = \frac{\text{tiempo transcurrido}}{\text{número de vibraciones}}$$

Frecuencia "f" : Es el número de vibraciones por unidad de tiempo. Se mide en ciclos por segundo (c.p.s.) y se denomina "hertz", o en general:

$$f = \frac{\text{número de vibraciones}}{\text{tiempo transcurrido}}$$

ó:

$$f = \frac{1}{T}$$

ECUACIÓN DE LA ELONGACIÓN

Sea α el ángulo desarrollado por el punto móvil "M". En el triángulo OPM:

$$x = OM_1 \cos\alpha$$

pero: $OM_1 = R$; $\alpha = \omega t$

Luego, reemplazando:

$$x = R\cos(\omega . t)$$

pero: $\omega = \frac{2\pi}{T}$, luego:

$$x = R\cos\left(\frac{2\pi . t}{T}\right)$$

como: $\frac{1}{T} = f$, también:

$$x = R\cos(2\pi . f . t)$$

RESORTES

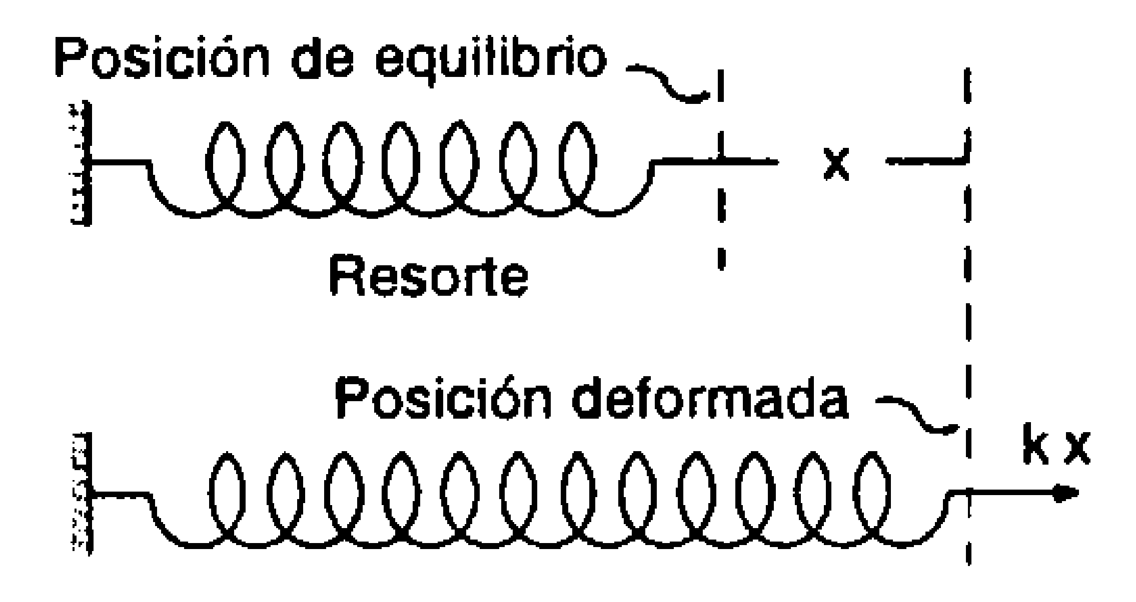
FUERZA DEFORMADORA LEY DE HOOK

"Para cambiar la forma de un cuerpo se requiere la acción de una fuerza que se llama "fuerza deformadora", la cual es proporcional a la deformación, siempre que no se pase del límite de elasticidad del cuerpo deformado". La Ley de Hook se expresa matemáticamente así:

$$F = k . x$$

Donde:

F : Fuerza deformadora, en "N"
k : Constante elástica, propia de cada resorte, en "N/m"
x : Deformación o elongación, en "m"



FUERZA RECUPERADORA

Es una fuerza igual pero de sentido contrario a la fuerza deformadora. Su expresión matemática es:

$$F = -k . x$$

ECUACIÓN DE LA VELOCIDAD "V" DEL M.A.S.

La velocidad del punto "P" del M.A.S. es la proyección de la velocidad tangencial "V_t" sobre el diámetro de la circunferencia de referencia

En el triángulo vectorial SM_1Q: Fig. 2

$$SM_1 = - QM_1 \text{sen}\,\alpha \qquad (A)$$

Donde: $SM_1 = V$ (a)

y: $QM_1 = V_t$ (b)

http://librosysolucionarios.net

El ángulo girado por el punto "P" se puede escribir así:

$$\alpha = \omega t \qquad (c)$$

Luego, reemplazando en (A):

$$\boxed{V = -V_t \operatorname{sen}(\omega . t)} \qquad (I)$$

Esta expresión puede tener otras varias formas, según la sustitución de los valores; pueden sustituirse secuentemente todos estos equivalentes:

$$V_t = \frac{2\pi.R}{T} \quad ó \quad V_t = 2\pi.f.R$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad ó \quad \omega = 2\pi.f$$

Luego: $\boxed{V = -\frac{2\pi.R}{T} \cdot \operatorname{sen}\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right)}$ ó

$$\boxed{V = -2\pi.f.R \operatorname{sen}(2\pi.f.t)} \quad ó$$

$$\boxed{V = -R\,\omega \operatorname{sen}(\omega.t)}$$

También en el triángulo OPM_1:

$$\operatorname{sen}\alpha = \frac{M_1P}{OM_1}$$

Pero: $M_1P = \pm\sqrt{\overline{OM_1}^2 + \overline{OP}^2} = \pm\sqrt{R^2 - x^2}$

Luego: $\operatorname{sen}\alpha = \pm\frac{\sqrt{R^2 - x^2}}{R} \qquad (c)$

Sustituyendo (a), (b) y (c) en (A):

$$\boxed{V = \pm 2\pi.f\sqrt{R^2 - x^2}} \qquad (II)$$

ECUACIÓN DE LA ACELERACIÓN

Analizamos el movimiento circunferen-cial del punto "M":

En el triángulo vectorial SMN:

$$a = -a_C.\cos\alpha \qquad (I)$$

Donde: $a_C = \omega^2.R \qquad (1)$

y: $\alpha = \omega.t = 2\pi.f.t \qquad (2)$

$$\therefore \quad \boxed{a = -\omega^2 R\cos(2\pi.f.t)}$$

como: $R\cos(2\pi f t) = x$

$$\boxed{a = -\omega^2.x}$$

o también: $\boxed{a = -4\pi^2.f^2.x}$

El signo menos se debe a que la aceleración es siempre de sentido opuesto a la dirección del movimiento, por que es proyección de a_c.

VELOCIDAD MÁXIMA Y ACELERACIÓN MÁXIMA

La velocidad es máxima en la posición de equilibrio de tal forma que se cumple la siguiente ecuación:

$$V = \pm 2\pi.f\sqrt{R^2 - x^2}$$

Para $x = 0$: $\boxed{V_{max} = \pm 2\pi.f.R}$

La aceleración máxima se obtiene en los extremos de tal forma que se cumple:

$$a = -\omega^2 x$$

Para $x = \pm R$: $\boxed{a_{max} = \mp\omega^2.R}$

o también: $\boxed{a_{max} = \mp\omega^2.R}$

ECUACIÓN DEL PERÍODO Y LA FRECUENCIA

Por Dinámica:

$$a = \frac{F_R}{m} = \frac{F_{recuperadora}}{m} = \frac{-k.x}{m}$$

$$a = -\frac{k}{m}\cdot x \qquad (1)$$

Por Cinemática $a = -4\pi^2 . f^2 . x$ (2)

Igualando (1) y (2): $4\pi^2 . f^2 = \frac{k}{m}$

de donde: $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Recordando que: $f = \frac{1}{T}$

$\therefore$ $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ambas ecuaciones se utilizan para hallar el período y la frecuencia de vibración de un cuerpo de masa "m" que se mueve bajo la acción de una fuerza recuperadora elástica.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular los elementos de un movimiento armónico simple, sabiendo que la amplitud es 3 m y el período 8 s, al cabo de 6 s.

RESOLUCIÓN: $R = 3\,m$

$T = 8\,s$; $t = 6\,s$

a) Cálculo de la elongación:

$$x = R\cos\frac{2\pi t}{T}$$

sustituyendo valores:

$$x = 3\,m \cdot \cos\frac{2\pi \cdot 6\,s}{8\,s}$$

$$x = 3\,m \cdot \cos\frac{3\pi}{2} = 3m \cdot 0$$

$$x = 0$$

(Está en el centro de vibración)

b) Cálculo, de la velocidad:

$$V = -\frac{2\pi . R}{T}\text{ sen }\frac{2\pi . t}{T}$$

$$V = -\frac{2\pi . 3}{8}\text{ sen }\frac{2\pi . 6}{8}$$

$$V = -\frac{3\pi}{4}\cdot\text{sen }\frac{3\pi}{2}$$

$$V = -\frac{3\pi}{4}\cdot(-1)$$

$\therefore$ $V = +2{,}36\,m/s$

c) Cálculo de la aceleración:

$a = -\omega^2 x$; Pero $x = 0$

$\therefore$ $a = 0$

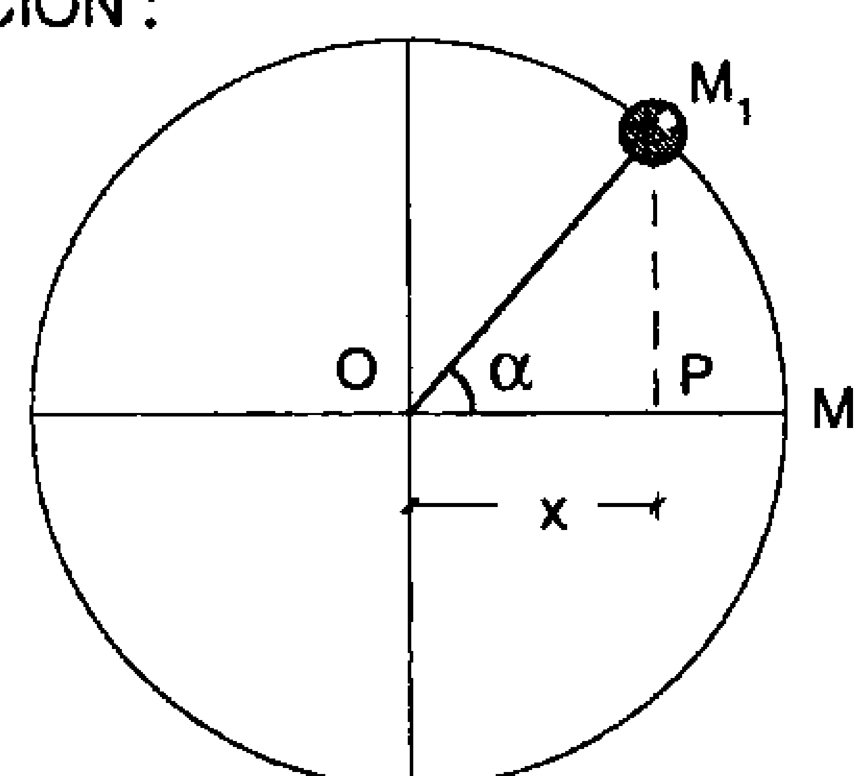
(Punto de cambio del sentido de la aceleración)

Efectivamente, como el móvil se encuentra en el centro de vibración, la aceleración tiene valor cero por que está en el punto justo de su cambio de sentido de (+) a (-).

PROBLEMA 2. Calcular los elementos de un movimiento armónico simple, con los siguientes datos:

$R = 8\,cm$; $t = 2\,s$; $T = 24\,s$

RESOLUCIÓN :



a) Cálculo de la elongación

$$x = R\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$x = 0{,}08\,m \cdot \cos\frac{2\pi \cdot 2\,s}{24\,s}$$

$$x = 0{,}069\,3\,m$$

b) Cálculo de la velocidad:

$$V = -\frac{2\pi R}{T}\text{ sen }\frac{2\pi t}{T}$$

http://librosysolucionarios.net

$$V = -\frac{2\pi \times 0{,}08}{24} \text{ sen } \frac{2\pi \times 2}{24}$$

$$V = 1{,}05 \times 10^{-2} \text{ m/s}$$

c) Cálculo de la aceleración:

$$a = -\omega^2 x$$

pero: $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $x = 0{,}069\,3 \text{ m}$

$$a = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \times 0{,}069\,3 \text{ m}$$

$$a = -\left(\frac{2\pi}{24\text{ s}}\right)^2 \times 0{,}069\,3 \text{ m}$$

$$a = -47 \times 10^{-4} \text{ m/s}^2$$

PROBLEMA 3. La amplitud de un bloque, cuyo peso es de 30 N , si $R = 60$ cm, $T = 4$ s y además $g = \pi^2$ m/s² calcular:

a) La frecuencia.
b) La velocidad máxima.
c) La velocidad cuando la elongación es de 10 cm.
d) El valor máximo de la fuerza restauradora.
e) El valor de la fuerza restauradora para x = 10 cm.
f) Energía cinética máxima.
g) Energía potencial máxima.
h) Energía total en una posición cualquiera.

RESOLUCIÓN :

a) $f = \frac{1}{T} = \frac{1}{4\text{ s}} = 0{,}25 \text{ Hz}$

Hz = hertz

b) $V_{max} = \pm 2\pi f R$

$$V_{max} = \pm 2\pi \times \frac{1}{4} \times 0{,}6$$

$$V_{max} = \pm 0{,}94 \text{ m/s}$$

c) $V = \pm 2\pi f \sqrt{R^2 - x^2}$

$$V = \pm 2\pi \times \frac{1}{4} \times \sqrt{(0{,}6)^2 - (0{,}1)^2}$$

$$V = \pm 0{,}93 \text{ m/s} \quad (\leftrightarrows)$$

Los signos ($\leftrightarrows$), indican que para un valor de x = 10 cm, el bloque pasa dos veces.

d) $F_{max} = m \cdot a_{max}$

$$F_{max} = m(\mp 4\pi^2 f^2 R)$$

$$F_{max} = \mp m\, 4\pi^2 f^2 R$$

$$F_{max} = \mp \frac{W}{g}\, 4\pi^2 f^2 R$$

$$F_{max} = \mp \frac{30}{\pi^2} \cdot 4\pi^2 (0{,}25)^2 \cdot 60 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

Finalmente: $F_{max} = \mp 4{,}5$N

Esto ocurre en las posiciones extremas.

e) Sabemos:

$$F = -kx = -m\,4\pi^2 f^2 x$$

$$F = -\frac{30}{\pi^2} \cdot 4\pi^2 (0{,}25)^2 \cdot 10 \cdot 10^{-2} \text{ N}$$

$$\therefore \quad F = -0{,}75 \text{ N}$$

f) $E_{C\,max} = \frac{1}{2} m V_{max}^2$

$$E_{C\,max} = \frac{1}{2} m(\pm 2\pi f R)^2$$

$$E_{C\,max} = 2 m \pi^2 f^2 R^2$$

$$E_{C\,max} = 2 \cdot \frac{30}{\pi^2} \cdot \pi^2 (0{,}25)^2 (60 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\therefore \quad E_{C\,max} = 1{,}35 \text{ J}$$

g) La energía potencial máxima ocurre en las posiciones extremas, luego de un intercambio de energía con la llamada energía cinética máxima.

$$E_{P\,max} = E_{C\,max}$$

$$\therefore \quad E_{P\,max} = 1{,}35 \text{ J}$$

h) La energía total, se determina, ya sea por la energía cinética máxima, potencial elástica máxima o por la suma de la energía cinética en una posición determinada con la energía potencial elástica en dicha posición.

$$\therefore \quad E_{total} = E_{C\,max} + E_{P\,max}$$

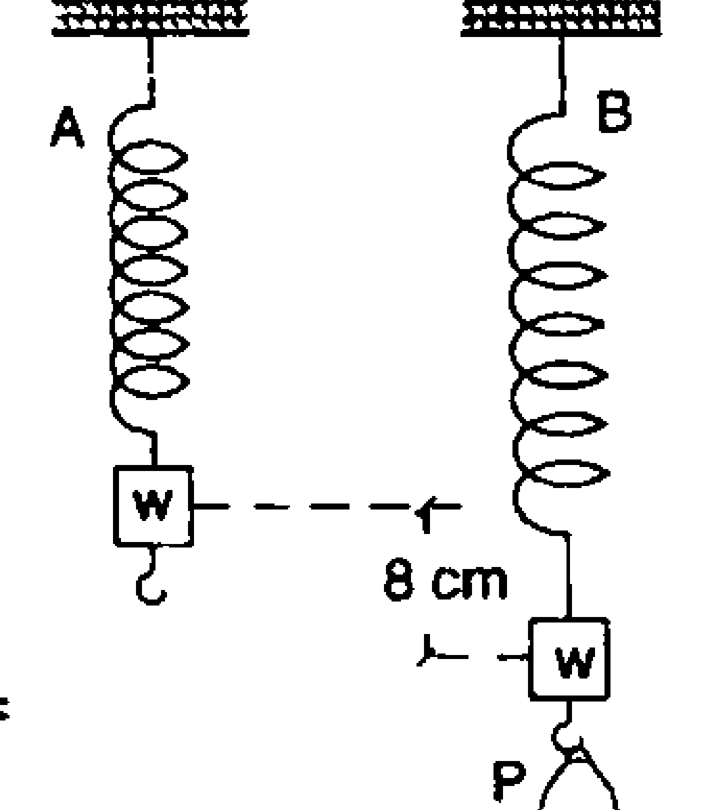
$$E_{total} = 1{,}35 \text{ J}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 4. Un cuerpo de 20 N de peso está suspendido de un resorte. Cuando se le añade un peso de 5 N el cuerpo baja unos 8 cm.

Calcular el período de vibración del cuerpo:

a) Cuando está sin el sobre peso.
b) Con el sobre peso.



RESOLUCIÓN :

w = 20 N R =

P = 5 N

x = 8 cm

a) Fuerza deformadora: $F = kx$

$$\therefore\ k = \frac{F}{x} = \frac{20\ N}{0{,}08\ m} = 250\ N/m$$

Por otro lado:

Fuerza recuperadora:

$$F = -kx \qquad (1)$$

2da. Ley de Newton:

$$F = ma \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$-kx = ma$$

pero: $a = -\omega^2 x$

$$\therefore\ kx = m\omega^2 x$$

pero: $\omega = \frac{2\pi}{T}$

Luego: $k = m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2$

de donde:

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi.\sqrt{\frac{W}{gk}} \quad .\ (II)$$

Fórmula conocida.

Sustituyendo valores:

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{20\ N}{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 250\ \frac{N}{m}}}$$

Rpta.: $T = 0{,}57\ s$

b) Cuando al cuerpo se le añade 5 N, su peso será 25 N; aplicándole (II):

$$T = 2\pi.\sqrt{\frac{25\ N}{9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 250\ \frac{N}{m}}}$$

Rpta.: $T = 0{,}64\ s$

PROBLEMA 5. Un resorte helicoidal horizontal se estira 0,1 m con respecto a su posición de equilibrio al actuar sobre el resorte una fuerza horizontal de 8 N. Ahora, se fija un cuerpo de masa 1,5 kg y se jala 0,14 m a partir de su posición de equilibrio, sobre una superficie sin fricción, luego se suelta el cuerpo, y al soltarlo se inicia el movimiento armónico simple del cuerpo. Calcular:

a) Constante de elasticidad del resorte,
b) Fuerza de recuperación del resorte,
c) Período de oscilación,
d) Amplitud del movimiento,
e) Máxima velocidad del cuerpo en movimiento,

m $F = -kx$ $a = -\omega^2 x$

$V = 0$

x

m $F = 0$

posición de equilibrio $x = 0$

m $a = 0$

$V = \omega R$

x

$a = -\omega^2 x$

$F = kx$

$V = 2\pi f\sqrt{R^2 - x^2}$

f) Máxima aceleración,
g) La energía cinética y potencial cuando está a la mitad de su distancia al centro, después del inicio del movimiento,
h) Energía total del sistema.

RESOLUCIÓN : $x = 0{,}14$ m

$x_1 = 0{,}1$ m $\quad m = 1{,}5$ kg

$F_1 = 8$ N

a) Sabemos que: $F_1 = k\,x_1$

de donde: $k = \dfrac{F_1}{x_1} = \dfrac{8\text{ N}}{0{,}1\text{ m}}$

$$k = 80 \text{ N/m}$$

b) La fuerza de recuperación del resorte tiene un sentido contrario al de la fuerza de deformación.

Cuando tiene fijado el cuerpo:

$$F = -kx$$
$$F = -80 \text{ N/m} \times 0{,}14 \text{ m}$$
$$F = -11{,}2 \text{ N}$$

c) $$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (1)$$

y: $k = \dfrac{F_1}{x_1} = \dfrac{m\,.\,g}{x_1}$

Sustituyendo en (1) :

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{\frac{m.g}{x_1}}} = 2\pi\sqrt{\frac{x_1}{g}}$$

Sustituyendo los datos:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{0{,}1\text{ m}}{9{,}8\text{ m/s}^2}}$$
$$T = 0{,}63 \text{ s}$$

d) Cuando se pregunta la amplitud del movimiento se refiere a la elonga-ción máxima, en el caso específico del problema será 0,14 m que es la longitud que se estira el resorte desde su posición de equilibrio para de aquí soltarlo. Además en esta posición su energía cinética es cero y su energía potencial es máxima.

e) $$V = V_t \operatorname{sen} \omega t \qquad (\text{I})$$

Este valor tomará su valor máximo cuando sen w t sea máximo, es decir cuando:

$$\operatorname{sen} \omega t = 1$$

Pero V_t es constante e igual a wx, es decir, sustituyendo en (I) :

$$V_{max} = \pm\,\omega x\,.\,1 = \frac{2\pi}{T}\cdot x$$

Sustituyendo valores:

$$V_{max} = \pm\frac{2\pi}{T}\cdot 0{,}14\text{m}$$
$$V_{max} = \pm\frac{2\pi}{0{,}63\text{ s}}\cdot 0{,}14\text{m}$$
$$V_{max} = \pm 1{,}4 \text{m/s}$$

f) La aceleración es máxima cuando la elongación e s máxima, es decir cuando el resorte está en su posición de "amplitud" con la carga, o en su posición "máxima de contracción" también con la carga:

$$a_{máx} = \pm\,\omega^2 x \qquad (\text{III})$$

pero $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ y: $x = 0{,}14$ m

$$\therefore \quad a_{max} = \pm\frac{4\pi^2}{(0{,}63\text{ s})^2}\cdot 0{,}14\text{ m}$$
$$a_{max} = \pm 13{,}9 \text{ m/s}^2$$

g) Cálculo de la energía cinética cuando x_2 = 0,07 m:

$$E_c = \frac{1}{2} m V^2 \qquad (\text{A})$$

Pero: $V = \pm V_t \dfrac{\sqrt{R^2 - x_2^2}}{R}$

Además: $V_t = \pm\dfrac{2\pi R}{T}$

Luego: $V = \pm\dfrac{2\pi R}{T}\cdot\dfrac{\sqrt{R^2 - x_2^2}}{R}$

Finalmente:

http://librosysolucionarios.net

$$V = \pm \frac{2\pi\sqrt{R^2 - x_2^2}}{T}$$

Sustituyendo en (A):

$$E_C = \frac{1}{2} m \left[\pm \frac{2\pi\sqrt{R^2 - x_2^2}}{T} \right]^2$$

De donde: $E_C = \frac{2\pi^2 m (R^2 - x_2^2)}{T^2}$

sustituyendo datos:

$$E_C = \frac{2\pi^2 . 1{,}5 \text{ kg} \left[(0{,}14 \text{ m})^2 - (0{,}07 \text{ m})^2 \right]}{(0{,}63 \text{ s})^2}$$

$$E_C = 1{,}1 \frac{\text{kg} . \text{m}^2}{\text{s}^2}$$

$$E_C = 1{,}1 \text{ kg} \cdot \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot \text{m}$$

$$E_C = 1{,}1 \text{ N} . \text{m} = 1{,}1 \text{ J}$$

Cálculo de la energía potencial elástica:

$$E_P = \frac{1}{2} k x^2 \qquad \text{(fórmula)}$$

$$E_P = \frac{1}{2} k \left(\frac{R}{2} \right)^2 \qquad (1)$$

$$E_P = \frac{1}{2} \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot \left(\frac{0{,}14 \text{ m}}{2} \right)^2$$

$$E_P = 0{,}196 \text{ J}$$

h) La energía total es igual a:

$$E_T = \frac{1}{2} k R^2$$

$$E_T = \frac{1}{2} \cdot 80 \frac{\text{N}}{\text{m}} \cdot (0{,}14)^2$$

$$E_T = 0{,}784 \text{ J}$$

PROBLEMA 6. Un bloque suspendido de un resorte vibra con movimiento armónico simple. En el instante en que la elongación del bloque es igual a la mitad de la amplitud, ¿qué fracción de la energía total del sistema es cinética y cuál es potencial es elástica?

RESOLUCIÓN:

I) $E_{total} = \frac{1}{2} k R^2 \qquad (1)$

$E_{total} = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m V^2 \qquad (2)$

Para $x = \frac{R}{2}$; igualando (1) y (2):

$$\frac{1}{2} k R^2 = \frac{1}{2} k \left(\frac{R}{2} \right)^2 + \frac{1}{2} m V^2$$

$$\frac{3}{4} \left(\frac{1}{2} k R^2 \right) = \frac{1}{2} m V^2$$

$$\frac{3}{4} (E_{total}) = E_C$$

$$\therefore \qquad E_C = \frac{3}{4} (E_{total})$$

II) Del resultado anterior se deduce:

$$E_{P_{ELÁSTICA}} = \frac{1}{4} (E_{total})$$

PROBLEMA 7. Un resorte con un peso se alarga 10 cm. Calcular el período de vibración.

RESOLUCIÓN: Recordando que:

$$-k x = F \qquad (a)$$

$$-k x = -m a \quad ; \quad k x = m a_C \frac{x}{R}$$

pero: $a_C = \omega^2 R$

$$\therefore \quad k = m \cdot \frac{\omega^2 R}{R} = m \cdot \frac{4\pi^2}{T^2}$$

de donde: $T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \qquad (I)$

Por (a): $k = \frac{F}{x}$ ó $k = \frac{m g}{x}$

Sustituyendo en (1):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{\frac{m g}{x}}} = 2\pi \sqrt{\frac{x}{g}}$$

http://librosysolucionarios.net

como: $x = 10\text{ cm} = 0{,}1\text{ m}$

Rpta.: $T = 0{,}63\text{ s}$

PROBLEMA 8. Un cuerpo al suspen-derse en un resorte vibra con M.A.S, ¿en qué instante el cuerpo está a la mitad de su amplitud?

RESOLUCIÓN : El problema consiste en calcular el tiempo para

$$x = \frac{R}{2}$$

Recordando: $x = R \text{ sen a}$

pero: $x = \frac{R}{2} \quad \therefore \quad \frac{R}{2} = R \text{ sen } \alpha$

$$\frac{1}{2} = \text{sen } \alpha$$

luego: $\alpha = \frac{\pi}{3}$ (1)

Pero α también es el espacio angular, es decir:

$$\alpha = \omega . t \qquad ó \qquad \alpha = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

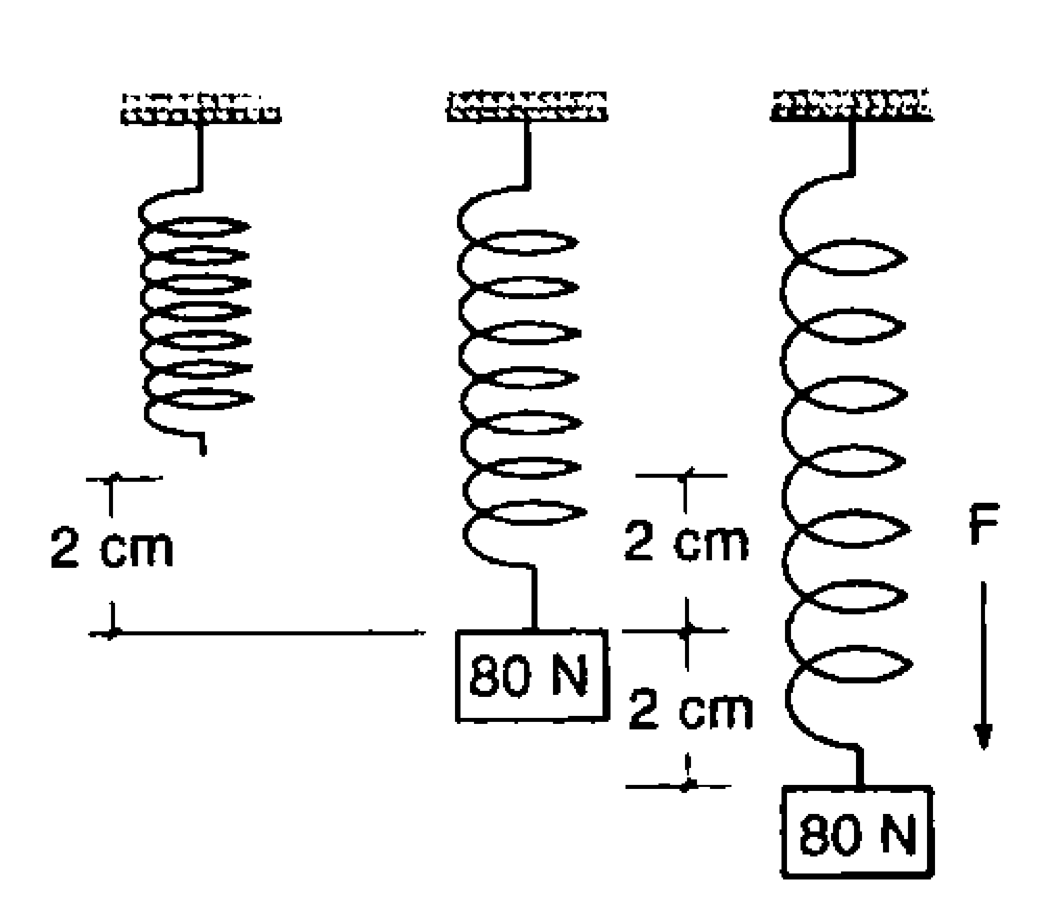
Sustituyendo con (1) :

$$\frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{T} \cdot t$$

Rpta.: $t = \frac{1}{6} T$

PROBLEMA 9. Un resorte se alarga 2 cm al colocarle un peso de 80 N . Se le separa 2 cm de su posición de equilibrio. Calcular su período. (g = 10 m/s²).

RESOLUCIÓN :



Recordando la fórmula:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 2\pi \sqrt{\frac{w}{g . k}} \qquad (1)$$

Recordando que la fuerza deformadora:

$$F = kx \quad \therefore \quad k = \frac{F}{x}$$

Sustituyendo datos:

$$k = \frac{80\text{ N}}{0{,}02\text{ m}} = 4\,000\text{ N/m}$$

Sustituyendo valores en (1) :

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{80\text{ N}}{10\text{ m/s}^2 . 4\,000\text{ N/m}}}$$

Rpta.: $T = 0{,}28\text{ s}$

PROBLEMA 10. Un hombre salta y se cuelga de un resorte con el cual da 60 saltos por minuto. Luego un niño que pesa 44% de lo que pesa el hombre, se coge de sus piernas y oscilan juntos. Calcular la nueva frecuencia de oscilación.

RESOLUCIÓN : Recordando la fórmula de la frecuencia: inicialmente se tiene:

$$f_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (1)$$

Ahora cuando el niño salta:

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m + 0{,}44m}}$$

$$f_2 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{1{,}44m}}$$

$$f_2 = \frac{1}{1{,}2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \right) \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2) :

$$f_2 = \frac{1}{1{,}2} \cdot f_1$$

Reemplazando el valor de f_1

$$f_2 = \frac{1}{1{,}2} \cdot 60\text{ saltos/min}$$

http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $f_2 = 50$ saltos/min

PROBLEMA 11. Un cuerpo cuya ma-sa es de 2,5 kg está animado de un M.A.S. con **3** oscilaciones por segundo. Calcular la aceleración y la fuerza recuperadora, para una aceleración de 5 cm.

RESOLUCIÓN :

$m = 2{,}5\ kg$ a) $F = ?$

$f = 3\ osc/s = 3\ \frac{1}{s}$ b) $a = ?$

a) $F = k\,x$ (1)

Cálculo de k: $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

$$\therefore \quad k = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = 4\pi^2 m f^2$$

sustituyendo datos:

$$k = 4\pi^2 \,.\, 2{,}5\ kg \,.\left(3\ \frac{1}{s}\right)^2$$

$$k = 888{,}26\ kg \cdot \frac{1}{s^2}$$

Sustituyendo valores en (1):

$$k = 888{,}26\ kg \cdot \frac{1}{s^2} \cdot 0{,}05\ m$$

$$k = 4{,}4\ kg \cdot \frac{1}{s^2} \cdot m$$

$$k = 4{,}4 \cdot \frac{N}{\frac{m}{s^2}} \cdot \frac{1}{s^2} \cdot m$$

de donde $F = 44{,}4\ N$

b) Cálculo de "a":

$$a = \frac{F}{m} = \frac{4{,}4\ N}{2{,}5\ kg} = \frac{4{,}4\ \frac{kg}{m/s^2}}{2{,}5\ kg}$$

$$a = 17{,}76\ m/s^2$$

PROBLEMA 12. La relación entre la máxima aceleración y la máxima velocidad de un M.A.S. es 2p. ¿Cuál es su período?

RESOLUCIÓN : $\frac{a_{máx}}{V_{máx}} = 4\pi$ (A)

Ahora: $a = \omega^2 R \cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$ (I)

La relación es máxima cuando:

$$\frac{2\pi t}{T} = k\pi$$

y $\cos k\pi = \pm 1$; en (I)

$$a_{máx} = \mp \omega^2 R$$

$$a_{máx} = \mp \frac{4\pi^2}{T^2} R \qquad (1)$$

Recordando también que:

$$V = V_t \operatorname{sen} \omega t \qquad (II)$$

La velocidad es máxima cuando:

$$\omega t = (2k - 1)\frac{\pi}{2}$$

y: $\operatorname{sen}(2k-1)\frac{\pi}{2} = \pm 1$; en (II)

$$V_{máx} = \pm V_t$$

$$V_{máx} = \pm \frac{2\pi R}{T} \qquad (2)$$

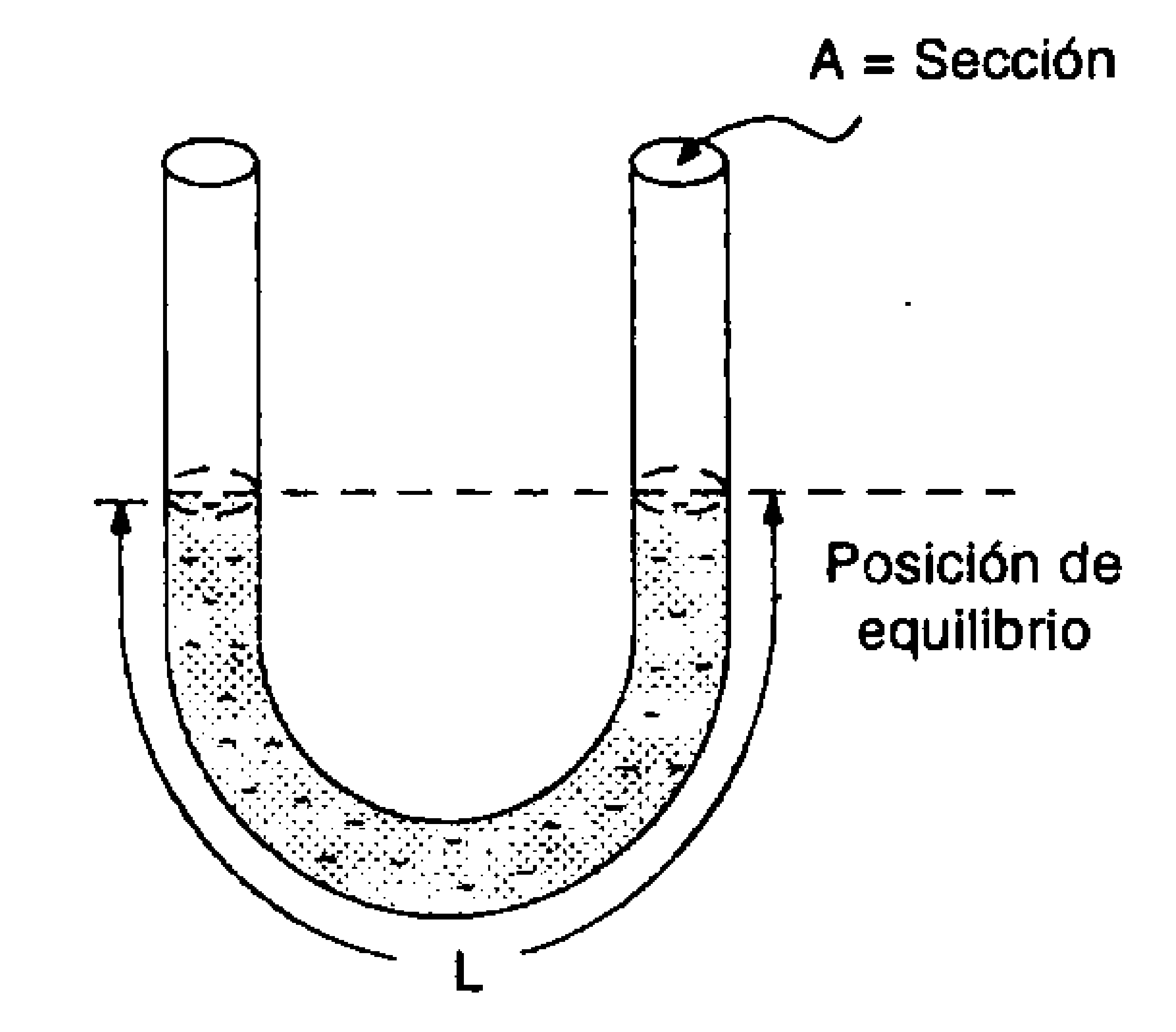
Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$\frac{\pm\frac{4\pi^2}{T^2} R\pi}{\pm\frac{2\pi R}{T}} = 4\pi$$

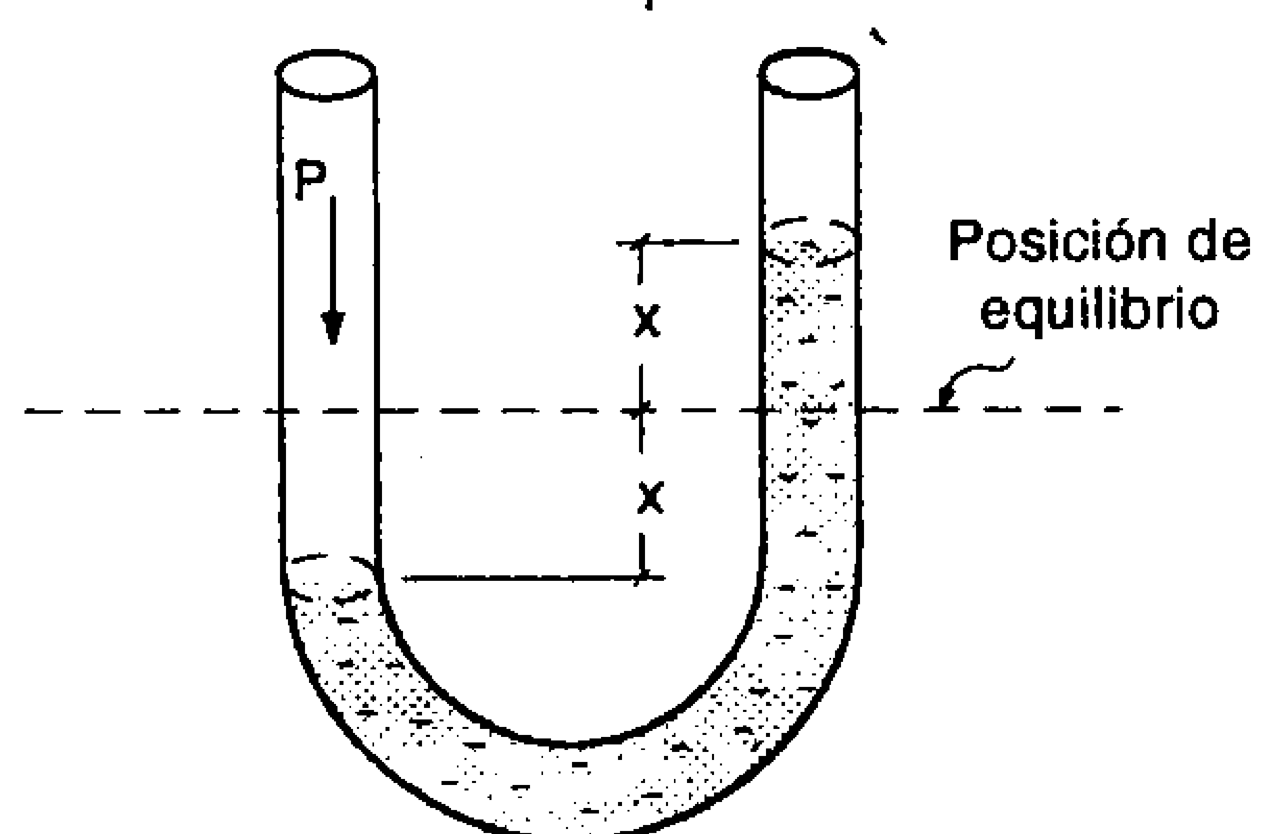
Rpta.: $T = 0{,}5\ s$

PROBLEMA 13. Se emplea un líquido de peso específico "ρ" y longitud total "L", en un tubo en "U", representado en la figura. Un aumento repentino de presión en el lado izquierdo forza al líquido a un movimiento armónico abajo. ¿Cuál será la frecuencia de vibración?

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN : Sea "x" la altura que baja el nivel de la izquierda, por consiguiente "x" será la altura que sube el nivel de la derecha. La fuerza del equilibrio corresponde a la columna de altura "2x", la cual tiende a restaurar el equilibrio.



F (restauradora) = -Peso del líquido de altura 2x (1)

F (restauradora) = m.a (2)

Igualando (1) y (2):

- Peso líquido de altura 2x = m . a

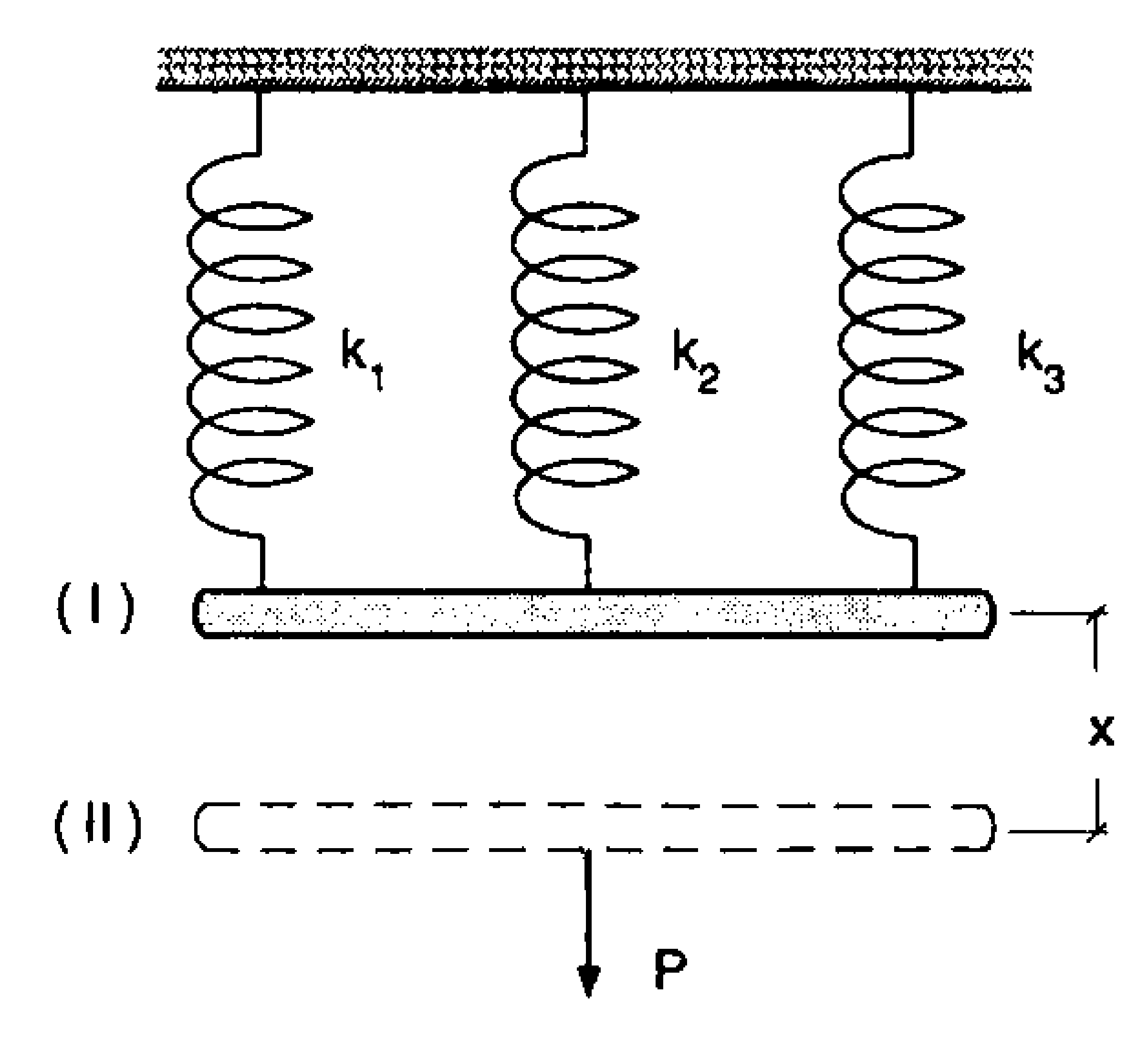
Tomando en cuenta que en este instante la aceleración es máxima:

$$-A\,.\,2x\,.\,\rho = m\,.\,a_{máx}$$

$$-A\,.\,2x\,.\,\rho = \frac{A\,.\,L\,.\,\rho}{g}\,(-4\,\pi^2 f^2 x)$$

De donde: Rpta.: $f = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2R}{L}}$

PROBLEMA 14. Hallar la constante equivalente en el siguiente sistema de resortes mostrado en la figura.



RESOLUCIÓN : Considerando los 3 resortes que se estiran el mismo desplazamiento "x", manifestándose el equilibrio se tiene:

$$P = F_1 + F_2 + F_3$$

$$k_e\,x = k_1 x_1 + k_2 x_2 + k_3 x_3 \qquad (1)$$

Como: $x = x_1 = x_2 = x_3$ (2)

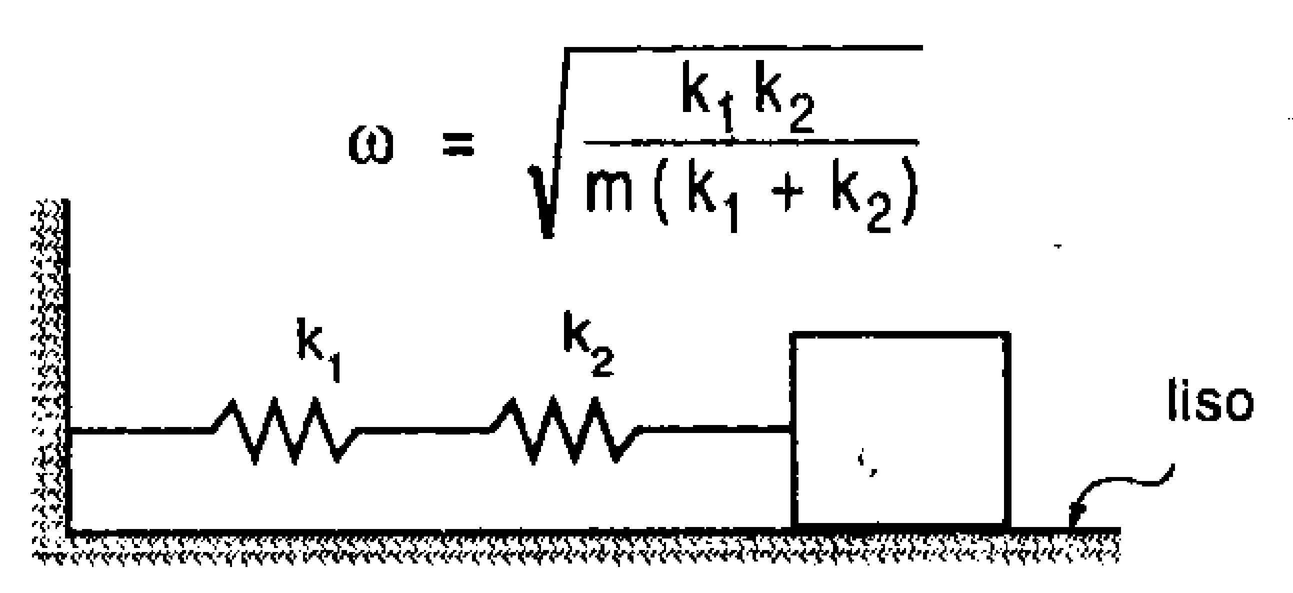
Reemplazando (2) en (1) y simplificando:

Rpta.: $\boxed{k_e = k_1 + k_2 + k_3}$

* Esto se presenta en un **sistema de resortes en paralelo**.
Nótese también que el peso de la barra es "P" y de que en las posiciones (I) y (II), ésta siempre permanece horizontal.

PROBLEMA 15. Demostrar que la frecuencia de vibración (o velocidad angular), en la figura mostrada está dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m\,(k_1 + k_2)}}$$



RESOLUCIÓN : De la figura original se

nota que si "m" se desplaza una distancia "x", el resorte 1 se desplazaría x_1 y el resorte 2 , una distancia x_2, de tal manera que:

I) $$x = x_1 + x_2 \qquad (1)$$

II) Por equilibrio:

$$F = F_1 = F_2 \qquad (2)$$

Como: $F = kx \quad ; \quad x = \frac{F}{k}$

luego se tiene en (1) :

$$\frac{F}{k_e} = \frac{F_1}{k_1} + \frac{F_2}{k_2}$$

y por (2): $$\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}$$

$$\therefore \quad k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2} \qquad (3)$$

Sabiendo que:

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

y además: $w = 2\pi f$ (frecuencia de vibración).

$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 k_2}{m(k_1 + k_2)}}$$

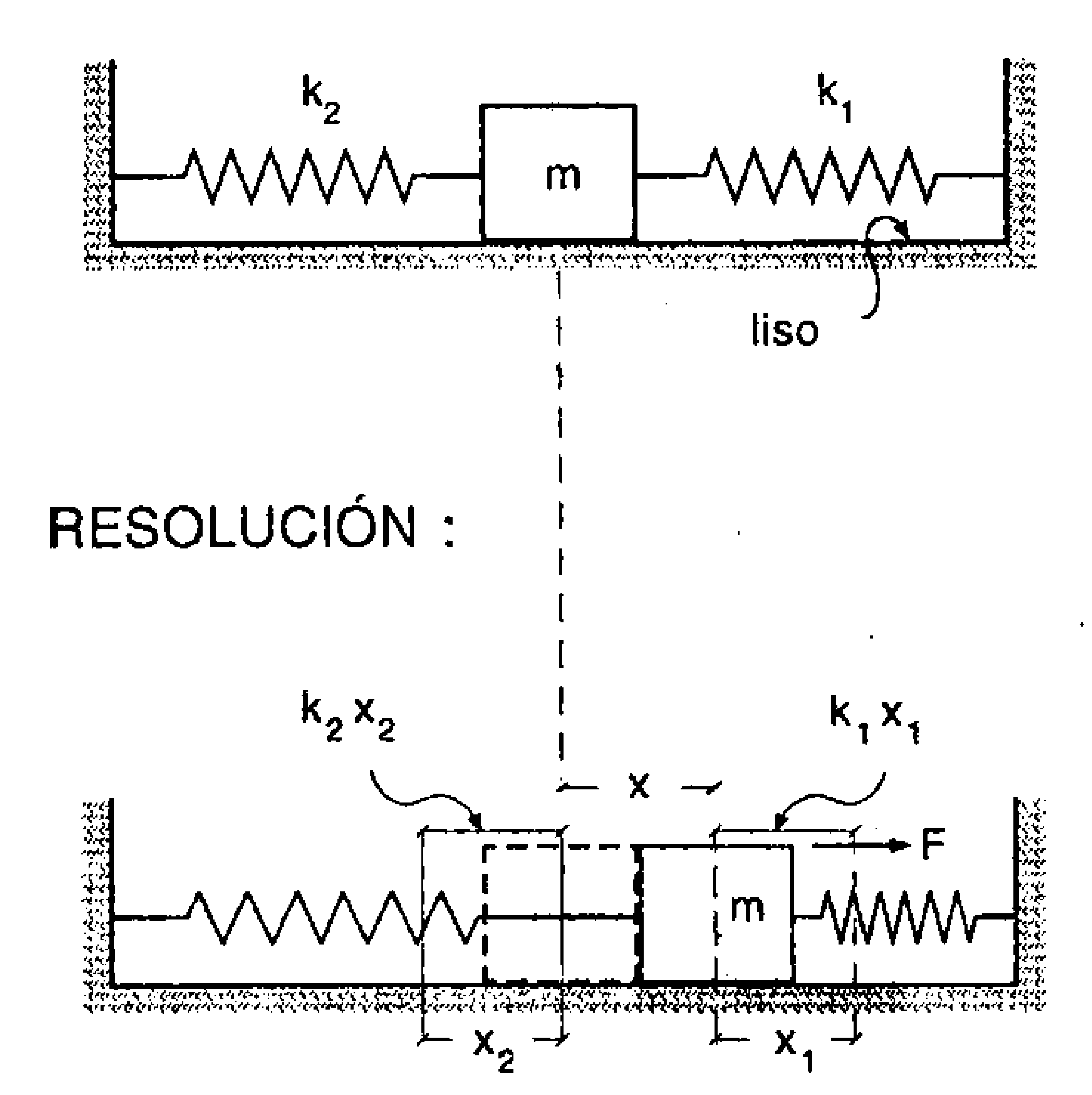
* Este sistema de dos resortes mostrado, donde:

$$\boxed{k_e = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

corresponde a una **asociación en serie**

PROBLEMA 16. Demostrar que la frecuencia de vibración (o velocidad angular), de la masa "m" en la figura mostrada está dada por:

RESOLUCIÓN : $$\omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$$



Cuando "m" se desplaza a la derecha una distancia "x", el resorte 2 se estirará una distancia x_2 y el resorte 1 se comprimirá una distancia x_1, de tal manera que se debe cumplir:

$$x = x_1 = x_2 \qquad (1)$$

Por otra parte, al desplazar "m" hacia la derecha hasta una distancia "x", en ese instante:

$$F = k_e x$$

y por equilibrio: $$F = F_1 + F_2$$

F_1 empuja ; F_2 jala

$$k_e x = k_1 x_1 + k_2 x_2 \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2) :

$$k_e = k_1 + k_2 \qquad (3)$$

se sabe que: $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k_e}{m}}$$

$$2\pi f = \sqrt{\frac{k_e}{m}} \qquad (4)$$

Reemplazando (3) en (4) y considerando que:

$$\omega = 2\pi f \quad \text{(frecuencia angular)}$$

http://librosysolucionarios.net

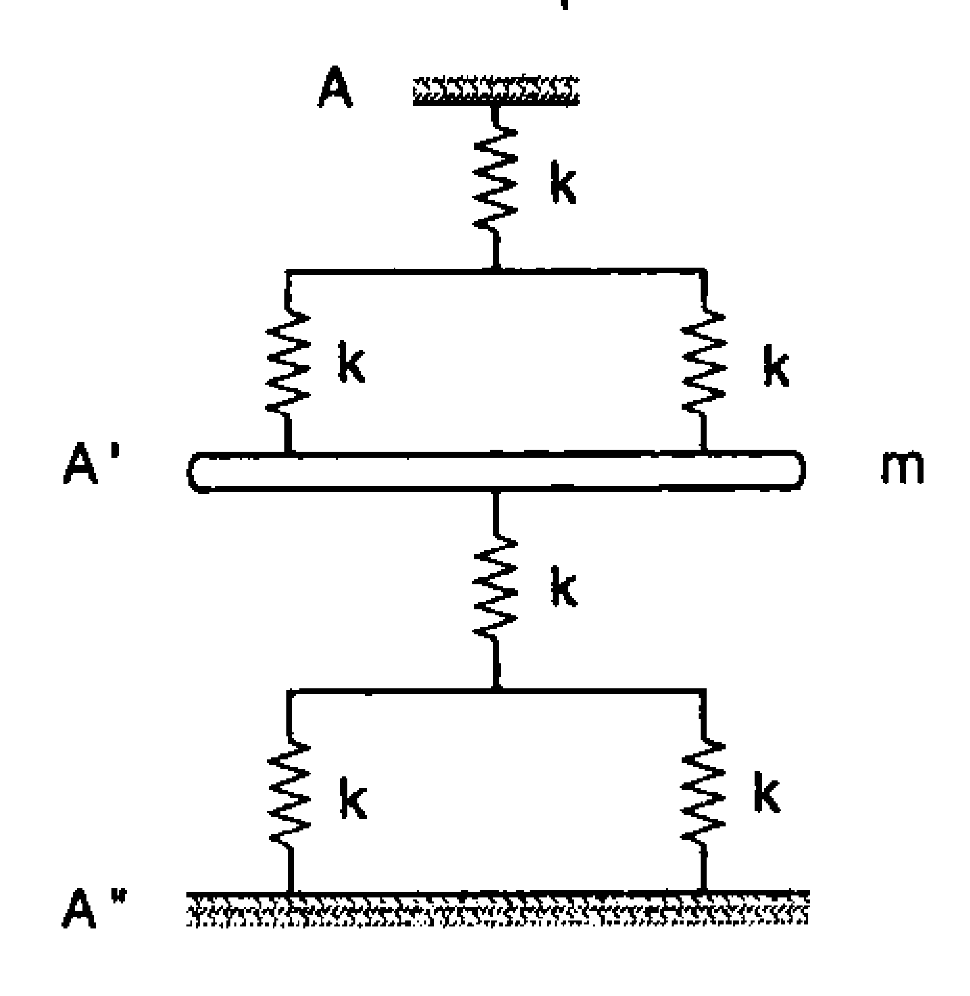
$$\therefore \quad \omega = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}} \qquad \text{l.q.q.d.}$$

* Este sistema de resortes donde:

$$k_e = k_1 + k_2$$

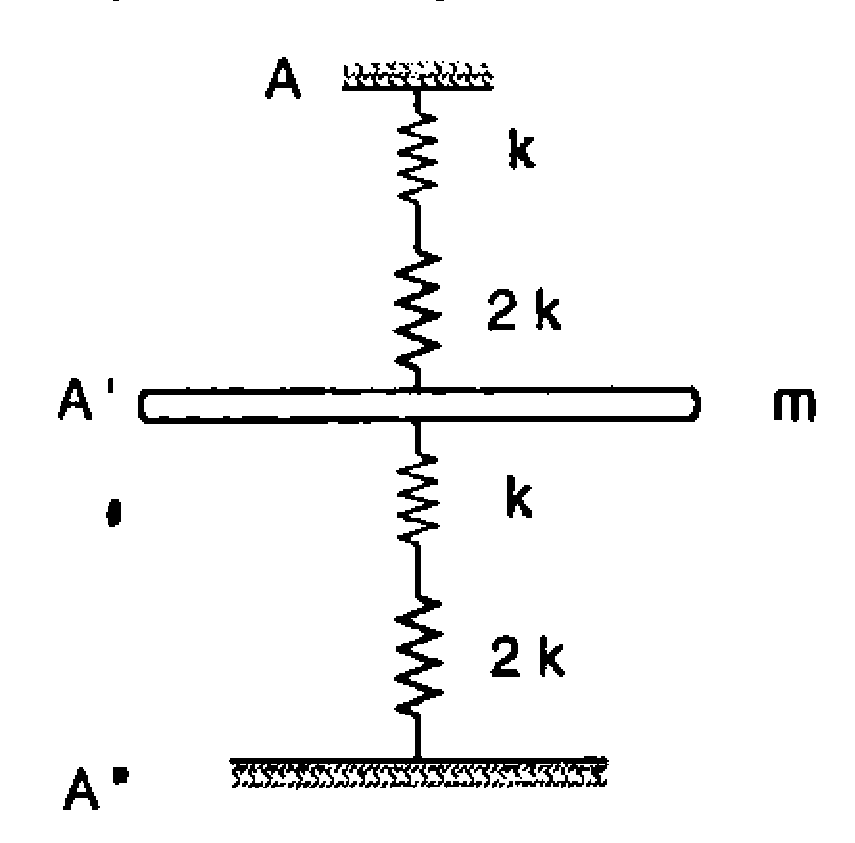
corresponde a una asociación en paralelo, tal como ha sido demostrado.

PROBLEMA 17. En el sistema mostrado hallar la constante equivalente (todos los resortes poseen $k = 2$).



RESOLUCIÓN :

I) Por los problemas precedentes:



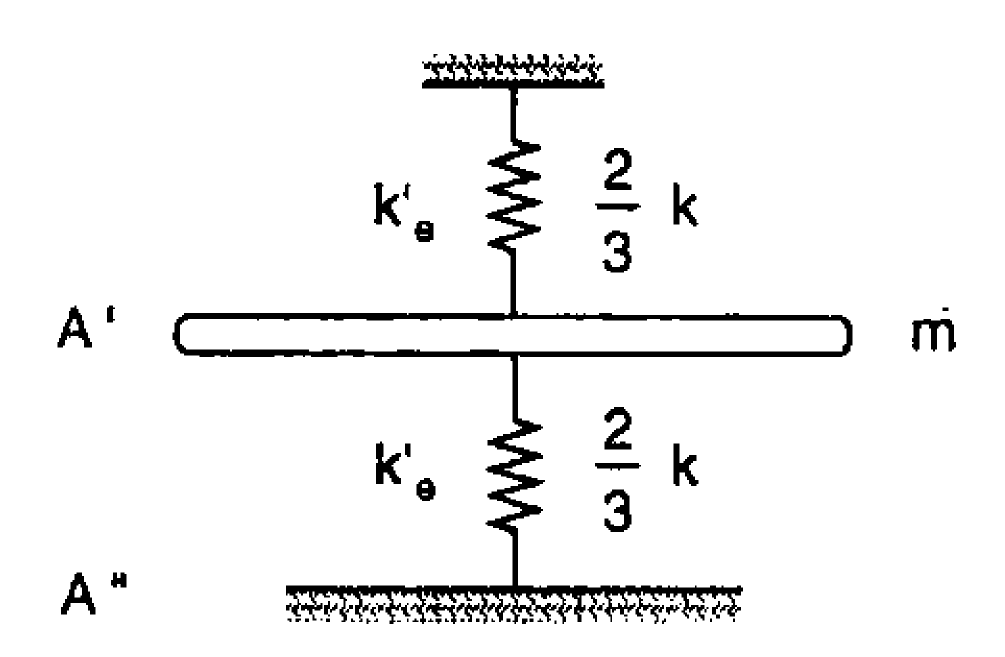
En el tramo A A' ambos se encuentran en serie, lo mismo que el tramo A' A".

$$AA' : \quad \frac{1}{k'_e} = \frac{1}{k} + \frac{1}{2k} = \frac{2+1}{2k}$$

$$\therefore \quad k'_e = \frac{2}{3}k$$

$$A'A" : \quad k'_e = \frac{2}{3}k$$

II) El sistema equivalente será:



Este sistema equivalente se encuentra en serie, luego:

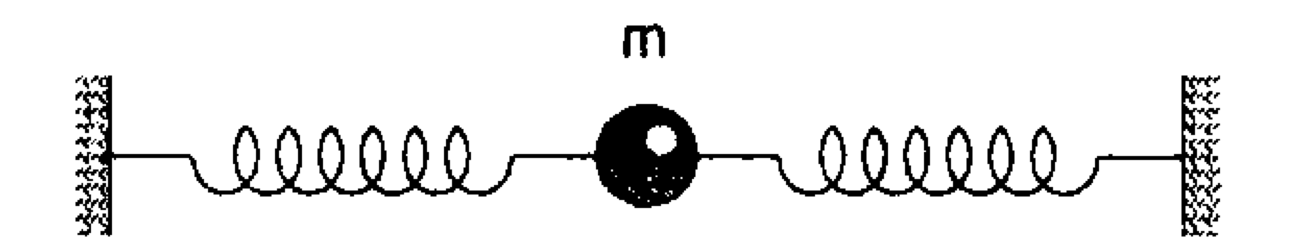
$$k_e = \frac{2}{3}k + \frac{2}{3}k$$

$$k_e = \frac{4}{3}k \quad ; \quad \text{pero } k = 2$$

Reemplazando datos: $k = 2$

$$\therefore \quad k_e = \frac{8}{3}$$

PROBLEMA 18. Una esfera ejecuta un M.A.S. en la forma indicada en la figura. Encontrar la razón entre las velocidades de la esfera en los puntos alejados de la posición de equilibrio: una distancia igual a la mitad, y a la tercera parte de la amplitud, respectivamente.



RESOLUCIÓN :

$$V = \pm 2\pi f \sqrt{R^2 - x^2} \qquad (1)$$

Para $x = \dfrac{R}{2}$:

$$V_1 = \pm 2\pi f \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{4}}$$

$$V_1 = \pm \pi f R \sqrt{3} \qquad (2)$$

Para $x = \dfrac{R}{3}$:

$$V_2 = \pm 2\pi f \sqrt{R^2 - \frac{R^2}{9}}$$

http://librosysolucionarios.net

$$V_2 = \pm\frac{4}{3}\pi f R\sqrt{2} \qquad (3)$$

Dividiendo (2) entre (3):

$$\frac{V_1}{V_2} = \frac{\pm\pi f R\sqrt{3}}{\pm\frac{4}{3}\pi f R\sqrt{2}} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$$\therefore \quad \frac{V_1}{V_2} = \frac{4}{3}\sqrt{\frac{3}{2}}$$

PROBLEMA 19. Cuando la energía cinética de un M.A.S. en un punto que es 4/9 E_T, ¿cuál es la elongación, si la amplitud es 3 cm?

RESOLUCIÓN: Basado en el problema N° 6

$$\frac{1}{2}kR^2 = \frac{1}{2}kx^2 + \frac{1}{2}mV^2 \qquad (1)$$

Por datos: $\frac{1}{2}mV^2 = \frac{4}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}kR^2\right)$

Reemplazando (2) en (1):

$$\frac{5}{9}\cdot\left(\frac{1}{2}kR^2\right) = \frac{1}{2}kx^2$$

$$\frac{5}{9}R^2 = x^2$$

Si $R = 3$: $x^2 = \frac{5}{9}\cdot 9 = 5$

Rpta.: $x = \pm\sqrt{5}\text{ cm} = 0{,}02\text{ m}$

PROBLEMA 20. ¿En un M.A.S. siempre se cumple?

a) Cuando la aceleración es máxima la velocidad lo es.
b) Cuando la velocidad es máxima la aceleración es cero.
c) La aceleración es directamente proporcional y del mismo sentido que la elongación.
d) La energía mecánica total es igual a la energía cinética máxima.

RESOLUCIÓN:

a) Por teoría "a" es máxima en los extremos y mínima en el centro.

La velocidad es máxima en el centro y mínima en los extremos.

$\therefore$ es falso

b) Por lo anterior se deduce que es verdadero.

c) Se sabe que: $a = -4\pi^2 f x$ y se deduce que la aceleración es directamente proporcional a la elon-gación pero de sentido contrario.

$\therefore$ es falso

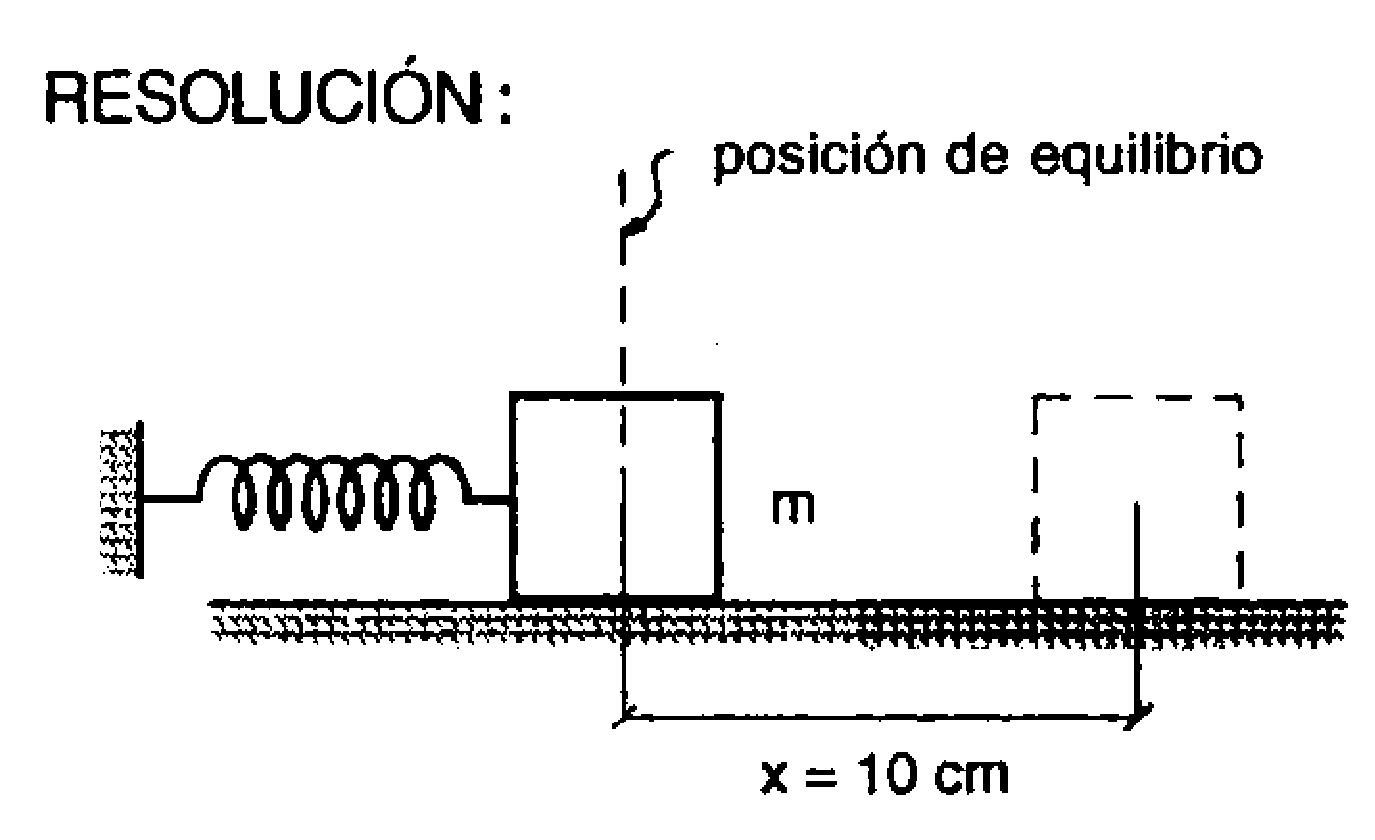
d) Se sabe que "V" es máximo cuando $x = 0$, luego:

$$\frac{1}{2}kA^2 = E_T = \frac{1}{2}mV^2 = E_{K\,max}$$

$\therefore$ es verdadero

PROBLEMA 21. Cierto resorte se estira 4 cm al ubicarse en su extremo una carga de 40 N. A dicho resorte se le une una carga de 10 kg y se le coloca sobre una superficie horizontal estirándose 10 cm a partir de su posición en equilibrio. Determinar la velocidad que adquirirá al llegar a $x = 0$, el bloque de 100 N. (Considerar $g = 10\text{ m/s}^2$)

RESOLUCIÓN:



El que se mantenga 4 cm estirado con una carga de 40 N, nos permite calcular K:

Por Hooke: $k = \frac{F}{x}$

$$\therefore \quad k = \frac{40\text{ N}}{0{,}04\text{ m}} = 1\,000\text{ N} \qquad (1)$$

Cuando el cuerpo de peso 100 N es despla-

zado 10 cm se efectuará un trabajo equivalente a:

$$\frac{1}{2}kx^2$$

Se suelta dicho bloque en $x = 0{,}1$ m, con $V = 0$, ahora, debido a la fuerza recuperadora, aumentará su velocidad siendo máxima en $x = 0$ y así habrá un intercambio de E_P a E_C.

En $x = 0$: $$\frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}mV^2$$

Sustituyendo los datos:

$$\frac{1}{2}\times 1\,000\ \frac{N}{m}\ (0{,}1\ m)^2 = \frac{1}{2}\times 10\ kg \times V^2$$

$$\therefore \qquad V = 1\ \frac{m}{s}$$

PROBLEMA 22. La amplitud de las vibraciones armónicas de un punto material es "A" y la energía total "W". ¿Cuál será la elonga-ción del punto cuando la fuerza que actúa sobre él es "F"?

RESOLUCIÓN : $$W = \frac{1}{2}kA^2$$

$$\therefore \qquad k = \frac{2W}{A^2} \qquad (1)$$

Además: $$F = kx$$

$$\therefore \qquad x = \frac{F}{k} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

Rpta.: $$x = \frac{A^2 F}{2W}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. La amplitud de un cuerpo con M.A.S. es 6 cm y su período es de 0,4286 s. Calcular:
   a) La velocidad y
   b) La aceleración cuando su elon-gación es de 3 cm.

   Rpta.: a) $\pm$ 76,17 cm/s
   b) $\mp$ 644,73 cm/s^2

2. Con movimiento vibratorio vertical y con una amplitud de 15 cm se mueve un cuerpo. Sobre este cuerpo se ha colocado un pequeño objeto. ¿Cuál será el número máximo de oscilaciones por minuto, para que el cuerpo colocado encima no se desprenda de él cuando alcanza su máxima altura?

   $$\left(f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g}{x}}\right)$$

   posición inicial

   15 cm

   15 cm

   Rpt

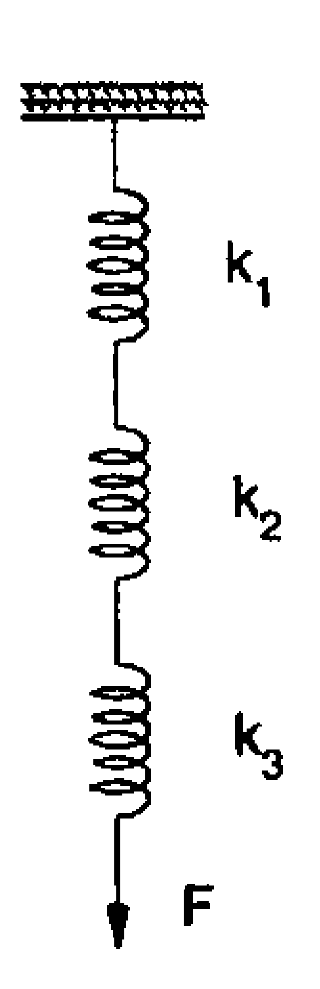
3. Un punto con M.A.S. tiene un período de 2 s. Su velocidad en el punto de equilibrio es 2 m/s. Calcular:
   a) Amplitud.
   b) Elongación cuando la velocidad es de 2 m/s.
   c) Tiempo que transcurre hasta que pase nuevamente por esta última posición.

   Rpta.: a) (2/p) m b) 0 m c) 1 s

4. ¿Qué velocidad máxima tiene un móvil con M.A.S. de amplitud igual a 20 cm y período igual a 2 s?

   Rpta.: $\pm 20\pi$ cm / s

5. Hallar la constante de equilibrio en el siguiente sistema de resortes mostrado en la figura.



Rpta.: $\frac{1}{k_e} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} + \frac{1}{k_3}$

6. Una partícula con M.A.S. efectúa 50 oscilaciones en 25 s. Si la amplitud es de 20 cm calcular el valor de la velocidad en el momento en que la elongación es de 12 cm.

Rpta.: $V = \pm 64\pi$ cm/s

7. Al suspender un bloque en un resorte, éste se deforma 1 cm. ¿Cuál es la frecuencia del sistema bloque resorte?

Rpta.: f = 5 osc/s

8. Si una masa "m" cuelga del extremo de un resorte su frecuencia es f. ¿Cuál será la frecuencia si el resorte se corta en tercios y la masa se suspende uniendo estas posiciones?

Rpta.: $f = \frac{f_i}{\sqrt{3}}$

9. Demostrar que la energía total para un M.A.S. está dada por:

$$W_{total} = \frac{2\pi^2 A^2 m}{T^2}$$

Donde: A (amplitud), m (masa) y T (período).

10. Si la ecuación del movimiento de una partícula, tiene la forma:

$$X = \cos\left(\frac{\pi}{6} t\right)$$

Hallar los momentos en que los valores de la velocidad y de la aceleración, son máximos.

Rpta.: V_{max} : t = (3 ; 9 ; 15 s)

a_{max} : t = (0 ; 6 ; 12 s)

11. ¿Qué relación hay entre la energía cinética de una partícula con M.A.S. y su energía potencial, en los momentos en que el tiempo es:

a) $t = \frac{1}{12} T$ b) $t = \frac{1}{8} T$

Rpta.: a) $\frac{E_C}{E_P} = \frac{1}{3}$

b) $\frac{E_C}{E_P} = 1$

12. ¿A qué es igual la relación entre la energía cinética de una partícula que vibra con M.A.S. y su energía potencial, en los momentos en que la elongación es:

a) $x = \frac{A}{4}$ y b) $x = \frac{A}{2}$

Rpta.: a) $\frac{E_C}{E_P} = 15$

b) $\frac{E_C}{E_P} = 3$

13. El punto de suspensión de un péndulo simple de longitud "L" se desplaza con aceleración uniforme por la vertical. Calcular el período "T" de oscilaciones pequeñas del péndulo, en dos casos:

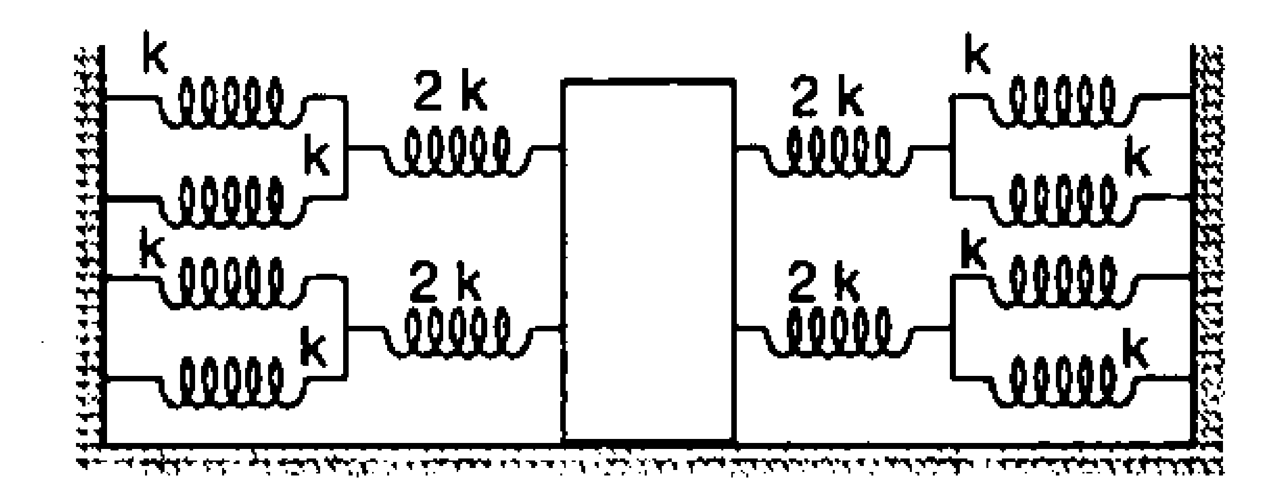
a) Cuando la aceleración del punto de suspensión está dirigida hacia arriba y su magnitud "a" puede ser cualquiera.

b) Cuando esta aceleración está dirigida hacia abajo y su magnitud es $a < g$.

Rpta.: a) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g+a}}$

b) $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g-a}}$

14. Hallar la frecuencia en el sistema mostrado. Despreciar todo efecto de rozamiento.



Rpta.: $f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$

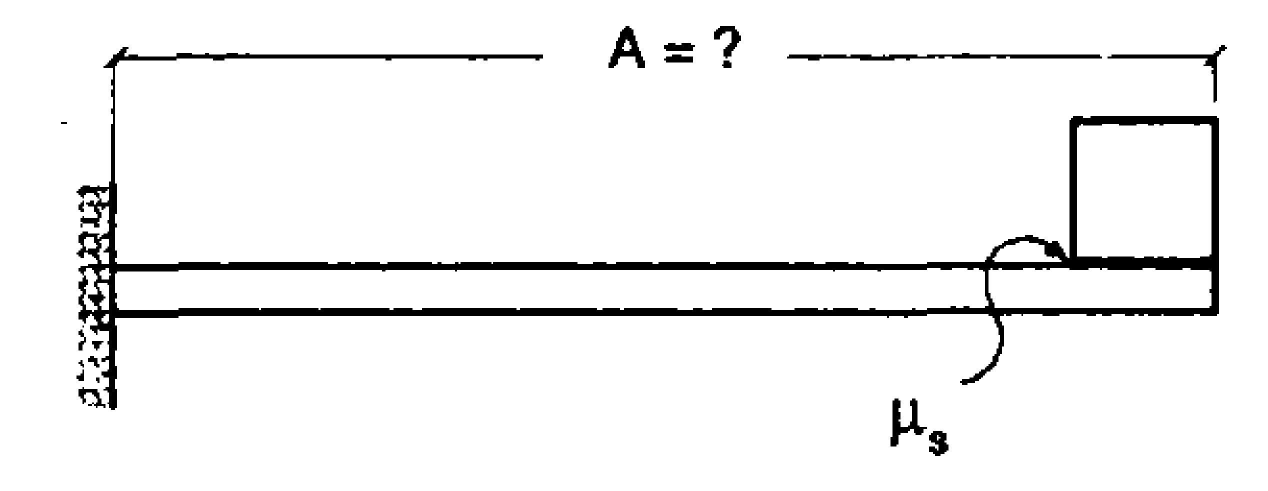
15. Se tienen dos resortes de constantes k' el primero y k" el otro. Una masa m' se suspende en el primero y m" en el otro. Si se observa que bajo la acción de estos pesos ambos sufren la misma deformación entonces al oscilar, la relación entre sus períodos T' y T", ¿cuánto será?

Rpta.: $T' = T''$

16. Sean X, Y y Z la energía mecánica total, el período y la velocidad máxima, respectivamente, de un movimiento armónico simple. Si se duplica la amplitud, determinar los valores X', Y' y Z' respectivamente.

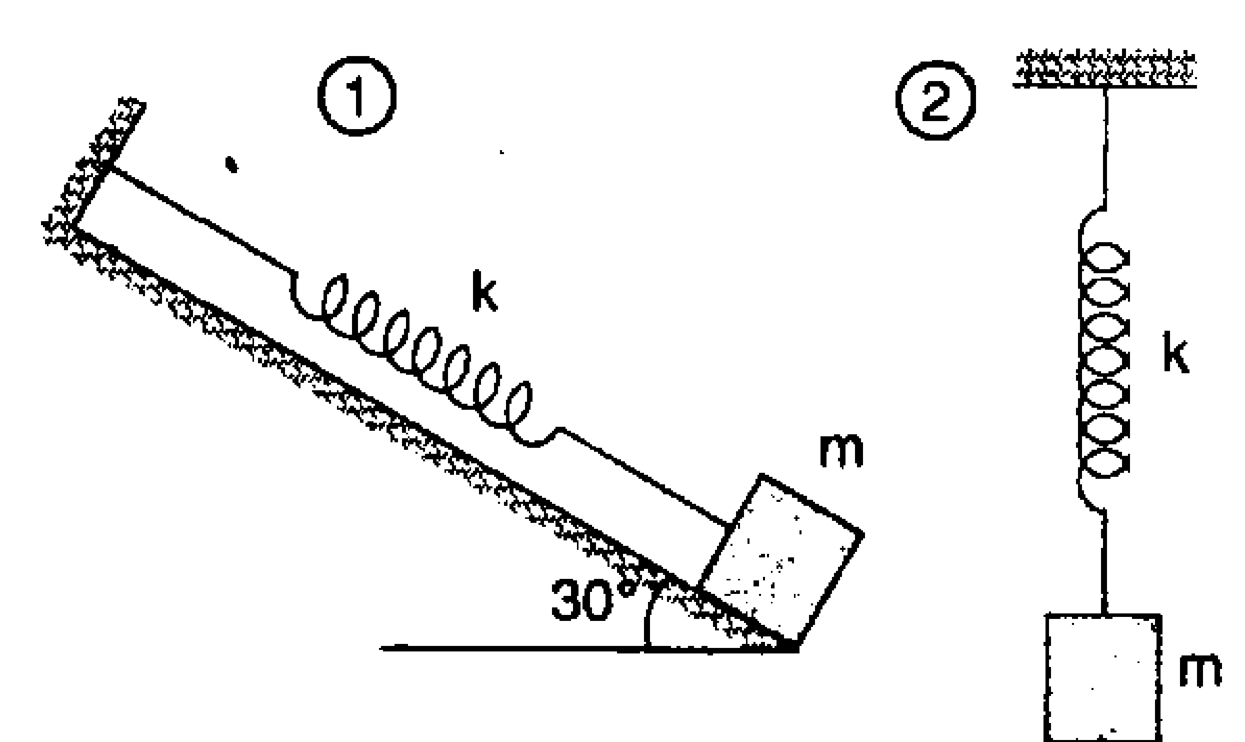
Rpta.: $X' = 4X$; $Y' = Y$; $Z' = 2Z$

17. En la figura se muestra una plataforma horizontal sobre la cual se encuentra oscilando un bloque con M.A.S., cuyo período es de 5 segundos. ¿Con qué amplitud máxima debe oscilar la plataforma para que el bloque no la abandone? ($g = \pi^2\ m/s^2$)



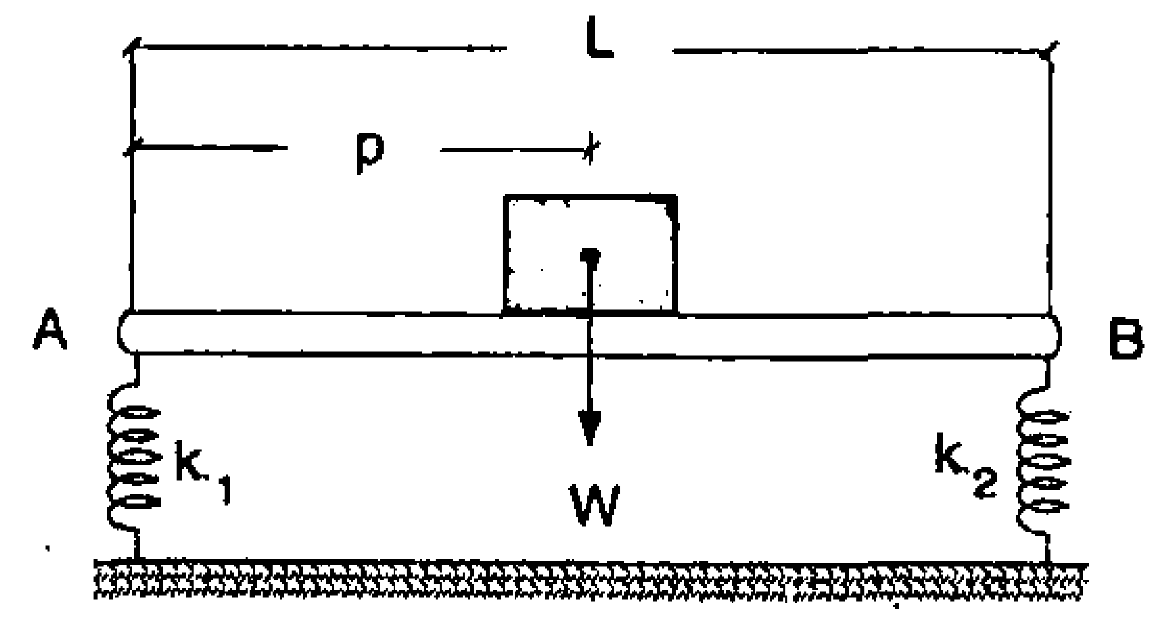
Rpta.: $R = 2,5$ m

18. Hallar la relación entre las frecuencias de los 2 cuerpos, si poseen la misma masa e igual coeficiente k.



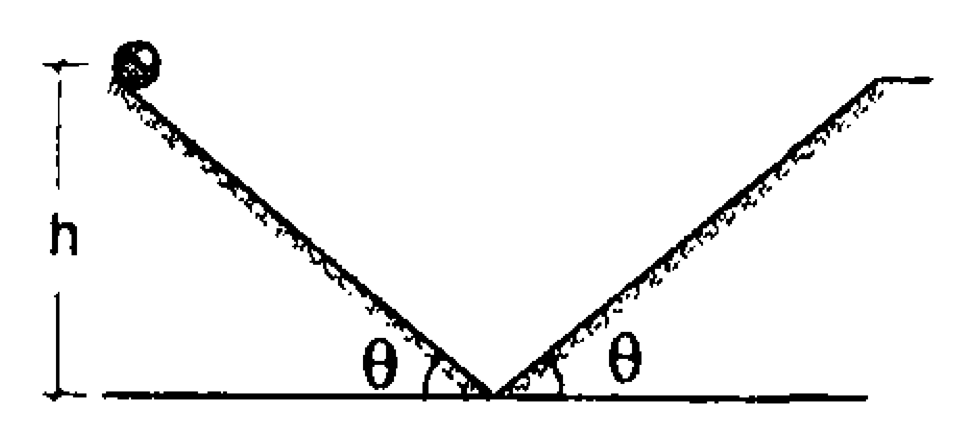
Rpta.: $f_1 = f_2$

19. Dos resortes de igual tamaño y peso despreciable, están dispuestos paralelamente sobre una superficie horizontal. ¿A qué distancia "p", de A, se deberá colocar un bloque de peso W, para que la barra AB, permanezca horizontal? Considerar nulo el peso de la barra.



Rpta.: $p = \frac{k_2 L}{k_1 + k_2}$

20. Una partícula oscila entre dos planos inclinados sin fricción. Encontrar el período de oscilación, si h es la altura incicial.



Rpta.: $2\pi\sqrt{\frac{h}{2g}}\csc\theta$

DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

Por definición, Densidad: $\delta = \frac{m}{V}$ (1)

Donde: δ = densidad

m = masa del cuerpo

V = volumen del cuerpo

Peso específico: $\rho = \frac{W}{V}$ (2)

Donde: ρ = peso específico

W = peso del cuerpo

V = volumen del cuerpo

http://librosysolucionarios.net

RELACIÓN ENTRE DENSIDAD Y PESO ESPECÍFICO

Dividiendo (1) entre (2):

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{\frac{m}{V}}{\frac{W}{V}}$$

$$\frac{\delta}{\rho} = \frac{m}{W}$$

Pero $W = m.g \Rightarrow \frac{\delta}{\rho} = \frac{m}{m.g}$

$\therefore$ $\boxed{\rho = \delta.g}$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la densidad y el peso específico del cobre si 27 kg de dicho metal ocupa un volumen de 3×10^{-3} m^3

a) En los polos ($g = 9{,}83$ m/s^2)
b) A los 45° de latitud ($g = 9{,}8$ m/s^2)
c) En el ecuador ($g = 9{,}78$ m/s^2)

RESOLUCIÓN: La densidad es la misma en los tres lugares, los pesos no.

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{27\ kg}{0{,}003} = 9\,000\ \frac{kg}{m^3}$$

a) $$\rho_1 = \delta g_1 = \frac{9\,000\ kg}{m^3} \cdot 9{,}83\ \frac{m}{s^2}$$

$$\rho_1 = 88\,470 \cdot \frac{kg}{m^3} \cdot \frac{m}{s^2}$$

$$\rho_1 = 88\,470\ \frac{N}{m^3}$$

OTRO MÉTODO:

$$\rho_1 = \frac{W_1}{V} = \frac{m\,g_1}{V} = \frac{27\ kg . 9{,}83\ m}{0{,}003\ m^3 . s^2}$$

$$\rho_1 = 88\,470\ \frac{N}{m^3}$$

b) $$\rho_2 = \delta.g_2 = 9\,000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

$$\rho_2 = 88\,200\ \frac{N}{m^3}$$

c) $$\rho_3 = \delta.g_3 = 9\,000\ \frac{kg}{m^3} \cdot 9{,}78\ \frac{m}{s^2}$$

$$\rho_3 = 88\,020\ \frac{N}{m^3}$$

PROBLEMA 2. Un pedazo de metal pesó 2,50 N en el aire, 2,10 N en el agua y 2,25 N en el aceite. Calcular el peso específico del metal y del aceite.

RESOLUCIÓN:

$W_{aire} = 2{,}50$ N

$W_{aceite} = 2{,}25$ N

$W_{agua} = 2{,}10$ N

$\rho = ?$

$$\left\{ \begin{matrix} \text{PESO EN} \\ \text{EL AGUA} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{PESO EN} \\ \text{EL AIRE} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{PESO DEL AGUA} \\ \text{DESALOJADA} \end{matrix} \right\}$$

$$2{,}10\ N = 2{,}50\ N - V . r_{agua}$$

pero: $$\rho_{agua} = 9{,}8 \cdot 10^3\ \frac{N}{m^3}$$

Reemplazando, despejando V y efectuando:

$$V = 4{,}08 . 10^{-5}\ m^3$$

Este será el volumen del metal y al introducirlo en el agua desalojará un volumen igual de aceite

$$\left\{ \begin{matrix} \text{PESO EN} \\ \text{EL ACEITE} \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} \text{PESO EN} \\ \text{EL AIRE} \end{matrix} \right\} - \left\{ \begin{matrix} \text{PESO DEL ACEITE} \\ \text{DESALOJADO} \end{matrix} \right\}$$

$$2{,}25\ N = 2{,}50\ N - V . \rho_{aceite}$$

pero: $$V = 4{,}08 \times 10^{-5}\ m^3$$

Sustituyendo V por su valor y despejando el

http://librosysolucionarios.net

peso específico:

1ra. Rpta.: $\rho_{aceite} = 6\,127,5 \dfrac{N}{m^3}$

Cálculo del peso específico del metal:

$$\rho = \frac{W}{V} = \frac{2,50 \text{ N}}{4,08 \times 10^{-5} \text{ m}^3}$$

2da. Rpta.: $\rho_1 = 88\,470 \dfrac{N}{m^3}$

PROBLEMA 3. Una aleación de oro y cobre tiene un peso de 2 N. El P.e. del Au y Cu es 189,14 . 10^3 N/m^3 y 83,38 . 10^3 N/m^3, respectivamente. Si el Re. de la aleación es 156,8 . 10^3 N/m^3. Calcular el peso del oro en la aleación.

RESOLUCIÓN : Peso aleación = 2 N

$$P.e_{aleac.} = 156,8 \times 10^3 \text{ N/m}^3$$

$$P.e.\ Au = 189,14 \times 10^3 \text{ N/m}^3$$

$$P.e.\ Cu = 83,38 \times 10^3 \text{ N/m}^3$$

Peso de Au = ?

Llamando:

x = peso de oro en la aleación.

2 N - x = peso de cobre en la aleación.

Además, volumen total igual suma de volúmenes.

$$\frac{2 \text{ N}}{158,6 \times 10^3 \dfrac{N}{m^3}} = \frac{x}{189,14 \times 10^3 \dfrac{N}{m^3}} + \frac{2 \text{ N} - x}{83,38 \times 10^3 \dfrac{N}{m^3}}$$

$\therefore$ x = 1,7 N de oro

PROBLEMA 4. El peso aparente de un cuerpo sumergido en alcohol, excede a la "pérdida aparente de peso" de él en agua en el triple del peso aparente del mismo cuerpo sumergido en agua. Determinar el peso específico del cuerpo si el peso específico del alcohol es 6 . 10^3 N/m^3.

RESOLUCIÓN :

Interpretando el enunciado:

Peso aparente en alcohol = Pérdida aparente de peso en agua + 3 (peso aparente en el agua) (1)

Donde:

Peso aparente en alcohol:

$$W_C - E_{ALCOHOL}$$

Pérdida aparente de peso en agua:

$$E_{AGUA}$$

Peso aparente en el agua:

$$W_C - E_{AGUA}$$

Reemplazando en (1):

$$(W_C - E_{ALCOHOL}) = E_{AGUA} + 3\,(W_C - E_{AGUA})$$

$$2\,W_C = 2\,E_{AGUA} - E_{ALCOHOL}$$

$$2\,W_C = 2\,\rho_{AGUA} \cdot V_C - \rho_{ALCOHOL} \cdot V_C$$

$$2\,\frac{W_C}{V_C} = 2\,\rho_{AGUA} - \rho_{ALCOHOL}$$

$$2\,\rho_C = 2\,(10\,000) - 6\,000$$

Rpta.: $\rho_C = 7\,000 \text{ N/m}^3$

"Sólo sé que nada sé"
Sócrates

CAPÍTULO 10

GRAVITACIÓN UNIVERSAL

La astronomía griega suponía que la Tierra era el centro de giro del Sol y de los demás planetas (Teoría Geocéntrica). En el siglo II Ptolomeo fue quien lo describió en detalle. Como la teoría era muy compleja no podía ajustarse a un número cada vez más grande de observaciones.


COPÉRNICO

Copérnico (1473 - 1543), astrónomo polaco, sugirió una Teoría más sencilla del movimiento de los astros. Él sustentó la Teoría Heliocéntrica, donde la Tierra era un planeta que gira alrededor de su eje y alrededor del Sol, lo mismo que los otros planetas.

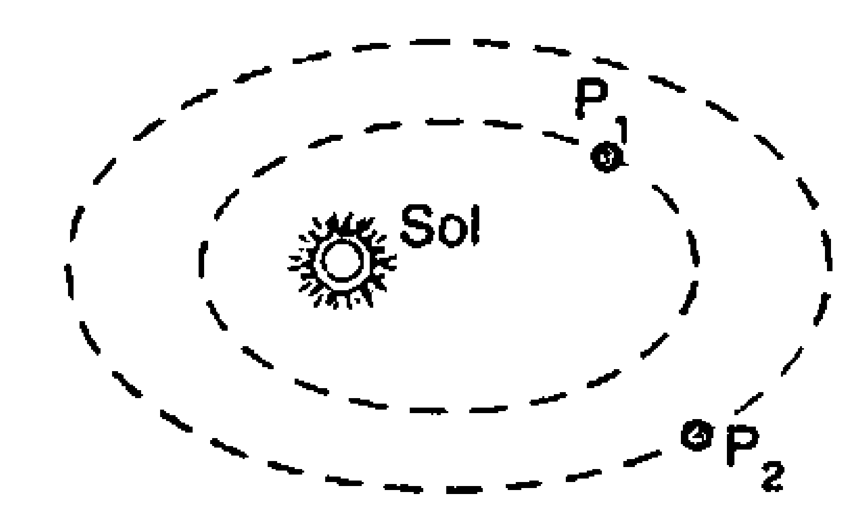
Tycho Brahe (1546 - 1601), astrónomo danés, en la universidad de Graz, recopiló los datos de estas dos teorías controvertidas.

Juan Kepler (1571 - 1630), astrónomo alemán, quien se formó bajo las ideas de Copérnico, fue auxiliar de Tycho Brahe en la Universidad de Graz, en el observatorio próximo a Praga. Astrónomo genial, creador de la mecánica celeste, descubrió las tres leyes a que están sometidos los movimientos de los planetas.

LEYES DE KEPLER

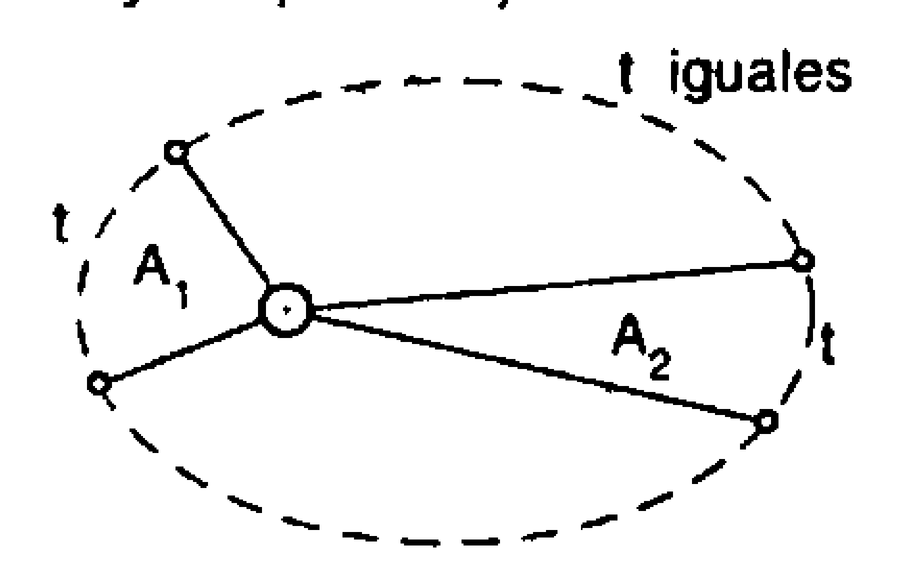
Primera ley:

Los planetas describen órbitas elípticas, en uno de cuyos focos está el Sol.



Segunda ley:

Las áreas descritas, en tiempos iguales, por los radios vectores de un planeta, son iguales. (Radio vector es la recta que une los centros del sol y del planeta)




ISAAC NEWTON

http://librosysolucionarios.net

$$\boxed{A_1 = A_2}$$

Tercera ley:

Los cuadrados de los tiempos de revolución "T" (período), de los planetas, son proporcionales a los cubos de sus distancias "d" al Sol.

$$\boxed{\frac{T^2}{T_1^2} = \frac{d^3}{d_1^3}} \quad ó \quad \boxed{T^2 = K.d^3}$$

LEY DE LA GRAVITACIÓN UNIVERSAL LEY DE NEWTON

Inspirado en las leyes de Kepler, Newton descubrió la "Ley de La Gravita ción Universal", sobre las siguientes bases:

1. **"La aceleración de la gravedad "g" en cierto lugar, es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" al centro del cuerpo de masa "M" que lo origina"**

$$\frac{g}{\frac{1}{d^2}} = \frac{g}{\frac{1}{d_1^2}} = \frac{g}{\frac{1}{d_2^2}} = \text{...... cte.}$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{g}{\frac{1}{d^2}} = K} \qquad (1)$$

Los tres astros más importantes para nosotros son: la Luna, la Tierra y el Sol. La constante K para cada planeta es distinta. Para un punto "p" en la superficie de cada uno de estos planetas es, respectivamente:

$$K_L = \frac{g_L}{\frac{1}{d_L^2}} = \frac{1{,}67\ m/s^2}{\frac{1}{(1\,700\ km)^2}}$$

$$K_L = 4{,}8\ .\ 10^6\ \frac{m}{s^2}\cdot km^2 \qquad (1)$$

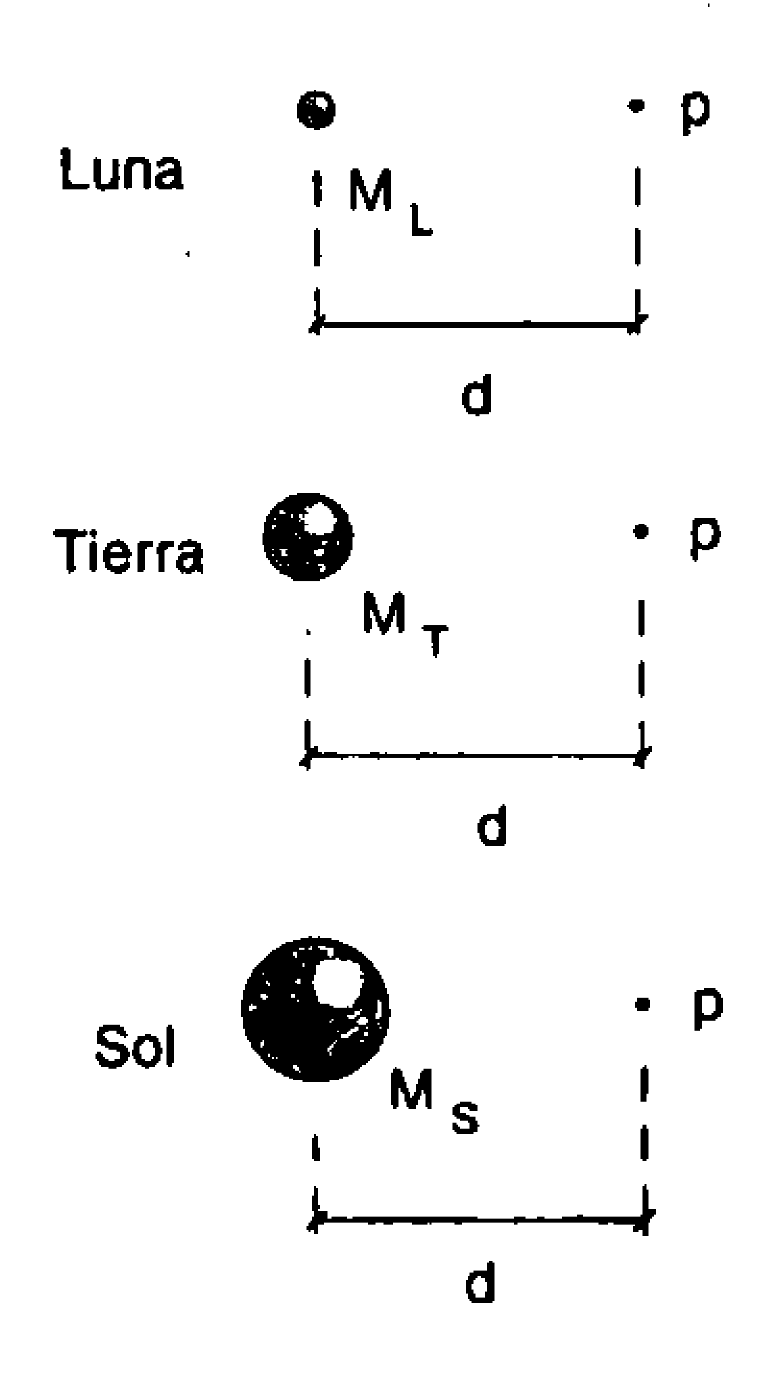
$$K_T = \frac{g_T}{\frac{1}{d_T^2}} = \frac{9{,}8\ m/s^2}{\frac{1}{(6\,400\ km)^2}}$$

$$K_T = 4\ .\ 10^8\ \frac{m}{s^2}\cdot km^2 \qquad (2)$$

$$K_S = \frac{g_S}{\frac{1}{d_S}} = \frac{270\ m/s^2}{\frac{1}{(700\,000\ km)^2}}$$

$$K_S = 13\ .\ 10^{13}\ \frac{m}{s^2}\cdot km^2 \qquad (3)$$

2. **"La aceleración de la gravedad "g" originada por una masa "M" en un punto "p" a una distancia "d" es directamente proporcional a la masa "M".**



A la distancia "d", la aceleración de la gravedad sobre el punto "p" debido a la Luna, a la Tierra y al Sol, son diferentes. Sea $d = 1{,}4\ .\ 10^6$ km; por ejemplo:

Recordando que: $\frac{g}{\frac{1}{d^2}} = K$

de donde: $g = \frac{K}{d^2}$

Para la Luna: $g_L = \dfrac{4{,}8\ .\ 10^6\ \frac{m}{s^2}\cdot km^2}{(1{,}4\ .\ 10^6\ km)^2}$

http://librosysolucionarios.net

$$g_L = 2,45 \cdot 10^6 \frac{m}{s^2} \qquad (1)$$

Para la Tierra: $g_L = \dfrac{4 \cdot 10^8 \frac{m}{s^2} \cdot km^2}{(1,4 \cdot 10^6 \ km)^2}$

$$g_T = 2,04 \cdot 10^{-4} \frac{m}{s^2} \qquad (2)$$

Para el Sol: $g_S = \dfrac{13 \cdot 10^{13} \frac{m}{s^2} \cdot km^2}{(1,4 \cdot 10^6 \ km)^2}$

$$g_S = 6,63 \cdot 10 \frac{m}{s^2} \qquad (3)$$

Es decir, a la misma distancia "d" del centro de masa, las aceleraciones de la gravedad son diferentes, porque las masas que las provocan son diferentes, a mayor masa mayor aceleración de la gravedad, es decir:

$$\frac{g}{M} = \frac{g_1}{M_1} = \frac{g_2}{M_2} = \ldots\ldots\ cte$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{g}{M} = K'} \qquad (II)$$

"La relación de la aceleración de la gravedad a la masa que la origina es siempre constante".

Así por ejemplo para un punto "p" a $1,4 \cdot 10^6$ km de la Luna, de la Tierra y del Sol K' siempre es igual:

Sabiendo que las masas de los tres planetas son:

Luna: $7 \cdot 10^{22}$ kg

Tierra: $5,5 \cdot 10^{24}$ kg

Sol: $2 \cdot 10^{30}$ kg

Y recordando que:

$$K' = \frac{g_L}{M_L} = \frac{g_T}{M_T} = \frac{g_S}{M_S}$$

Se tiene: $K' = \dfrac{2,55 \cdot 10^{-6} \ m/s^2}{7 \cdot 10^{22} \ kg}$ (Luna)

$$K' = \frac{2,04 \cdot 10^{-4} \ m/s^2}{5,5 \cdot 10^{24} \ kg} \quad \text{(Tierra)}$$

$$K' = \frac{6,63 \cdot 10 \ m/s^2}{2 \cdot 10^{30} \ kg} \quad \text{(Sol)}$$

$$\boxed{K' = 0,35 \cdot 10^{-28} \frac{m}{s^2 \cdot kg}}$$

De las conclusiones (I) y (II):

$$\frac{g}{\frac{M}{d^2}} = \frac{g_1}{\frac{M_1}{d_1^2}} = \frac{g_2}{\frac{M_2}{d_2^2}} = \ldots\ldots = cte.$$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{g}{\frac{M}{d^2}} = G} \qquad (III)$$

El valor de la constante universal para cualquier planeta es:

$$G = 0,6673 \cdot 10^{-16} \frac{m \cdot km^2}{s^2 \cdot kg}$$

La unidades en el SI son:

$$\boxed{G = 6,673 \cdot 10^{-11} \frac{N \cdot m^2}{kg^2}}$$

o también: $\boxed{G = 6,673 \cdot 10^{-8} \dfrac{din \cdot cm^2}{g^2}}$

De la igualdad (III) se calcula el valor de la aceleración de la gravedad a una distancia cualquiera "d", debido a la masa "M".

$$\boxed{g = G \frac{M}{d^2}} \qquad (A)$$

Finalmente, recordando que: $F = m \cdot a$ (B)

donde "a" es una aceleración y la gravedad "g" es también una aceleración, sustituyendo (A) en (B):

Ley de Newton: $\boxed{F = G \dfrac{m.M}{d^2}}$

http://librosysolucionarios.net

Esta es la ecuación matemática de la "Ley de Gravitación Universal" cuyo enunciado es: **"La fuerza "F" de atracción de dos masas "m" y "M" es directamente proporcional a las masas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia "d" que los separa".**

MOVIMIENTO DE LOS PLANETAS Y SATÉLITES

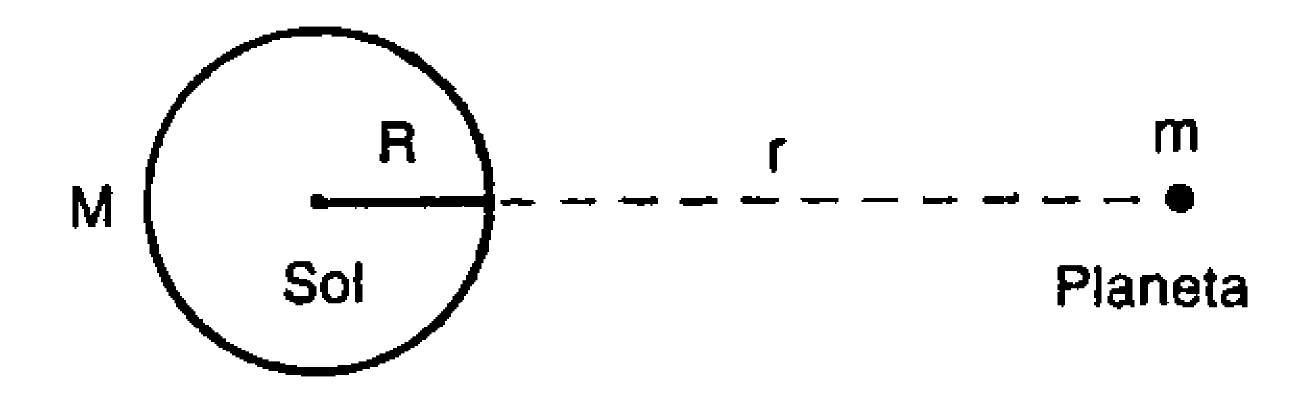
Considerando que los movimientos de un planeta alrededor del Sol y el de los satélites alrededor de un planeta son circunferencias, se puede deducir las leyes del movimiento:

$$F_C = m.a_C$$

pero: $$F_C = \frac{G.m.M}{(R + r)^2}$$

y además: $$a_C = \omega^2.r$$

$$\therefore \quad \frac{G.m.M}{(R + r)^2} = m.\omega^2.r$$



Si la masa de un o de los cuerpos es mucho mayor que la del otro, caso del Sol y un planeta, o el caso de un planeta y un satélite, "R" es tan pequeño con respecto a "r" que se puede considerar R = 0.

Luego: $$\frac{G.m.M}{(0 + r)^2} = m.\omega^2.r$$

$$\therefore \quad G.M = \omega^2.r^3$$

pero: $$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$\therefore$ 

G : Cte. de la Gravitación Universal.
M : Masa del Sol o de un planeta.
r : Distancia entre los centros de ma-sa de los astros.
T : Período, tiempo que demora una revolución.

ENERGÍA DE UNA ÓRBITA CIRCUNFERENCIAL

Depende de la distancia "r" del centro de giro al centro de gravedad de la masa que gira.

1. **Energía Potencial Gravitatoria:**

Es la energía potencial gastada (o acumulada) para alejar un satélite de su órbita (radio "r" de giro) hasta el infinito.

Deducción de $W_{r \to \infty}$:

$$W_{r \to \infty} = E_{M_f} - E_{M_i}$$

Donde E_{M_f} es la energía mecánica en el infinito.

$$\therefore \quad E_{M_f} = 0$$

Entonces: $$W_{r \to \infty} = -E_{M_i}$$

$$W_{r \to \infty} = -F.r$$

$$W_{r \to \infty} = -G \cdot \frac{M.m}{r^2} \cdot r$$

$$\boxed{W_{r \to \infty} = -G \cdot \frac{M.m}{r}}$$

2. **Trabajo para alejar un cuerpo de masa "m" de otro de masa "M" de una distancia "r" a una distancia "r_1"**

$$\boxed{W = G.M.m\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_1}\right)}$$

Fórmula que corresponde al trabajo que hay

que realizar contra el campo gravitatorio para alejar un cuerpo de masa "m" hasta una distancia "r_1".

r = radio de giro inicial.

3. Energía Total de un cuerpo en una trayectoria circunferencial:

Es la suma de la energía cinética y la energía potencial.

$$E_T = E_C + E_P$$

$$E_T = \frac{1}{2} mV^2 + \left(-\frac{G.M.m}{r}\right) \quad (1)$$

pero: $\frac{1}{2} m.V^2 = \frac{1}{2} m.\omega^2.r^2 \quad (2)$

Por otro lado: $m\,a_C = F_C$

Sustituyendo valores de a_C y F_C:

$$m.\omega^2.r = \frac{G.M.m}{r^2}$$

ó $\frac{1}{2} m.\omega^2.r^2 = \frac{G.M.m}{2r}$

Sustituyendo en (2):

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{2} m.V^2 = \frac{G.M.m}{2r}$$

Sustituyendo en (1):

$$E_T = \frac{G.M.m}{2r} + \left(-\frac{G.M.m}{r}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{E_T = -\frac{G\,M\,m}{2r}}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. La masa de la Luna es 1/81 de la masa terrestre y su radio 1/4 del de la Tierra. ¿Cuál es el valor de la gravedad en la superficie lunar?

RESOLUCIÓN:

Sea "R" el radio de la Tierra y "r" el radio de la Luna.

La ley gravitacional para la Luna será:

$$F = G\frac{m\,M_L}{r^2}$$

Donde:

F : Fuerza de atracción en la Luna.
m : Masa de un cuerpo en la Luna.
M_L: Masa de la Luna.
r : Radio de la Luna.
R : Radio de la Tierra.

Pasando m al primer miembro:

$$\frac{F}{m} = \frac{G\,M_L}{r^2}$$

pero: $\frac{F}{m} = g_L$

luego: $g_L = \frac{G\,M_L}{r^2}$

Como: $M_L = \frac{1}{81} M_T$ y $r = \frac{1}{4} R$

luego: $g_L = \frac{G\,\frac{1}{81}\,M_T}{\left(\frac{1}{4}R\right)^2}$

$$g_L = \frac{16}{18} G \frac{M_T}{R^2}$$

Se sabe que: $G\frac{M_T}{R^2} = g_T$

Rpta.: $g_L = \frac{16}{81} g_T$

PROBLEMA 2. Dos masas de 200 y 400 kg están a 20 m. Calcular con qué fuerza se atraen.

$$G = 6{,}673 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{kg^2}$$

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN: $F = G\dfrac{mM}{d^2}$

$$F = 6{,}673 \times 10^{-11}\ \frac{N \times m^2}{kg^2} \times$$

$$\times \frac{200\ kg \times 400\ kg}{(20\ m)^2}$$

Rpta.: $F = 13{,}34 \times 10^{-9}\ N$

PROBLEMA 3. La distancia del Sol a la Tierra es aproximadamente 150×10^6 km, y su traslación dura 365 días. La distancia de Mercurio al Sol es de sólo 58×10^6 km. ¿Cuánto demora su traslación?

RESOLUCIÓN: $\dfrac{T^2}{T_1^2} = \dfrac{d^3}{d_1^3}$ (I)

T de la Tierra = 365 días

T_1 de Mercurio = ?

d de la Tierra = 150×10^6 km

d_1 de Mercurio = 58×10^6 km

Sustituyendo estos valores en (I):

$$\frac{(365\ \text{días})^2}{T_1^2} = \frac{(150 \times 10^6\ km)^3}{(58 \times 10^6\ km)^3}$$

Rpta.: T_1 = 81 días aprox.

PROBLEMA 4. La constante K para la tierra es de:

$$4 \,.\, 10^8\ m/s^2 \,.\, km^2$$

Calcular la aceleración aproximada de la gravedad en Ticlio, que se encuentra aproximadamente a 5 000 m de altura sobre el nivel del mar.

RESOLUCIÓN: d = Radio de la Tierra

$$d = \frac{g}{\frac{1}{d^2}} = K$$

de donde: $g = \dfrac{K}{d^2}$ (I)

d = Radio de la Tierra + 5 000 m.

d = 6 400 km + 5 km = 6 405 km

$$\therefore \quad g = \frac{4 \times 10^8\ \frac{m}{s^2}\ .\ km^2}{(6\ 405\ km)^2}$$

Rpta.: $g = 9{,}75\ m/s^2$ aprox.

OTRO MÉTODO: $F = G\dfrac{Mm}{d^2}$

En la superficie de la Tierra, siendo:

$$F = mg$$

$$mg = G\frac{M_T\, m}{R_T^2} \qquad (I)$$

A 5 000 m de altura de la superficie:

$$mg_1 = G\frac{M_T\, m}{(R_T + d)^2} \qquad (II)$$

Dividiendo (II) entre (I):

$$\boxed{\frac{g_1}{g} = \frac{R_T^2}{(R_T + d)^2}} \quad *$$

$$g_1 = \frac{R_T^2\ .\ g}{(R_T + d)^2}$$

$$g_1 = \frac{(6\ 400\ km)^2 \times 9{,}8\ m/s^2}{(6\ 400\ km + 5\ km)^2}$$

Rpta.: $g_1 = 9{,}75\ m/s^2$

PROBLEMA 5. La constante K para la Luna es de:

$$4{,}8 \times 10^6\ \frac{m}{s^2} \times km^2$$

Su radio es aproximadamente 1 700 km. Calcular la gravedad debido a la Luna, de una

http://librosysolucionarios.net

nave espacial que está a 500 km de la superficie lunar.

RESOLUCIÓN: $\dfrac{g}{\dfrac{1}{d^2}} = K$

de donde: $g = \dfrac{K}{d^2}$ (I)

d = Radio de la Luna + 500 km.

d = 1 700 km + 500 km = 2 200 km.

Sustituyendo los datos en (I):

$$g = \frac{4,8 \times 10^6 \ \frac{m}{s^2} \times km^2}{(2\,200\ km)^2}$$

$$g = \frac{4,8 \times 10^6}{22^2 \times 10^4} \times \frac{m}{s^2}$$

Rpta.: $g = 0,99\ m/s^2$

PROBLEMA 6. La masa de la Tierra es aproximadamente $5,5 \times 10^{24}$ kg, su radio 6 400 km, debido a estos factores, calcular la aceleración de la gravedad de la Tierra sobre una nave espacial que está orbitando a 200 km de altura.

$$G = 6,673 \times 10^{-11} \frac{N \times m^2}{kg^2}$$

RESOLUCIÓN: $g = G\dfrac{M}{d^2}$ (I)

d = Radio de la Tierra + 200 km

d = 6 400 km + 200 km = 6 600 km

Sustituyendo los datos en (I):

$$g = 6,673 \times 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg^2} \times \frac{5,5 \times 10^{24}\ kg}{(6\,600\ km)^2}$$

$$g = 6,673 \times 10^{-11} \frac{N\,m^2}{kg} \times \frac{5,5 \times 10^{24}}{4\,356 \times 10^4\ km^2}$$

$$g = \frac{6,673 \times 5,5 \times 10^9}{4\,356} \times \frac{N \times m^2}{kg \times km^2}$$

$$g = 8,43 \times 10^6 \times \frac{kg \times m \times m^2}{kg \times s^2 \times 10^6\ m^2}$$

Rpta.: $g = 8,43\ m/s^2$

PROBLEMA 7. Dos masas de 60 lb y 200 lb están a una distancia de 2 pie. ¿Con qué fuerza se atraen?

$$G = 6,673 \times 10^{-8}\ din \times \frac{cm^2}{g^2}$$

RESOLUCIÓN: Por Ley de Newton:

$$F = G\frac{m_1 m_2}{d^2} \qquad (I)$$

Transformando datos a unidades SI:

m_1 = 60 lb = 60 × 454 g

m_1 = 27 240 g

m_2 = 200 lb = 200 × 454 g

m_2 = 90 800 g

d = 2 pie = 2×30,48 cm = 60,96 cm

$d^2 = (60,96\ cm)^2 = 3\,716\ cm^2$

Sustituyendo datos en (I):

$$F = 6,673 \times 10^{-8} \frac{din \times cm^2}{g^2} \times \frac{27\,240\ g \times 90\,800\ g}{716\ cm^2}$$

Rpta.: $F = 44 \times 10^{-3}$ din

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 8. ¿Cuál será el período de un péndulo fuera de la superficie de la Tierra donde el peso de los cuerpos se reduce a la tercera parte? La longitud del péndulo es 1 m. Determinar también a qué altura de la superficie terrestre sucede esto. El radio terrestre es 6 400 km.

RESOLUCIÓN :

a) Recordando la 4° Ley del péndulo

$$\frac{T}{T_1} = \sqrt{\frac{g_1}{g}}$$

Por dato: $g_1 = 3g$

Luego: $T_1 = \sqrt{3}.T$

Por fórmula : $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$

$$\therefore \quad T_1 = \sqrt{3}.2\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

$$T_1 = 1{,}73 \times 2 \times 3{,}14\sqrt{\frac{1\text{ m}}{9{,}8\text{ m/s}^2}}$$

Rpta.: $T_1 = 3{,}48$ s

b) Con la fórmula * :

$$\frac{g_1}{g} = \frac{R_T^2}{(R_T + d)^2}$$

$$\frac{g}{3g} = \frac{R^2.T}{(R_T + d)^2}$$

$$R_T + d = \sqrt{3}.R_T$$

$$d = \left(\sqrt{3} - 1\right)R_T$$

$$d = (1{,}732 - 1)\,6\,400$$

Rpta.: $d = 4\,685$ km

PROBLEMA 9. Determinar ¿en qué relación se encuentran los radios R_1 y R_2 de las órbitas de dos satélites de masas m_1 y m_2 que se encuentran girando alrededor de la Tierra en el plano ecuatorial? Se sabe que m_1 y m_2 demoran en dar una vuelta alrededor de la Tierra uno y dos días respectivamente.

RESOLUCIÓN : Aceptando que las órbitas son circulares, aplicando la 3° Ley de Kepler:

$$\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{T_1^2}{T_2^2} \qquad (I)$$

$$T_1 = 1 \text{ días} \; ; \quad T_2 = 2 \text{ días}$$

En (I): $\frac{R_1^3}{R_2^3} = \frac{1}{4}$

Rpta.: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$

PROBLEMA 10. ¿Cuál es el período de oscilación de un péndulo que se encuentra a una altura de R/2 sobre la superficie de la Tierra? "L" es la longitud del péndulo, "R" el radio de la Tierra y "M" su masa.

RESOLUCIÓN :

La fórmula del péndulo a la altura R/2:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g_1}} \qquad (I)$$

Pero : $gR^2 = \text{cte.}$ (A)

Para la superficie de la Tierra: gR^2

Para un punto de altura R/2:

$$g_1\left(R + \frac{R}{2}\right)^2 = g_1\left(\frac{3R}{2}\right)^2$$

Luego, por (A): $gR^2 = g_1\left(\frac{3R}{2}\right)^2$

de donde: $g_1 = \frac{4}{9}g$

En (I): $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{\frac{4}{9}g}}$

http://librosysolucionarios.net

$$T = 3\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \qquad (II)$$

Pero además: $g = \dfrac{GM}{R^2}$; luego:

Rpta.: $T = 3\pi R\sqrt{\dfrac{L}{GM}}$

PROBLEMA 11. Un hombre peso 700 N en la Tierra. Suponiendo que el radio de la tierra se duplicara, ¿cuánto pesaría si la densidad promedio de la Tierra se mantiene constante?

RESOLUCIÓN: $g = \dfrac{GM}{d^2} \qquad (I)$

Para el primer caso: $g_1 = \dfrac{GM_1}{R^2} \qquad (a)$

Para el segundo caso: $g_2 = \dfrac{GM_2}{(2R)^2} \qquad (b)$

$\dfrac{(a)}{(b)}$: $\dfrac{g_1}{g_2} = \dfrac{4M_1}{M_2} \qquad (2)$

Como la densidad permanece constante:

$$\delta_1 = \delta_2 \Rightarrow \frac{M_1}{V_1} = \frac{M_2}{V_2}$$

$$\frac{M_1}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{M_2}{\frac{4}{3}\pi (2R)^3}$$

de donde: $\dfrac{M_1}{M_2} = \dfrac{1}{8} \qquad (3)$

(3) en (2): $\dfrac{g_1}{g_2} = 4 \times \dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2}$

de donde: $2g_1 = g_2$

Multiplicando ambos por "m" masa del hombre:

$$2mg_1 = mg_2$$

$$2w_1 = w_2 \qquad (4)$$

Pero: $w_1 = 700\ N$

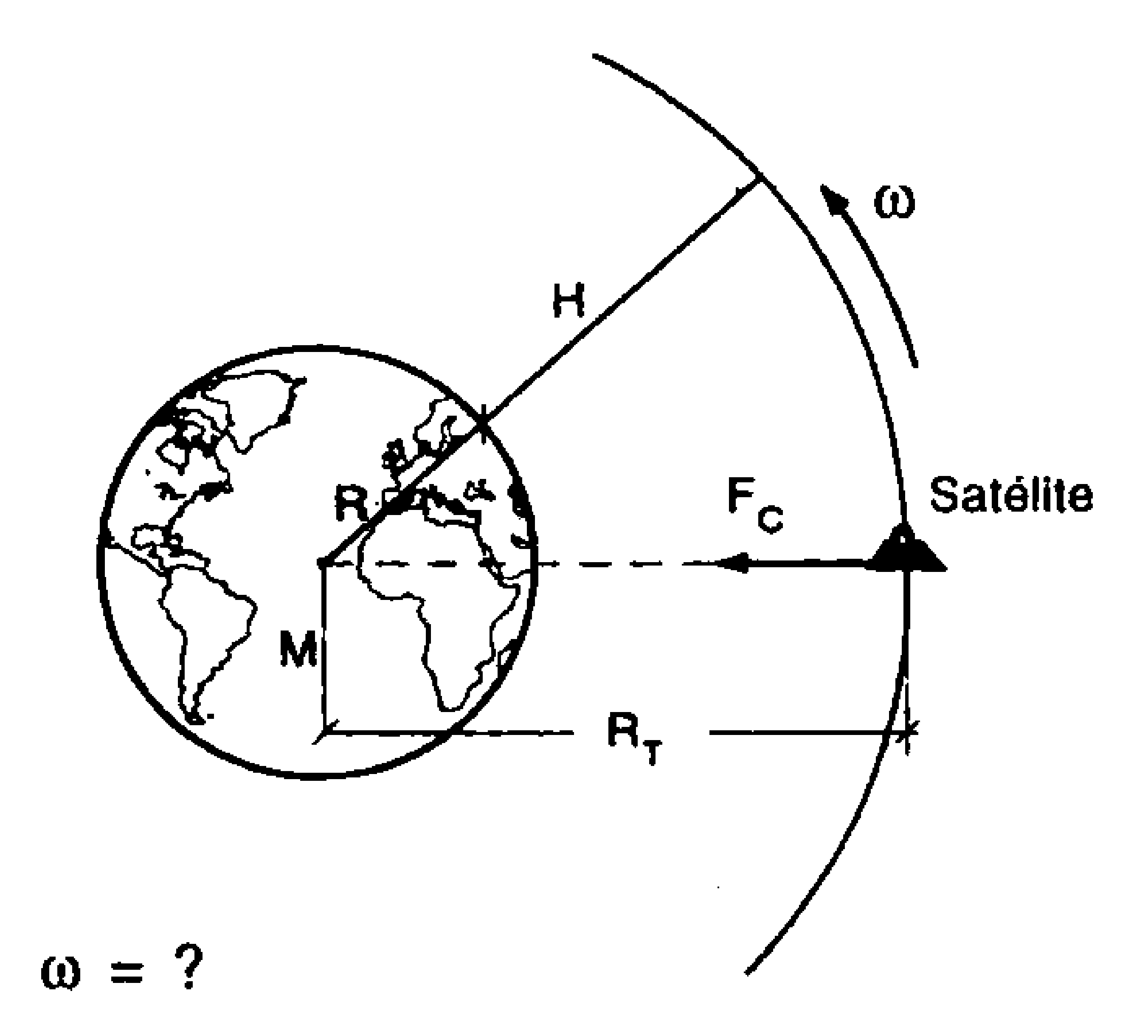
En (4): $2(700\ N) = w_2$

$1\,400\ N = w_2$

Rpta.: Pesaría 1 400 N

PROBLEMA 12. Un satélite artificial de masa "m" está orbitando circularmente a una distancia "H" sobre la superficie de la Tierra cuya masa es "M". Si el radio de la Tierra es "R", hallar la velocidad angular del satélite.

RESOLUCIÓN:



$\omega = ?$

Para cualquier satélite:

$$\Sigma F_{radiales} = F_C = m\omega^2$$

$$F_C = m\omega^2 (R + H) \qquad (1)$$

Por otro lado recordando que:

$$F_C = G\frac{Mm}{(R+H)^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$m\omega^2(R + H) = G\frac{Mm}{(R+H)^2}$$

Rpta.: $\omega = \dfrac{1}{R+H}\sqrt{\dfrac{GM}{R+H}}$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Si se duplicara la masa de la Luna pero se mantuviera la misma órbita. ¿Cuál sería la relación de sus períodos respecto a la Tierra?

Rpta.: $T_1 = T_2$

2. Calcular la densidad de un planeta de forma esférica, si un satélite gira a su alrededor en una órbita circular con un período "T" y a una distancia de la superficie del planeta igual a la mitad de su radio. "G" es la constante de gravitación universal.

Rpta.: $\delta = \dfrac{81\pi}{8GT^2}$

3. Del problema anterior calcular la masa del planeta

Rpta.: $m = \dfrac{27\pi^2 R^3}{2GT^2}$

4. ¿A qué distancia de la Tierra, el campo gravitacional entre la Luna y la Tierra es cero? "d" es la distancia entre el centro de la Tierra y la Luna, "M_T" la masa de la Tierra y "M_L" la masa de la Luna.

Rpta.: $\dfrac{d}{\sqrt{\dfrac{M_L}{M_T}}+1}$

5. En la superficie de la Luna la gravedad es $g = 167\ cm/s^2$. Calcular su valor a una distancia de 5 radios del centro de la Luna.

Rpta.: $6{,}68\ \dfrac{cm}{s^2}$

6. Hallar la velocidad de un satélite que se encuentra en órbita circular de radio "r". El satélite gira alrededor de un planeta donde "g_0" es la aceleración de la gravedad en su superficie y "R" es su radio.

Rpta.: $R\left(\dfrac{g_0}{r}\right)^{\frac{1}{2}}$

7. Dos cuerpos se atraen con una fuerza de 800 N. Si uno de ellos duplica su masa y el otro la triplica, y la distancia entre ellos se cuadriplica. ¿Cuál es la nueva fuerza de atracción gravitatoria entre ellos?

Rpta.: 300 N

8. Calcular la aceleración de la gravedad en la superficie del Sol, considerando el radio del Sol 100 veces el radio terrestre, y su masa 250 000 veces la masa de la Tierra.

Rpta.: $g_{SOL} = 245\ m/s^2$

"La furia de la naturaleza es superior a cualquier acción del hombre, no avisa, no respeta, no tolera"

Juan Goñi Galarza

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 11

ESTÁTICA DE FLUIDOS (HIDROSTÁTICA)

Estática de los Fuidos es el estudio de los efectos físicos que soporta un cuerpo cuando se encuentra sumergido en un fluido en reposo. Cuando el fluido es el agua se llama "Estática del agua" o "Hidrostática"; por extensión, al estudio de los efectos de los fluidos líquidos en reposo se acostumbra a llamar, en general, "HIDROSTÁTICA".

Se denomina **fluido** a las sustancias que se caracterizan por fluir y/o expandirse libremente como es el caso de los líquidos y gases, los cuales se adaptan fácilmente a la forma del recipiente que los contiene y ejercen presión sobre las paredes en contacto de los mismos. Así mismo los fluidos ejercen presión sobre los cuerpos sumergidos en ellos.

PRESIÓN "P"

Es una magnitud física cuyo valor mide el efecto que origina una fuerza perpendicular al área de una superficie.

$$P = \frac{F_n}{A} \qquad (I)$$

Donde:

- F_n : Es la fuerza normal o perpendicular a la superficie, en newton "N"
- A : Área de la superficie, en "m²"
- P : Es la presión, en "Pa"

UNIDAD DE MEDIDA:

La unidad de medida de la presión en el SI, es el pascal "Pa".

$$1 \text{ pascal} = \frac{1 \text{ newton}}{1 \text{ m}^2} = 1 \text{ Pa}$$

EQUIVALENCIA:

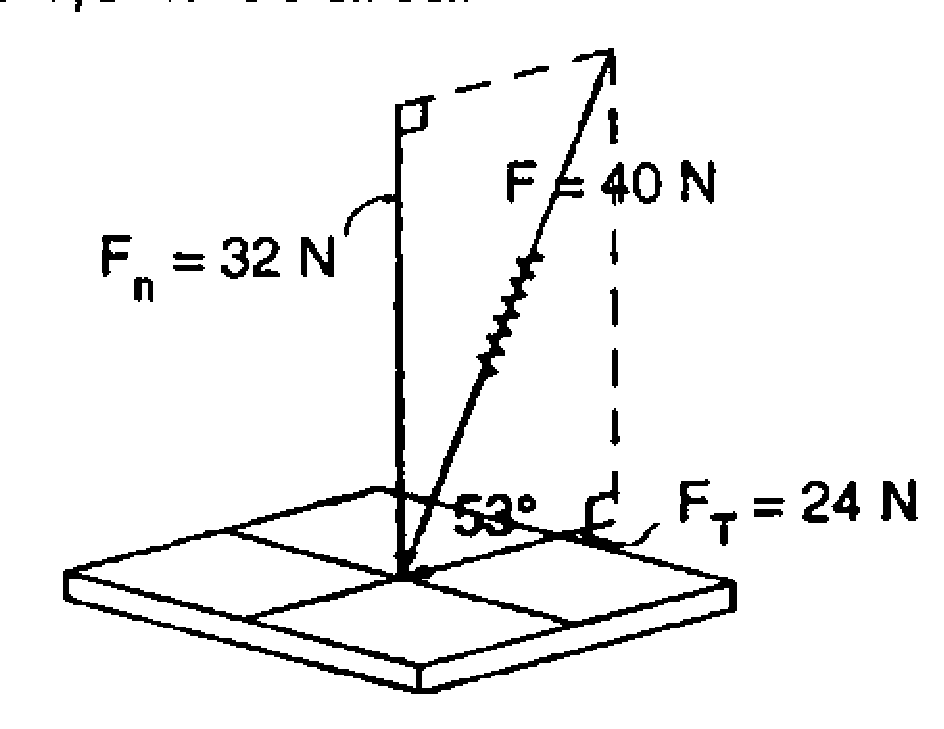
$$10^5 \text{ Pa} <> 1 \text{ atm} <> 1 \text{ bar}$$

La ecuación (I) anterior, nos expresa que la presión varía en forma directamente proporcional con la fuerza normal y varía en forma inversamente proporcional con el área.

¿Una misma fuerza puede originar efectos diferentes? Sí, prefijando una misma fuerza F, ésta puede originar diferentes efectos de presión:

Cuando la fuerza F actúa sobre un área "muy pequeña" el efecto de presión es "muy considerable". Mientras que si la fuerza misma F actúa sobre un área "grande" el efecto de la presión es "mínimo".

Ejemplo 1. Calcular el efecto de presión que origina una fuerza F = 40 N, inclinada, tal como se muestra, en una superficie de 1,6 m² de área.



RESOLUCIÓN :

Descomponiendo F en sus componentes rectangulares, sólo ejerce presión la componente normal de F, es decir F_n.

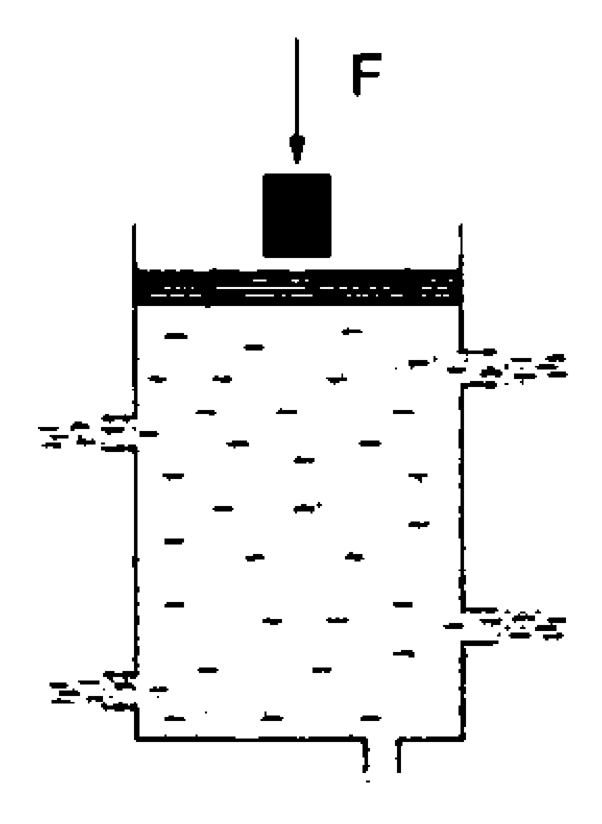
$$P = \frac{F_n}{A} = \frac{32\ N}{1{,}6\ m^2} = 20\ Pa$$

¿Qué nos expresa una presión de 20 Pa? Nos expresa que por cada m² de superficie actúa una fuerza de 20 N.

PRINCIPIO DE PASCAL

"La presión transmitida o comunicada a un líquido encerrado en un recipiente, se transmite con igual valor en todas las direcciones".

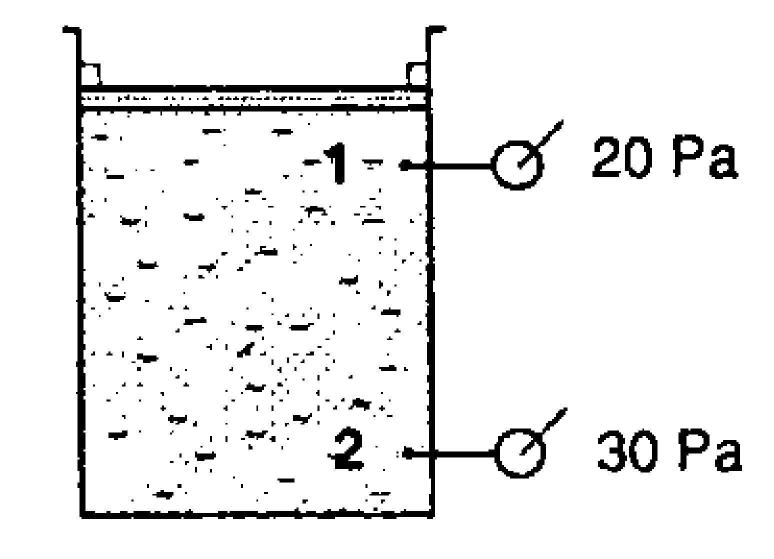
Recordemos que los líquidos se caracterizan por ser prácticamente incompresibles.

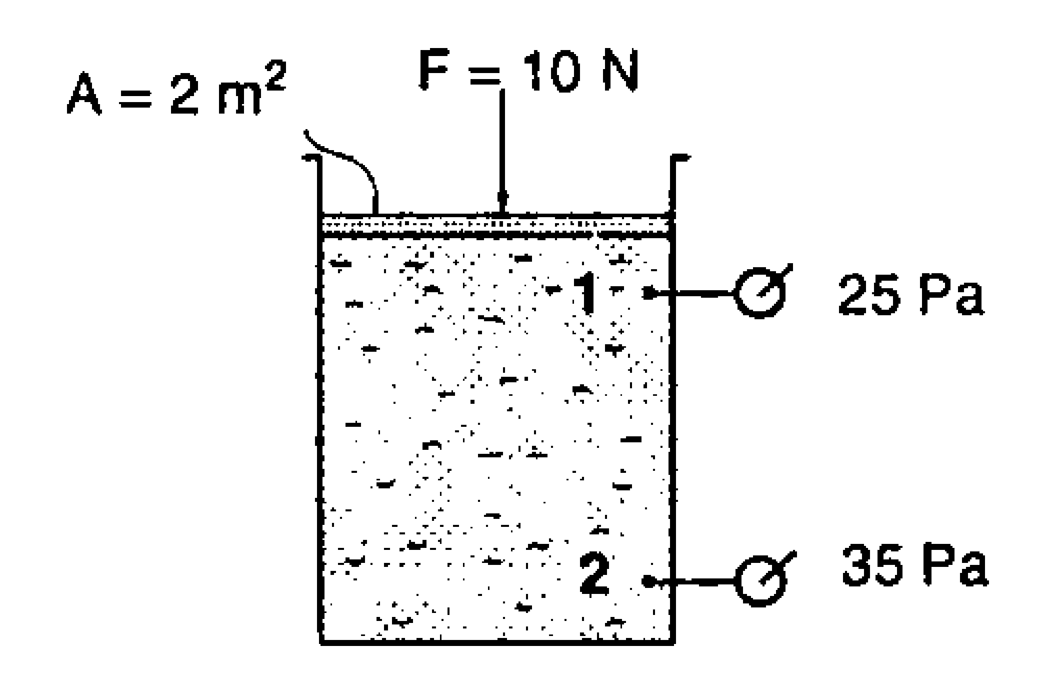


Ejemplo 1. La fuerza "F" sobre el émbolo es de 600 N, el área "A" del émbolo es de 20 cm². Cada uno de los orificios es de 1 cm², la fuerza con que sale el líquido por cada uno de los orificios es de 30 N, veamos:

$$T = \frac{F}{A} = \frac{600\ N}{20\ cm^2} = 30\ \frac{N}{cm^2}$$

Ejemplo 2.
Sea un recipiente lleno del líquido, al cual se le conectan dos manómetros en los niveles **1** y **2**. Observamos lo siguiente:





I. Los manómetros nos indica la presión que existe en los niveles **1** y **2**.

II. Ahora, sobre el émbolo se ejerce una presión externa de 10 N:

$$P = \frac{F}{A} = \frac{10\ N}{2\ m^2} = 5\ Pa$$

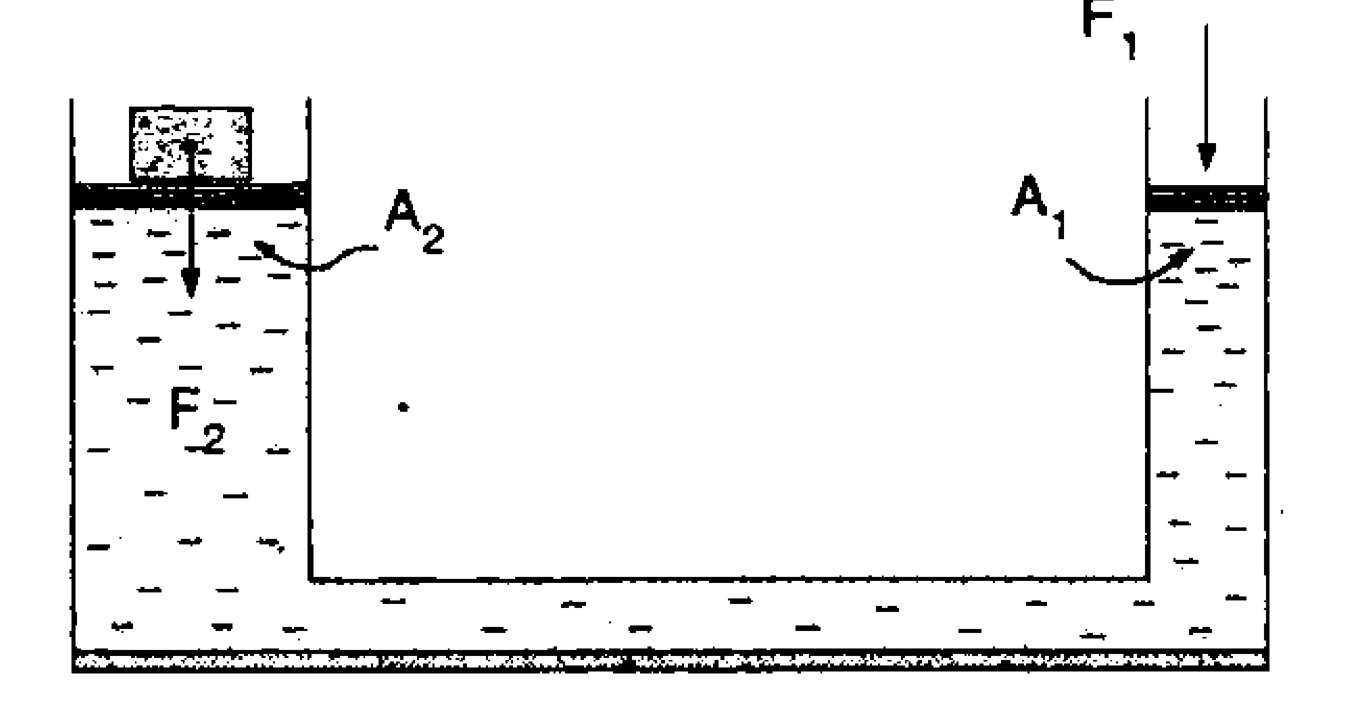
La presión transmitida es de 5 Pa. Esta presión se transmite en todas las direcciones. Luego las presiones en **1** y **2** experimentan el mismo aumento.

PRENSA HIDRÁULICA

En una prensa hidráulica se aprovecha la multiplicación de la fuerza, aún cuando la presión por unidad de área es la misma, así:

$$P = \frac{F_1}{A_1} \qquad (1)$$

$$P = \frac{F_2}{A_2} \qquad (2)$$



Igualando (1) y (2): $\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$

Lo que quiere decir que: "las fuerzas en los émbolos de una prensa hidráulica son directamente proporcionales a sus áreas".

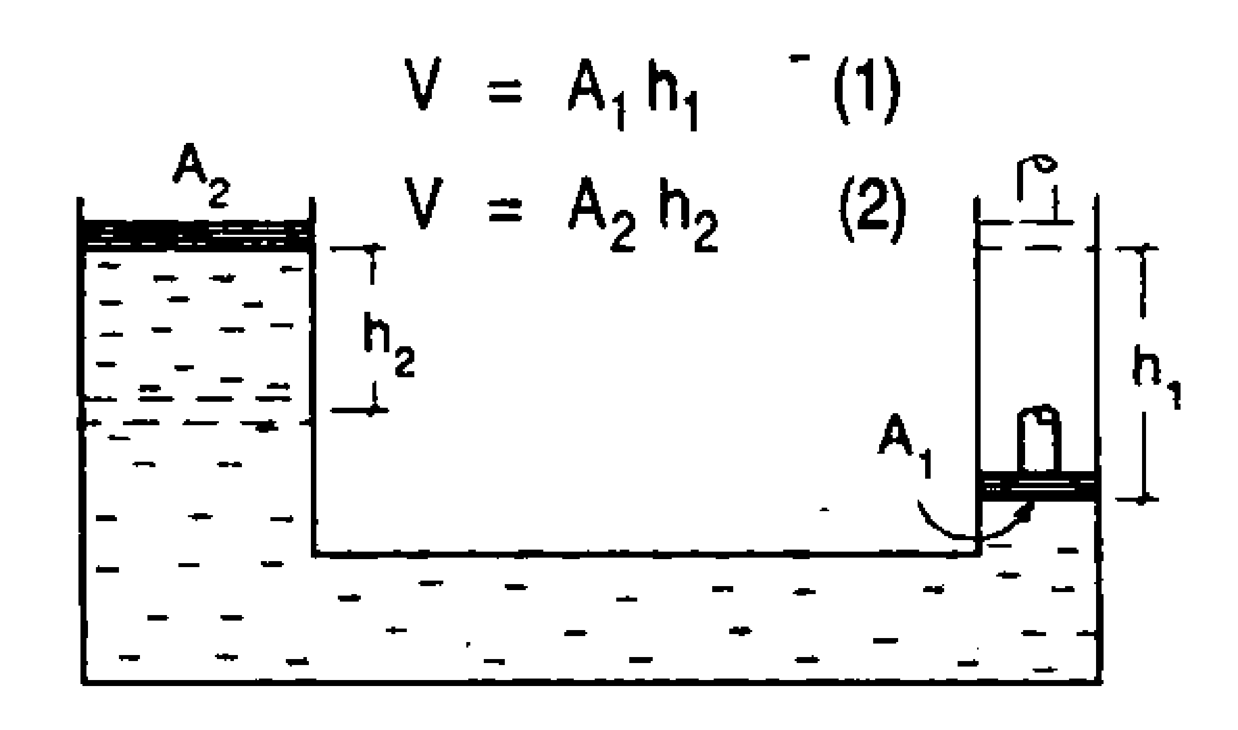
http://librosysolucionarios.net

CARRERA DE LOS ÉMBOLOS

Como el volumen del líquido desplazado en el émbolo chico es el mismo volumen desplazado en el émbolo grande, se tiene:

$$V = A_1 h_1 \quad (1)$$

$$V = A_2 h_2 \quad (2)$$



Igualando (1) y (2):

$$A_1 h_1 = A_2 h_2$$

$$\boxed{\frac{h_1}{A_2} = \frac{h_2}{A_1}}$$

Lo que quiere decir que "la carrera o desplazamiento de los émbolos de una prensa hidráulica son inversamente proporcionales a las áreas".

Ejemplo 1. Para hacer funcionar el elevador de automóviles de una estación de servicio, se utiliza una presión de 6 N/cm². ¿Qué peso se podrá levantar si el diámetro del pistón grande mide 20 cm y el área del pistón chico es 1 cm²?

RESOLUCIÓN: $F_1 = 60$ N ; $F_2 = ?$

$A_1 = 1 \text{ cm}^2 = 10^{-4} \text{ m}^2$

$d = 20 \text{ cm} = 0{,}2 \text{ m}$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$\therefore \quad F_2 = F_1 \frac{A_2}{A_1} \qquad \text{(a)}$$

Pero: $A_2 = \pi r^2 = \dfrac{\pi d^2}{4}$

$$A_2 = \frac{3{,}14 \times (0{,}2 \text{ m})^2}{4}$$

$$A_2 = 0{,}031\,4 \text{ m}^2$$

$$\therefore \quad F_2 = 60 \text{ m} \times \frac{0{,}031\,4 \text{ m}^2}{10^{-4} \text{ m}^2}$$

Rpta.: $F_2 = 18\,840$ N

OBSERVACIÓN: Obsérvese cómo ha aumentado la fuerza

Ejemplo 2. Los pistones de una prensa hidráulica tienen 20 cm y 2 cm de diámetro. ¿Qué fuerza debe aplicarse al pistón chico para obtener en el pistón grande una fuerza de 5×10^4 N?

RESOLUCIÓN: $d_1 = 2$ cm

$F_1 = ?$ $\qquad d_2 = 20$ cm

$$F_2 = 5 \times 10^4 \text{ N}$$

$$\frac{F_1}{A_1} = \frac{F_2}{A_2}$$

$$F_1 = F_2 \frac{A_1}{A_2} \qquad \text{(I)}$$

Sabiendo que:

$$A_1 = \frac{\pi d_1^2}{4} \quad \text{y} \quad A_2 = \frac{\pi d_2^2}{4}$$

En (I): $\quad F_1 = F_2 \left(\dfrac{d_1}{d_2}\right)^2$

$$F_1 = 5 \times 10^4 \text{ N} \left(\frac{2 \text{ cm}}{20 \text{ cm}}\right)^2$$

Rpta.: $F_1 = 500$ N

Ejemplo 3. Suponiendo que en el problema anterior la carrera del émbolo chico es de 30 cm. ¿Cuál será la carrera o desplazamiento del émbolo grande?

RESOLUCIÓN: $\quad A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$

http://librosysolucionarios.net

$h_2 = ?$ $\qquad A_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$

$h_1 = 30 \text{ cm}$

Sabiendo que: $\dfrac{h_1}{A_2} = \dfrac{h_2}{A_1}$

$$\therefore \quad h_2 = h_1 \frac{A_1}{A_2} = 30 \text{ cm} \frac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}}$$

$$h_2 = 30 \text{ cm} \frac{(2 \text{ cm})^2}{(20 \text{ cm})^2} = 30 \text{ cm} \frac{1}{100}$$

Rpta.: $h_2 = 3 \text{ mm}$

El desplazamiento es pequeñísimo

Ejemplo 4. ¿Cuál debe ser la relación de los diámetros de los émbolos de una prensa hidráulica para que con una fuerza de 200 N se levante un peso de 2×10^4 N?

RESOLUCIÓN :

Se sabe: $\dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{F_1}{F_2}$ (I)

Pero: $A_1 = \dfrac{\pi d_1^2}{4}$

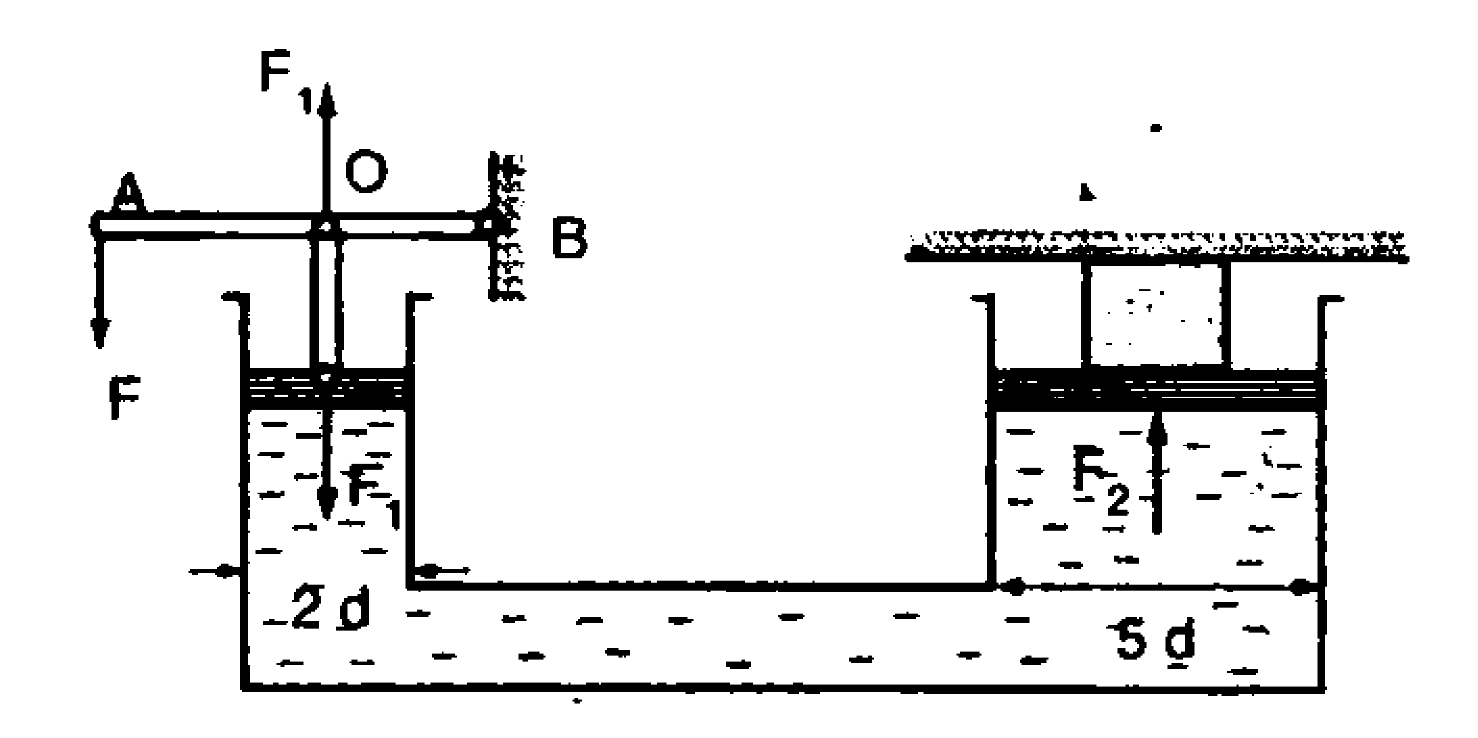
$A_2 = \dfrac{\pi d_2^2}{4}$

sustituyendo valores: $\dfrac{\frac{\pi d_1^2}{4}}{\frac{\pi d_2^2}{4}} = \dfrac{200 \text{ N}}{20\,000 \text{ N}}$

Rpta.: $\dfrac{d_1}{d_2} = \dfrac{1}{10}$

Ejemplo 5. Haciendo una fuerza de 100 N en la palanca, conforme se indica en la figura, y con los datos indicados en la misma, ¿cuál será la fuerza que se produce en el émbolo grande?

AB = 30 cm ; BO = 5 cm



RESOLUCIÓN: Cálculo de la fuerza F_1 creada por la acción de la fuerza F sobre la palanca:

$$\Sigma M_B \doteq 0$$

$$F \,.\, AB = F_1 \,.\, BO$$

$$F_1 = F \cdot \frac{AB}{BO} = 100 \text{ N} \cdot \frac{30 \text{ cm}}{5 \text{ cm}}$$

$$F_1 = 600 \text{ N}$$

Recordando que:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{D_2^2}{D_1^2} \quad \Rightarrow \quad F_2 = F_1 \frac{D_2^2}{D_1^2}$$

$$F_2 = 600 \text{ N} \frac{(5\,d)^2}{(2\,d)^2}$$

Rpta.: $F_2 = 3\,750 \text{ N}$

PRINCIPIO DE LA HIDROSTÁTICA

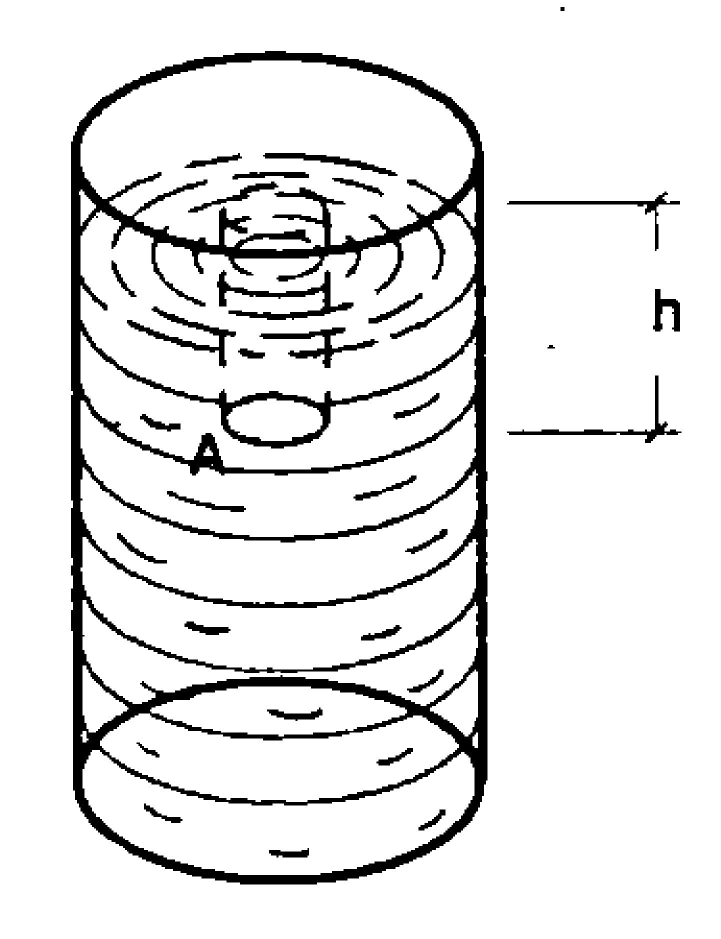
La presión que soporta un cuerpo sumergido en un líquido, es igual en toda su superficie; en otras palabras, la presión hidrostática es igual en todas las direcciones.

CÁLCULO DE LA PRESIÓN HIDROSTÁTICA

La presión que soporta una superficie cualquiera depende de la fuerza que se le aplique a esa superficie; en el caso de los líquidos sucede cosa igual, la fuerza que actúa sobre la superficie "A", en el fondo, es el peso del cilindro líquido idealizado que se encuentra sobre esa superficie.

http://librosysolucionarios.net

"La presión hidrostática es directamente proporcional a la profundidad "h" y al peso específico "ρ" del líquido".



En efecto sea una superficie "A" a una profundidad "h":

$$P = \frac{F}{A} \qquad (I)$$

Pero: F = Peso del líquido

F = Volumen x Peso específico

Luego: $F = V.\rho = A.h.\rho$

En (I): $P = \frac{A.h.\rho}{A}$

de donde: $\boxed{P = h.\rho}$

Ejemplo: Calcular la presión hidros-tática que soporta cada cm² del cuerpo de un buzo que está sumergido a 15 m de profundidad en el mar. El peso específico del agua de mar es $10{,}05 \cdot 10^3\ N/m^3$.

RESOLUCIÓN: $\rho = 10{,}5 \cdot 10^3\ N/m^3$

$h = 15\,m$ $\qquad P = ?$

Se sabe que; $P = h.\rho \Rightarrow$

$$P = 15\,m \cdot 10{,}5 \cdot 10^3\ N/m^3$$

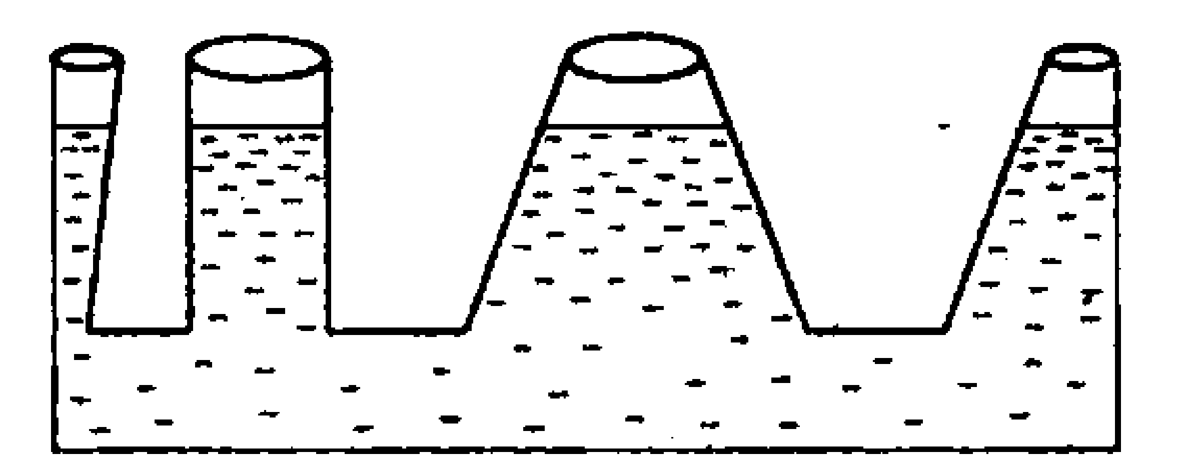
$$P = 150{,}75 \cdot 10^3\ N/m^2$$

$$P = 150{,}7 \cdot 10^3\ N/10^4\ cm^2$$

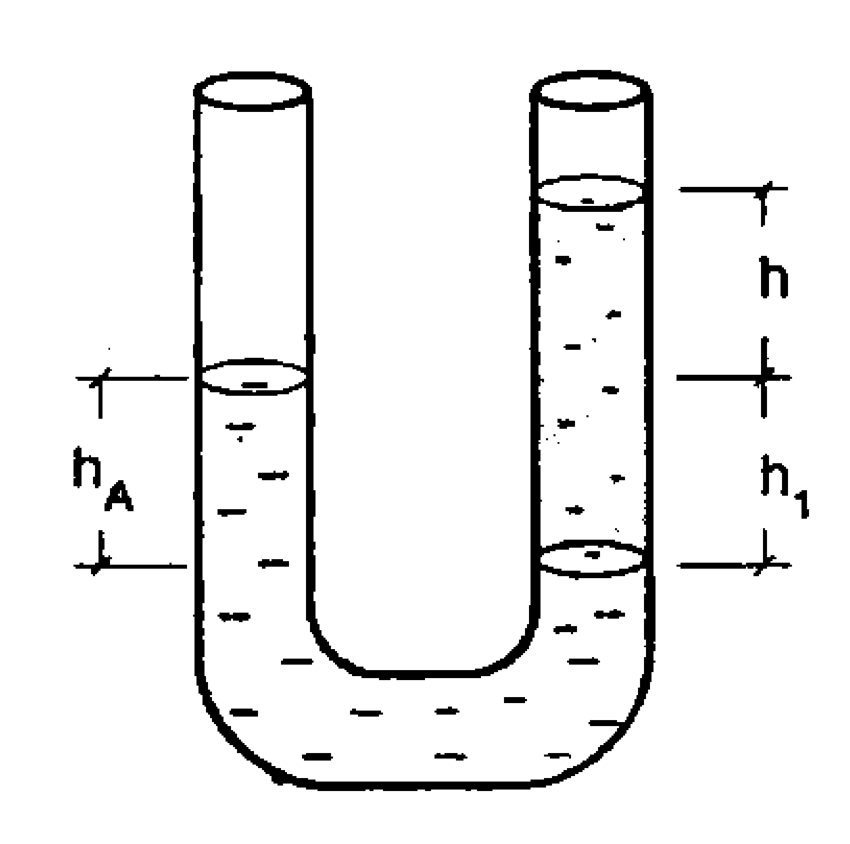
Rpta.: $P = 15{,}07\ N/cm^2$

VASOS COMUNICANTES

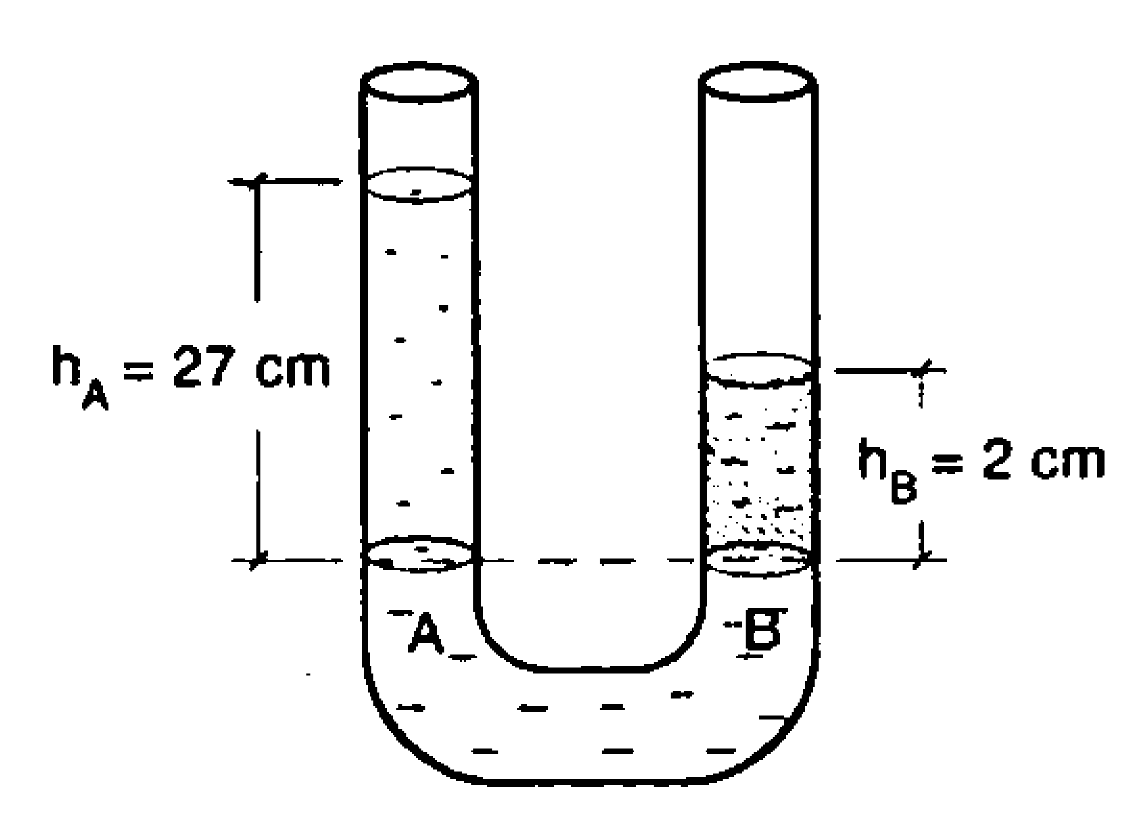
Cuando recipientes de diferentes formas están conectados entre sí, el líquido que se les llena alcanza en todos el mismo nivel.



Sin embargo, si por ejemplo, en un recipiente en forma de U, se le llena de líquidos distintos en los brazos, en tal caso, los niveles que alcanzan son distintos. Por ejemplo la diferencia es "h" cuando se llena, digamos: agua y aceite.



Ejemplo: Calcular, en la figura, el peso específico del líquido "B", si el líquido "A" es agua.



RESOLUCIÓN:

$$h_A = 27\ cm \quad ; \quad h_B = 2\ cm$$

$$\rho_A = 9{,}8 \times 10^3\ \frac{N}{m^3} \quad ; \quad \rho_B = ?$$

Las presiones en las superficies "A" y "B" son iguales por estar en la misma horizontal, es decir que, en ese nivel se tiene:

$$P_A = P_B \qquad (1)$$

http://librosysolucionarios.net

Donde: $P_A = h_A \cdot \rho_A$

y: $P_B = h_B \cdot \rho_B$

Sustituyendo en (1):

$$h_A\,\rho_A = h_B\,\rho_B$$

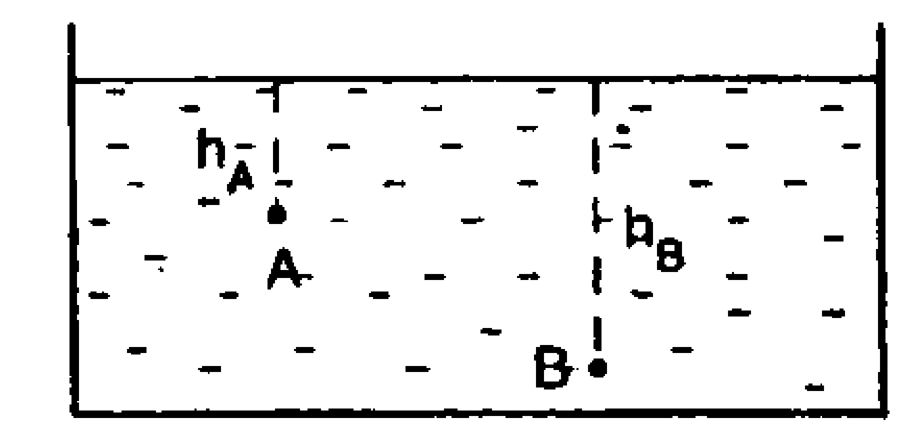
$$\therefore \quad \rho_B = \rho_A \frac{h_A}{h_B}$$

Sustituyendo datos:

Rpta.: $\rho_B = 132{,}3 \times 10^3 \ \frac{N}{m^3}$

LEY FUNDAMENTAL DE LA HIDROSTÁTICA

"La diferencia de presiones entre dos puntos de un mismo líquido, es igual al peso específico del líquido por la diferencia de profundidades".



Sean los puntos "A" y "B" a diferentes profundidades:

$$P_A = h_A \cdot \rho \qquad (1)$$

$$P_B = h_B \cdot \rho \qquad (2)$$

(2)-(1): $P_A - P_B = \rho\,(h_A - h_B)$

$$\boxed{\Delta P = \rho\,(h_A - h_B)}$$

Ejemplo: Hallar la diferencia de presiones entre dos puntos situados a 5 cm y 12 cm de profundidad, respectivamente, de la superficie del mercurio en un recipiente ($r = 133,28 \cdot 10^3$ N/m³).

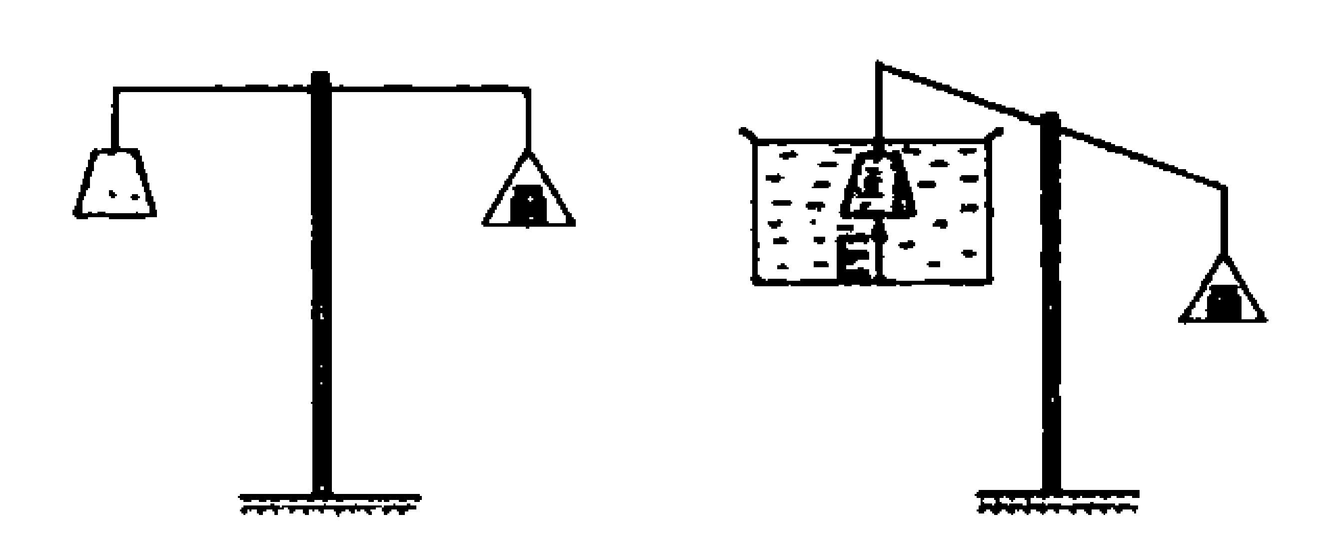
RESOLUCIÓN: $\Delta P = \rho\,(h_A - h_B)$

$$\Delta P = 133{,}28 \cdot 10^3 \ N/m^2\ (0{,}12\ m - 0{,}05\ m)$$

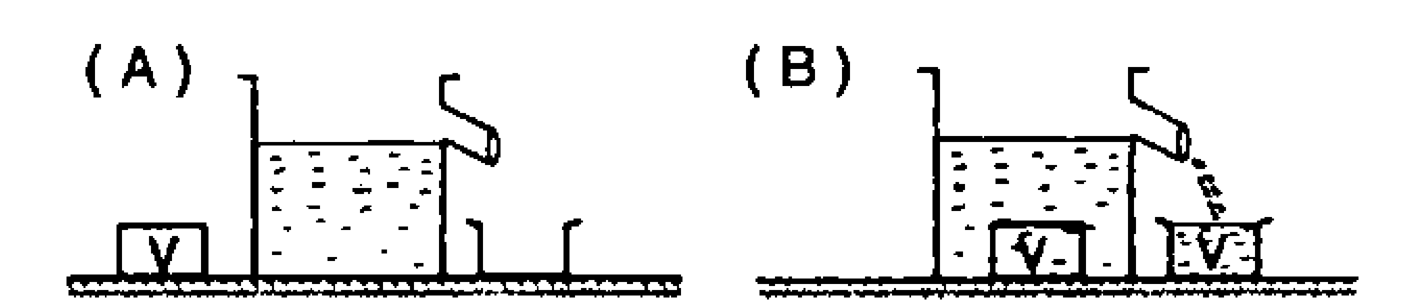
Rpta.: $\Delta P = 9{,}33 \cdot 10^3$ Pa

EMPUJE HIDROSTÁTICO

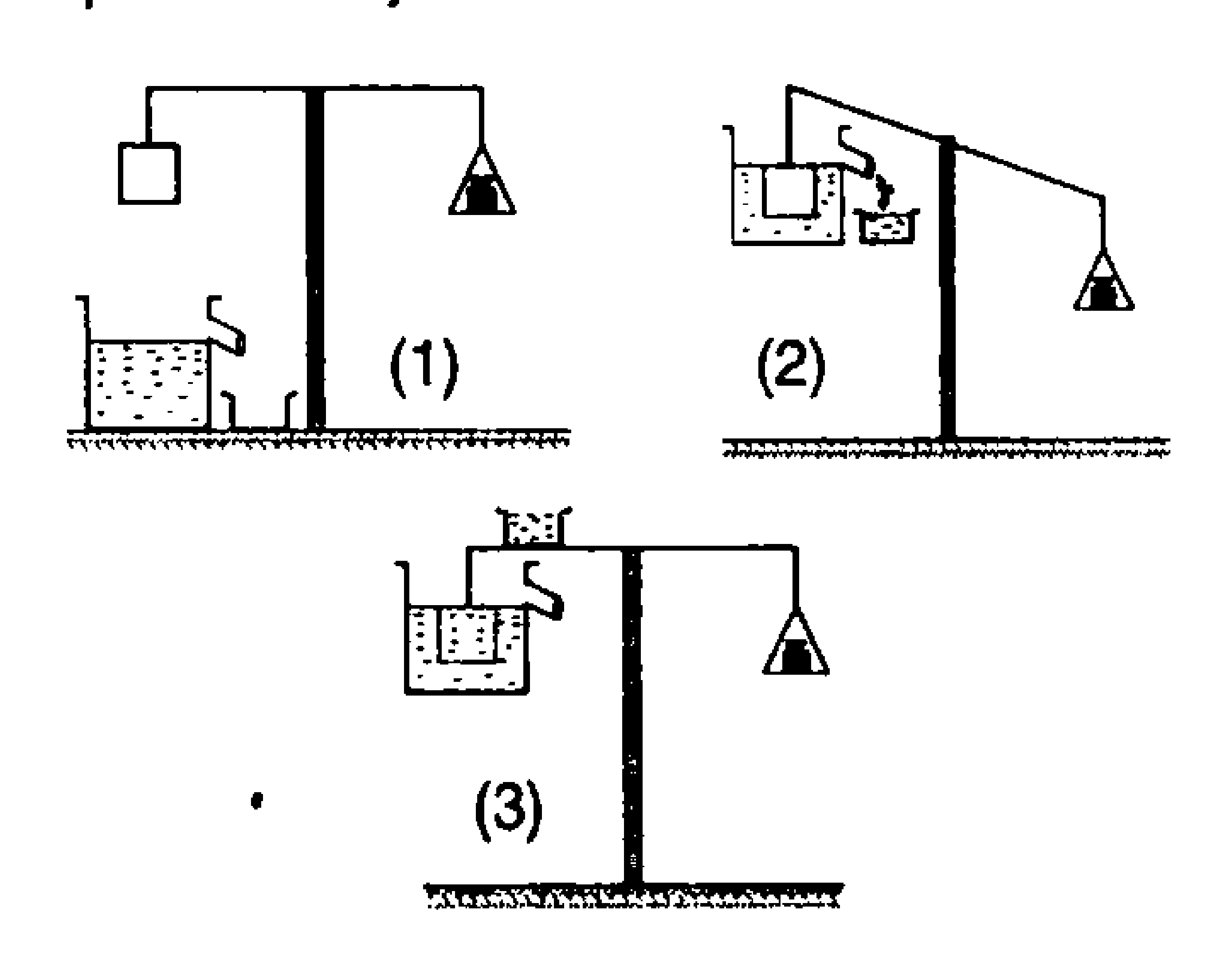
1. Todo cuerpo sumergido en un fluido recibe una fuerza de abajo hacia arriba, perdiendo aparentemente una parte de su peso, esa fuerza se llama EMPUJE.



2. El volumen de un líquido desalojado por un cuerpo que se sumerge en un líquido, es igual al volumen del cuerpo.



3. La aparente pérdida de peso, o empuje, que experimenta un cuerpo sumergido en un líquido es igual al peso del volumen del líquido desalojado.

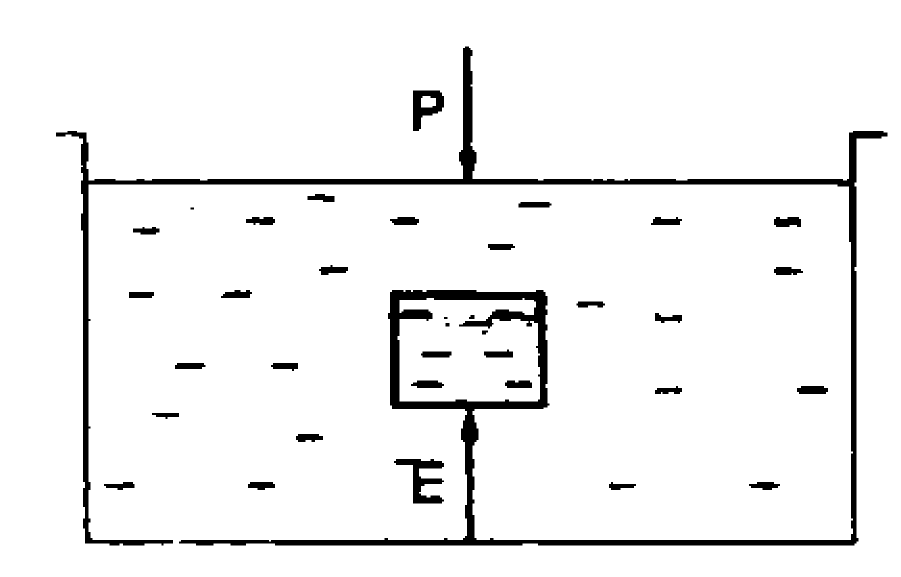


PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

"El empuje "E", o aparente pérdida de peso que experimenta un cuerpo sumergido en un líquido, es igual al peso del volumen del líquido que el cuerpo desaloja".

$$\boxed{E = V \cdot r}$$

http://librosysolucionarios.net



E = Empuje del líquido, igual a la aparente pérdida de peso del cuerpo.

V = Volumen del líquido desalojado igual al volumen del cuerpo.

ρ = Peso específico del líquido.

Ejemplo: ¿Cuál es el volumen de un cuerpo que al ser sumergido en el agua experimenta una aparente pérdida de peso de 0,6 N?

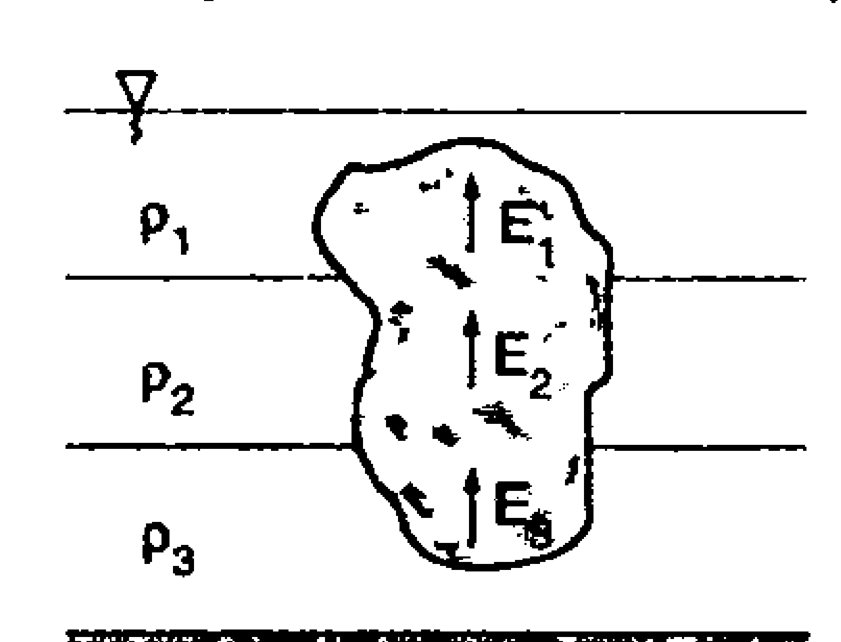
RESOLUCIÓN : $E = V r$

de donde: $V = \dfrac{E}{\rho}$

$$\therefore V = \frac{0{,}6\ N}{9{,}8 \cdot 10^3\ N/m^3} = 6 \cdot 10^{-5}\ m^3$$

OTRAS CONSIDERACIONES SOBRE LA FLOTACIÓN DE LOS CUERPOS

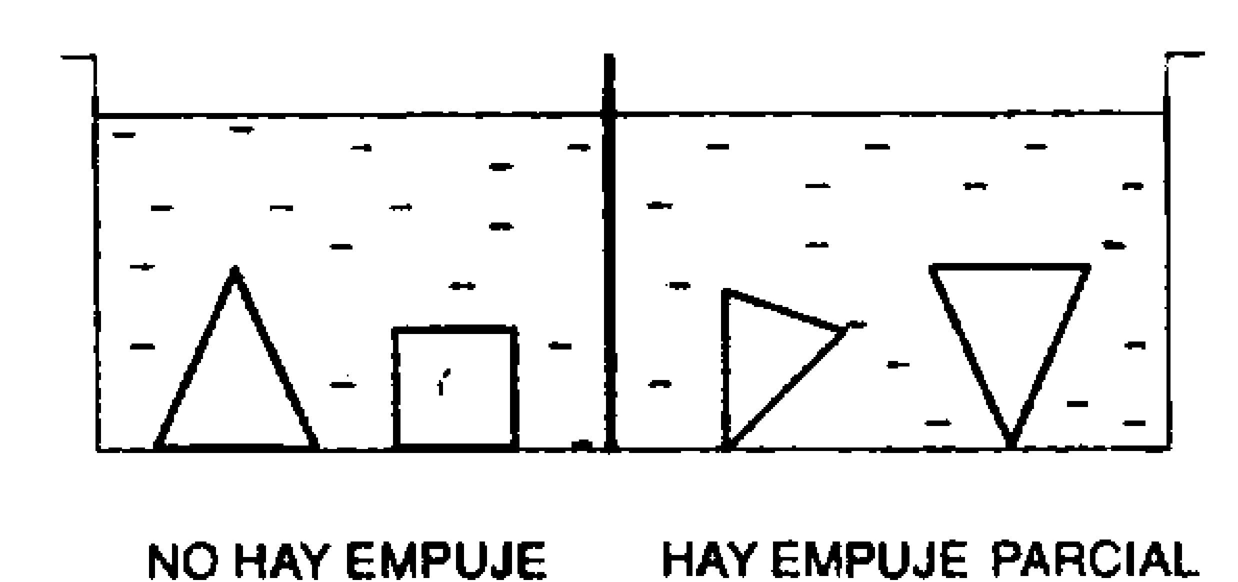
a) Cuando un cuerpo se encuentra flotando dentro de varios líquidos no miscibles (estratificados), cada uno de ellos, independientemente, ejerce su fuerza de empuje.



$$E_1 = V_1\ \rho_1$$
$$E_2 = V_2\ \rho_2$$
$$E_3 = V_3\ \rho_3$$

$$\boxed{E_{TOTAL} = \Sigma\ \text{EMPUJES}}$$

b) Para que exista fuerza de empuje es necesario que la cara inferior del cuerpo esté en contacto con el líquido.



NO HAY EMPUJE HAY EMPUJE PARCIAL

c) La fuerza de empuje tiene como punto de aplicación el **centro de gravedad de la parte sumergida**, llamada también **centro de empuje** "C.E."

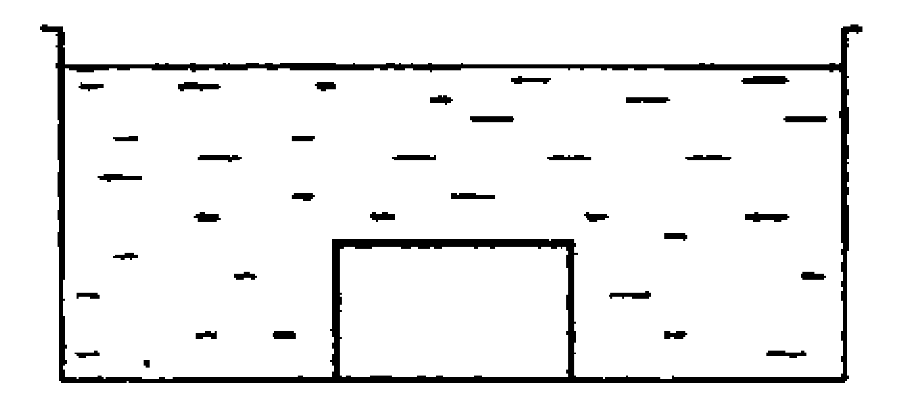
POSICIONES DE UN CUERPO EN EL SENO DE UN LÍQUIDO

1. **"El cuerpo se hunde"**, esto es porque el peso específico del cuerpo es mayor que el del líquido.

$$P_C = V \cdot \rho_{cuerpo} \qquad (1)$$
$$E = V \cdot \rho_{líquido} \qquad (2)$$

Dividiendo (1) ÷ (2) :

$$\frac{P_{cuerpo}}{E} = \frac{\rho_{cuerpo}}{\rho_{líquido}}$$

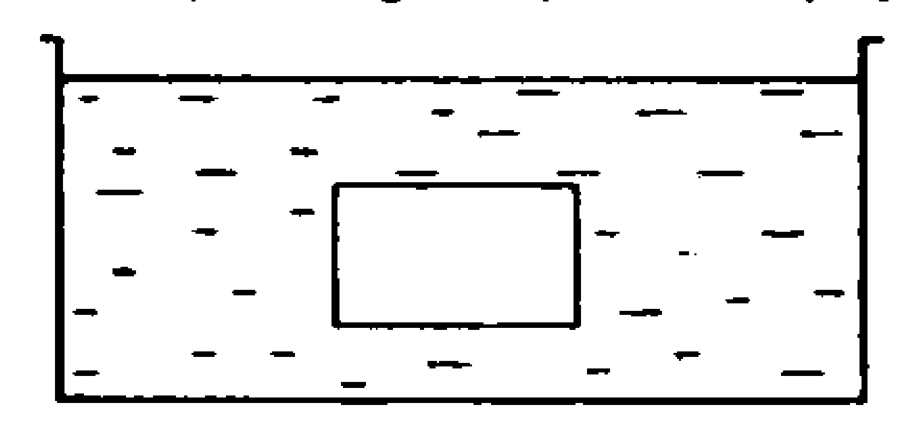


Si el cuerpo se hunde es porque $P_{cuerpo} > E$, es decir:

$$\boxed{\rho_{cuerpo} > \rho_{líquido}}$$

http://librosysolucionarios.net

2. **"El cuerpo flota"**, es decir se mantiene "entre dos aguas", esto es por que el peso del cuerpo es igual que el empuje.

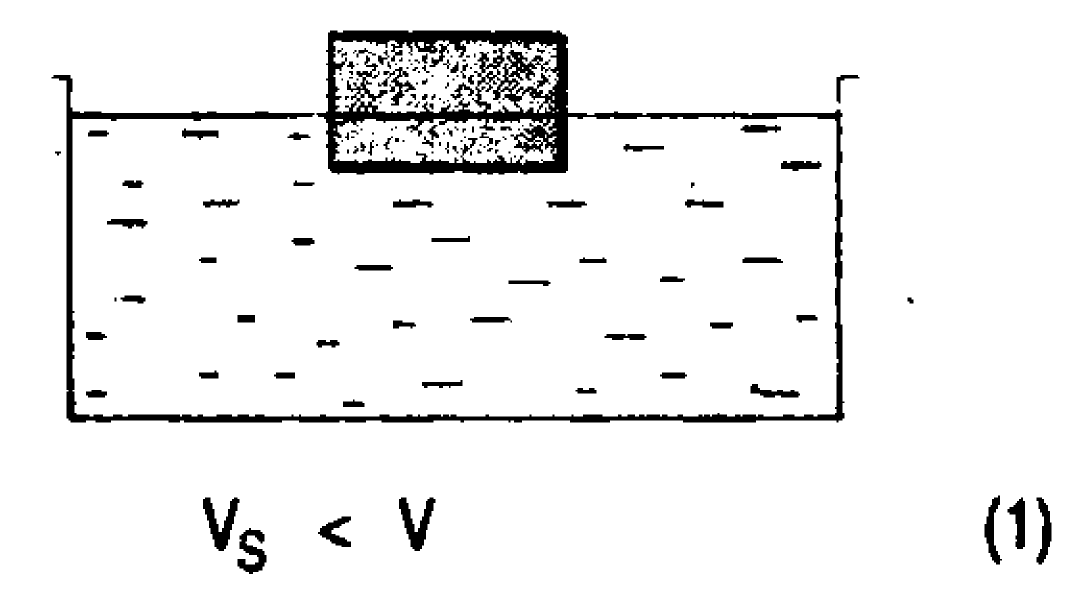


$$P_{cuerpo} = E$$

ó $\quad V \cdot \rho_{cuerpo} = V \cdot \rho_{líquido}$

$\therefore \quad \rho_{cuerpo} = \rho_{líquido}$

3. **"El cuerpo emerge"**, es decir, sólo una parte del cuerpo está hundido, esto es: el peso específico del cuerpo es menor que el del líquido.



$$V_S < V \qquad (1)$$

V_S = Volumen sumergido

V_C = Volumen total del cuerpo

$$E = V_S \cdot \rho_{líquido}$$

$$V_S = \frac{E}{\rho_{líquido}} \qquad (2)$$

$$W = V_C \cdot \rho_{cuerpo}$$

$$V_C = \frac{W}{\rho_{cuerpo}} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\frac{E}{\rho_{líquido}} < \frac{W}{\rho_{cuerpo}}$$

Como el cuerpo está en equilibrio:

$$E = W \qquad (W = \text{peso})$$

Luego: $\dfrac{1}{\rho_{líquido}} < \dfrac{1}{\rho_{cuerpo}}$

de donde: $\boxed{\rho_{cuerpo} < \rho_{líquido}}$

RELACIÓN ENTRE EL EMPUJE Y EL PESO ESPECÍFICO DE LOS LÍQUIDOS

El valor del empuje que soporta un cuerpo depende del líquido en el cual se ha sumergido. A mayor peso específico de líquido mayor empuje, es decir: **"El empuje que soporta un cuerpo, es directamente proporcional al peso específico del líquido".**

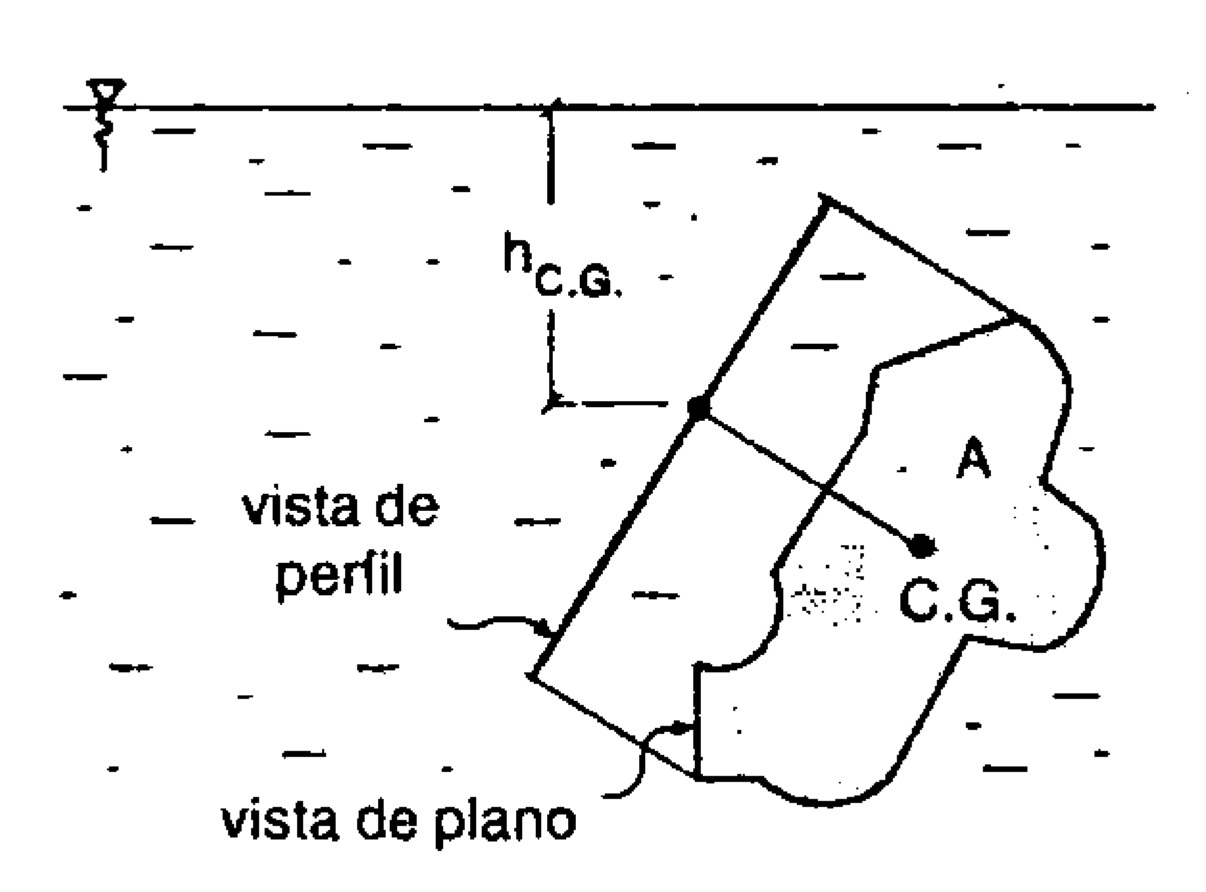
Sean dos líquidos distintos en los cuales se sumerge un mismo cuerpo:

$$V = \frac{E_1}{\rho_1} \quad ; \quad V = \frac{E_2}{\rho_2}$$

Luego: $\boxed{\dfrac{E_1}{P_1} = \dfrac{E_2}{P_2}}$

FUERZAS SOBRE SUPERFICIES PLANAS SUMERGIDAS

La fuerza que un líquido ejerce sobre una superficie plana, sumergida es igual a la fuerza que dicho líquido ejerce sobre el C.G. de la parte sumergida.



$h_{C.G.}$ = Profundidad a la que está sumergida el C.G.

A = Area de la placa

W = Peso

http://librosysolucionarios.net

de: $W = \dfrac{F}{A} \rightarrow F = W\,A$

Luego: $F = W_{C.G.}\,A$

ó: $$\boxed{F = \rho_{líquido} \cdot h_{C.G.} \cdot A}$$

Ejemplo: Calcular el peso específico de un líquido sabiendo que un cuerpo sumergido en el agua experimenta una pérdida de peso de 0,30 N y sumergido en el líquido 0,38 N.

RESOLUCIÓN :

$$E_1 = 0{,}30\text{ N} \quad ; \quad E_2 = 0{,}38\text{ N}$$

$$\rho_1 = 9{,}8 \times 10^3\ \text{N/m}^3$$

$$\rho_2 = ?$$

Se sabe que: $$\frac{E_1}{\rho_1} = \frac{E_2}{\rho_2}$$

$$\rho_2 = \rho_1 \frac{E_2}{E_1} = 9{,}8 \times 10^3\ \frac{\text{N}}{\text{m}^3} \times \frac{0{,}38\text{ N}}{0{,}30\text{ N}}$$

Rpta.: $\rho_2 = 12{,}41 \times 10^3\ \text{N/m}^3$

PESOS ESPECÍFICOS DE SÓLIDOS

SUSTANCIA	10^3 N/m³
Aluminio	26,48
Azúcar	15,68
Azufre	20,58
Cinc	70,07
Sal	20,58
Cobre	83,38
Corcho	2,16
Cristal	32,34
Cuarzo	25,97
Estaño	71,54
Granito	26,46
Hielo	8,99
Hierro	76,93
Níquel	84,28
Oro	189,1
Plata	102,9
Plomo	110,7
Platino	209,7
Tiza	24,70
Vidrio	24,50

PESOS ESPECÍFICOS DE LÍQUIDOS

SUSTANCIA	10^3 N/m³
Aceite de oliva	9,02
Agua a 4°	9,80
Agua de mar	10,05
Alcohol	7,74
Leche	10,09
Mercurio	123,3
Nafta	6,86

PESOS ESPECÍFICOS DE GASES (G) Y VAPORES (V) A 0°C Y 1 ATM

SUSTANCIA	N/m³
Anh. Carb. (G)	19,40
Agua (V)	3,77
Alcohol (V)	15,78
Amoníaco (G)	7,45
Cloro (G)	31,16
Cloroformo (V)	41,16
Éter sulfúrico (G)	25,38
Hidrógeno (G)	0,88
Mercurio (V)	68,31
Nitrógeno (G)	12,35
Oxígeno (G)	14,01

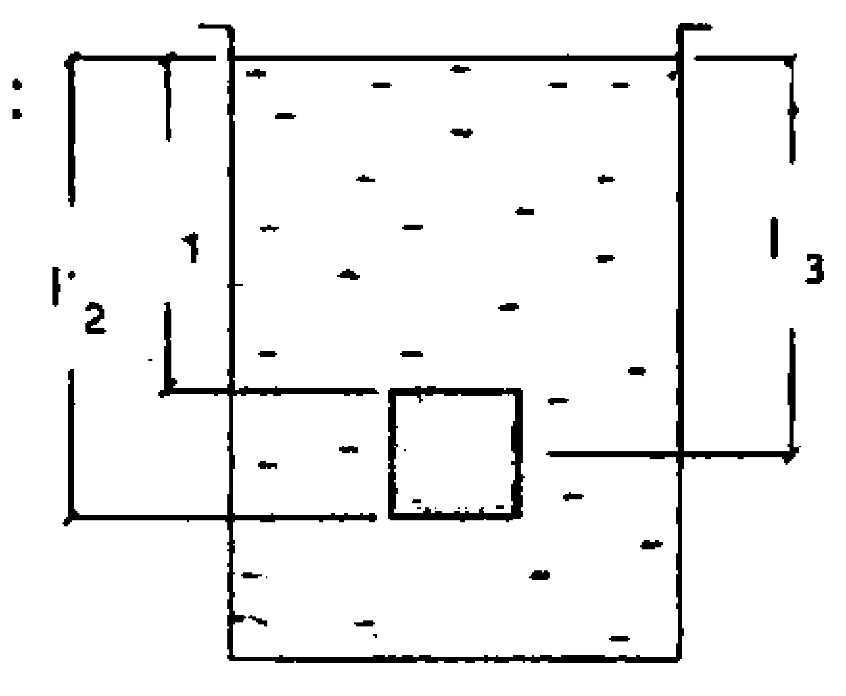
http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un cubo de 10 cm de arista está sumergido en el agua. Su cara superior está horizontal y a 20 cm por debajo del nivel libre del líquido. Calcular:

a) ¿Cuál es la fuerza hidrostática total que actúa sobre la cara superior?
b) ¿Cuál la fuerza total que actúa sobre la cara inferior y
c) ¿Cuál la fuerza total sobre cada una de las cuatro caras?

RESOLUCIÓN :



Arista = 10 cm = 0,1 m

h_1 = 20 cm = 0,20 m $\qquad F_1 = ?$

h_2 = 30 cm = 0,30 m $\qquad F_2 = ?$

h_3 = 25 cm = 0,25 m $\qquad F_3 = ?$

a) En la cara superior:

$\rho = 9{,}8 \,.\, 10^3\ N/m^3$ (del agua)

$$F_1 = h_1\ \rho\ A$$

$$F_1 = h_1\ \rho\ A$$

$$F_1 = 0{,}20\ m \,.\, 9{,}8 \,.\, 10^3\ \frac{N}{m^3} \cdot 0{,}01\ m^2$$

$$F_1 = 19{,}6\ N$$

b) En la cara inferior:

$$F_2 = P_2\ A$$

$$F_2 = 0{,}30\ m \,.\, 9{,}8 \,.\, 10^3\ \frac{N}{m^3} \cdot 0{,}01\ m^2$$

$$F_1 = 29{,}4\ N$$

c) En cada una de las caras laterales:

$$F_3 = h_3\ \rho\ A$$

$$F_3 = 0{,}25\ m \,.\, 9{,}8 \,.\, 10^3\ \frac{N}{m^3} \cdot 0{,}01\ m^2$$

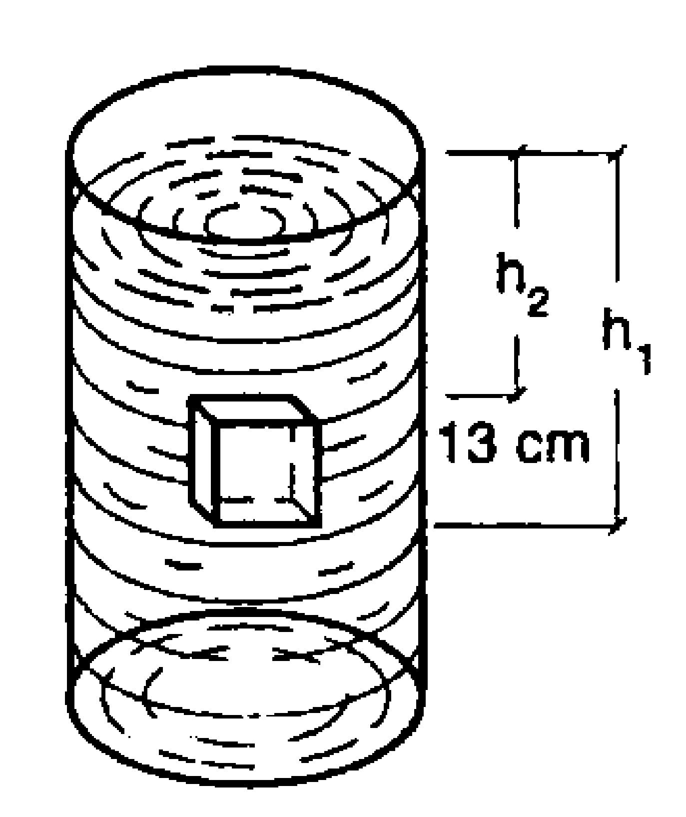
$$F_3 = 24{,}5\ N$$

PROBLEMA 2. En un recipiente con alcohol se tiene sumergido un cubo de 13 cm de arista. Si la cara superior del cubo está a 10 cm de profundidad, calcular:

a) ¿Qué diferencia de presión hi-drostática existe entre la cara superior e inferior?
b) ¿Qué empuje recibe el cubo?

$$\rho_{alcohol} = 7{,}74\ .10^3\ N/m^3$$

RESOLUCIÓN :



a = 13 cm = 0,13 m $\qquad \Delta P = ?$

h_1 = 10 cm = 0,01 m $\qquad E = ?$

h_2 = 23 cm = 0,23 m

a) $$\Delta P = \rho\,(h_2 - h_1)$$

$$\Delta P = 7{,}74 \,.\, 10^3\ \frac{N}{m^3}\,(0{,}23\ m - 0{,}10\ m)$$

Rpta.: $\Delta P = 1{,}01 \,.\, 10^3\ N/m^2$

b) $$E = V \,.\, \rho$$

$$E = (0{,}13\ m)^3 \,.\, 7{,}74 \,.\, 10^3\ N/m^3$$

Rpta.: $E = 17{,}0\ N$

PROBLEMA 3. ¿Cuál es el peso específico (r) del hierro si un trozo de este metal pesa en el aire 0,363 N y en el agua , 0,317 N?

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN : Sea: W = peso

$W_1 = 0{,}363\ N \qquad \rho = ?$

$W_2 = 0{,}317\ N$

Sabemos que:

Empuje = Pérdida de peso

$$E = W_1 - W_2$$

$$E = 0{,}036\ N - 0{,}317\ N = 0{,}046\ N$$

Cálculo del volumen de agua desalojada por el trozo de hierro:

b) $$E = V \cdot \rho \Rightarrow V = \frac{E}{\rho}$$

sustituyendo valores:

$$V = \frac{0{,}046\ N}{9{,}8 \cdot 10^3\ N/m^3} = 4{,}7 \cdot 10^{-6}\ m^3$$

Cálculo del "ρ" del hierro:

$$\rho = \frac{\text{peso en el aire}}{V} = \frac{0.0363\ N}{4 \cdot 10^{-6}\ m^3}$$

Rpta.: $p = 77{,}2 \cdot 10^3\ N/m^3$

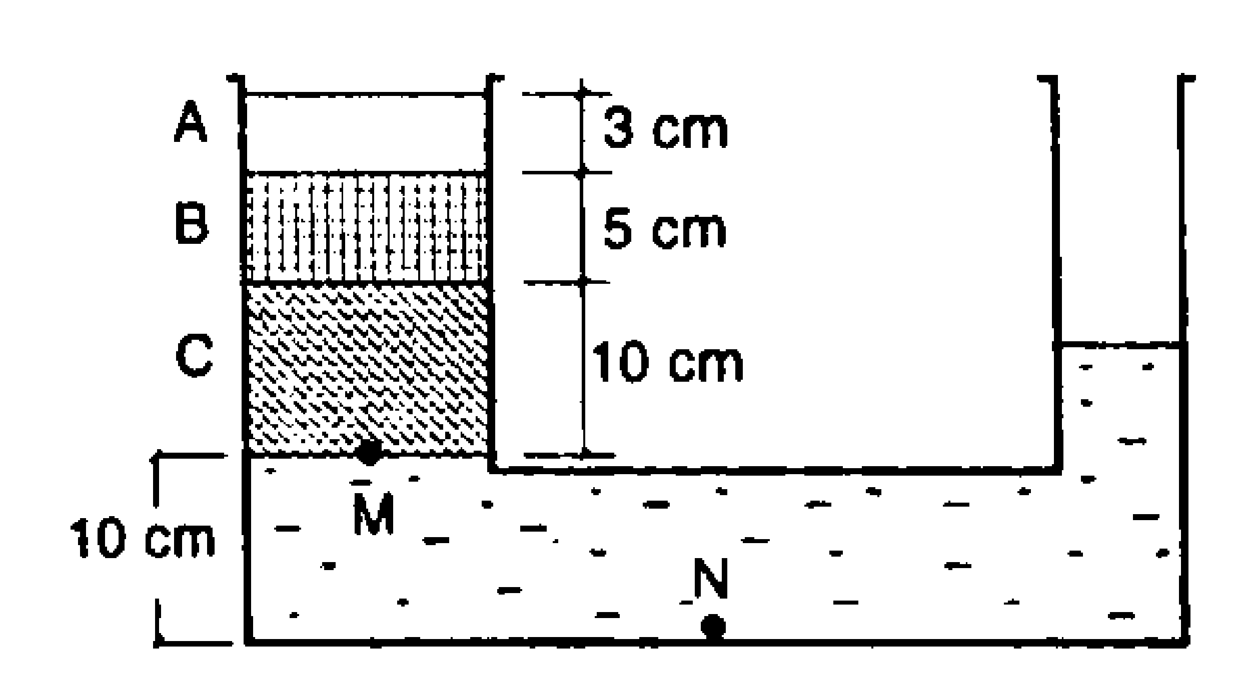
PROBLEMA 4. Un recipiente contiene líquidos no miscibles, como se indica en la figura, cuyos pesos específicos son:

$$\rho_A = 0{,}8\ \vec{g}/cm^3$$

$$\rho_B = 0{,}9\ \vec{g}/cm^3$$

$$\rho_C = 1{,}0\ \vec{g}/cm^3$$

¿Qué diferencia de presión existe entre los puntos M y N?
El líquido del fondo es mercurio cuyo peso específico es $\rho = 133\ 416\ N/m^3$.



RESOLUCIÓN : La diferencia de presiones entre dos puntos sumergidos en un liquido, sólo depende de la diferencia de profundidad y del peso específico del líquido y nada más, puede haber otros líquidos encima o no, puede ser el mismo líquido en un volumen a altura muy grande o muy pequeña, no interesa.

$$\Delta P = P_N - P_M = \rho\,(h_N - h_M)$$

$$\Delta P = 133\,416\ N/m^3\ (0{,}10\ m)$$

$$P = 13\,341{,}6\ N/m^2$$

Rpta.: $P = 13\,341{,}6\ Pa$

PROBLEMA 5. El empuje producido por el agua sobre un cuerpo es de 0,08 N. Se sumerge en el mercurio, se pregunta, ¿cuánto será el empuje de este líquido? Peso específico del mercurio: $133{,}3 \cdot 10^3\ N/m^3$

RESOLUCIÓN : $E_{agua} = 80\ g$

$E_{Hg} = ? \qquad \rho_{Hg} = 13{,}6\ g/cm^3$

Se sabe: $$\frac{E_{Hg}}{E_{agua}} = \frac{V \cdot \rho_{Hg}}{V \cdot \rho_{agua}}$$

$$\therefore \quad E_{Hg} = E_{agua}\,\frac{\rho_{Hg}}{\rho_{agua}}$$

$$E_{Hg} = 0{,}08\ N \cdot \frac{133{,}3 \cdot 10^3\ N/m^3}{9{,}8 \cdot 10^3\ N/m^3}$$

Rpta.: $E_{Hg} = 1{,}088\ N$

PROBLEMA 6. 60 cm³ de una sustancia tiene una masa de 42 g.

Calcular:

a) La densidad absoluta
b) La densidad relativa

RESOLUCIÓN :

a) $$\delta = \frac{m}{V} = \frac{42\ g}{60\ cm^2} = 0{,}7\ g/cm^3$$

b) $$\delta_{c/agua} = \frac{\text{densidad del cuerpo}}{\text{densidaddelagua}}$$

$$\delta_{c/agua} = 0,7$$

PROBLEMA 7. Una columna de a-ceite de 60cm de altura cuyo p.e. es $8,23 \cdot 10^3$ N/m³ ejerce una presión igual a la de una columna de otro líquido cuya altura es 28 cm. Calcular el p.e. del líquido.

RESOLUCIÓN :

$$h_1 = 60\,cm = 0,60\,m \qquad \rho = ?$$

$$h_2 = 28\,cm = 0,28\,m$$

$$\rho_1 = 8,23 \cdot 10^3\ N/m^3$$

Sabiendo que: $h_1 \cdot \rho_1 = h \cdot \rho$

de donde: $\rho = \dfrac{h_1 \cdot \rho_1}{h}$

Sustituyendo datos:

$$\rho = \frac{0,60\,m \cdot 8,23 \cdot 10^3\ N/m^3}{0,28\,m}$$

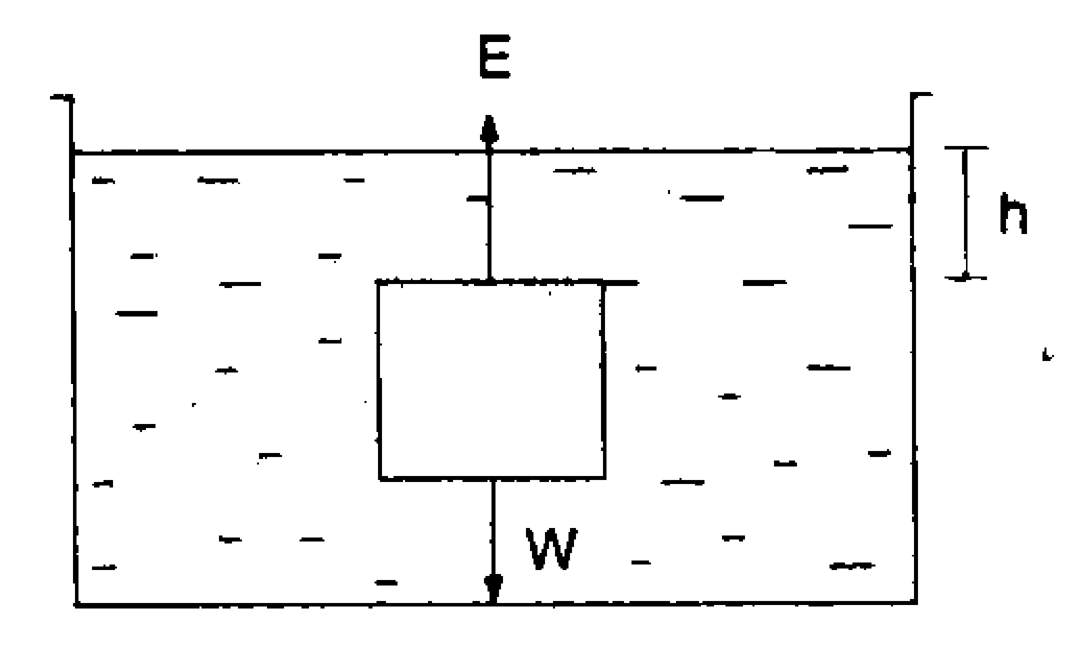
Rpta.: $\rho = 17,63 \cdot 10^3\ N/m^3$

PROBLEMA 8. Un objeto cuya densidad es 0,5 g/cm³ es sumergido en agua hasta una profundidad de 4,5 m y se le suelta. ¿Con qué aceleración asciende? El objeto tiene una masa "m" y un volumen "V". La densidad del agua es 1 g/cm³

RESOLUCIÓN : $\delta_c = 0,5\ g/cm^3$

$v = ?$ $\qquad \delta_a = 1,0\ g/cm^3$

$h = 4,5\ m$



Sabiendo que: $E = V \cdot d$

$$\Sigma F_y = m_C\, a$$

es decir:

PESO DEL AGUA DESALOJADA - PESO DEL CUERPO = $m_c\, a$

$$V \cdot \delta_{agua} - V \cdot \delta_c = \frac{\text{peso cuerpo}}{g} \cdot a$$

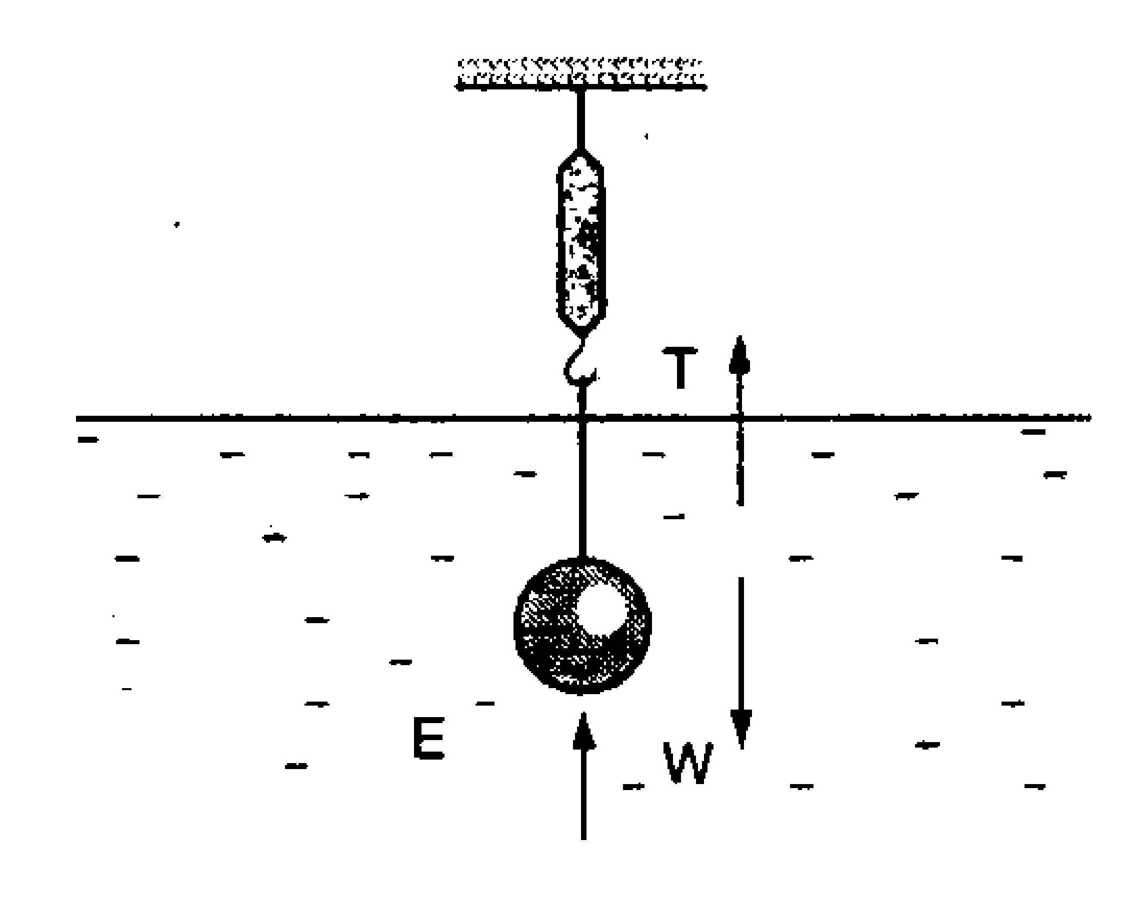
$$V \cdot \delta_{agua} - V \cdot \delta_c = \frac{V \cdot \delta_c}{g} \cdot a$$

de donde: $a = \left(\dfrac{\delta_{agua} - \delta_c}{\delta_c}\right) \cdot g$

$$a = \left(\frac{1 - 0,5}{0,5}\right) \cdot g \quad ; \quad a = g$$

Rpta.: $a = 9,8\ m/s^2$

PROBLEMA 9. Una esfera de 1,2 m³ de volumen y 20 000 N de peso está suspendida de un dina-mómetro y sumergida en un líquido cuyo p.e. es 6,86 . 10³ N/m³ ¿Cuánto marcará el dinamómetro?



RESOLUCIÓN : $W = 20\,000\ N$

$$\rho = 0,7\ g/cm^3 \ ; \quad T = ?$$

$$\Sigma F_y = 0 \ ; \quad T + E - W = 0$$

de donde: $T = W - E$ (1)

donde: $W = 20\,000\ N$

y: $E = V_c \cdot \rho_{líquido}$

$$E = 1,2\ m^3 \cdot 6,86 \cdot 10^3\ N/m^3$$

$$E = 8\,232\ N$$

http://librosysolucionarios.net

En (1) : $T = 20\,000\ N - 8\,232\ N$

Rpta.: $T = 11\,768\ N$

PROBLEMA 10. La masa de 0,5 litros de leche es 516 g. El 4% del volumen es nata con una densidad relativa de 0,865. Calcular la densidad de la leche sin nata.

RESOLUCIÓN : $V = 0,5$ litros

grasa = 4% en volumen $m = 516\ g$

$$\delta_r = 0,866 \qquad \delta = ?$$

$$V \text{ de nata} = 0,4 \,.\, 0,51$$

$$V \text{ de nata} = 0,2 \text{ lit} = 20\ cm^3$$

$$\text{Masa de la nata} = V \,.\, d_n \qquad (1)$$

pero: $$\frac{\delta_n}{\delta_{agua}} = \delta_r$$

$$\therefore \qquad \delta_n = \delta_r\, \delta_{agua}$$

sustituyendo en (1) :

$$\text{Masa de la nata} = V\, \delta_r\, \delta_{agua} =$$

$$= 20\ cm^3 \,.\, 0,865 \,.\, 1\ g/cm^3$$

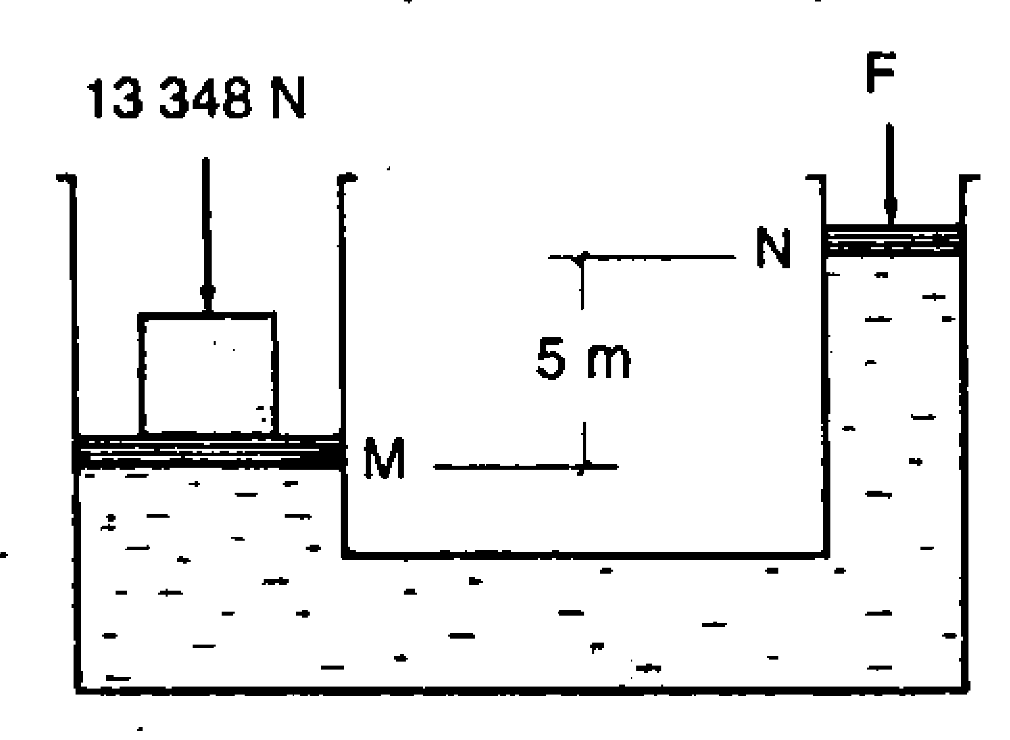
$$\text{Masa de la nata} = 17,3\ g$$

Cálculo de la densidad de la leche sin nata:

$$\delta = \frac{m}{V} = \frac{516\ g - 17,3\ g}{500\ cm^3 - 20\ cm^3}$$

Rpta.: $d = 1\,039\ kg/m^3$

PROBLEMA 11. En una prensa hidráulica las secciones de los émbolos son 300 cm² y 20 cm². Los pistones se consideran sin peso. Sobre el pistón mayor hay un peso de 13 348 N. La diferencia de alturas de los pistones es de 5 m y está lleno con un líquido cuyo p.e. es 8 232 N/m³. Calcular la fuerza necesaria que debe aplicarse sobre el émbolo chico para equilibrar el sistema.



RESOLUCIÓN : Área de los émbolos:

$$A_M = 300\ cm^2 = 3 \,.\, 10^{-2}\ m^2$$

$$A_N = 20\ cm^2 = 0,2 \,.\, 10^{-2}\ m^2$$

$$F_M = 13\,348\ N \ ; \ F = ?$$

$$h = 5\ m \ ; \ \rho_{líquido} = 8\,232\ N/m^3$$

Para que haya equilibrio debe cumplirse que:

$$P_M = P_N$$

Es decir: $$\frac{F_M}{A_M} = \frac{F}{A_N} + h \,.\, \rho_{líquido}$$

$$\frac{13\,448\ N}{3 \,.\, 10^{-2}\ m^2} = \frac{F}{0,2 \,.\, 10^{-2}\ m^2} + 5\ m \,.\, 8\,232\ \frac{N}{m^3}$$

Efectuando operaciones:

Rpta.: $F = 894,21\ N$

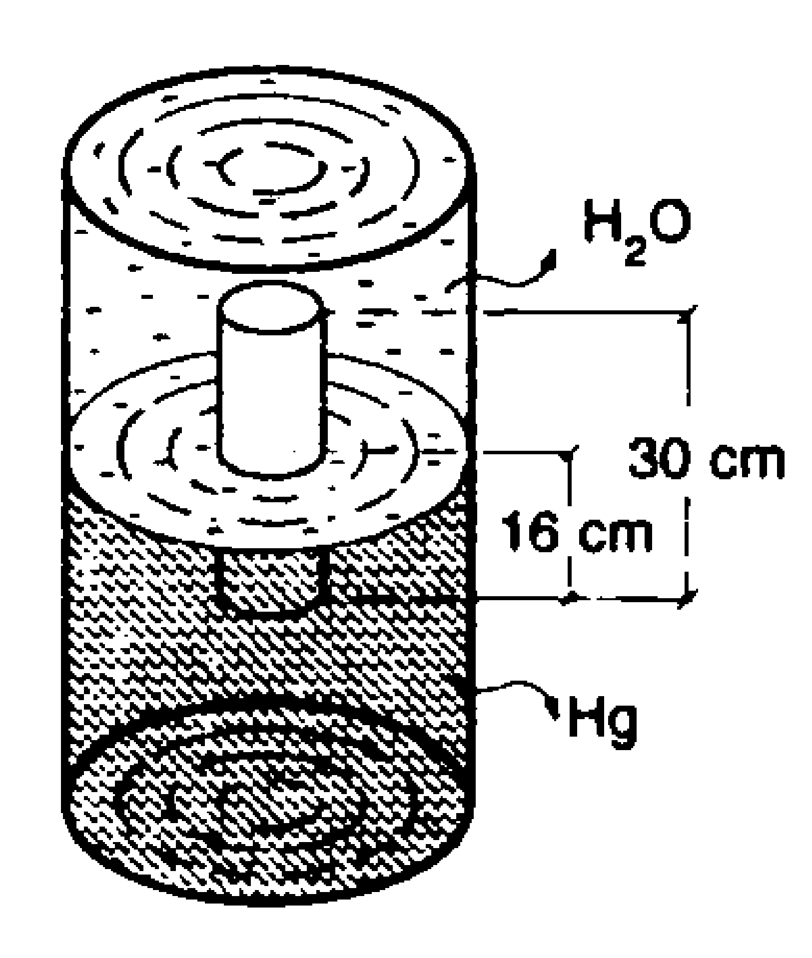
PROBLEMA 12. Un cilindro metálico se sumerge dentro de un recipiente que contiene mercurio y agua. El cilindro tiene una altura de 30 cm y de los cuales 16 cm se sumergen en el mercurio, como se muestra en la figura. Calcular el peso específico de la pieza metálica. $r_{Hg} = 133,28 \,.\, 10^3\ N/m^3$

RESOLUCIÓN :

$$h = 30\ cm = 0,30\ m$$

$$h_{Hg} = 16\ cm = 0,16\ m$$

$$h_{H_2O} = 14\ cm = 0,14\ m$$



Peso del cilindro = Empuje del Hg + Empuje del H_2O.

Siendo "V" el volumen del cilindro:

$$V \cdot \rho = V_{Hg} \cdot \rho_{Hg} + V_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O}$$

siendo A el área de la base del cilindro

$$A.h.\rho = A.h_{Hg} \cdot \rho_{Hg} + A.h_{H_2O} \cdot \rho_{H_2O}$$

Simplificando A y sustituyendo los datos:

$$0{,}30 \text{ m } \rho = 0{,}16 \text{ m} .133{,}28 .10^3 \text{ N/m}^3 +$$

$$+ 0{,}14 \text{ m} . 9{,}8 . 10^3 \text{ N/m}^3$$

De donde: Rpta.: $\rho = 75{,}6 . 10^3 \text{ N/m}^3$

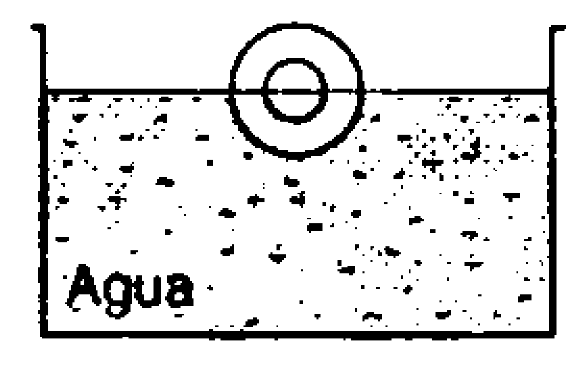
PROBLEMA 13. Una esfera hueca de 10 cm de radio interior y 12 cm de radio exterior se quiere utilizar para determinar el peso específico de un líquido. En el agua se sumerge 2/3 partes de la esfera, y en el líquido se hunde y "flota" sumergida. Calcular la densidad del líquido.

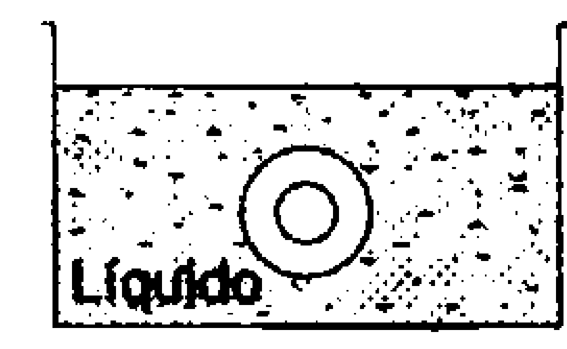
RESOLUCIÓN : $r = 10 \text{ cm} = 0{,}10 \text{ m}$

$R = 12 \text{ cm} = 0{,}12 \text{ m}$

Cálculo del peso específico de la esfera

Peso esfera = Empuje agua





$$V \cdot \rho = V_{agua} \cdot \rho_{agua}$$

Recordando que el volumen de agua desarrollada es igual al volumen del cuerpo sumergido.

En este caso sólo una parte del cuerpo está sumergido; esa parte es los 2/3; por consiguiente el volumen de agua desalojada es los 2/3 del volumen del cuerpo, así:

$$V \cdot \rho = \frac{2}{3} V \cdot \rho_{agua}$$

Simplificando V : $\rho = \frac{2}{3} \rho_{agua}$

pero: $\rho_{agua} = 9{,}8 . 10^3 \text{ N/m}^3$

$\therefore \quad \rho = 6{,}53 . 10^3 \text{ N/m}^3$

En al segunda figura el cuerpo entra "entre dos aguas", lo que quiere decir que el peso específico del cuerpo es igual al del líquido, de acuerdo a lo planteado en la página 458.

Rpta.: $\rho_{líquido} = 6{,}53 . 10^3 \text{ N/m}^3$

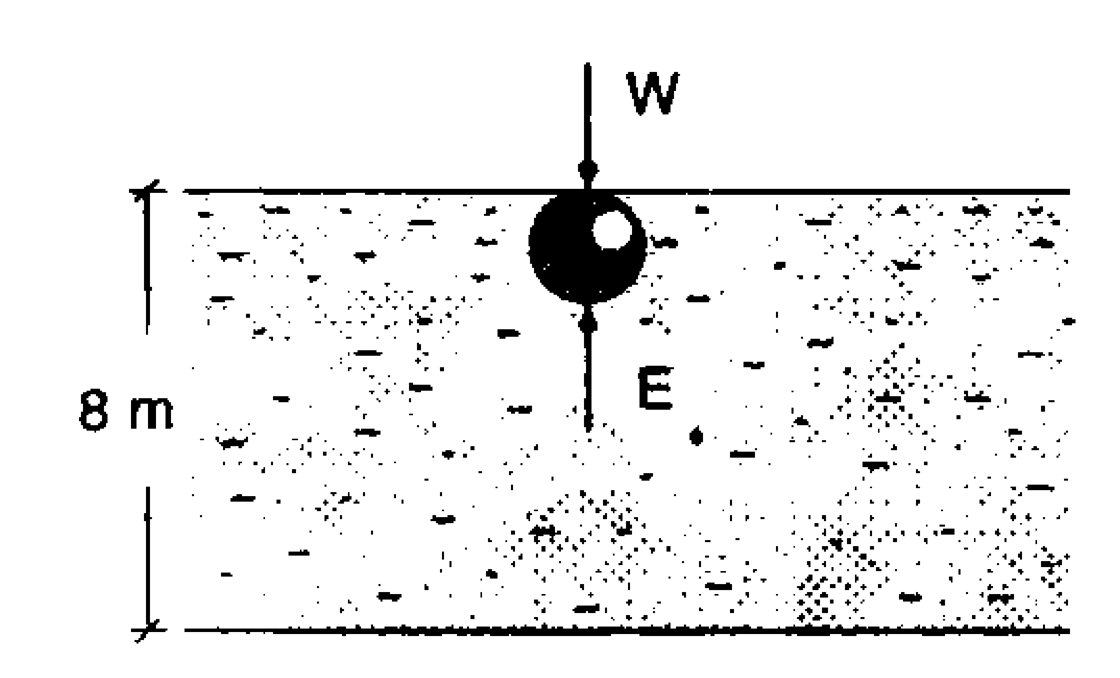
PROBLEMA 14. Una esfera pequeña de peso específico $29{,}4 . 10^3$ N/m³, se suelta justo en la superficie de una piscina. Calcular cuánto tiempo demorará en llegar al fondo que está a 8 m.

RESOLUCIÓN :

$$\rho_{H_2O} = 9{,}8 . 10^3 \text{ N/m}^3$$

$$\rho_{esfera} = 29{,}4 . 10^3 \text{ N/m}^3$$

W = peso de la esfera



Recordando que: $\Sigma F_y = m a$

entonces: $W - E = m a \qquad (I)$

http://librosysolucionarios.net

Pero: $E = V_{esfera} \cdot \rho_{H_2O}$

$$E = \frac{\text{peso esfera}}{\rho_{esfera}} \cdot \rho_{H_2O}$$

$$E = \frac{W}{29{,}4 \, . \, 10^3 \, N/m^3} \cdot 9{,}8 \cdot 10^3 \, N/m^3$$

$$E = \frac{W}{3}$$

Sustituyendo en (I):

$$W = \frac{W}{3} = \frac{W}{9{,}8 \, m/s^2} \cdot a$$

$$\therefore \qquad a = 6{,}53 \, m/s^2$$

Como la esfera parte del reposo:

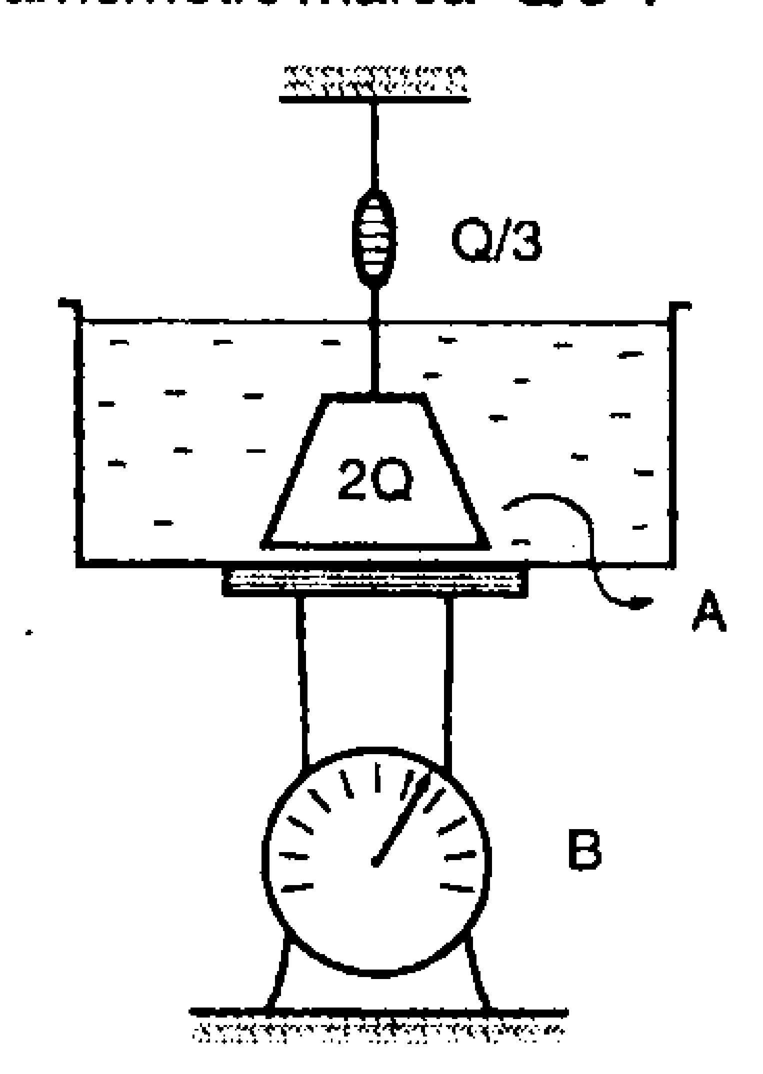
$$h = \frac{1}{2} a t^2 \quad \Rightarrow \quad t = \sqrt{\frac{2h}{a}}$$

sustituyendo los datos:

$$t = \sqrt{\frac{2 \, . \, 8 \, m}{6{,}53 \, m/s^2}}$$

Rpta.: $t = 1{,}57 \, s$

PROBLEMA 15. Antes de introducir en el líquido, un cuerpo de peso "2Q", marcado por el dina-mómetro, la balanza B marca "3Q" para el líquido solo. ¿Cuánto marcará la balanza después de introducir el cuerpo "A" si ahora el dinamómetro marca "Q/3"?



RESOLUCIÓN :

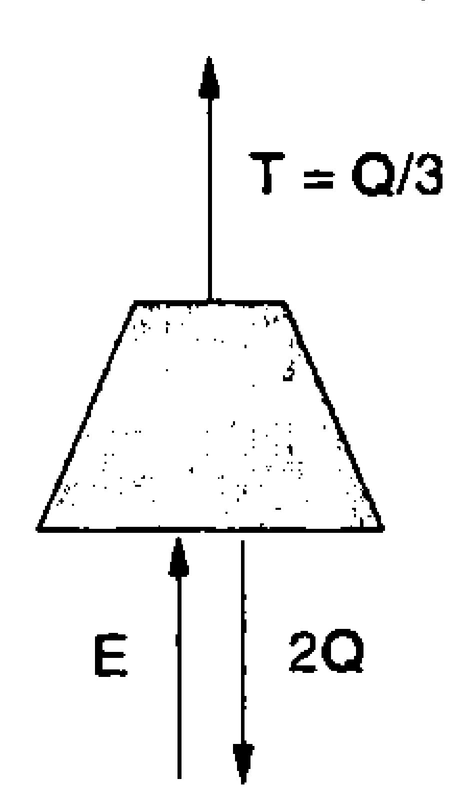
I) Sin el cuerpo dentro del líquido, la balanza B marca:

$$B = 3Q$$

Nótese que este peso sólo corresponde al líquido.

II) Con el cuerpo dentro del líquido, la balanza B marcará:

a) Diagrama de cuerpo libre del bloque de peso 2Q introducido en el líquido:

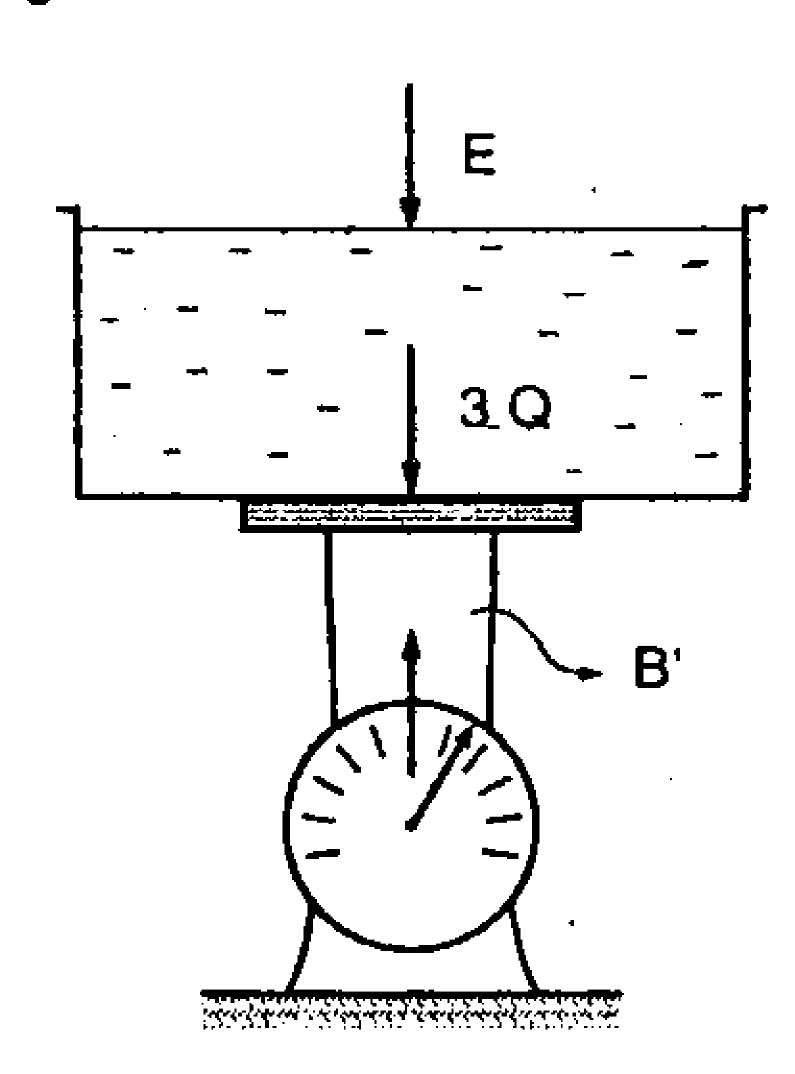


$$T = \frac{Q}{3} \quad \text{(marca el dinamómetro)}$$

Por equilibrio: $\frac{Q}{3} + E = 2Q$

$$\therefore \qquad E = \frac{5}{3} Q \qquad (1)$$

b) Diagrama de cuerpo libre correspondiente al sistema balanza "B" y líquido "A":



Por equilibrio: $B' = E + 3Q \qquad (2)$

(1) en (2): $B' = \frac{5}{3} Q + 3Q$

Rpta.: $B' = \frac{14}{3} Q$

PROBLEMA 16. Un cubo de madera de lado "a" y peso específico "ρ_m" se encuentra flotando en agua, en la par-

http://librosysolucionarios.net

te inferior se le adiciona un cubo de fierro de lado "b" y de peso específico r_{Fe}. Hallar y = a/b para que el cubo de madera se sumerja completamente en el agua:

$$\rho_{Fe} > \rho_m$$

RESOLUCIÓN : Al adicionársele el cubo de fierro al cubo de madera, y al sumergirse completamente ambos cubos, por equilibrio se tiene:

$$E_{TOTAL} = W_{TOTAL}$$

$$E_m + E_{Fe} = W_m + W_{Fe}$$

$$V_m \rho_{H_2O} + V_{Fe} \rho_{H_2O} = V_m \rho_m + V_{Fe} \rho_{Fe}$$

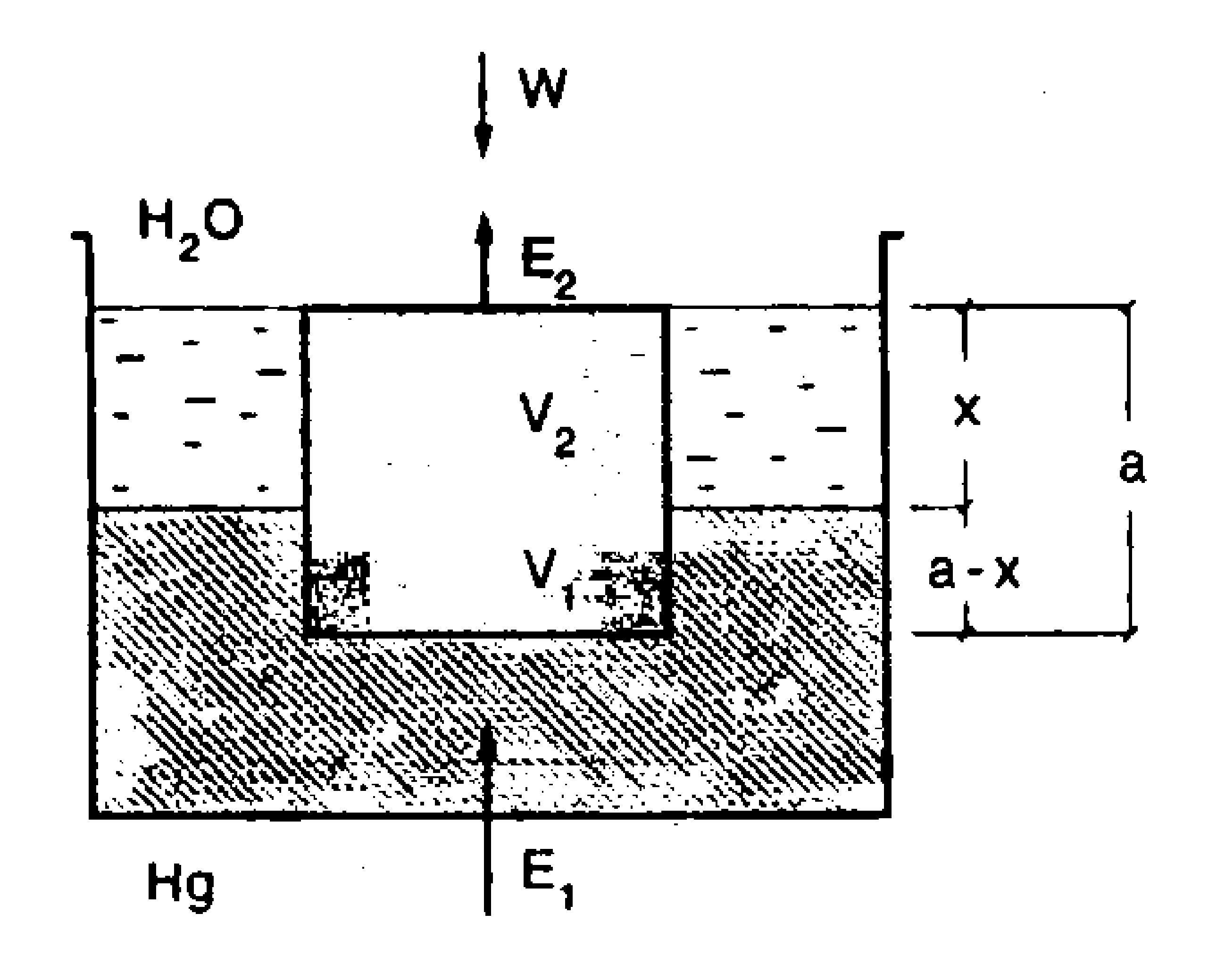
$$a^3 \rho_{H_2O} + b^3 \rho_{H_2O} = a^3 \rho_m + b^3 \rho_{Fe}$$

$$a^3 (\rho_{H_2O} - \rho_m) = b^3 (\rho_{Fe} - \rho_{H_2O})t$$

$$\frac{a^3}{b^3} = \frac{\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}}{\rho_{H_2O} - \rho_m}$$

$$\frac{a}{b} = \left[\frac{\rho_{Fe} - \rho_{H_2O}}{\rho_{H_2O} - \rho_m}\right]^{\frac{1}{3}}$$

PROBLEMA 17. Un bloque cúbico de acero de $76{,}44 \times 10^3$ N/m³ de peso, flota en mercurio de $133{,}28 \times 10^3$ N/m³ de densidad. Se vierte agua sobre la superficie del mercurio. Determinar en función de la altura del bloque, el espesor que debe tener la capa de agua para que cubra justamente la capa superior del cubo.



RESOLUCIÓN : a = Lado del cubo

De la figura: $E_{Hg} + E_{H_2O} = W_c$

$$V_1 \cdot \rho_{Hg} + V_2 \cdot \rho_{H_2O} = \rho_c \cdot V_c$$

$$(a^2 - x)\, 133{,}28 \,.\, 10^3\, a^2 + a^2\, x \,.\, 9{,}8 \,.\, 10^3 = $$
$$= a^3 .76{,}44 \,.\, 10^3$$

$$133{,}28\, a - 133{,}28\, x + 9{,}8\, x = 76{,}44\, a$$

$$123{,}48\, x = 56{,}84\, a$$

$$x = \frac{56{,}84\, a}{123{,}48} = 0{,}46\, a$$

En porcentaje (se multiplica por 100):

Rpta.: x = 46% de a

PROBLEMA 18. Una esferita de metal de densidad δ_m se posa en un recipiente de altura "H", el cual contiene un líquido de densidad "δ_l". Hallar la aceleración de la esfera y el tiempo que demora en llegar al fondo. Se desprecia la resistencia del líquido al movimiento y $\delta_m > \delta_l$.

RESOLUCIÓN : Como la esfera se desplaza hacia el fondo del recipiente, se cumple:

Sea: m = masa de la esferita

$$m \,.\, g - E = m \,.\, a \quad (E = \text{Empuje})$$

$$m.g - V_S . \delta_L . g = m.a$$

$$m.g - \frac{m \,.\, \delta_L \,.\, g}{\delta_m} = m.a$$

$$\therefore \quad a = g\left(1 - \frac{\delta_L}{\delta_m}\right)$$

Por cinemática: $H = \frac{1}{2} a t^2 \quad (V_0 = 0)$

de donde: $t = \sqrt{\frac{2H}{a}}$

http://librosysolucionarios.net

$$\therefore \quad t = \sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{\delta_L}{\delta_m}\right)}}$$

PROBLEMA 19. Un cuerpo de densidad 1,6 g/cm3, se posa suavemente sobre la superficie del agua, y se observa que tarda en llegar al fondo del depósito un tiempo "t". Cuando se coloca un cuerpo de densidad "d" se aprecia que éste tarda en llegar al fondo un tiempo "2 t". Determinar la densidad "δ"

RESOLUCIÓN : del problema anterior:

$$t = \sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{\delta_L}{\delta_m}\right)}}$$

Luego, para cada uno de los casos:

1er caso: $$t = \sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{1}{1,6}\right)}} \qquad (1)$$

2do caso: $$t = \sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2) :

$$\sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{1}{1,6}\right)}} = \sqrt{\frac{2H}{g\left(1 - \frac{1}{\delta}\right)}}$$

Elevando al cuadrado, simplificando y despejando δ:

$$\delta = \frac{32}{29}\,\frac{g}{cm^3} = 1,1\,\frac{g}{cm^3}$$

Rpta.: $\delta = 1\,100\,\frac{kg}{m^3}$

PROBLEMA 20. Se tienen dos cuerpos de masas y volúmenes diferentes, de densidades " δ + ε " y " δ - ε " respectivamente. Se sabe que "δ" es la densidad de un líquido en un recipiente. El cuerpo más pesado se suelta desde la superficie y el más ligero desde el fondo del recipiente, simultáneamente, ¿Qué ocurre en los espacios?

RESOLUCIÓN :

I) La aceleración para el cuerpo más pesado es:

$$a_1 = g\left(1 - \frac{\delta}{\delta + \varepsilon}\right)$$

$$\therefore \quad a_1 = g\left(\frac{\varepsilon}{\delta + \varepsilon}\right) \qquad (1)$$

II) La aceleración para el cuerpo más ligero es:

$$a_2 = g\left(\frac{\delta}{\delta - \varepsilon} - 1\right)$$

$$\therefore \quad a_2 = g\left(\frac{\varepsilon}{\delta - \varepsilon}\right) \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)} : \frac{a_1}{a_2} = \frac{g\left(\frac{\varepsilon}{\delta + \varepsilon}\right)}{g\left(\frac{\varepsilon}{\delta - \varepsilon}\right)}$$

$$\therefore \quad \frac{a_1}{a_2} = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta + \varepsilon} \qquad (\theta)$$

De aquí se concluye que la aceleración del cuerpo más pesado es menor que la del más ligero.

$$a_1 < a_2 \quad ó \quad a_2 > a_1$$

III) Supongamos que se crucen en un cierto punto "O", y considerando que ambos parten del reposo y simultáneamente, tenemos:

$$e_1 = \frac{1}{2} a_1 t^2 \qquad (\alpha)$$

$$e_2 = \frac{1}{2} a_2 t^2 \qquad (\beta)$$

$$\frac{(\alpha)}{(\beta)} : \quad \frac{e_1}{e_2} = \frac{a_1}{a_2} \qquad (\gamma)$$

http://librosysolucionarios.net

Igualando (θ) y (γ), tenemos:

$$\frac{e_1}{e_2} = \frac{a_1}{a_2} = \frac{\delta - \varepsilon}{\delta + \varepsilon}$$

Finalmente de esta relación se concluye que el cuerpo de mayor peso recorrerá menor espacio. Por lo tanto:

Rpta.: $e_1 < e_2$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un cuerpo de densidad d_C se suelta desde una altura "H" con respecto al borde superior de un recipiente que contiene un líquido de densidad δ_L. ¿Qué profundidad alcanza el cuerpo? ($\delta_L > \delta_C$)

Rpta.: $h = \dfrac{\delta_C}{\delta_L - \delta_C} H$

2. En un trozo de cera de densidad 0,9 g/cm³ y peso 0,49 N, se incrusta un objeto de plata, de peso 0,078 N y el conjunto permanece en equilibrio totalmente sumergido en agua salada de densidad 1,03 g/cm³. Hallar la densidad de la plata.

Rpta.: $\delta = 10{,}6 \ \dfrac{g}{cm^3}$

3. Una esfera metálica, de radio 5 cm está empotrada en un trozo de vidrio de densidad 2,5 g/cm³. El conjunto pesa 52 N, y se coloca flotando en un baño de mercurio de densidad 13,6 g/cm³, y queda sumergida los 2/5 de su volumen. Hallar la densidad del metal.

Rpta.: $\delta = 9{,}27 \ g/cm^3$

4. En un recipiente de forma cilíndrica y de un área transversal igual a S, se deposita un poco de agua en el cual flota un pedazo de hielo con una bolita de plomo en su interior. El volumen del pedazo de hielo junto con la bolita es igual a V; sobre el nivel sobresale 1/20 de dicho volumen. ¿Qué altura desciende el nivel del agua en el recipiente, una vez que hielo se haya derretido? Las densidades del agua, del hielo y del plomo se consideran conocidas.

Rpta.: $h = 0{,}05 \left(\dfrac{V}{5}\right)$

5. Un flotador cilíndrico de un carburador tiene 7 cm de diámetro y 4 cm de altura. Calcular su peso, sabiendo que necesita un peso suplementario de 0,02 N para quedar sumergido las 3/4 partes de su altura, en gasolina de 0,77 g/cm³ de densidad.

Rpta.: $w = 0{,}851$ N

6. Una esfera metálica de peso específico $\rho = 4\,900$ N/m³ se suelta en la superficie de un recipiente que contiene agua. ¿Cuánto tarda la esfera en llegar al fondo, si la altura del recipiente es 16 m? Considerar $g = 10$ m/s².

Rpta.: $t = 2$ s

7. Un cilindro de corcho, cuya densidad es $\delta = 0{,}3$ g/cm³, cuya longitud es 1,4 m y de sección S = 1 dm², está lastrado en uno de sus extremos por una masa de metal que pesa 7 800 N y cuyo volumen es 1 dm³. Se deja libre a la profundidad h = 100 m y se desea saber:

a) El tiempo que invertirá en ascender hasta la superficie del lago.
b) La longitud "x" del cilindro que emerge al quedar en equilibrio.

Se desprecia la resistencia del agua en movimiento

Rpta.: a) $t = 2{,}98$ s

b) $x = 4{,}2$ dm

8. Se tiene 11,5 m³ de aluminio que pesa 39,7 N. Calcular:

a) La densidad.
b) El peso específico.
c) La densidad relativa.

Rpta.: a) $2{,}7 \times 10^3 \ kg/m^3$

b) $26\,467 \ N/m^3$; c) 2,7

9. ¿Cuál es la presión sobre el fondo de una vasija de 76 cm de altura llena de mercurio?
(δ_{Hg} = 13,6 g/cm^3)

Rpta.: 10,13 N/cm^2

10. ¿Cuál es la tensión de un cable que soporta un casco submarino, si el casco pesa 29 400 N, tiene un volumen de 800 dm^3 y está a una profundidad de 500 m? La densidad de agua de mar es aproximadamente 1,02 g/cm^3.

Rpta.: 21 204 N

11. Hallar el período de oscilaciones libres de un barco, estando el agua en calma, si el peso del barco es "p" toneladas fuerza. El área de su sección horizontal es "S" m^2 y no depende de la altura de la sección; el peso de 1 m^3 de agua es 1 tonelada fuerza. Las fuerzas condicionadas por la viscosidad del agua se desprecian.

Rpta.: $T = 2\pi\sqrt{\dfrac{p}{S \cdot g}}$

12. ¿A qué profundidad dentro de un lago se encuentra sumergido un buzo que soporta una presión de 3,5 atm?

Rpta.: 25 m

13. Un cuerpo cilíndrico compacto y homogéneo flota sumergido parcialmente en un líquido cuya densidad es 990 kg/m^3. El volumen sumergido es el 70% de su volumen total. Calcular la densidad del cilindro.

Rpta.: δ = 643 kg/m^3

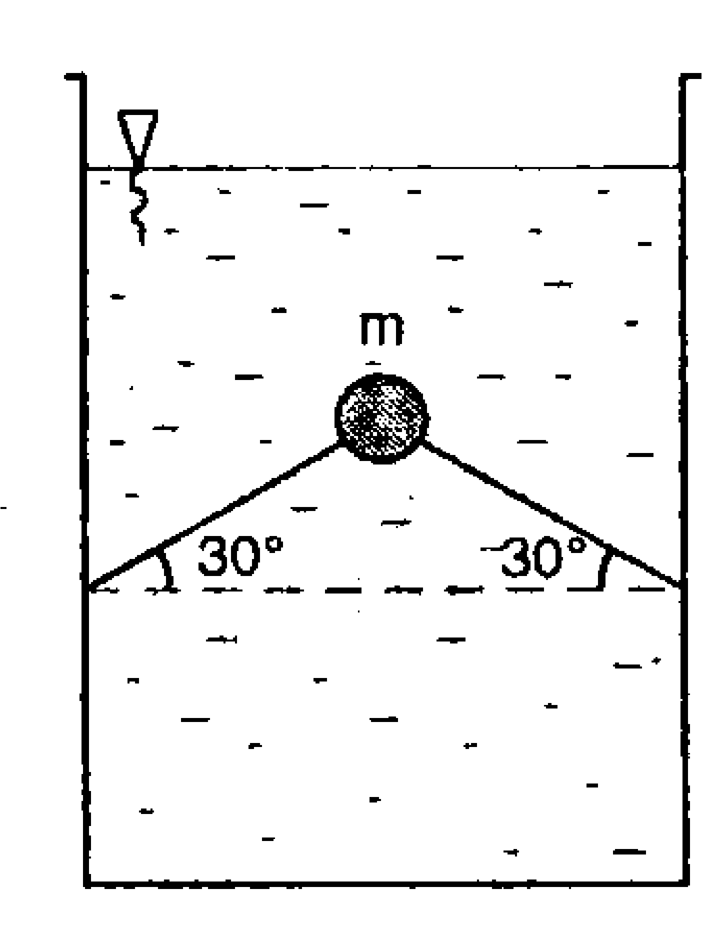
14. En un lago flota un témpano de hielo. ¿Qué porcentaje del volumen de dicho cuerpo emerge?

Rpta.: 10%

15. Calcular el tiempo que tarda una esferilla (δ = 800 kg/m^3) para llegar a la superficie, si fue soltada en el fondo de un pozo de agua de 20 m de profundidad.

Rpta.: t = 4 s

16. Una esfera de 2 kg de masa cuyo volumen es 5 .10^{-3} m^3 se encuentra atada, tal como se muestra se la figura , dentro del agua. Calcular la tensión en las cuerdas.



Rpta.: T = 30 N

17. En el fondo de un recipiente de agua se encuentra una bolita de tecnopor, se la suelta y llega a la superficie del agua con una rapidez de 12 m/s y en 2 s. Calcular la densidad de la bolita.

Rpta.: 625 kg/m^3

CAPÍTULO 12

NEUMOLOGÍA

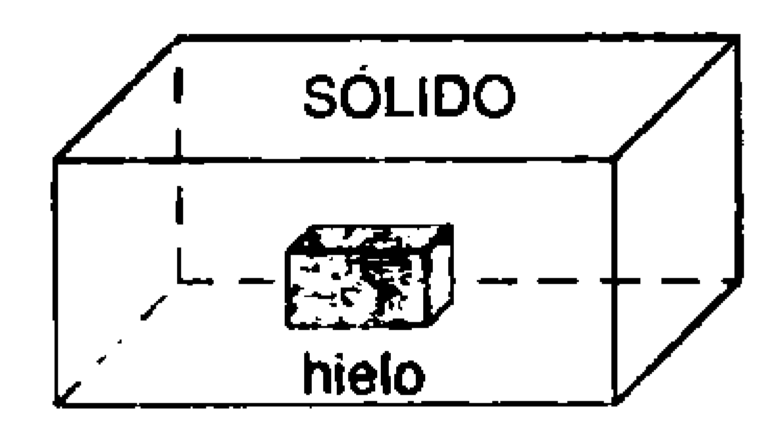
DEFINICIÓN

Es el estudio del estado gaseoso.

Para comprender el comportamiento de los gases es preciso compararlo con los estados sólido y líquido.

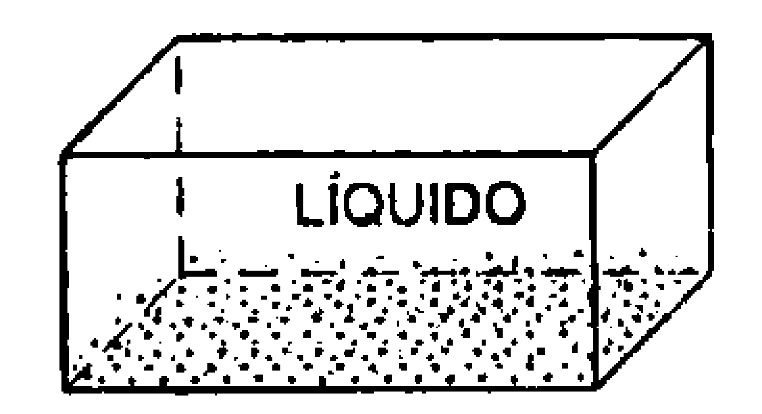
En el estado sólido:

Las moléculas están vibrando alrededor de un punto y se encuentran ordenadas formando poliedros microscópicos, que al superponerse originan cristales macroscópicos. Ejemplo: el hielo.



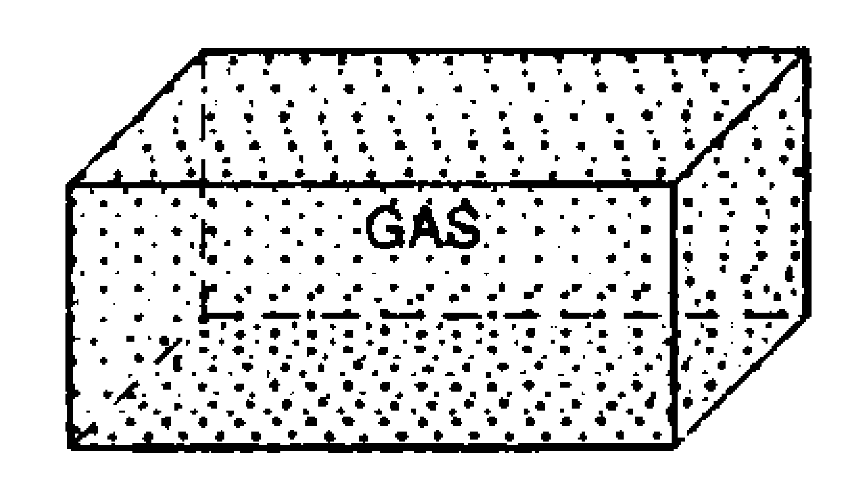
En el estado líquido:

Las moléculas están vibrando alrededor de un punto y desplazándose, haciendo un rodamiento "casi tangencial", es decir manteniéndose a una distancia constante entre ellas aún cuando no conservan ningún orden en su movimiento



En el estado gaseoso:

Las moléculas están vibrado alrededor de un punto y además desplazándose "grandes distancias", están muy "alejadas" unas de otras, no conservando ningún orden en su desplazamiento, sus movimientos son rectilíneos y elásticos (no varía su velocidad mientras no varía la temperatura).



EXPERIENCIA DE TORRICELLI

Llenando completamente un tubo, de aproximadamente 1 m de longitud, con mercurio, tapando la boca lo volteó y sumergió dentro de una cubeta con mercurio, retiró la tapa y notó que el nivel del mercurio bajó un poco pero se detuvo.

Había que explicarse porqué no continuó cayendo el mercurio del tubo, había una fuerza que lo impedía, esa fuerza es la presión atmosférica que soporta la superficie de mercurio en la cubeta, razón que impide que el mercurio del tubo siga bajando.

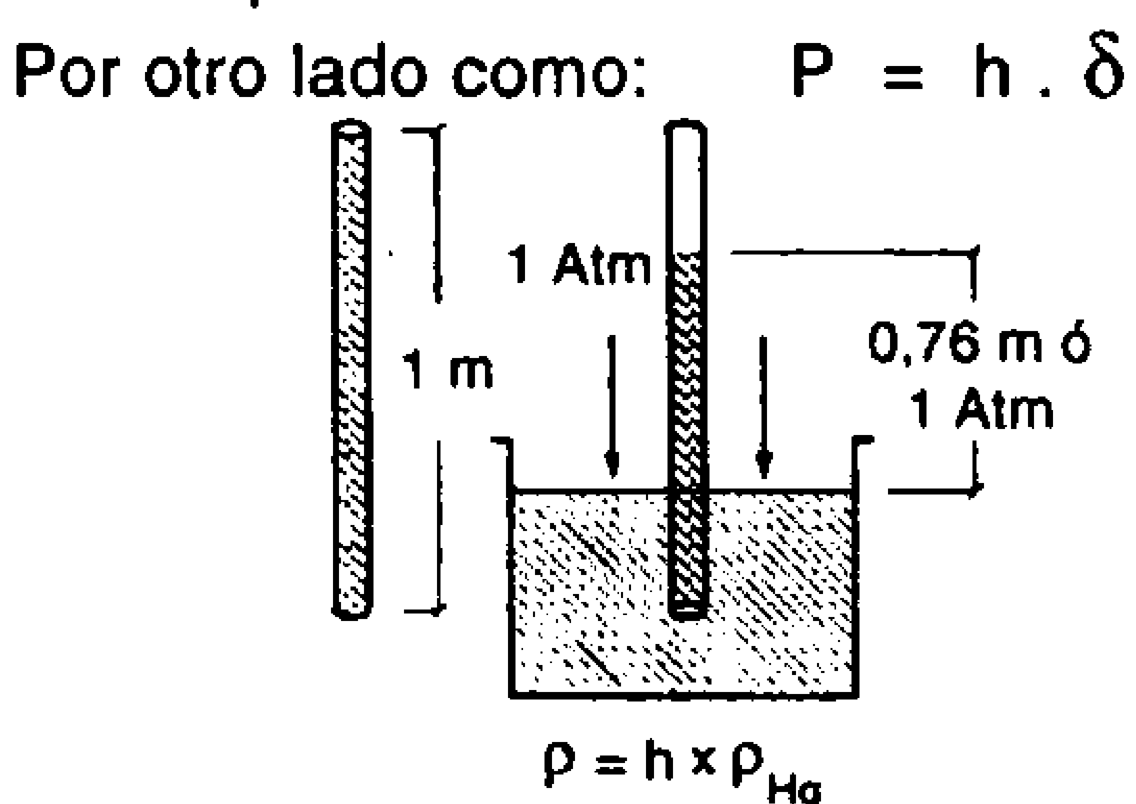
A nivel del mar la altura del mercurio que queda en el tubo, con respecto al nivel del mercurio del recipiente es siempre aproximadamente 0,76 m.

La presión que hace esta columna está equilibrada por la presión que hace la atmósfera sobre la superficie libre del mercurio, por

http://librosysolucionarios.net

eso se dice que la presión atmosférica a nivel del mar es 0,76 m Hg, se le llama "1 ATMÓSFERA" de presión y sirve como unidad para medir la presión neumática.

Por otro lado como: $P = h \cdot \delta$



Para el caso explicado:

$$P = 0,76 \text{ m} \times 133,28 \times 10^3$$

$$P = 101\,300 \text{ N/m}^2 = 101\,300 \text{ Pa}$$

$$P = 1\,033,6 \text{ g/cm}^2$$

Quiere decir que "1 ATMÓSFERA" de presión equivale a la fuerza ejercida por 1 033,6 g sobre cada cm^2.

OTRAS EQUIVALENCIAS:

1 atm = 760 mm Hg = 0,76 m Hg
1 atm = 101 300 Pa = 10,33 m H_2O
1 atm = 29,9 pulg Hg = 14,7 $\vec{\text{lib}}$/pulg^2

CLASES DE PRESIÓN GASEOSA

Presión Atmosférica o Barométrica "Pb" :

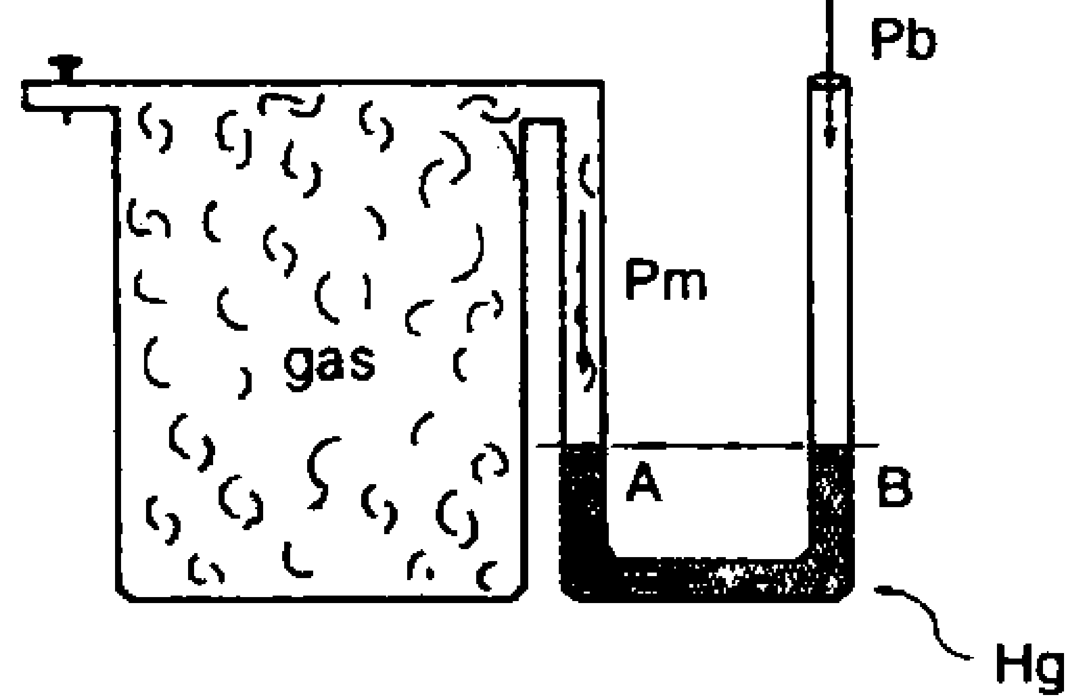
Es la presión que ejerce la atmósfera en toda la superficie terrestre. La mayor presión la soporta la superficie del mar, su valor se toma como unidad para medir la presión y se llama "UNA ATMÓSFERA DE PRESIÓN".

Las capas en que se divide la atmósfera son:

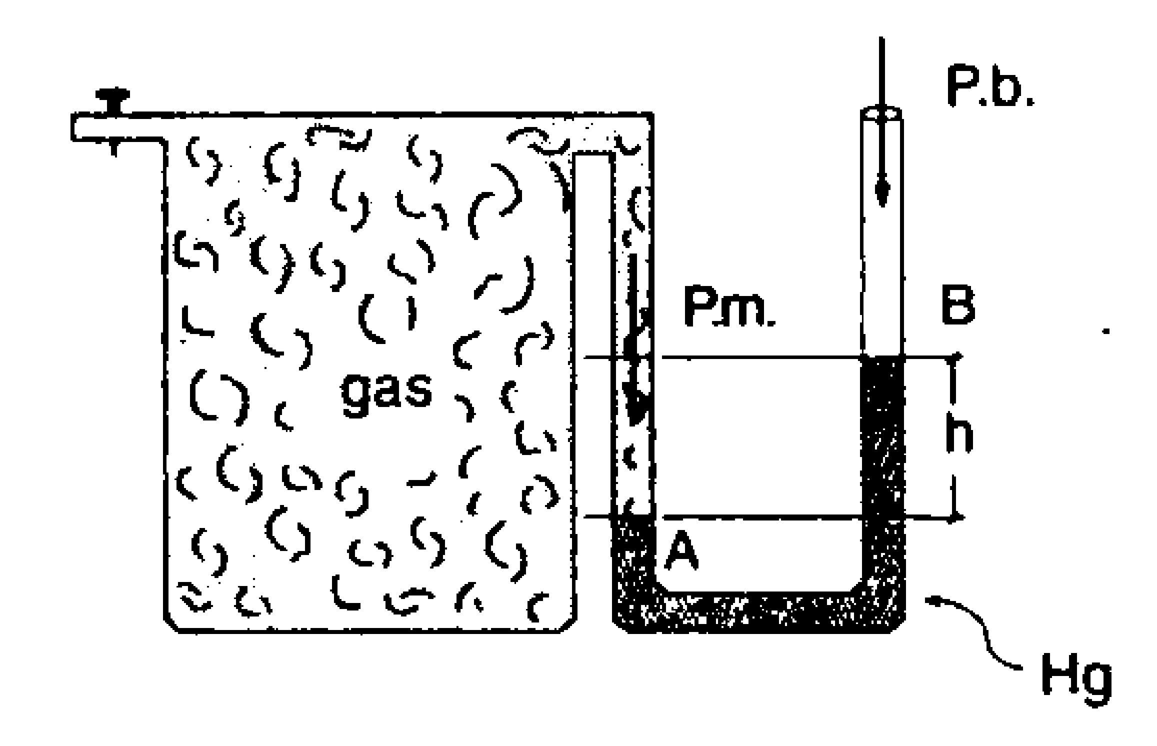
Exósfera
Mesósfera
Ionósfera
Estratósfera 80 km
Tropósfera 15 km

Presión Relativa o Manométrica "Pm" :

Es la diferencia de presión entre la presión de un sistema cerrado y la presión del medio ambiente.



Presión en A = Presión en B



Presión en A > Presión en B

La diferencia de presiones dentro del por la diferencia de altura "h" del nivel de un líquido contenido en el tubo en "U" (manómetro) instalado al tanque. El líquido puede ser (y lo es con frecuencia) mercurio, en razón de su alto peso específico.

$$Pm = h \cdot \rho$$

Presión Absoluta "Pa" :

Es la presión total que soporta el gas encerrado en un recipiente:

$$Pa = Pb + Pm$$

PROBLEMA Calcular el desnivel en las ramas de un manómetro

abierto, de mercurio, cuando la presión (presión absoluta) del gas es 156 800 Pa.

RESOLUCIÓN: $Pa = Pb + Pm$

de donde: $Pm = Pa - Pb$

pero: $Pm = h \,.\, r$

$$\therefore \quad h.\rho = Pa - Pb$$

$$h = \frac{Pa - Pb}{\rho}$$

$$h = \frac{156\,800\ Pa - 101\ Pa}{133{,}28 \cdot 10^3}$$

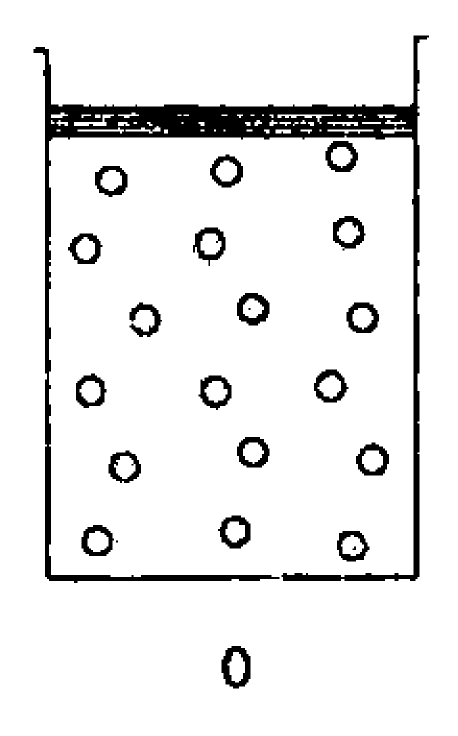
$$h = 0{,}42$$

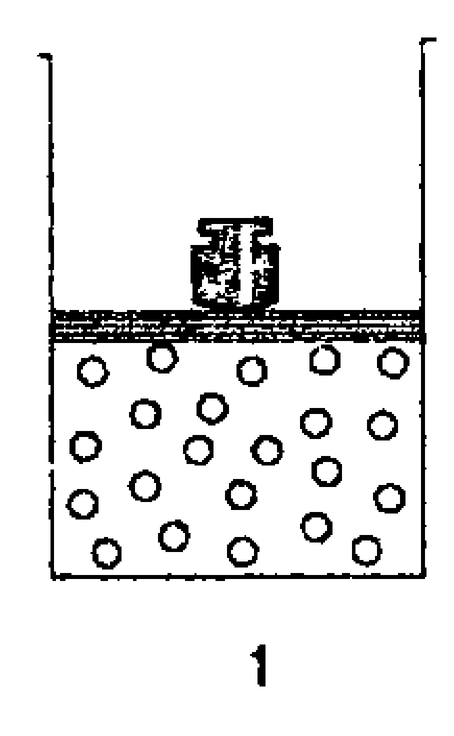
LEY GENERAL DE LOS GASES

Se ha comprobado experimentalmente que el volumen de un gas aumenta con la temperatura, pero disminuye cuando aumenta la presión, es decir el volumen es directamente proporcional a la temperatura absoluta, pero inversamente proporcional a la presión absoluta. Es decir:

$$V = K_1 T \qquad (1)$$

$$V = K_2 \frac{1}{P} \qquad (2)$$





UNA PRESIÓN — MAS PRESIÓN

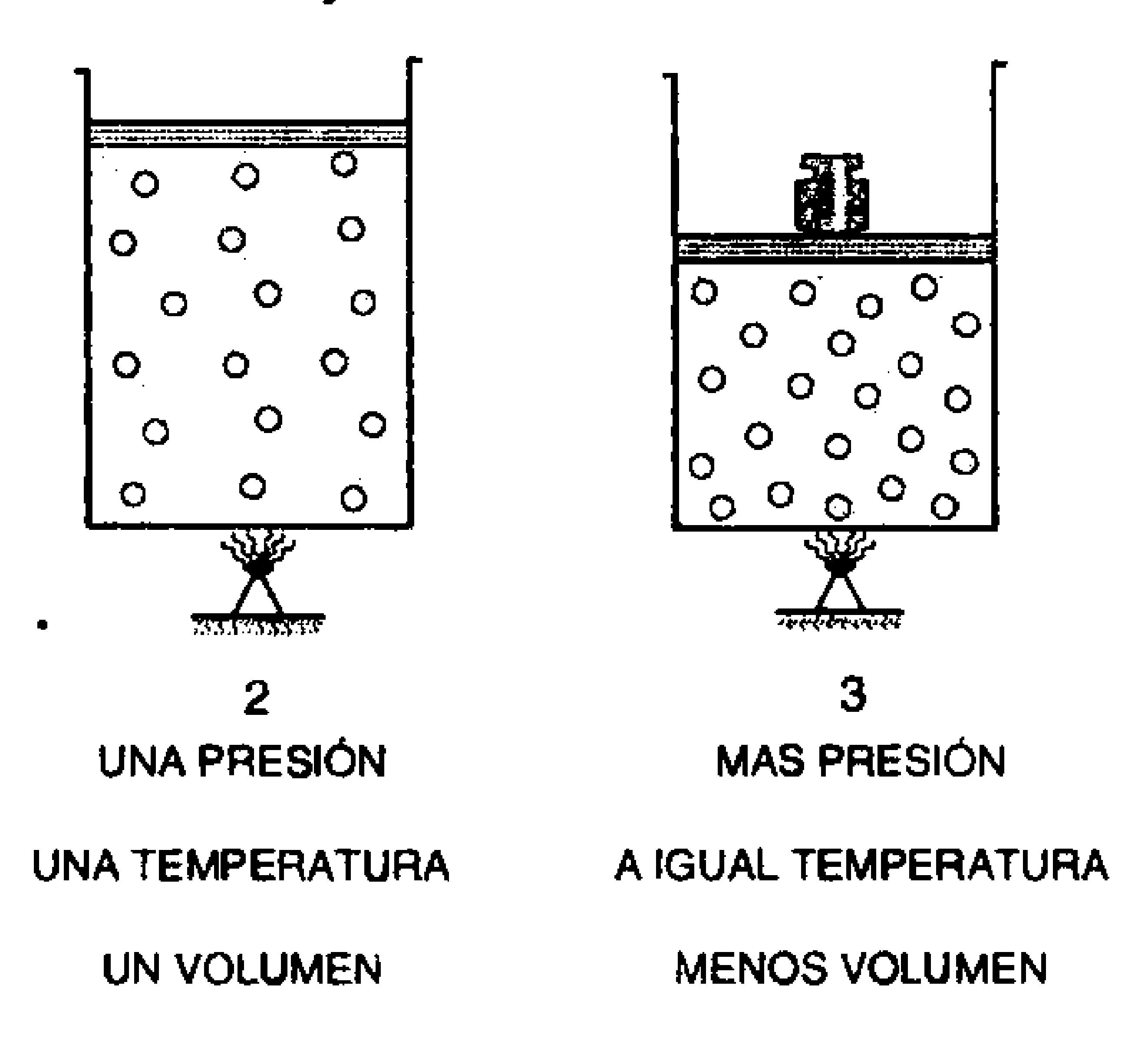
UNA TEMPERATURA — A IGUAL TEMPERATURA

UN VOLUMEN — MENOS VOLUMEN

De (1) y (2): $V = K_1.K_2 \frac{T}{P}$ ó sea:

$$\boxed{\frac{V\,P}{T} = K}$$

Que es la Ley General de los Gases

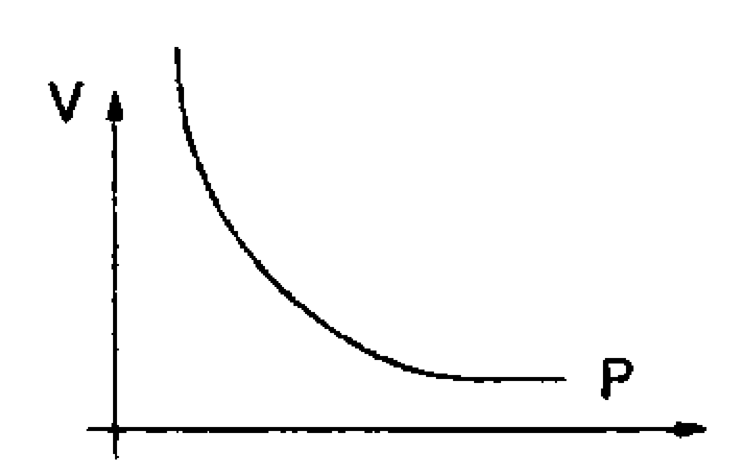


LEY DE BOYLE Y MARIOTTE

"A una temperatura constante, el volumen de un gas es inversamente proporcional a su presión asoluta".

Si: $P = K$

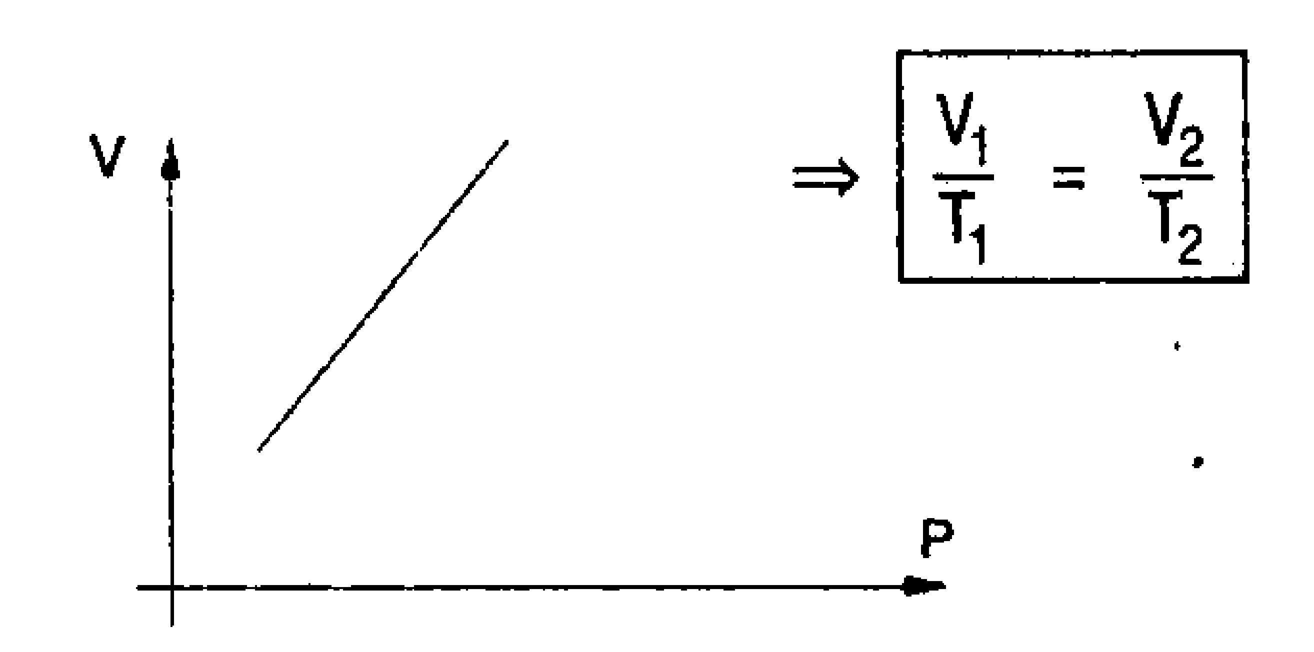
$$\Rightarrow \quad \boxed{P_1.V_1 = P_2.V_2}$$



LEY DE CHARLES

"A presión constante, el volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura asoluta".

Si: $P = K$



$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}}$$

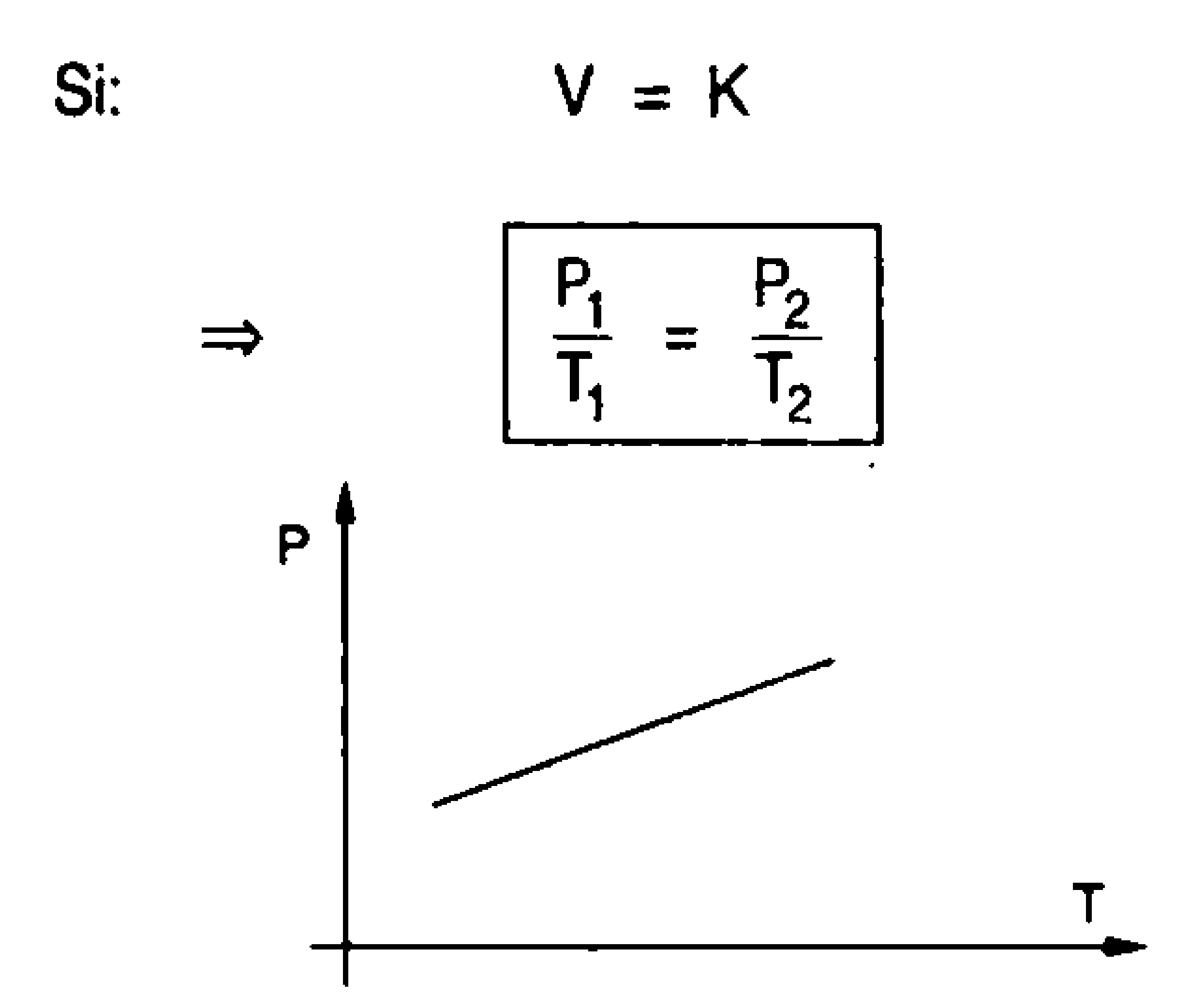
http://librosysolucionarios.net

LEY DE GAY LUSSAC

"A volumen constante, la presión ab-soluta de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta"

Si: $V = K$

$$\Rightarrow \quad \frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$



Para mayor información consultar: QUÍMICA GENERAL, de Juan Goñi Galarza, capítulo de GASES.

TIPOS DE MANÓMETROS

Los manómetros son aparatos que sirven para medir la presión manométrica o relativa de un gas cerrado en un recipiente.

Manómetro Abierto :

Es un tubo en U, que contiene mercurio, una rama está conectada al tanque que contiene gas y la otra con la atmósfera, las dos ramas están graduadas. Cuando la presión del gas es igual a la de la atmósfera, el nivel del Hg en los dos brazos del tubo es igual. Cuando la presión en el tanque es mayor, el nivel del Hg en contacto con la atmósfera sube. Cuando la presión en el tanque es menor, el nivel del Hg en contacto con la atmósfera baja. La diferencia de altura de los niveles de Hg por el peso específico, mide la diferencia de presiones:

$$\boxed{Pa - Pb = h \cdot \rho}$$

Manómetro Cerrado:

Es un tubo en U, que contiene mercurio, una rama conectada al tanque que contiene el gas, la otra rama es cerrada y contiene gas que cumplirá la Ley de Boyle (a temperatura constante). Cuando la presión del gas en el tanque es mayor, el nivel del Hg en la otra rama cerrada sube y presiona el gas. Cuando el volumen del gas en el tanque se reduce, por ejemplo a la mitad, su presión será doble, cuando se reduce a la tercera parte, su presión será triple, etc. La presión en el tanque será la de la rama cerrada más la diferencia de altura de los niveles de Hg:

$$Pa = Pm + h \cdot \rho$$

Pb — Pm — Manómetro abierto

Atmósfera — Pm — Manómetro cerrado

PROBLEMA. La presión del gas de un tanque es 900 mm Hg. ¿Cuál será la diferencia de nivel de las ramas del manómetro?

RESOLUCIÓN : $Pa = Pb + Pm$

de donde: $Pm = Pa + Pb$

$$h \,.\, \rho = Pa - Pb$$

$$h = \frac{Pa - Pb}{\rho}$$

$$h = \frac{900 \text{ mm hg} - 760 \text{ mm Hg}}{133{,}28 \times 10^3 \text{ N/m}^3}$$

$$h = \frac{140 \text{ mm Hg}}{133\,280 \times 10^3 \text{ N/m}^3}$$

pero:

$$140 \text{ mm Hg} = \frac{140 \text{ mm Hg}}{760 \text{ mm Hg}} \times$$

$$\times\ 101\,300 \text{ N/m}^3$$

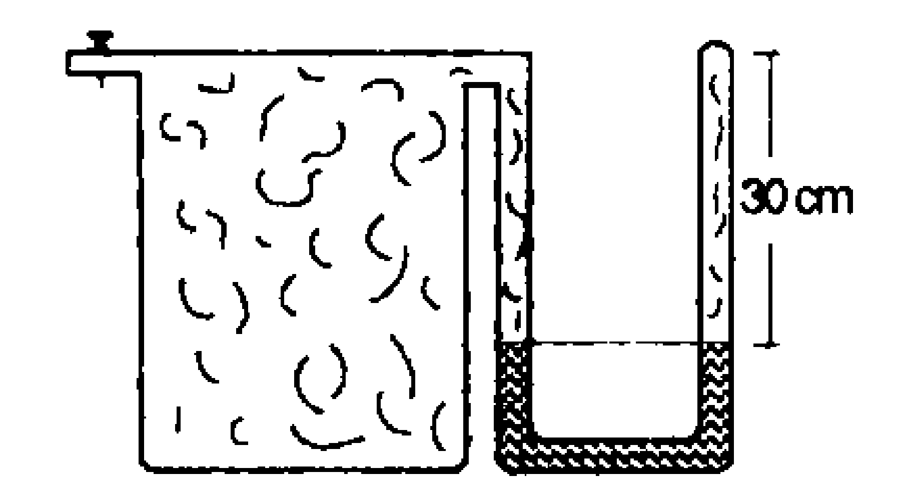
http://librosysolucionarios.net

$$140 \text{ mm Hg} = 18\,660 \text{ N/m}^2$$

$$\therefore \quad h = \frac{18\,660 \text{ N/m}^2}{133\,280 \text{ N/m}^3}$$

Rpta.: $h = 0{,}14$ m

PROBLEMA. Un manómetro cerrado tiene una sección de 1cm². Cuando la presión es de una atmósfera el volumen de aire en la rama cerrada es de 30 cm³. Calcular la presión del gas cuando en la rama cerrada sube 15 cm el nivel del Hg.



RESOLUCIÓN :

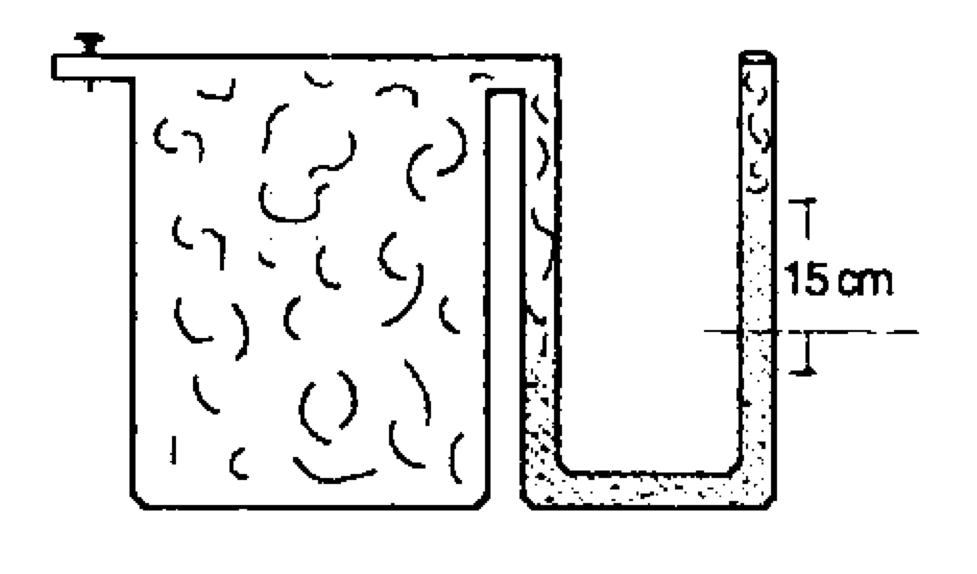
En el tubo cerrado el gas tenía una altura de 30 cm porque su volumen esde 30 cm³ y su sección 1 cm². Como el nivel del mercurio sube 15 cm el volumen se reduce a la mitad, a 15 cm³, luego la presión en el tubo cerrado es de 2 atm, entonces:

$$P_{tanque} = 2 \text{ atm} + h.\rho$$

$$= 2 \text{ atm} + 0{,}15 \times 133\,280 \text{ N/m}^3$$

$$P_{tanque} = 2 \text{ atm} + \frac{19\,992 \text{ N/m}^2}{101\,300 \text{ (N/m}^2\text{)/atm}}$$

efectuando: $P_{tanque} = 2 \text{ atm} + 0{,}19 \text{ atm}$



$$P_{tanque} = 2{,}19 \text{ atm}$$

Manómetros Metálicos:

Son manómetros que mediante un sistema de engranajes, muelles y dia-fragmas, tienen una aguja que se mueve para marcar la presión en un disco graduado; generalmente marcan la presión en lib/pulg², son similares a un reloj.

VARIACIONES DEL PESO ESPECÍFICO "r" DE LOS GASES

El ρ varía con la presión.

El ρ varía con la temperatura.

El ρ varía con la presión y temperatura.

$$\boxed{\frac{\rho}{\rho_1} = \frac{p}{p_1} \cdot \frac{T_1}{T}}$$

"El hombre será grande, cuanto más grande sea su amor por sus semejantes"

J. Goñi Galarza

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 13

CALOR

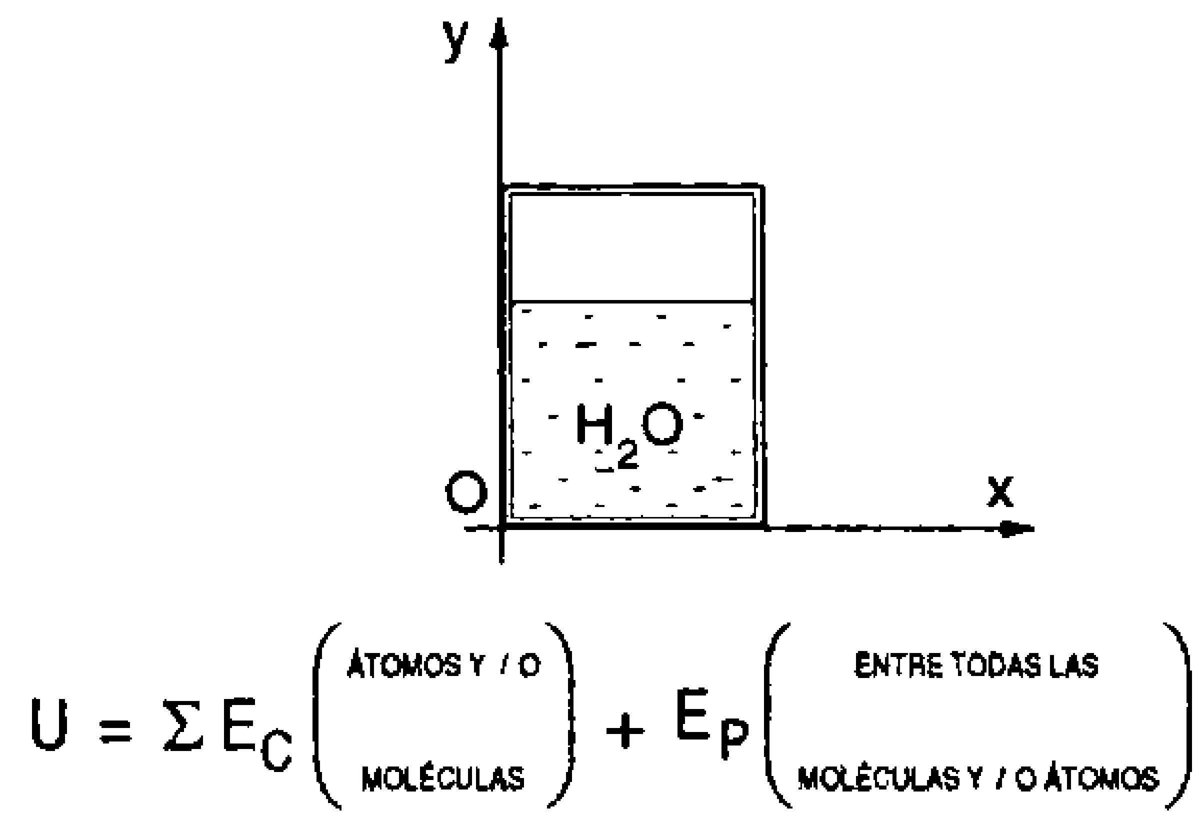
En este capítulo examinaremos fenómenos relacionados con el calor y la temperatura, tales como los efectos que produce el calor en los cuerpos, la propagación y las propiedades térmicas de algunas sustancias.



ENERGÍA INTERNA (U)

En un sistema físico, se denomina Energía Interna a las energías potenciales debido a la interacción entre las partículas mismas y la energía cinética de las partículas referidas a un sistema físico.

Por ejemplo, si el sistema físico es un recipiente conteniendo líquido, entonces el sistema de referencia está ligado a las paredes del recipiente.



$$U = \Sigma E_C \left(\text{ÁTOMOS Y / O MOLÉCULAS} \right) + E_P \left(\text{ENTRE TODAS LAS MOLÉCULAS Y / O ÁTOMOS} \right)$$

Pero medir experimentalmente esta energía es muy dificil, la misma tarea de calcularla teóricamente es imposible, dado que el movimiento caótico de las moléculas, sus valores de velocidad cambian con el tiempo y lo mismo sus energías potenciales. Por ello es necesario buscar otros parámetros que nos indiquen indirectamente la situación energética del sistema físico. Es así que se recurre a la medida de temperatura.

TERMOMETRÍA

TEMPERATURA

Es un parámetro macroscópico del sistema físico que nos informa la situación energética del conjunto de moléculas y/o átomos que forman parte del sistema físico. En otros términos sólo es posible hablar de temperatura cuando estudiamos un conjunto o una colección de partículas, de allí que se dice tam-

http://librosysolucionarios.net

bién que es un concepto estadístico. Concretamente: temperatura es la medida del flujo del calor.

La cualidad principal de la temperatura es que está ligada a la **energía interna,** se dice que "la temperatura es función creciente de la energía interna". Esto significa que cuando la temperatura de un cuerpo aumenta su energía interna también aumenta o viceversa, cuando su energía interna aumenta, su temperatura también.

CONSTRUCCIÓN DE UN TERMÓMETRO DE MERCURIO

Se utiliza un tubo muy delgado (capilar) cerrado por un extremo y abierto por el otro. Se calienta la parte cerrada y luego inmediatamente la parte abierta se sumerge en una cubeta con mercurio el cual ingresa al tubo capilar al enfriarse este, luego con pequeños golpecitos se logra que el mercurio baje hasta el fondo, se repite las veces que sea necesario para llenar el depósito del tubo en el extremo cerrado. Luego se cierra la parte abierta fundiéndola con fuego.

ESCALA CELCIUS O CENTÍGRADA

Para graduar el termómetro en blanco, se introduce, un buen rato, en hielo machacado, hasta que el nivel del mercurio pare y no se desplace; este punto se marca con cero; luego se introduce en agua en ebullición, a nivel del mar, y se mantiene un buen rato así, hasta que el nivel del mercurio no se desplace a este punto y se marca con 100; el trecho entre 0 y 100 se divide en 100 partes iguales y cada parte se llama grado Celsius o centígrado, y su símbolo es °C.

ESCALA FARENHEIT

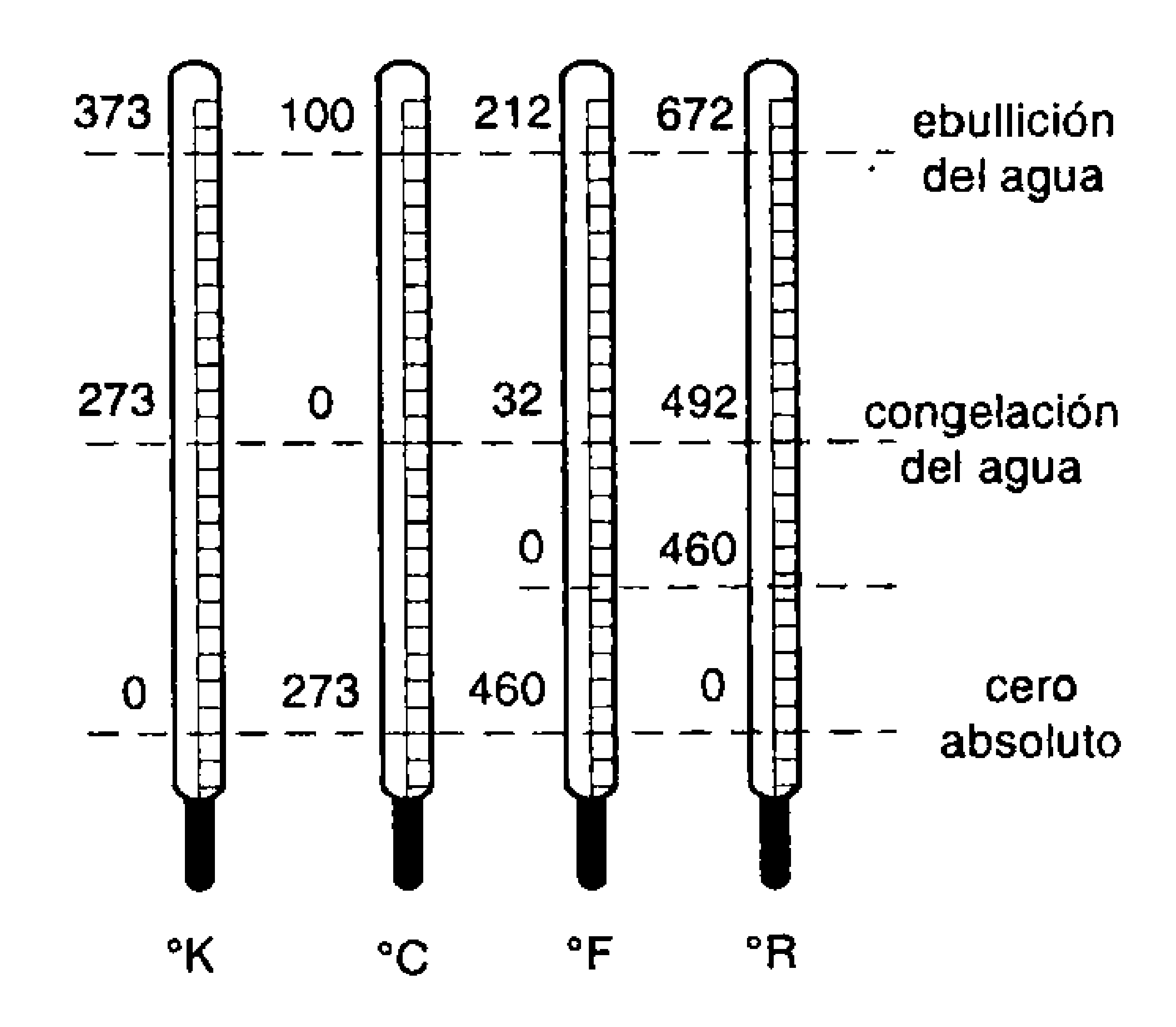
Para graduar al termómetro en blanco se hace lo siguiente: al hielo machacado se le añade una sal amoniacal, con lo que se consigue bajar la temperatura de esta mezcla, se mantiene sumergido en esta mezcla un buen rato hasta que se fije inmovil el nivel del mercurio, marcando a este punto con el número 0.

Utilizándola temperatura de los animales se encontró un promedio, al cual se le asignó el número 100; del 0 al 100 se divide en 100 partes y se prosigue hacia arriba y hacia abajo con las mismas magnitudes de división, ahora, este termómetro, así graduado introduciendo en el hielo machacado marca la división 32 e introduciendo en el agua en ebullición marca la división número 212. Cada parte se llama grado Farenheit y su símbolo es °F.

ESCALAS KELVIN Y RANKINE

Se construyen sobre la base de las dos anteriores.

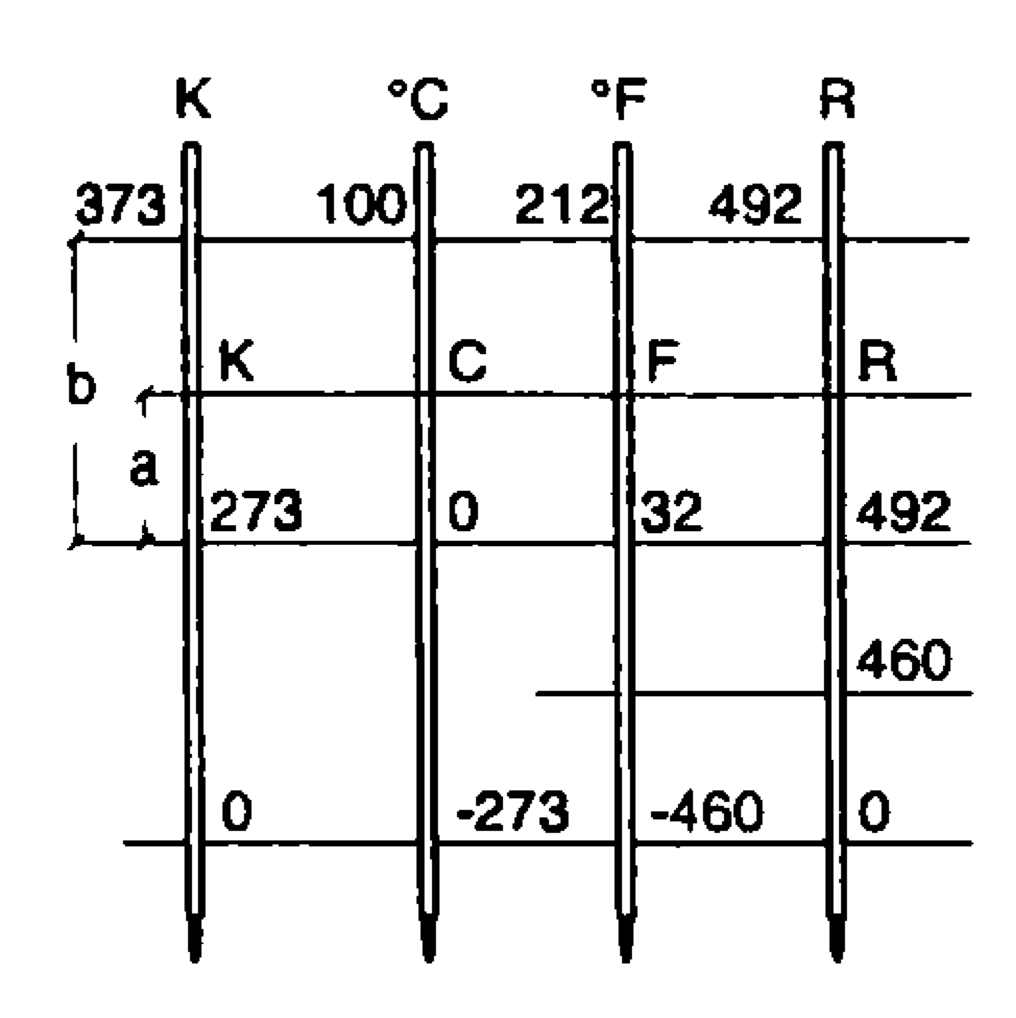
A la temperatura -273 °C ó -460 °F, que es lo mismo, es la temperatura en la cual no hay flujo de calor, es decir que un cuerpo ha perdido absolutamente su calor, tanto en la escala Kelvin como en la Rankine se marca con 0 (es el cero absoluto); luego la misma división que para la escala Centígrada se usa para la escala Kelvin, como la escala Farenheit para la escala Rankine.



RELACIÓN ENTRE °K, °C, °F, Y °R

Sea una temperatura cualquiera, que en cada uno de los termómetros indica su valor con una letra que corresponde a la letra inicial de su nombre.

http://librosysolucionarios.net



Igualando para todos los casos la relación: $\frac{a}{b}$; se tiene:

$$\frac{K-273}{100} = \frac{C}{100} = \frac{F-32}{180} = \frac{R-492}{180}$$

Simplificando:

$$\boxed{\frac{K-273}{5} = \frac{C}{5} = \frac{F-32}{9} = \frac{R-492}{9}}$$

Según el problema que se presente, para resolver, se formará igualdad con dos miembros con lo que es dato y con lo que es incógnita.

PROBLEMA 1. Transformar -26 °C a °R

RESOLUCIÓN : De la igualdad:

$$\frac{C}{5} = \frac{R-492}{9}$$

Se tiene: $R = \frac{9}{5}C + 492$

$$R = \frac{9}{5}(-26) + 492$$

$\therefore$ $R = 445{,}2$ °R

PROBLEMA 2. Calcular el equivalente de 300 °R a °C.

RESOLUCIÓN : De la igualdad (I):

$$\frac{C}{5} = \frac{R-492}{9}$$

Se tiene: $C = \frac{5}{9}(R-492)$

Rpta.: $C = \frac{5}{9}(300 - 492) = 106{,}67$ C°

PROBLEMA 3. La temperatura de e-bullición de un metal es 5 000 °F ¿Cuál será el valor en K?

RESOLUCIÓN : De la igualdad (I):

$$\frac{K-273}{5} = \frac{F-32}{9}$$

$$K = \frac{5}{9}(F-32) + 273$$

$$K = \frac{9}{5}(5\,000 - 32) + 273$$

Rpta.: K = 3 033 K

PROBLEMA 4. ¿Cuál temperatura es mayor -42 °C ó -42 °F?

RESOLUCIÓN : Se transforma °F a °C o viceversa para comparar.
Por ejemplo transformando °F a °C.

De la igualdad (I): $\frac{C}{5} = \frac{F-32}{9}$

$$C = \frac{5}{9}(F-32) = \frac{5}{9}(-42 - 32)$$

$$C = -41{,}11\ °C$$

Pero como: -41,11 °C > -42 °C

Luego: -42 °F es mayor que -42°C

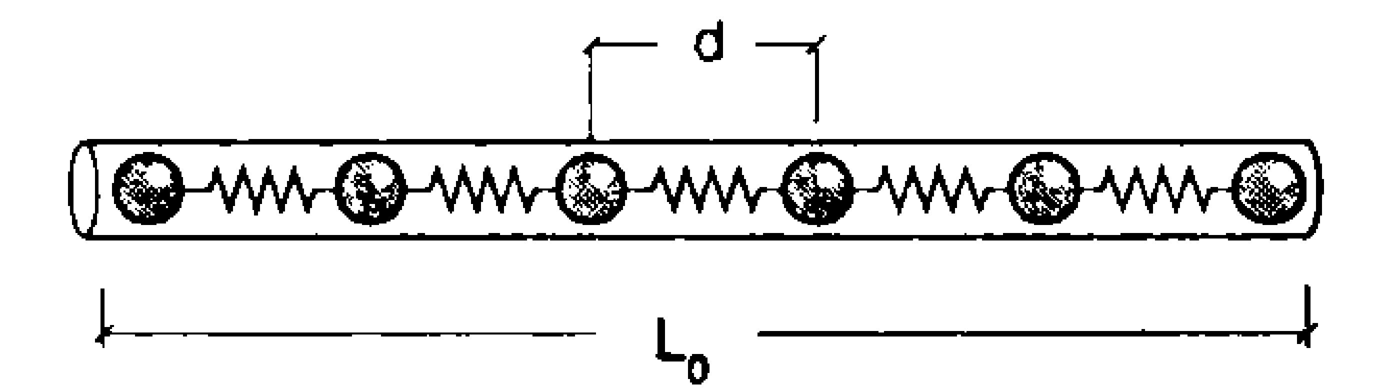
DILATACIÓN TÉRMICA

Es el aumento que experimenta un cuerpo en sus dimensiones por acción del calor.

Para analizar este fenómeno térmico vamos a esbozar el siguiente modelo molecular de una

http://librosysolucionarios.net

varilla molecular.



varilla metálica

Donde cada esferita representa a una molécula y el resorte a la forma como van a interactuar las moléculas (se sabe que las moléculas oscilan en torno a posiciones de equilibrio).

¿Qué ocurre con la energía cinética de las moléculas si calentamos uniformemente a la varilla?

Al recibir calor las moléculas van a vibrar con mayor intensidad, es decir van a tener mayor energía cinética, lo cual, a su vez, implicará un aumento de la temperatura del sistema molecular (varilla).

¿Qué ocurre con la energía potencial intermolecular al calentar uniformemente la varilla?

Como aumentó la vibración mole-cular, entonces las moléculas se separan más y al separarse más disminuyen la interacción entre ellas y por consiguiente aumenta la energía potencial intermolecular en todo el sistema (varilla). En el modelo tomado como referencia, al alejarse las moléculas, aumente la deformación del "resorte" y por consiguiente aumenta la energía potencial.

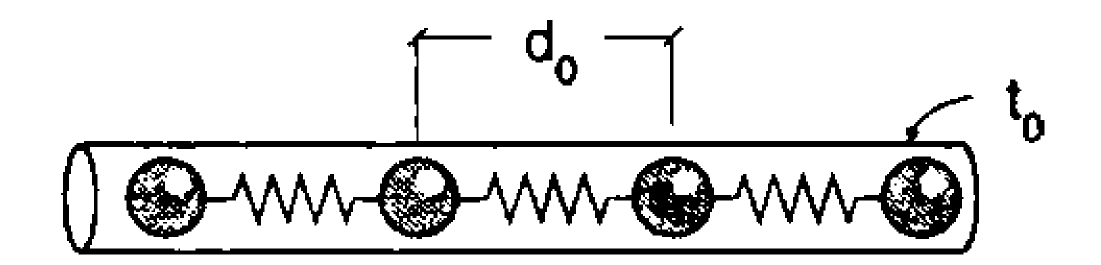
¿Qué implica que la energía potencial intermolecular aumente?

Implica un alejamiento molecular, lo cual va a generar un alargamiento de la varilla, fenómeno al cual denominaremos **dilatación térmica.**

¿Qué es dilatación térmica?

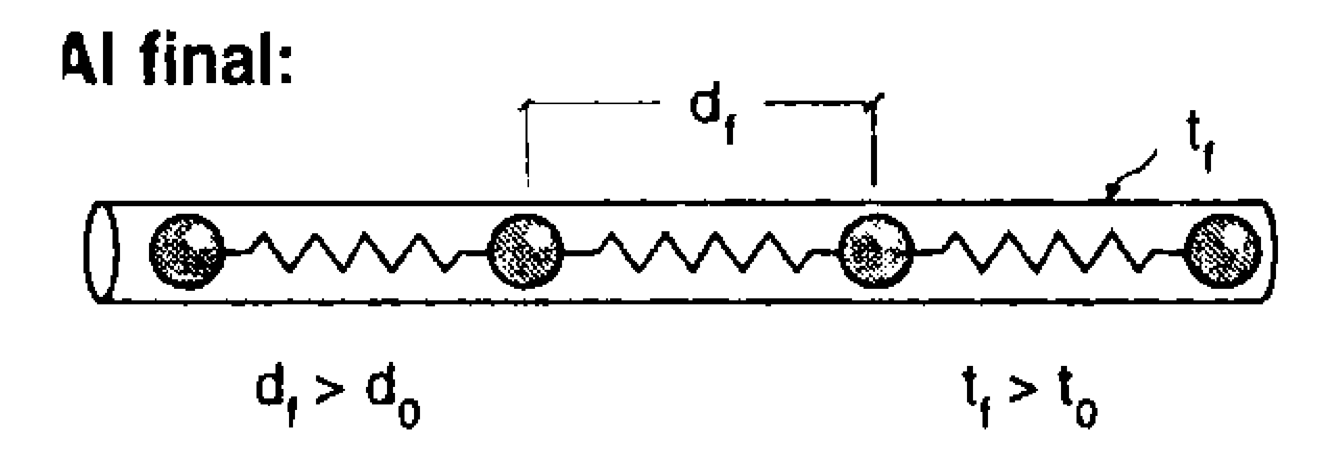
Es el aumento de dimensiones que experimenta un cuerpo físico cuando su temperatura aumenta, pues esto origina a su vez alejamiento entre sus moléculas componentes. Veamos una misma varilla con temperatura baja y con temperatura elevada.

Al inicio: con temperatura baja



A esta varilla se le suministra "Q", en calorías aumenta su temperatura y se dilata.

Al final:



Donde:

Q: Es el calor transmitido a la varilla.

d_0: Separación entre moléculas al inicio.

d: Separación entre moléculas luego de suministrar calor a la varilla.

t_0: Temperatura inicial de la varilla.

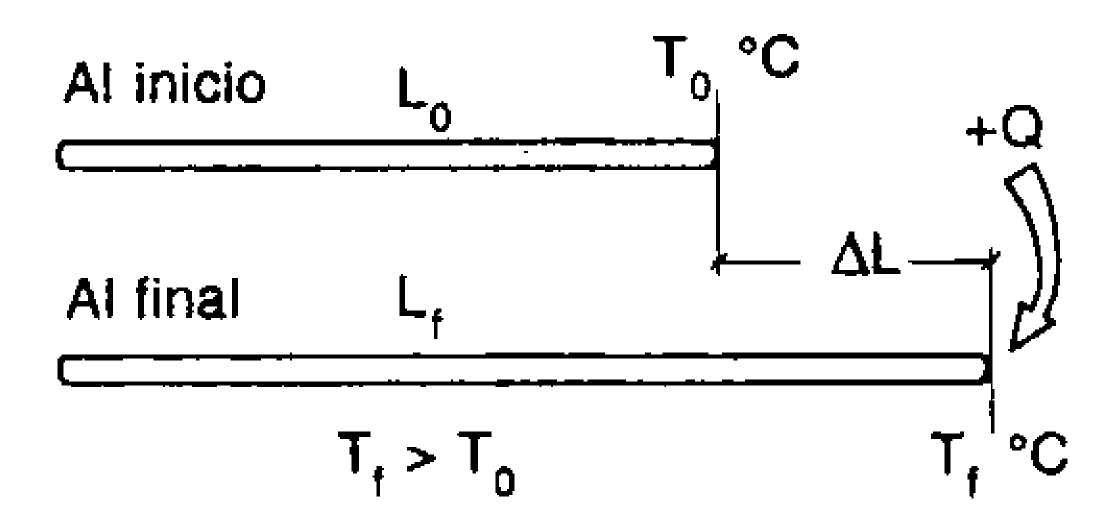
t_f: Temperatura final, las moléculas de la varilla aumentan su energía interna por efecto del calor.

Según la forma principal de los cuerpos físicos, al recibir calor, éstos pueden experimentar:

Dilatación lineal "ΔL"
Dilatación superficial "ΔS"
Dilatación volumétrica "ΔV"

¿Cómo hallar la dilatación lineal ΔL de una varilla metálica?

Consideremos una varilla "L":



http://librosysolucionarios.net

Al darle calor "Q" a la varilla de longitud "L_0" ésta aumenta hasta "L_f" y su temperatura también, desde "t_0 en °C" hasta "t_f en °C".

Experimentalmente se ha deducido la siguiente fórmula para calcular la dilatación lineal

$$\Delta L = \alpha . L_0 . \Delta t$$

Donde:

ΔL: Es la variación de longitud, es decir: $\Delta L = L_f - L_0$ en metros "m"

α: Es el coeficiente de dilatación lineal propio de cada material. a en: 1/°C; 1/K.

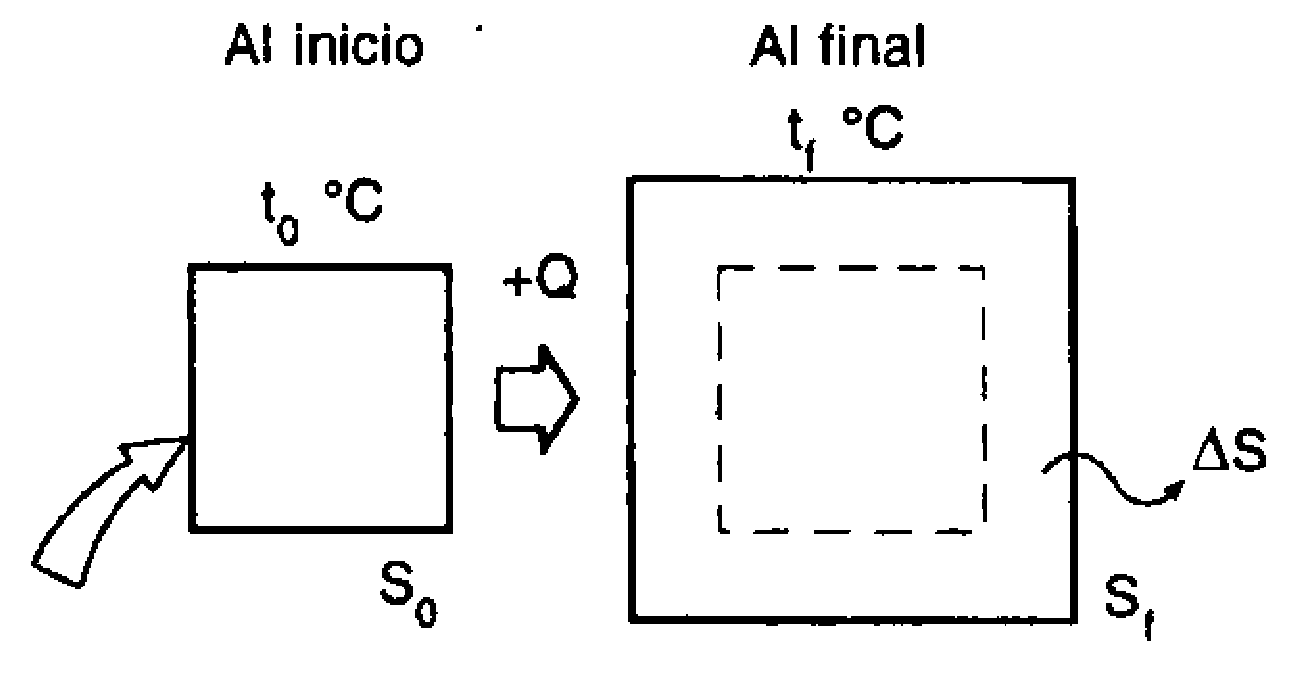
$\Delta t = t_f - t_0$: Incremento de temperatura, en "°C".

OBSERVACIÓN :

El valor del coeficiente de dilatación lineal "α" nos expresa la variación en la unidad de longitud que experimenta una barra cuando su temperatura cambia en 1 °C. La dilatación depende de la variación de la temperatura, de la longitud y de la calidad (propiedades) del material, cada material tiene su propio coeficiente de dilatación cuyos valores por unidad de longitud se determinaron en forma experimental.

¿Cómo se determina la dilatación superficial ΔS de un placa metálica?

Consideremos una lámina:



Al darle calor "Q" a la lámina la superficie "S_0" aumenta hasta "S_f" y su temperatura también, desde "t_0 en °C" hasta "t_f en °C".

Experimentalmente, para calcular el aumento de superficie o dilatación superficial se ha determinado la fórmula:

$$\Delta S = \beta . S_0 . \Delta t$$

Donde:

ΔS : Es la variación de la superficie.

$$\Delta S = S_f - S_0$$

β : Es el coeficiente de dilatación superficial de la lámina y depende de sus propiedades térmicas.
β en : 1/°C; 1/K.

$\Delta t = t_f - t_0$: In cremento de temperatu ra, en "°C"

OBSERVACIÓN :

El valor del coeficiente de dilatación superficial "β" nos expresa, la variación en la unidad de superficie que experimenta una lámina cuando su temperatura aumenta en 1 °C.

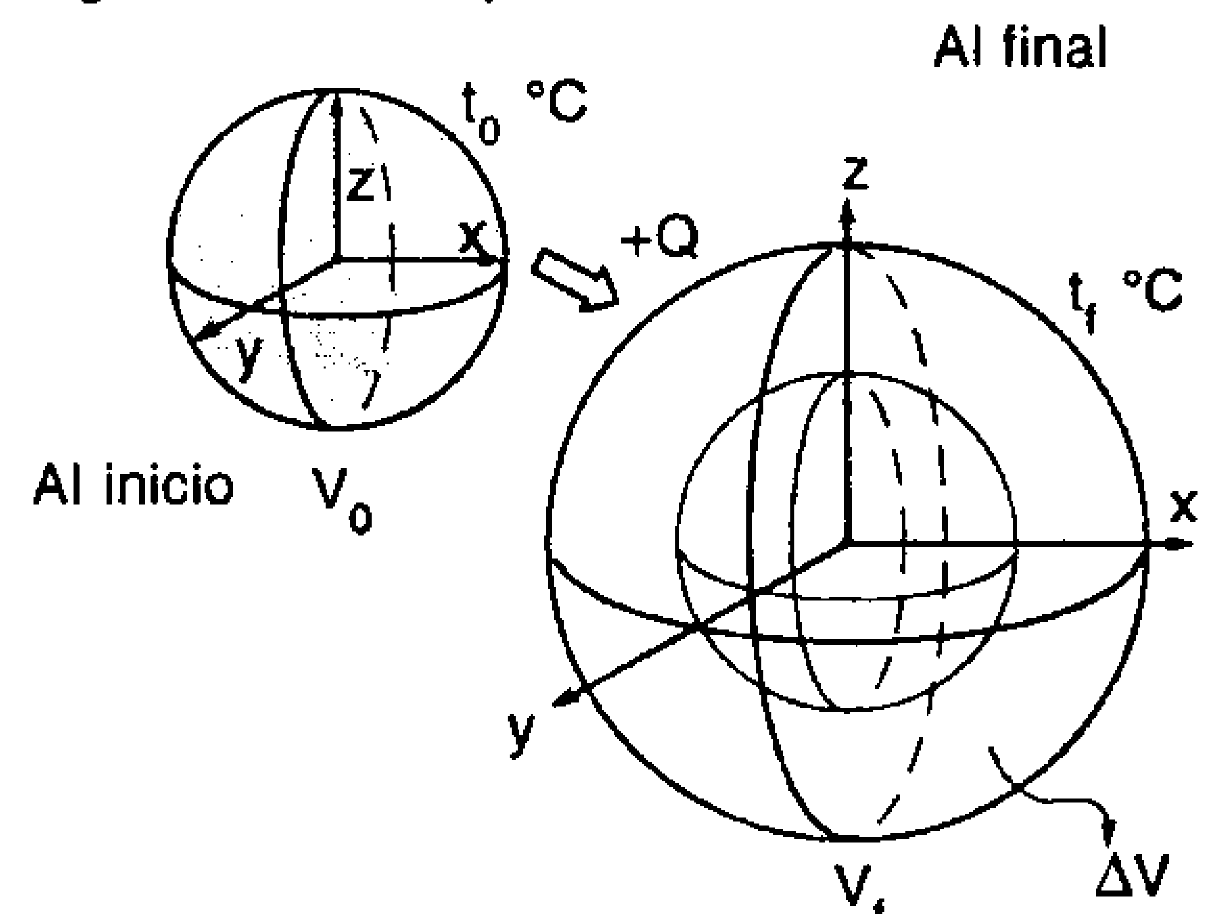
Si el material es isotrópico (es decir que presenta iguales propiedades térmicas en todas sus direcciones) entonces se considera:

$$\beta = 2\alpha$$

(Dilatación en dos direcciones)

¿Cómo determinamos la dilatación volumétrica ΔV de un cuerpo físico sólido?

Consideremos una esfera compacta, homogénea e isotrópica.



El calor entregado produce un cambio de temperatura ΔT, lo cual lleva consigo un incremento de volumen ΔV, que se determina así:

$$\boxed{\Delta V = \gamma . V_0 . \Delta t}$$

Donde:

ΔV: Es el cambio que experimenta el volumen. $\Delta V = V_f - V_0$.

γ: Es el coeficiente de dilatación volumétrica propio de cada cuerpo, el cual depende de las propiedades térmicas del cuerpo. g en: 1/°C; 1/K.

$\Delta t = t_f - t_0$: Es el incremento de temperatura.

OBSERVACIÓN : El valor del coeficiente de dilatación volumétrica nos expresa la variación, por unidad de volumen, que experimenta un cuerpo cuando su temperatura cambia en 1°C.

Si el material es isotrópico (iguales propiedades térmicas en todas sus direcciones) entonces se cumple:

$$\boxed{\gamma = 3\alpha}$$ dilatación en tres direcciones

¿Cuando un sólido se dilata qué ocurre con su densidad?

¡Si un sólido se dilata su densidad cambia!
A la temperatura inicial "t_0" definimos una densidad inicial:

$$\delta_0 = \frac{m}{V_0} \qquad (1)$$

Cuando se le entrega calor, hasta la temperatura "t_f", su densidad será:

$$\delta_f = \frac{m}{V_f} \qquad (2)$$

Dividiendo (2) ÷ (1) : $$\frac{\delta_f}{\delta_0} = \frac{V_f}{V_0} \qquad (3)$$

Se sabe que: $\Delta V = \gamma . V_0 . \Delta t$

$$V_f - V_0 = \gamma . V_0 . \Delta t$$

Luego: $V_f = V_0 (1 + \gamma . \Delta t)$

En (3) : $$\frac{\delta_f}{\delta_0} = \frac{V_0}{V_0 (1 + \gamma . \Delta t)}$$

De donde: $$\boxed{\delta_f = \frac{\delta_0}{(1 + \gamma . \Delta t)}}$$

Esta ecuación nos expresa que al aumentar la temperatura ΔT la densidad del cuerpo disminuye.

COEFICIENTES DE DILATACIÓN LINEAL "a" DE ALGUNOS METALES	
Aluminio	24×10^{-6}/°C
Cinc	63×10^{-6}/°C
Cobre	17×10^{-6}/°C
Hiero	12×10^{-6}/°C
Platino	9×10^{-6}/°C
Plomo	30×10^{-6}/°C
Mercurio	60×10^{-6}/°C

NOTA : Aproximadamente, el coeficiente superficial es el doble y el coeficiente volumétrico es el triple del coeficiente lineal de cada cuerpo:

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. A 30 °C la longitud de una barra de cinc es de 80 cm ¿Cuál será la longitud de la barra a 130 °C?

Para $\alpha = 63 \times 10^{-6} \times$°C

RESOLUCIÓN : $t_i = 30$ °C

http://librosysolucionarios.net

$L_f = ?$ $\quad L_i = 80 \text{ cm}$

$t_f = 130\ °C$

Se sabe que: $\quad L_f = L_i(1 + \alpha . \Delta t)$

$$L_f = 80 \text{ cm}(1 + 63 \times 10^{-6} \times 100)$$

$$L_f = 80 \text{ cm}(1 + 63 \times 10^{-4})$$

$$= 80 \text{ cm} + 504 \times 10^{-3} \text{ cm}$$

$$= 80 \text{ cm} + 0{,}504 \text{ cm}$$

$$L_f = 80{,}504 \text{ cm}$$

PROBLEMA 2. A 30 °C el peso específico del cobre es 83,38 x 10^3 N/m^3 ¿Cuál será a 80 °C? Coeficiente de dilatación lineal del cobre 17 x 10^{-6} 1/°C.-

RESOLUCIÓN: $\quad t_i = 10°C$

$\rho_f = ?$ $\quad \rho_i = 83{,}38 . 10^3 \text{ N/m}^3$

$t_f = 80°C$

$$\rho_f = \frac{\rho_i}{1 + \gamma . \Delta t} \quad \text{(fórmula)}$$

$$\rho_f = \frac{83{,}38 . 10^3}{1 + (3 . 17 . 10^{-6} . 80)}$$

$$\rho_f = \frac{83{,}38 . 10^3}{1 + 4\,080 . 10^{-6}}$$

$$\rho_f = \frac{83{,}38 . 10^3}{1{,}004\,080}$$

Rpta.: $83{,}05 . 10^3 \text{ N/m}^3$

PROBLEMA 3. A 30 °C la longitud de una barra de acero es 10 m. Calcular la temperatura a la cual la barra tendrá una longitud de 9,998 m. El coeficiente de dilatación lineal del acero es 11 x 10^{-6}/°C.

RESOLUCIÓN: Sabiendo que:

$$\Delta L = \alpha . L . \Delta t \text{ , de donde}$$

$$\Delta t = \frac{\Delta L}{\alpha L} = \frac{(9{,}998 \text{ m} - 10{,}00 \text{ m})}{11 \times 10^{-6}/°C \times 10 \text{ m}}$$

$$\Delta t = -\frac{0{,}002 \text{ m}}{11\,(10^{-6}/°C) \times 10 \text{ m}}$$

$$\Delta t = -18{,}18\ °C$$

Temperatura final:

$$t_f = 20\ °C - 18{,}18\ °C$$

Rpta.: $t_f = 1{,}82\ °C$

PROBLEMA 4. Un cilindro sólido, de aluminio, de 10 cm de radio de la base y 50 cm de altura se caliente de 0 °C a 100 °C. Si para el aluminio $\alpha = 24 \times 10^{-6}/°C$. Calcular:

a) Aumento del volumen.
b) Variación de su peso específico.

RESOLUCIÓN:

a) $\quad V = A h = \pi r^2 h$

$$V = \pi (10 \text{ cm})^2 \times 50 \text{ cm}$$

$$V = 15\,707{,}693 \text{ cm}^3$$

Ahora: $\quad \Delta V = \alpha . V . \Delta t$

$$\Delta V = 3\alpha . V . \Delta t = 3 \times 24 \times$$
$$\times 10^{-6}/°C \times 15\,707{,}963 \text{ cm}^3 \times 100\ °C$$

Rpta.: $\Delta V = 113{,}097\,3 \text{ cm}^3$

b) Por fórmula se conoce el peso específico al final (r_1):

$$\rho_1 = \frac{\rho}{1 + \gamma \Delta t} \qquad (1)$$

Por otro lado: $\quad \Delta \rho = \rho - \rho_1$

Sustituyendo valor de (1):

$$\Delta \rho = \rho - \frac{\rho}{1 + \gamma . \Delta t}$$

$$\Delta \rho = \frac{\rho . \gamma . \Delta t}{1 + \gamma . \Delta t}$$

Sustituyendo valores datos y tomando γ del aluminio del cuadrado:

$$\Delta\rho = \frac{26{,}46 \times 10^3 \ \frac{N}{m^3} \times 3 \times}{1 + 3 \times 24 \times 10^{-6} \times} \cdots$$

$$\cdots \frac{\times 24 \times 10^{-6}\ °C \times 100\ °C}{\times \frac{1}{°C} \times 100\ °C}$$

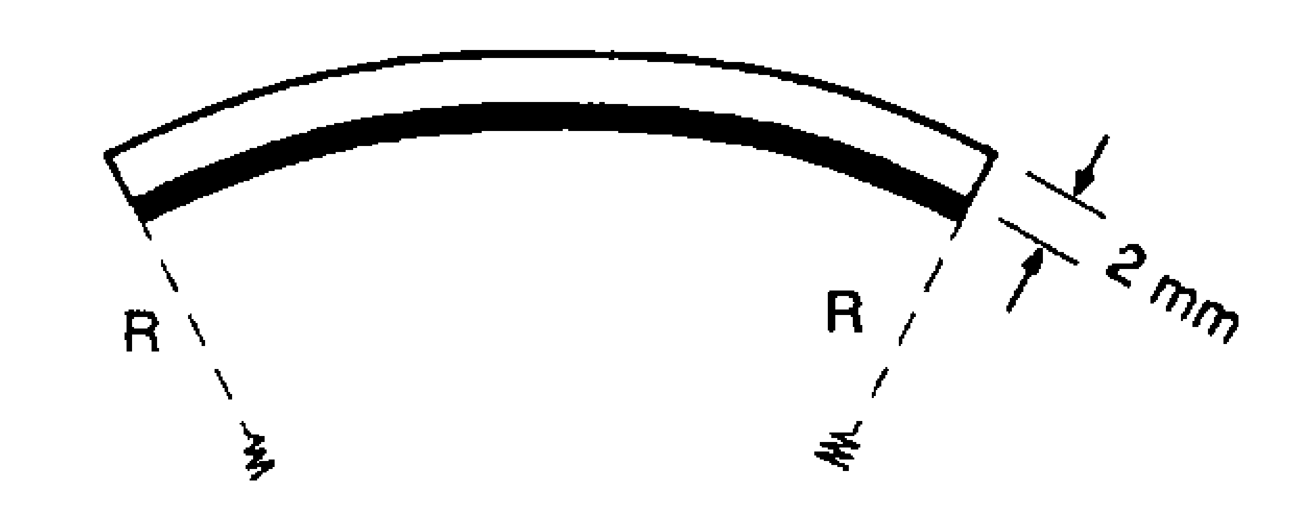
$$\Delta\rho = \frac{190{,}5\ N}{1{,}0072\ m^3}$$

Rpta.: $\Delta\rho = 189{,}14\ N/m^3$

PROBLEMA 5. Dos platinas una de latón, y otra de hierro, están soldadas en sus extremos y separadas 2 mm una de otra. Si se aumenta la temperatura de 10 °C a 200 °C, calcular el radio del arco que se forma como consecuencia del calentamiento.

$$\alpha_{latón} = 0{,}000\,019/°C$$

$$\alpha_{Hierro} = 0{,}000\,012/°C$$



RESOLUCIÓN : Como al calentarse, el latón se dilata más que el hierro por tener mayor coeficiente de dilatación, resulta que el par de platinas paralelas se arquea como muestra la figura.

En geometría, los arcos son proporcionales a sus radios.

$$\frac{R + 2}{R} = \frac{L\,(1 + \Delta t\,.\,\alpha_{latón})}{L\,(1 + \Delta t\,.\,\alpha_{hierro})}$$

O sea: $\frac{R}{R} + \frac{2}{R} = \frac{1 + \Delta t\,.\,\alpha_{latón}}{1 + \Delta t\,.\,\alpha_{hierro}}$

Simplificando y sustituyendo datos:

$$1 + \frac{2}{R} = \frac{1 + 190 \times 0{,}000\,019}{1 + 190 \times 0,\,000\,012}$$

$$\frac{2}{R} = \frac{1{,}000\,361}{1{,}000\,228} - 1$$

Rpta.: $R = 15\,048{,}908\ mm$ ó

$R = 15{,}05\ m$

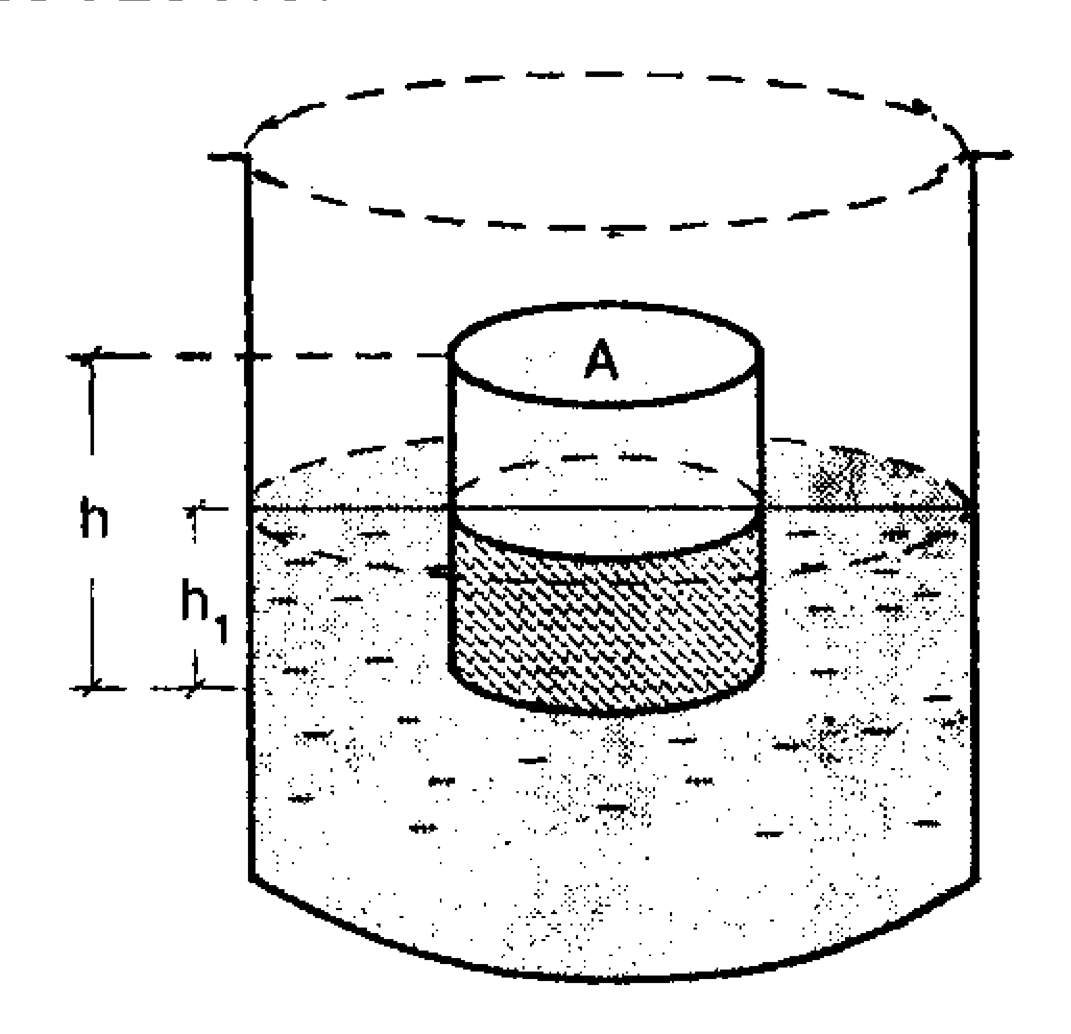
PROBLEMA 6. Sobre una cierta porción de mercurio flota un cilindro de fierro en posición vertical. A 0 °C el cilindro está sumergido 0,573 de su altura. Si la temperatura se eleva a 200 °C, ¿en cuanto se sumerge el cilindro?

$$\alpha_{Fe} = 0{,}000\,012/°C$$

$$\alpha_{Hg} = 0{,}000\,180/°C$$

$$h_1 = 0573\,h$$

RESOLUCIÓN :



Llamando:

A: Sección del cilindro
h: Altura
δ: Peso específico del fierro
h_1: La parte de la altura sumergida a 0 °C
ρ_1: Peso específico del mercurio a 0 °C
h_2: La parte de la altura sumergida a 200 °C
ρ_2: Peso específico del mercurio a 200 °C

http://librosysolucionarios.net

Recordando que: Empuje = peso volumen de Hg desalojado.

$$A \quad 0\,°C: \quad E = A_1.h_1.\rho_1 \qquad (1)$$

$$A \ 200\,°C: \quad E = A_2.h_2.\rho_2 \qquad (2)$$

Como el peso del cilindro de fierro es constante, cualquiera que sea la temperatura, el empuje del líquido siempre tiene el mismo valor.

Igualando (1) y (2):

$$A_2.h_2.\rho_2 = A_1.h_1.\rho_1 \qquad (A)$$

Para 200 °C:

$$A_2 = A_1(1 + 2\,\alpha\,.\,\Delta t) \qquad (3)$$

y: $$\rho_2 = \frac{\rho_1}{1 + 3\,\alpha\,.\,\Delta t} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (A):

$$A_1(1 + 2\alpha\,.\,\Delta t)\cdot h_2 \cdot \frac{\rho_1}{1 + 3\alpha\,.\,\Delta t} = $$

$$= A_1.h_2.\rho_1$$

Simplificando: $$h_2 \cdot \frac{1 + 2\alpha\,.\,\Delta t}{1 + 3\alpha\,.\,\Delta t} = h_1$$

de donde: $$h_2 = \frac{h_1(1 + 3\alpha\,.\,\Delta t)}{(1 + 2\alpha\,.\,\Delta t)}$$

Sustituyendo datos:

$$h_2 = \frac{0{,}573 \times h\,(1 + 3 \times 0{,}000\,18 \times 200)}{(1 + 2 \times 0{,}000\,18 \times 200)}$$

$$h_2 = 0{,}591\,h$$

Luego, el cilindro de hierro se sumerge un poco más, una altura dada por la diferencia:

$$h_2 - h_1 = 0{,}591\,h - 0{,}573\,h$$

Rpta.: se sumerge 0,018 h más.

PROBLEMA 7. Una barra de latón de longitud "L" se estira L/500 con el calor que se le suministra. Si su coeficiente de dilatación lineal es 0,000 019 /°C, calcular la temperatura que se ha incrementado.

RESOLUCIÓN: Sea:
L Longitud inicial
L_f Longitud final

Luego: $$L_f = L(1 + \alpha\,.\,\Delta t)$$

$$L_f = L + L.\alpha\,.\,\Delta t$$

$$L_f - L = L.\alpha\,.\,\Delta t \qquad (1)$$

Pero: $$L_f - L = \frac{1}{500}$$

Luego, en (1): $$\frac{1}{500} = \alpha\,.\,\Delta t$$

de donde:

$$\Delta t = \frac{1}{500\,.\,\alpha} = \frac{1}{500 \times 0{,}000\,019/°C}$$

Rpta.: $\Delta t = 105{,}26\ °C$

PROBLEMA 8. Sea una barra de latón de longitud **B** y coeficiente de dilatación l. Esta barra se quiere usar como diagonal de un cuadrado de lado "C" cuyo coeficiente de dilatación es "a", la temperatura inicial es 0 °C. ¿A qué temperatura deben elevarse?

RESOLUCIÓN: Por geometría, la longitud de la diagonal del cuadrado cuando se ha llegado a la temperatura pedida es:

$$B_f = C_f\,\sqrt{2} \qquad (1)$$

pero: $$B_f = B(1 + \lambda\,.\,\Delta t)$$

$$C_f = C(1 + \alpha . \Delta t)$$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$B(1 + \lambda . \Delta t) = C(1 + \alpha . \Delta t)\sqrt{2}$$

$$B + B.\lambda.\Delta t = C\sqrt{2} + C.\alpha.\Delta t\sqrt{2}$$

$$C.\alpha.\Delta t\sqrt{2} - B.\lambda.\Delta t = B - C\sqrt{2}$$

De donde:

Rpta.: $$\Delta t = \frac{B - C\sqrt{2}}{C.\alpha\sqrt{2} - B.\lambda}$$

PROBLEMA 9. El peso específico del hierro a la temperatura de 10 °C es 76,93 x 10³ N/m³ ¿Cuál

será su peso específico a 120 °C?. Para el hierro: $\alpha = 17 \times 10^{-6}$/°C.

RESOLUCIÓN:

$$\rho_i = 76{,}93 . 10^3\ N/m^3 \quad ; \quad \rho_f = ?$$

$$t_i = 10\ °C \quad ; \quad t_f = 120\ °C$$

$$\alpha = 12 . 10^{-6}/°C$$

Recordando: $$\rho_f = \frac{\rho_1}{1 + 3\alpha . \Delta t}$$

$$\rho_f = \frac{76{,}93 \times 10^3}{1 + 3 \times 12 \times 10^{-6} \times 110}$$

Rpta.: $\rho_f = 76\,627\ N/m^3$

PROBLEMA 10. Cuando una pieza metálica se sumerge en el mercurio experimenta una pérdida de peso de 0,91 N a la temperatura de 0 °C y de 0,971 N a 60 °C. Calcular el coeficiente de dilatación lineal de la pieza metálica, si el correspondiente al del mercurio es a = 60 x 10⁻⁶/°C.

RESOLUCIÓN: $\alpha_m = ?$

$$E_1 = 0{,}98\ N \quad ; \quad t_1 = 0\ °C$$

$$E_2 = 0{,}971\ N \quad ; \quad t_2 = 60\ °C$$

$$\alpha_{Hg} = 60 \times 10^{-6}/°C$$

Por Arquímedes, a 0 °C

Empuje = Volumen del cuerpo x Peso específico del mercurio

Es decir: $E_1 = V_1 . \rho_{1_{Hg}}$

de donde: $$V_1 = \frac{E_1}{\rho_{1_{Hg}}}$$

$$V_1 = \frac{0{,}98\ N}{\rho_{1_{Hg}}} \qquad (1)$$

Por Arquímedes, a 60 °C:

$$E_2 = V_2 . \rho_{2_{Hg}}$$

de donde: $$V_2 = \frac{E_2}{\rho_{2_{Hg}}}$$

$$V_2 = \frac{0{,}971\ N}{\rho_{2_{Hg}}} \qquad (2)$$

pero el volumen final de la pieza metálica, o sea V_2 es:

$$V_2 = V_1(1 + 3\alpha_m \Delta t)$$

Sustituyendo el valor de V_1:

$$V_2 = \frac{0{,}98\ N}{\rho_{1_{Hg}}}(1 + 3\alpha_m\, 60\ °C) \qquad (3)$$

Además el peso específico final del mercurio es:

$$\rho_{2_{Hg}} = \frac{\rho_{1_{Hg}}}{1 + 3\alpha_{Hg} . \Delta t}$$

Es decir: $$\rho_{2_{Hg}} = \frac{\rho_{1_{Hg}}}{1 + 3\alpha_{Hg} . 60\ °C} \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) y (4) en (2):

$$\frac{98\,N}{\rho_{1_{Hg}}}(1+3\,\alpha_m\,60\,°C) = \frac{0{,}971\,N}{\dfrac{\rho_{1_{Hg}}}{1+3\,\alpha_{Hg}\,60\,°C}}$$

$$0{,}98\,N\,(1 + 3\,\alpha_m\,60\,°C) =$$

$$= 0{,}971\,N\,(1 + 3\,\alpha_{Hg}\,60\,°C)$$

pero: $\alpha_{Hg} = 60 \times 10^{-6}/°C$

Sustituyendo y efectuando:

$$0{,}98\,N\,(1 + 3\,\alpha_m\,60\,°C) =$$

$$= 0{,}971\,N\,(1 + 3 \times 60 \times 10^{-6} \times 60)$$

$$\alpha_m = \frac{0{,}971 + 0{,}971 \times 3 \times 60 \times \ldots}{180\,°C}$$

$$\ldots \times 60 \times 10^{-6} - 0{,}98$$

$$\alpha_m = \frac{10\,487 \times 10^{-6} - 0{,}009}{176{,}4}$$

Rpta.: $\alpha_m = 8{,}43 \times 10^{-6}/°C$

PROBLEMA 11. Un cilindro de aluminio se llena totalmente con 2 kg de mercurio a la temperatura de 60 °C. ¿Cual será la capacidad del cilindro a 10 °C?

$$\alpha_{Hg} = 60 \times 10^{-6}/°C$$

$$\alpha_{Al} = 24 \times 10^{-6}/°C$$

$$\delta_1 = 13{,}6\,g/cm^3 \;;\; \text{a } 10\,°C \text{ (del Hg)}$$

RESOLUCIÓN:

Sean: V_1 : Volumen a 10 °C

V_2 : Volumen a 60 °C

$$V_2 = V_1\,(1 + 3\,\alpha_{Al}\,.\Delta t) \qquad (1)$$

Por otro lado, para el Hg:

$$V_2 = \frac{masa}{\delta_2}$$

Pero: $\delta_2 = \dfrac{\delta_1}{1 + 3\,\alpha_{Hg}\,.\,\Delta t}$

$$\therefore \quad V_2 = \frac{masa}{\dfrac{\delta_1}{1 + 3\,\alpha_{Hg}\,.\,\Delta t}} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$V_1\,(1+3\,\alpha_{Al}\,.\Delta t) = \frac{masa}{\dfrac{\delta_1}{1 + 3\,\alpha_{Hg}\,.\,\Delta t}}$$

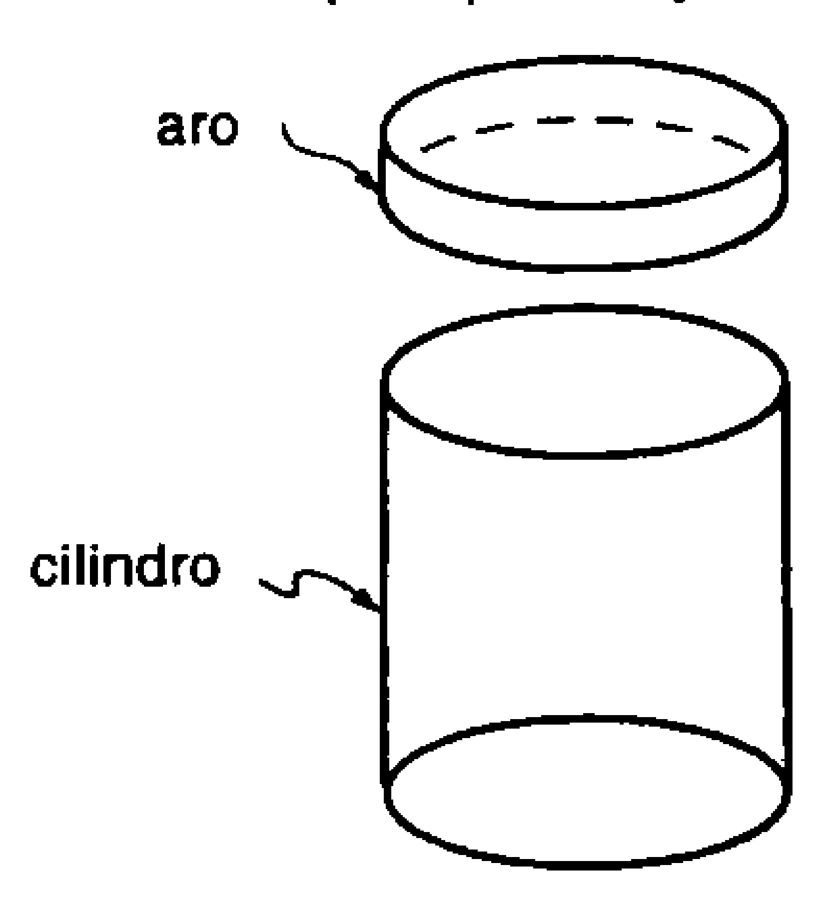
$$V_1 = \frac{masa\,(1 + 3\,\alpha_{Hg}\,.\,\Delta t)}{\delta_1\,(1 + 3\,\alpha_{Al}\,.\,\Delta t)}$$

Sustituyendo datos:

$$V_1 = \frac{200\,g\,(1-3 \times 60 \times 10^{-6} \times 50)}{13{,}6\,\dfrac{g}{cm^3}\,(1-3 \times 24 \times 10^{-6} \times 50)}$$

Rpta.: $V_1 = 146{,}26\,cm^3$

PROBLEMA 12. Un cilindro tiene un diámetro de 50 cm exactos. Se quiere rodear al cilindro con un aro de acero de 49,92 cm de diámetro. El coeficiente de dilatación lineal del acero es $12 \times 10^{-6}/°C$. Si la temperatura en el momento de la medida es 17 °C, calcular hasta qué temperatura debe calentarse el arco para poder ajustar el cilindro.



RESOLUCIÓN: Considerando la dilatación lineal del diámetro:

$$D_f = D_i(1 + \alpha . \Delta t) \qquad (I)$$

Pero: $D_f = 50$ (1)

$D_i = 49{,}2$ (2)

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

$$50 = 49{,}92(1 + 12 \times 10^{-6} \times \Delta t)$$

De donde: $\Delta t = 133{,}5\ °C$

luego: $t_f = 17\ °C + 133{,}5\ °C$

Rpta.: $t_f = 150{,}5\ °C$

PROBLEMA 13. Dos barras metálicas superpuestas y soldadas por un solo extremo presentan a cualquier temperatura la misma diferencia de longitud. Calentando ambas barras a t °C la razón entre sus longitudes es:

$$\frac{L_1}{L_2} = n$$

Sabiendo que sus coeficientes de dilatación son α_1 y α_2, hallar "n" en función de "t", α_1 y α_2.

RESOLUCIÓN : datos: $\Delta L_1 = \Delta L_2$

por otra parte, se tiene:

1era. barra: $L_1 = L_{i\,1}(1 + \alpha_1 t)$ (1)

2da. barra: $L_2 = L_{i\,2}(1 + \alpha_2 t)$ (2)

(1) entre (2): $\frac{L_1}{L_2} = \frac{L_{i\,1}}{L_{i\,2}}\left(\frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha_2 t}\right)$ (3)

Como por dato: $\Delta L_1 = \Delta L_2$

ó: $L_{i\,1} . \alpha_1 . t = L_{i\,2} . \alpha_2 . t$

entonces: $\frac{L_{i\,1}}{L_{i\,2}} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}$ (4)

Reemplazando (4) en (3) y considerando que:

$$\frac{L_1}{L_2} = n$$

se tiene: $n = \frac{\alpha_1}{\alpha_2}\left(\frac{1 + \alpha_1 t}{1 + \alpha_2 t}\right)$

PROBLEMA 14. Un recipiente de vidrio, cerrado, se encuentra totalmente lleno de agua. Si se enfría a -2°C, ¿qué se puede afirmar?

RESOLUCIÓN : Al solidificarse el agua, es decir, al convertirse en hielo, su volumen aumenta, en este caso a un volumen mayor que el recipiente, debido a la mayor separación de los espacios intermoleculares, de tal manera que:

$$V_{hielo} > V_{recipiente\ vidrio}$$

$\therefore$ El recipiente se rompe

PROBLEMA 15. Un péndulo "L_i" tiene un período "t_i". ¿Cuál será el nuevo período si su temperatura se incrementa en X °C? El coeficiente de dilatación lineal es "α".

RESOLUCIÓN :

I) $t_i = 2\pi\sqrt{\frac{L_i}{g}}$ (1)

II) $L_f = L_i(1 + \alpha . \Delta t)$

ó: $L_f = L_i(1 + \alpha . X)$ (2)

también: $t_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_f}{g}}$ (3)

Reemplazando (2) en (3)

$$t_f = 2\pi\sqrt{\frac{L_i}{g}}\sqrt{1 + \alpha X} \qquad (4)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$t_f = t_i(1 + \alpha . X)^{\frac{1}{2}}$$

CALORIMETRÍA

Calorimetría es el estudio de la medida del calor. Para el estudio de la medida del calor analicemos el siguiente hecho:

Se tienen dos bloques a diferentes temperaturas.

Al inicio: $U_A > U_B$; $t_A > t_B$

A B

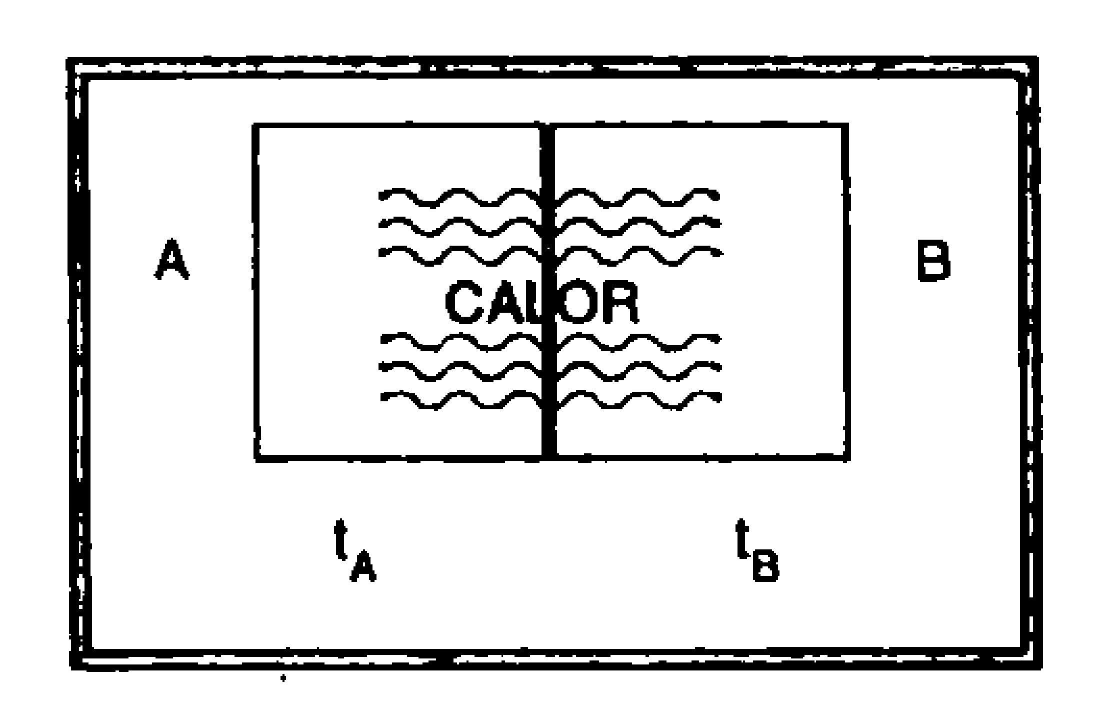
$t_A = 100$ °C $t_B = 15$ °C

U_A : Energía interna de A

U_B : Energía interna de B

¿Qué sucede cuando los bloques estando a diferentes temperaturas, se ponen en contacto?

Los bloques interactúan térmi-camente, es decir, intercambian energía interna mediante ondas a través de sus fronteras, como se indica en la figura siguiente



Recipiente térmicamente aislado

A: es el bloque de mayor temperatura (más "caliente").

B: es el bloque de menor temperatura (más "frío"). Luego:

A : pierde calor ⇒ B : gana calor

Se observa que los bloques intercam-bian energía.

La transmisión de la energía se produce en escala atómica. A esto se llama interacción térmica.

CALOR TRANSFERIDO "Q"

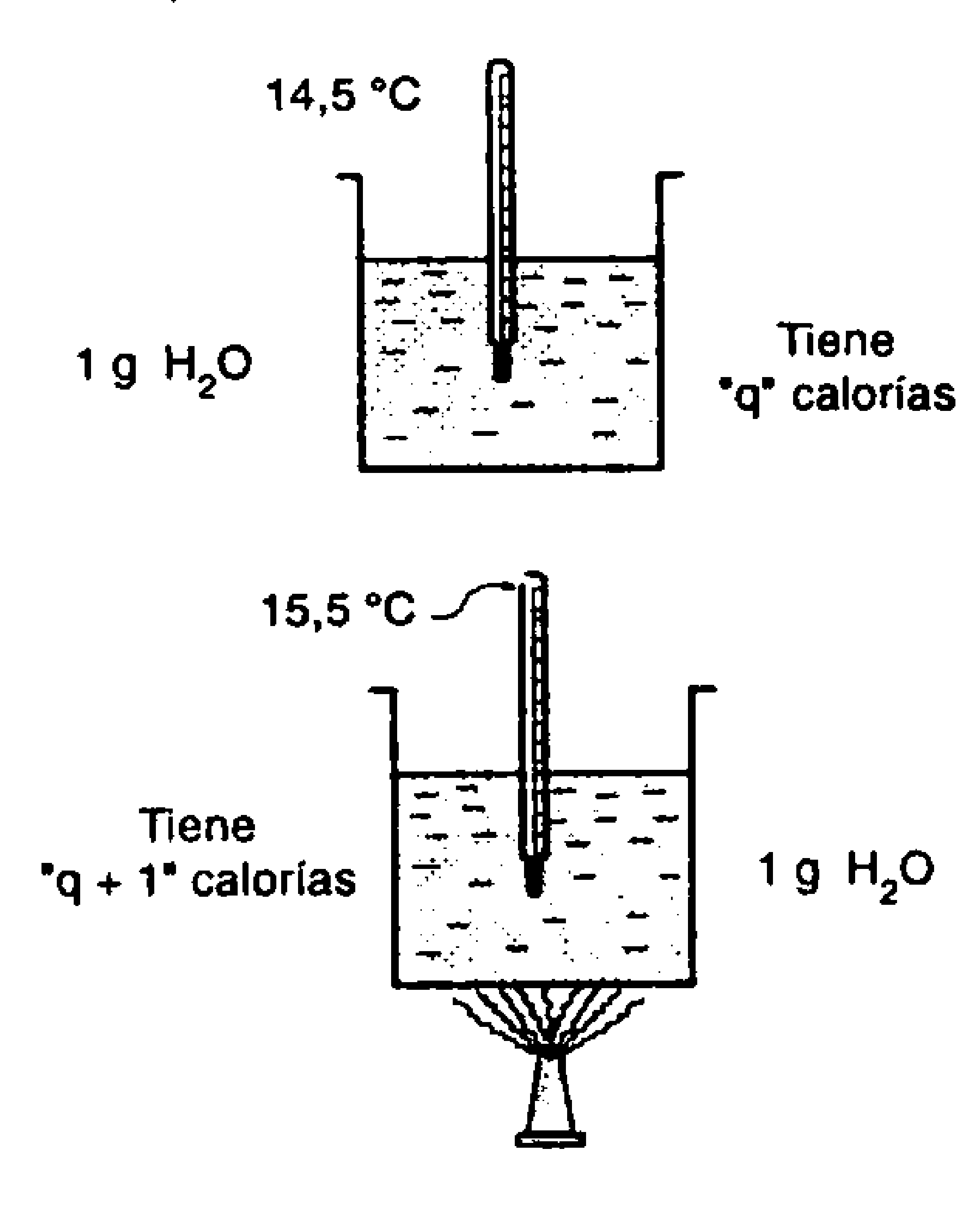
Se denomina calor transferido a la energía interna que se transfiere de un cuerpo caliente (de mayor temperatura) a otro frío (de menor temperatura).

UNIDADES DE MEDIDA :

En el SI.:	joule "J"
En la práctica:	caloría "cal"

CALORÍA "cal" :

Se define "una caloría" como la cantidad de calor que necesita la masa de un gramo de agua pura para elevar su temperatura de 14,5 °C a 15,5 °C.



EQUIVALENCIA: 1 J = 0,24 cal

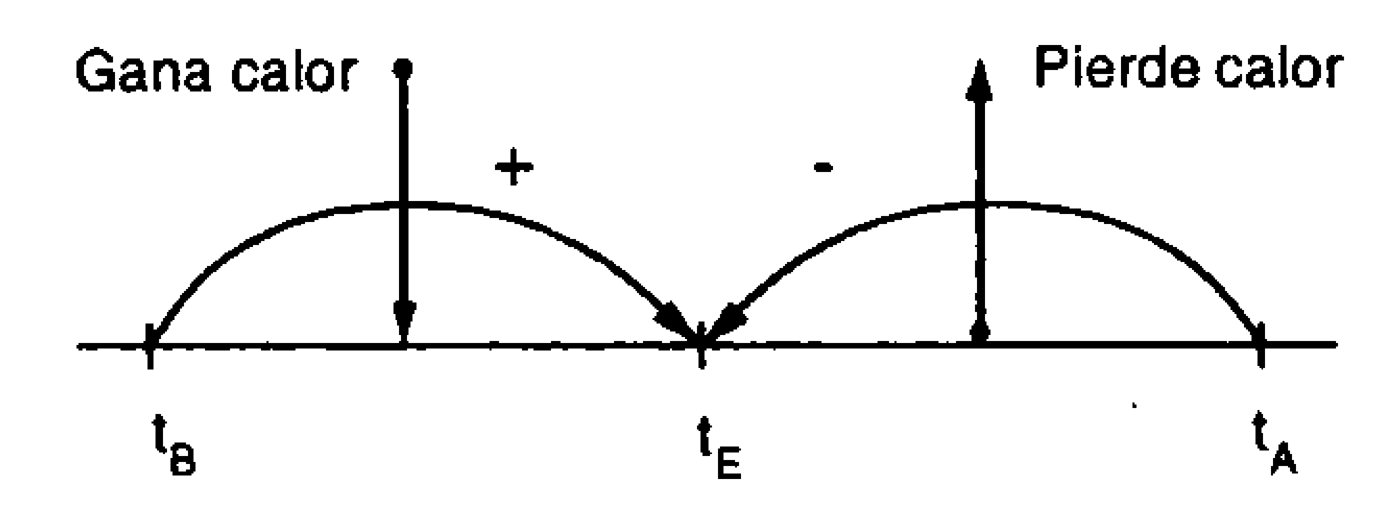
1 cal = 4,18 J

Volviendo al ejemplo de los bloques, ¿el intercambio de calor es indefinido? ¡ No! El inter-

http://librosysolucionarios.net

cambio de calor cesa cuando los bloques A y B llegan a una situación de equilibrio térmico en el cual las temperaturas de ambos bloques son iguales.

Establecemos un diagrama lineal de temperatura, en el cual observamos que el bloque B (cuerpo frío), aumenta su temperatura, mientras que el bloque A (cuerpo caliente), disminuye su temperatura.



t_E : Temperatura de equilibrio

$$t_B < t_E < t_A$$

Por el principio de conservación de energía se cumple que:

$$Q_{GANADO} = Q_{PERDIDO}$$

CONCLUSIÓN:

Cuando una sustancia gana calor, se observa que el cuerpo se calienta, es decir aumenta su temperatura. Para una determinada cantidad del calor, el valor del cambio de temperatura dependerá de la masa del cuerpo y de sus cualidades térmicas, las cuales dependerán de la estructura molecular de la sustancia.

¿Cómo hallar la cantidad de calor "Q" que un cuerpo gana o pierde al variar su temperatura?

Experimentalmente se ha deducido la siguiente fórmula:

$$\boxed{Q = Ce \cdot m \cdot \Delta t}$$

Donde:

Q: Es la cantidad de calor ganado o perdido, en joule "J".

Δt: Es el cambio de temperatura, en °C

$\Delta \tau$: $t_f - t_0$.

Ce: Es el calor específico de la sustancia y depende de las propiedades térmicas de cada cuerpo. Se mide en: cal/g . °C ó kcal/kg.°C.

CALOR DE COMBUSTIÓN

Es la cantidad de calor, en calorías o en joules, que necesita 1 mol - g de una sustancia para decomponerse por combustión. (Combustión es la reacción química de una sustancia con el oxígeno).

CALOR ESPECÍFICO "Ce"

Nos indica la cantidad de calor que se debe suministrar a 1 g de una sustancia para cambiar de temperatura en 1 °C.

$$\boxed{Ce = \frac{Q}{m.\Delta t}}$$

¿Qué nos quiere decir lo siguiente: $Ce_{Fe} = 0{,}11$ cal/g . °C?

Nos expresa que 1 g de Fe necesita 0,11 cal para subir su temperatura en 1 °C y los pierde cuando 1 g de Fe baja su temperatura en 1 °C.

CALORES ESPECÍFICOS en cal/(g.°C)	
LÍQUIDOS:	
Agua	1,00
Agua de mar	0,95
Alcohol	0,60
Mercurio	0,033
SÓLIDOS:	
Aluminio	0,212
Cobre	0,093
Fierro	0,11
Hielo	0,53
Plomo	0,031
Zinc	0,093

http://librosysolucionarios.net

Ejemplo : ¿Cuántas calorías se necesitan para calentar 800 gramos de agua de 15 °C a 85 °C?

RESOLUCIÓN :

$m = 800\ g \qquad Q = ?$

$t_i = 15\ °C$

$t_f = 85\ °C$

Por definición de caloría:

Para subir 1 °C de temperatura:

1 g	de agua necesita	1 cal
800 g	de agua necesitará	Q_1

$$Q_1 = 56\,000\ cal$$

Ahora, se calculará cuántas calorías serán necesarias para subir los 800 g de agua de 15 °C a 85 °C o sea 70 °C:

Luego, para subir:

1 °C	se necesita	800 cal
70 °C	se necesitará	Q

$$Q = 56\,000\ cal$$

CAPACIDAD CALORÍFICA "C_c"

Es la cantidad de calor que absorbe cierta cantidad de masa para elevar su temperatura 1 °C.

$$\boxed{C_c = m \cdot Ce}$$

Ejemplo : Una masa de 400 g de aluminio se calentó de 70 °C a 120 °C, calcular la cantidad de calor que absorbió en calorías y en joules. $Ce_{Al} = 0{,}226$ cal/g.

RESOLUCIÓN : $Q = Ce.m.\Delta t$

$$Q = (0{,}226\ cal/g \times °C) \times 400\ g \times (120\ °C - 70\ °C)$$

$Q = 4\,520\ cal$ ó :

$$Q = 4\,520 \times 4{,}18\ J \cong 18\,893{,}6\ J$$

Ejemplo : ¿Cuánto calor pierde un trozo de fierro de masa 3 kg cuando se enfría de 800°C a 17°C? $Ce_{Fe} = 0{,}11$ cal/g .°C.

RESOLUCIÓN : $Q = Ce.m.\Delta t.$

$$Q = (0{,}11\ cal/g \times °C) \times 3\,000\ g \times (17\ °C - 800\ °C)$$

$$Q = -258\,390\ cal = -258{,}39\ kcal \text{ ó :}$$

$$Q = -258\,390 \times 4{,}18\ J \cong -108 \times 10^4\ J$$

El signo negativo indica que el cuerpo pierde calor.

TEMPERATURA DE EQUILIBRIO DE UNA MEZCLA

(Temperatura Final)

Bajo el principio de que en una mezcla de cuerpos de temperaturas diferentes, el calor entregado por uno de los cuerpos es igual al calor recibido por el otro, lo que origina una temperatura intermedia de la mezcla, se tiene:

$$-Q_1 = +Q_2 \qquad (1)$$

Donde:

-Q : Calor entregado o perdido por uno de los cuerpos.

+Q : Calor recibido o ganado por el otro cuerpo.

Supóngase que un pedazo de hierro a la temperatura "t_1" se introduce en agua que está a una menor temperatura "t_2", al cabo de algunos instantes la temperatura "t_f" será igual tanto para el agua como para el hierro y mayor que "t_2" pero menor que "t_1", el calor cedido por el hierro ha sido absorbido por el agua, entonces:

Si: Q_1 = calor cedido por el hierro

Es decir:

$$Q_1 = Ce_1 \cdot m_1 \cdot (t_f - t_1) \qquad (a)$$

http://librosysolucionarios.net

y: Q_2 = calor absorbido por el agua

Es decir:

$$Q_2 = Ce_2 \,.\, m_2 \,.\, (t_f - t_2) \qquad (b)$$

Sustituyendo (a) y (b) en (1):

$$-Ce_1 \,.\, m_1 \,(t_f - t_1) = Ce_2 \,.\, m_2 \,(t_f - t_2)$$

De donde:

$$\boxed{t_f = \frac{Ce_1 \,.\, m_1 \,.\, t_1 + Ce_2 \,.\, m_2 \,.\, t_2}{Ce_1 \,.\, m_1 + Ce_2 \,.\, m_2}}$$

Ejemplo : En un volumen de 2 litros de agua a 27 °C se sumerge una pieza de hierro caliente a 250 °C con una masa de 300 g. Calcular la temperatura final media.

Ce del agua: 1,0 cal/g . °C

Ce del hierro: 0,11 cal/g . °C

RESOLUCIÓN:

$$t_f = \frac{Ce_1 \,.\, m_1 \,.\, t_1 + Ce_2 \,.\, m_2 \,.\, t_2}{Ce_1 \,.\, m_1 + Ce_2 \,.\, m_2}$$

$$t_f = \frac{1{,}0\,\frac{cal}{g\times °C}\times 2\,000\,g\times 27\,°C + 0{,}11\,\frac{cal}{g\times °C}\times 300\,g\times 250\,°C}{1{,}0\,\frac{cal}{g\times °C}\times 2\,000\,g + 0{,}11\times\frac{cal}{g\times °C}\times 300\,g}$$

$$t_f = \frac{62\,250\,°C}{2\,033}$$

$$t_f = 30{,}62\,°C$$

Ejemplo : 1 200 g de un cuerpo a una temperatura de 50 °C se sumergen en 2 litros de agua que está a 17 °C. Al cabo de un tiempo la temperatura de equilibrio es de 31 °C. Calcular el Ce de la sustancia.

RESOLUCIÓN: Sea (1) el agua y (2) la sustancia:

$$m_1 = 2\,000\,g \quad ; \quad m_2 = 1\,200\,g$$

$$t_1 = 17\,°C \quad ; \quad t_2 = 50\,°C$$

$$T_1 = 17\,°C \qquad T_2 = 50\,°C$$

$$Ce_1 = 1{,}0\,cal/g\,.°C \qquad Ce_2 = ?$$

Recordando que: $-Q_1 = +Q_2$

$$-Ce_1 \,.\, m_1 (t_f - t_1) = Ce_2 \,.\, m_2 (t_f - t_2)$$

de donde: $Ce_2 = \dfrac{Ce_1 \,.\, m_1 (t_f - t_1)}{m_2 (t_2 - t_f)}$

Sustituyendo valores:

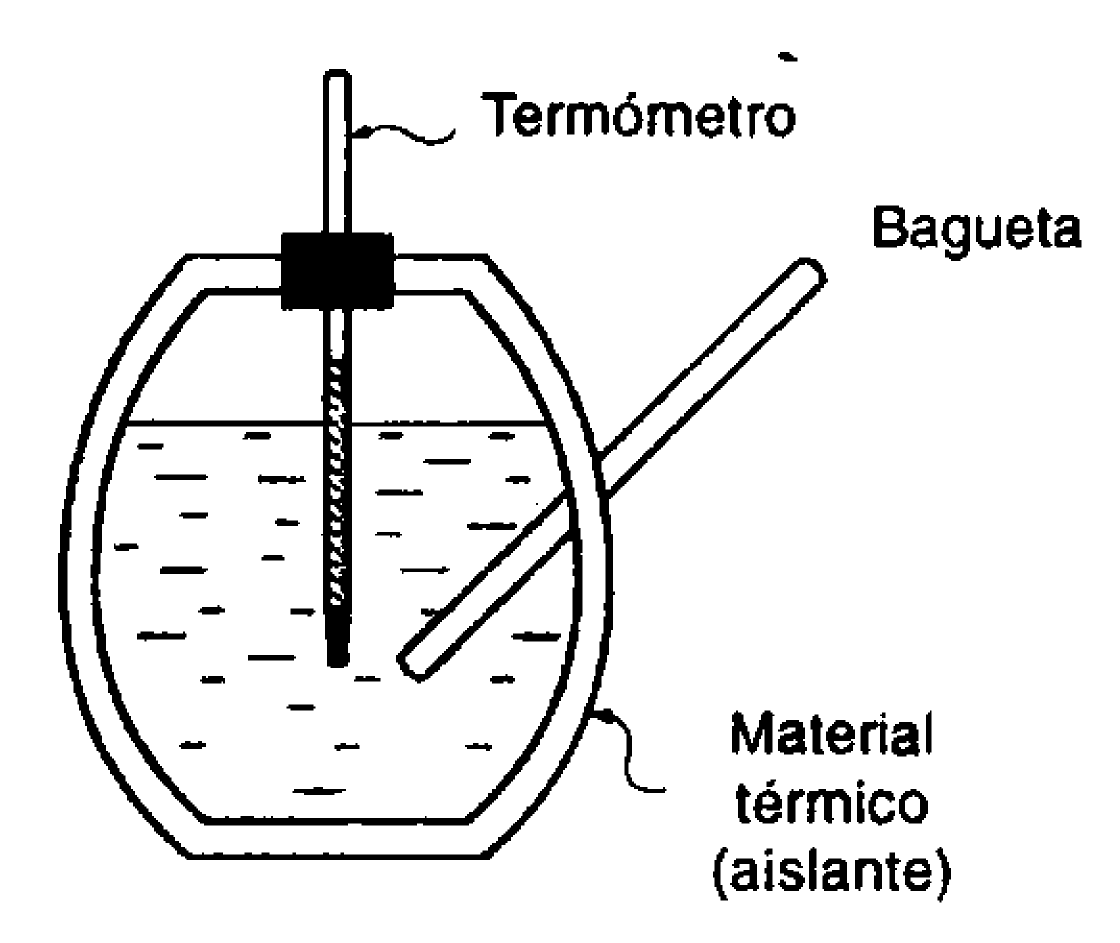
$$Ce_2 = \frac{1{,}0\,\frac{cal}{g\times °C}\times 2\,000\,g\,(31°C - 17°C)}{1200\,g\,(50°C - 31°C)}$$

$$Ce_2 = 1{,}228\,\frac{cal}{g\times °C} \text{ ó:}$$

$$Ce_2 = 1{,}228\,\frac{4{,}18\,J}{g\times °C} = 5{,}13\,\frac{J}{g\times °C}$$

EL CALORÍMETRO

Es un recipiente térmicamente aislado, para evitar la fuga del calor. Se le utiliza para calcular los calores específicos de lo metales.



Su mecanismo:

Contiene una porción medida de agua y un termómetro instalado. En él se sumerge la

sustancia cuyo Ce se busca, de masa y temperatura conocidas; se agita hasta llegar a la temperatura de equilibrio la que se notará cuando ya no varíe la temperatura en el termómetro instalado. Con los datos obtenidos se procede al cálculo.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. En un calorímetro que contiene 1,8 litros de agua a 20°C, se sumerge 2,4 kg de trozos de hierro que están a 100 °C. Cuando llega al equilibrio el termómetro marca 30°C. Calcular el Ce del hierro.

RESOLUCIÓN:

Para el agua
$Ce_1 = 1 \text{ cal/g} \times °C$
$m_1 = 1\,800 \text{ g}$
$t_1 = 20\ °C$

Para el hierro
$Ce_2 = ?$
$m_2 = 1\,400 \text{ g}$
$t_2 = 100\ °C$

CALOR GANADO POR EL AGUA = CALOR PERDIDO POR EL HIERRO

$$-Q_2 = Q_1$$

$$-Ce_2 \cdot m_2 (t_f - t_2) = Ce_1 \cdot m_1 (t_f - t_1)$$

Sustituyendo valores:

$$Ce_2 = \frac{1{,}0 \frac{\text{cal}}{g \times °C} \times 1800\,g(30\,°C - 20\,°C)}{2400\,g(100\,°C - 30\,°C)}$$

Aproximadamente:

$$Ce_2 = 0{,}11 \frac{\text{cal}}{g \times °C} \text{ ó:}$$

$$Ce_2 = 0{,}11 \frac{4{,}18\ J}{g \times °C} = 0{,}46 \frac{J}{g \times °C}$$

PROBLEMA 2. Calcular el calor que consumirá 200 g de latón (el latón es un aleación de cobre y zinc) para subir su temperatura de 17 °C a 300 °C. El Ce del latón es 0,09 cal/g x °C

RESOLUCIÓN:
$m = 200$ g
$Q = ?$
$t_1 = 17\ °C$
$t_f = 300\ °C$

Sabiendo que: $Q = Ce \cdot m \cdot Dt$

$$Q = 0{,}09 \frac{\text{cal}}{g \times °C} \times 200\,g(300\,°C - 17\,°C)$$

Rpta.: Q = 5 094 cal ó 21 293 J

PROBLEMA 3. Un calorímetro cuyo equivalente en agua es 100 g, contiene 600 g de agua a la temperatura de 20 °C. Se introduce un cuerpo cuya temperatura es de 150 °C y 200 g de masa, obteniéndose una temperatura de equilibrio de 60 °C. ¿Cuál es el Ce del cuerpo? (Equivalente en agua de un calorímetro, es una porción de agua que absorbe la misma cantidad de calor que el calorímetro).

RESOLUCIÓN: Equivalente en agua del calorímetro:

Eq.c. = 100 g de agua

$m_{Agua} = 600$ g $\quad m_C = 200$ g
$t_{Agua} = 20\ °C$ $\quad t_C = 150\ °C$
$t_f = 60\ °C$ $\quad Ce = ?$

Sabiendo que: Calor entregado por el cuerpo = Calor absorbido por el agua + Calor absorbido por el calorímetro

Es decir: $-Q_1 = +Q_2$

http://librosysolucionarios.net

$$-Ce_1 \cdot m_1 (t_f - t_1) = Ce_2 \cdot m_2 (t_f - t_2)$$

de donde: $$Ce_1 = \frac{Ce_2 \cdot m_2 (t_f - t_2)}{-m_1 (t_f - t_1)}$$

ó: $$Ce_1 = \frac{Ce_2 \cdot m_2 (t_f - t_2)}{-m_1 (t_1 - t_f)}$$

(m_2 = 100 g masa de agua equivalente al calorímetro + 600 g masa de agua en el calorímetro)

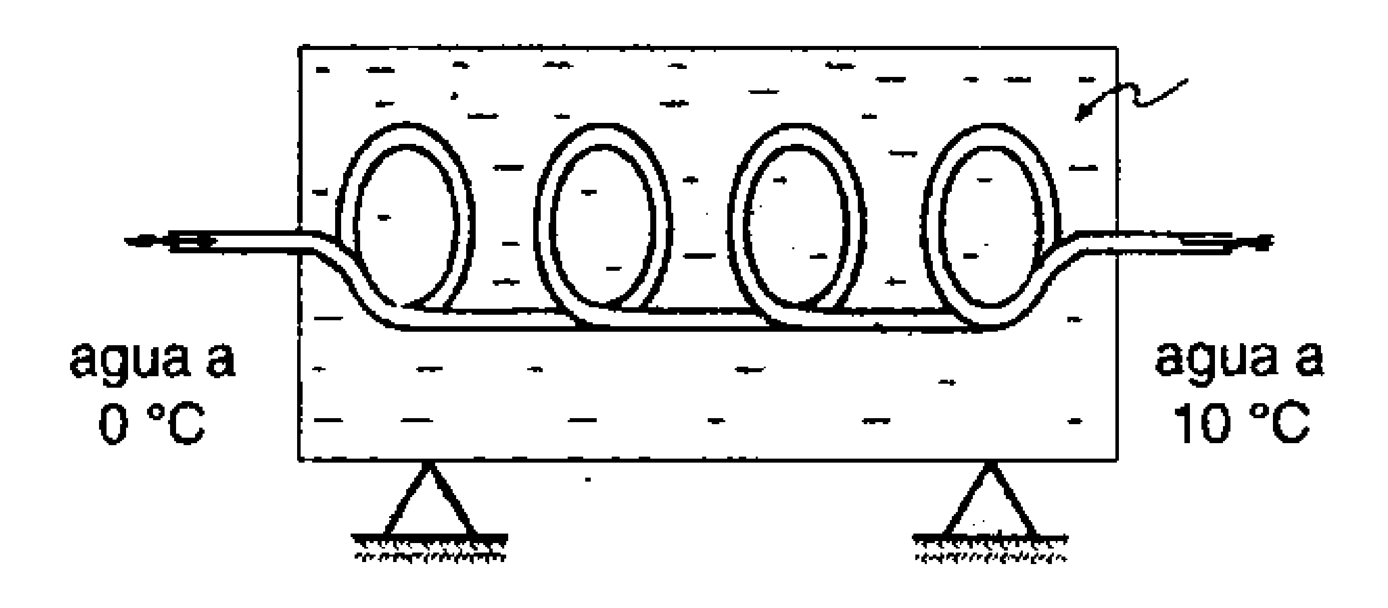
Sustituyendo datos:

$$Ce_1 = \frac{1 \frac{cal}{g.°C}(100\ g + 600\ g)(60°C - 20°C)}{200\ g\ (150\ °C - 60\ °C)}$$

Rpta.: $Ce_1 = 1,56$ cal/g . °C

PROBLEMA 4. Para enfriar 100 litros de agua de 90 °C a 10 °C, contenido en un depósito, se hace circular a través de un tubo en serpentín agua a 0 °C. Después de su recorrido, el agua sale del tubo a 10 °C y circula 2 litros de agua por segundo. ¿Cuánto tiempo pasará para que toda el agua del depósito esté a 10 °C?

agua a 90 °C



RESOLUCIÓN : m_1 = 100 lit

t_2 = 0 °C $\qquad t_1$ = 90 °C

t_f = 10 °C

Sea m_2 = masa de agua que circula

Sabiendo que: Calor perdido por el agua del depósito = Calor ganado por el agua que circula.

$$-Ce_1 \cdot m_1 (t_f - t_1) = Ce_2 \cdot m_2 (t_f - t_2)$$

Simplificando y despejando m_2:

$$m_2 = \frac{m_1 (t_f - t_1)}{t_2 - t_f}$$

$$m_2 = \frac{100\ kg\ (10°C - 90°C)}{0\ °C - 10\ °C} = 800\ kg$$

Luego se hace circular 800 kg de agua fría u 800 litros. Como en cada segundo circula 2 litros, el tiempo necesario para enfriar a 10 °C será:

$$\tau = \frac{800\ lit}{2\ lit/s} = 400\ s$$

Rpta.: t = 6 min 40 s

PROBLEMA 5. ¿Cuánto de carbón se consumirá para calentar una tonelada de cobre de 20 °C a 400 °C? El Ce de cobre es 0,09 cal/g .°C. Cada kg de carbón proporcionará 8 000 kcal.

RESOLUCIÓN : $Ce_{Cu} = 0,09$ cal/g .°C

m_{Cu} = 1 ton $\qquad m_{carbón}$ = ?

t_i = 20 °C $\qquad t_f$ = 400 °C

Cálculo de la cantidad de calor consumido al calentar una tonelada de cobre de 20 °C a 400 °C (1 ton = 10^6 g)

Sabemos que: $Q = Ce \cdot m \cdot \Delta T$

$$Q = 0,09 \frac{cal}{g \times °C} \times 10^6\ g \times 360\ °C$$

$$Q = 34,2 \times 10^3\ kcal$$

Como cada kg de carbón proporciona 8 000 kcal, una simple regla de tres permitirá calcular la cantidad de carbón que producirá 34,2 x 10^3 kcal.

$$m_{carbón} = \frac{32,2 \times 10^3\ kcal}{8\ 000\ kcal/kg}$$

Rpta.: $m_{carbón}$ = 4,275 kg

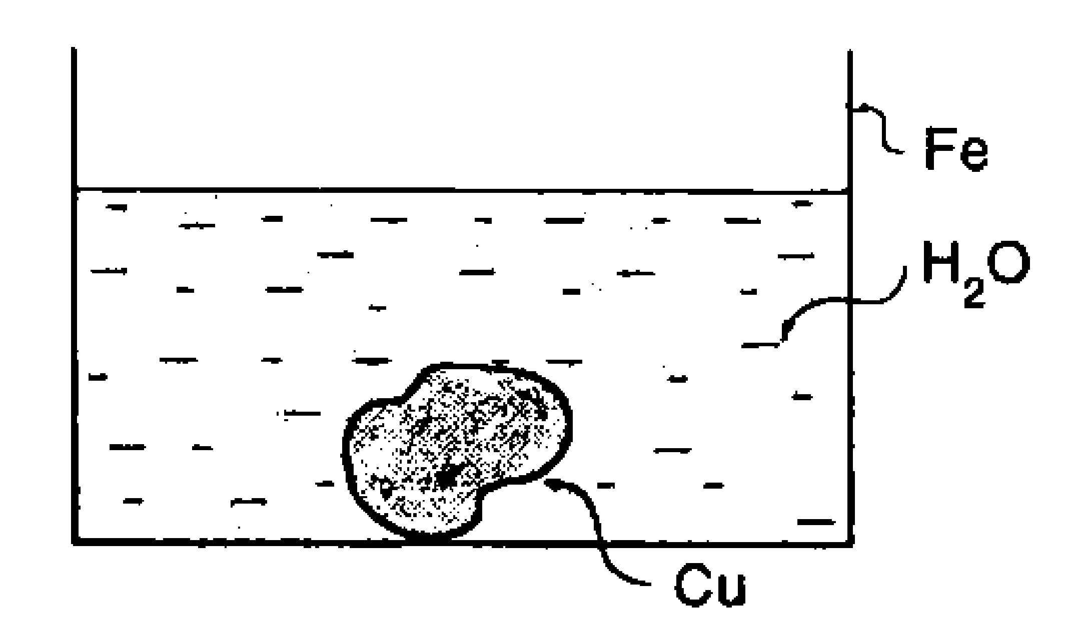
PROBLEMA 6. En un recipiente de hierro de 80 g de masa hay 200 g de agua a 10 °C. Un trozo de cobre de 50 g, que está a 250 °C, se introduce en el agua.

http://librosysolucionarios.net

Calcular la temperatura de equilibrio.

Para el Fe : $Ce_1 = 0{,}11$ cal/g . °C

Para el Cu : $Ce_2 = 0{,}093$ cal/g . °C



RESOLUCIÓN : Al introducir el cobre caliente en el agua, el cobre se enfría pero el agua y el recipiente de hierro se calientan hasta que el conjunto tenga una temperatura común. Esta temperatura se llama de equilibrio.

Calor perdido por el Cu = Calor ganado por el H_2O + Calor ganado por el Fe.

$$-Ce_2 . m_2 (t_f - t_2) = Ce . m (t_f - t_1) + \\ + Ce_1 . m_1 (t_f - t_1)$$

Efectuando operaciones y multiplicando por -1:

$$Ce_2 .m_2 .t_f - Ce_2 .m_2 .t_2 = -Ce.m.t_f + \\ +Ce.m.t_1 - Ce_1 .m_1 .t_f + Ce_1 .m_1 .t_1$$

Despejando t_f:

$$t_f = \frac{Ce_2 .m_2\, t_2 + Ce.m.t_1 + Ce_1 .m_1 t_1}{Ce_2 .m_2 + Ce.m + Ce_1 .m_1}$$

Sustituyendo los datos:

$$t_f = \frac{0{,}093 \text{ cal/g.°C}.50\text{ g}\times 250\text{°C} + }{0{,}093 \text{ cal/g.°C}.50\text{ g} + }\cdots$$

$$\cdots\frac{1 \text{ cal/g.°C}.200\text{ g}\times 10\text{°C} + }{+1 \text{cal/g}\times\text{°C}.200\text{ g} + 0{,}11 \text{cal/g.°C}}$$

$$\cdots\frac{0{,}11 \text{ cal/°C}.80\text{ g}\times 10\text{°C}}{80\text{ g}}$$

$$t_f = \frac{3\,250{,}50 \text{ °C}}{213{,}45}$$

Rpta.: t_f = 15,23 °C

PROBLEMA 7. Para calentar 0,5 litros de agua de 15 °C a 30 °C se consume 80 g de combustible. El agua está depositada en un recipiente cuyo equivalente en agua es de 300 g. Calcular el "calor de combustión" del combustible utilizado.

RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

Calor entregado por el combustible = Calor ganado por el agua + Calor ganado por el recipiente

$$m_C \times \text{calor de combustión} = \\ = Ce . m . \Delta t + Ce_r . m_r . \Delta t$$

$$80 \text{ g} \times \text{calor de combustión} = \\ = 1 \text{ cal/g.°C} . 500 \text{ g} (30\text{°C} - 15 \text{°C}) + \\ + 1 \text{ cal/g.°C} . 300 \text{ g} (30\text{°C} - 15 \text{°C})$$

Rpta.: Calor de combustión = 150 cal/g

PROBLEMA 8. En un calorímetro de cobre de equivalente en agua igual a 30 g, se tiene 400 g de agua a 15 °C. Determinar a qué temperatura debe ingresar un bloque de plomo de 500 g a fin de que la temperatura de equilibrio sea 18 °C. El Ce del plomo es 0,031 cal/g .°C y el del cobre 0,093 cal/g .°C.

RESOLUCIÓN :

Calor Perdido = Calor Ganado

$$-Ce_{Pb} . m_{Pb} (t_i - t_f) = Ce_{agua} . m_{agua} . \\ . (t_f - t_i) + Ce_{Cu} . m_{Cu} (t_f - t_i)$$

Sustituyendo los datos:

$$500 \times 0{,}031 (t_i - 18) = 400 \times 1 \times \\ \times (18 - 15) + 30 \times 0{,}093 \times (18 - 15)$$

de donde: t_i = 96 °C

PROBLEMA 9. Se echan 3 litros de agua

http://librosysolucionarios.net

a 30 °C en un recipiente esférico de cobre, cuya capacidad es de 3 litros, a 0 °C. La temperatura final es de 20 °C ¿Cuál es el espesor del recipiente a 0 °C? La densidad del agua a 30 °C es 0,9957

$$\delta_{Cu} = 8{,}8$$

$$Ce_{Cu} = 0{,}095 \text{ cal/g.°C}$$

RESOLUCIÓN : Calor ganado por el recipiente = Calor perdido por el agua.

$$V_{Cu}\,\delta_{Al}\,Ce_{Cu}\,\Delta t = V_{agua}\,\delta_{agua}\,Ce_{agua}\,\Delta t$$

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3)\,\delta_{Cu}.Ce_{Cu}(t_f - t_1) =$$

$$= V.\delta_{Agua}.Ce_{Agua}(t_f - t_1)$$

$$\frac{4}{3}\pi(R^3 - r^3) \times 8{,}8 \times 0{,}095 \times 20 =$$

$$= -3 \times 1 \times 1 \times (-10)$$

$$R^3 - r^3 = 0{,}857 \text{ dm}^3 \qquad (1)$$

Por otra parte, según el problema, a 0°C la capacidad del recipiente es de 3 litros, es decir:

$$\frac{2}{3}\pi r^3 = 3 \text{ dm}^3$$

de donde: $r^3 = 1{,}432 \text{ dm}^3$

sustituyendo en (1) :

$$R^3 - 1{,}492 \text{ dm}^3 = 0{,}857 \text{ dm}^3$$

$$R = 1{,}329$$

Espesor: $e = R - r$

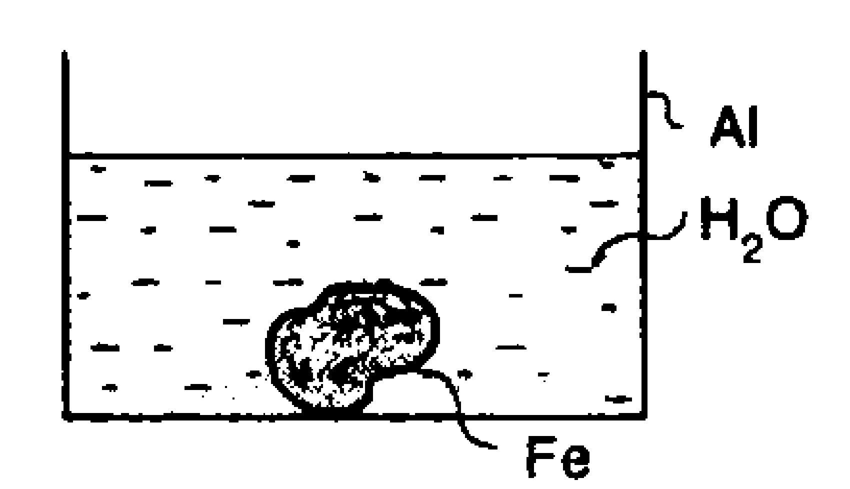
$$e = 1{,}329 \text{ dm} - 1{,}127 \text{ dm}$$

Rpta.: $e = 0{,}202$ dm

PROBLEMA 10. En un recipiente de aluminio de 100 g de masa hay 3 litros de agua a 20 °C. Se calienta 200 g de hierro a 120 °C y se introduce en el agua. Calcular la temperatura de equilibrio o temperatura final.

$$Ce_{Al} = 0{,}212 \text{ cal/g.°C}$$

$$Ce_{Fe} = 0{,}11 \text{ cal/g.°C}$$



RESOLUCIÓN : Calor perdido por el Fe = Calor ganado por el agua + Calor ganado por el **Al**.

$$-Q_{Fe} = Q_{Agua} + Q_{Al} \qquad (I)$$

Cálculo de estos valores:

$$Q_{Fe} = Ce\,.\,m\,.\,(t_f - t_1)$$

$$= 0{,}11 \times 200\,(t_f - 120\text{ °C})\text{ cal/°C}$$

$$Q_{Fe} = 22\,(t_f - 120\text{ °C})\text{ cal/°C} \qquad (a)$$

$$Q_{H_2O} = Ce\,.\,m\,(t_f - t_i) =$$

$$= 1 \cdot 3\,000\,(t_f - 20°\text{ C})\text{ cal/°C}$$

$$Q_{H_2O} = 3\,000\,(t_f - 20\text{°C})\text{cal/°C} \qquad (b)$$

$$Q_{Al} = Ce\,.\,m\,(t_f - t_i)$$

$$= 0{,}212 \times 100\,(t_f - 20°C_i)\text{ cal/°C}$$

$$Q_{Al} = 21{,}2\,(t_f - 20\text{ °C})\text{ cal/°C} \qquad (c)$$

Sustituyendo (a), (b) y (c) en (I):

$$-22\,(t_f - 120\text{ °C})\text{ cal/°C} = 3\,000 \times$$

$$\times (t_f - 20\text{ °C})\text{ cal/°C} + 21{,}2 \times$$

$$\times (t_f - 20\text{ °C})\text{ cal/°C}$$

$$-22\,t_f + 2\,880\text{ °C} = 3\,000\,t_f -$$

$$- 6\,000\text{ °C} + 21{,}2\,t_f - 424\text{ °C}$$

Agrupando: $3\,043{,}2\,t_f = 60\,064$ °C

Rpta.: $t_f = 19{,}74$ °C

http://librosysolucionarios.net

CAMBIOS DE FASE

FASE

Es un estado de los cuerpos que se caracteriza por la presencia de un cierto agregado de moléculas y que depende de la temperatura, presión y volumen que tiene el cuerpo. Las fases más comunes son sólido, líquido y gaseoso.

CAMBIO DE FASE

Es la transformación en el ordenamiento molecular que experimenta un cuerpo. Por acción del calor todos los cuerpos cambian de fase.

Cualquier sólido puede transformarse en líquido y después en gas, aumentando progresivamente calor y disminuyendo la presión.

Del mismo modo, cualquier gas puede transformarse en líquido y después en sólido, quitándole progresivamente calor y disminuyendo la presión.

Los cambios de fase se denominan:

1. **Fusión:** Paso de la fase sólida a la fase líquida.
2. **Solidificación:** De líquida a sólida.
3. **Vaporización:** De líquida a gas.
4. **Licuefacción:** De gas a líquida.
5. **Sublimación:** De sólida a gas.
6. **Sublimación regresiva:** De gas a sólida.

FUSIÓN O LICUACIÓN

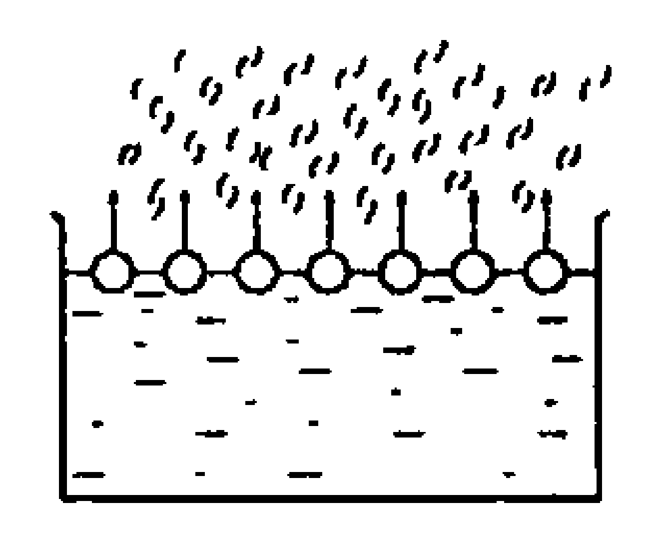
Es el paso de la fase sólida a la fase líquida, manteniendo la temperatura constante.

Punto de fusión:

Es el punto o temperatura en el cual el sólido inicia su fusión.

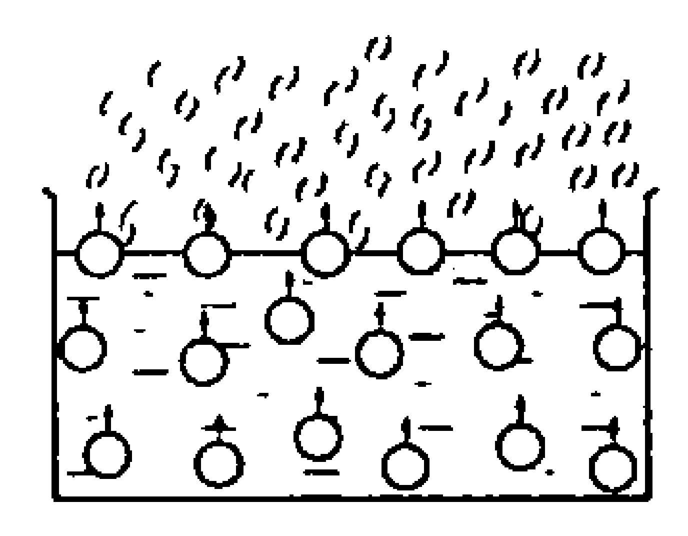
VAPORIZACIÓN O GASIFICACIÓN

Es el paso de un líquido a vapor, efectuado sólo en la superficie del líquido. La vaporización ocurre a diferentes temperaturas.



EBULLICIÓN

Es el paso de un líquido a vapor, producido en toda la masa del líquido porque la energía de todas las moléculas del líquido vencen la presión que sobre su superficie se ejerce. Vaporiza en torbellino manteniendo la temperatura constante.



Punto de ebullición :

Es el punto o temperatura en el cual el líquido empieza su ebullición.

CONDENSACIÓN O LICUEFACCIÓN

Es el paso de un vapor al estado líquido, manteniendo la temperatura constante.

Punto de condensación :

Es el punto o temperatura en el cual el vapor inicia su transformación a líquido.

SOLIDIFICACIÓN O CRISTALIZACIÓN

Es el paso, de la fase líquida a la fase sólida o cristalizada, manteniendo la temperatura constante.

Punto de solidificación :

Es el punto o temperatura en el cual el líquido inicia su solidificación.

http://librosysolucionarios.net

VOLATILIZACIÓN O SUBLIMACIÓN

Es el paso de un sólido a gas, sin pasar por el estado intermedio líquido, manteniendo la temperatura constante

Punto de volatilización o sublimación :

Es el punto o temperatura en el cual el sólido inicia su volatilización o vaporización.

SUBLIMACIÓN REGRESIVA

Es el paso de un vapor a sólido, manteniendo su temperatura constante.

Punto de sublimación regresiva :

Es el punto o temperatura en el cual el vapor empieza a solidificarse.

CALORES LATENTES

Se llama calor latente, al calor que requiere un gramo de una sustancia para cambiar de fase, manteniendo su temperatura constante durante este cambio.

1. Calor latente de fusión :

Es la cantidad de calor que necesita 1 g de sólido, para transformarse íntegramente a líquido, una vez alcanzada su temperatura de fusión.

$$C_f = \frac{Q}{m} \qquad (1)$$

C_f : Calor latente de fusión, en "cal/g"
Q : Calor consumido, en "cal"
m : Cantidad de masa que se funde, en "g"

Ejemplo : ¿Cuántas calorías se necesita para fundir 1 000 g de fierro cuando ha llegado a su temperatura de fusión?. C_f Fe = 49 cal/g.

RESOLUCIÓN : m = 1 000 g

Q = ? C_f = 49 cal/g

De (I): $Q = C_f . m$

$$Q = 49 \text{ cal/g} . 1\,000 \text{ g}$$

$$Q = 49\,000 \text{ cal}$$

Ejemplo : ¿Cuántos gramos de hielo se pueden fundir con 100 kcal, cuando el hielo está a 0 °C? C_f hielo = 49 cal/g.

RESOLUCIÓN : C_f hielo = 80 cal/g

m = ? Q = 100 kcal

De (I): $m = \frac{Q}{C_f} = \frac{100\,000 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}} = 1\,250 \text{ g}$

CALORES LATENTES DE FUSIÓN	
SUSTANCIA	cal/g
Aluminio	94
Cinc	23
Cobre	41
Hierro	49
Hielo	80
Plomo	5,5

2. Calor latente de vaporización :

Es la cantidad de calor que necesita 1 g de un líquido, para transformarse íntegramente a vapor, una vez alcanzada su temperatura de vaporización (ebullición).

$$C_v = \frac{Q}{m} \qquad (II)$$

CALORES LATENTES DE VAPORIZACIÓN	
SUSTANCIA	cal/g
Agua	540
Mercurio	356

http://librosysolucionarios.net

Helio	5,6
Hidrógeno	5,6
Nitrógeno	476
Cinc	475

TEMPERATURAS DE EBULLICIÓN (a 1 atm y en °C)	
Agua	100
Alcohol etílico	78,3
Éter	34,5
Glicerina	291
Cobre	2 310
Oro	2 611
Fierro	3 135
Plata	1 948
Cloro	-34,6
Helio	-268,9
Hidrógeno	-252,9
Nitrógeno	-195,7
Oxígeno	-182,9

La temperatura de ebullición (vaporización en torbellino) **depende de la presión exterior**. Así por ejemplo los puntos de ebullición del agua a diferentes presiones son :

TEMPERATURA DE EBULLICIÓN EN °C	PRESIÓN EN mm Hg
-10	1,96
0	4,58
1	4,92
10	9,21
50	92,60
* 100	760,00
374	165 450,00

Ejemplo : Calcular la cantidad de calor que consume 1 litro de agua líquida que está a 100 °C para transformarse íntegramente en vapor a 100 °C. C_v agua = 540 cal/g.

RESOLUCIÓN :

$$m = 1\,000\ m \qquad Q = ?$$

$$C = 540\ cal/g$$

De (I):

$$Q = C_v \cdot m = 540\ cal/g \times kg\ 1\,000\ g$$

$$Q = 540\ kcal = 2\,263 \times 10^3\ J$$

Ejemplo : Calcular la cantidad de calor consumido por 3 kg de hielo que está a -20 °C para transformarlo íntegramente en vapor y calentarlo hasta 150 °C.

$$Ce_{hielo} = 0{,}5\ cal/g\,.°C$$

$$Ce_{vapor} = 0{,}45\ cal/g\,.°C$$

$$C_{f\,hielo} = 80\ cal/g$$

$$C_{v\,agua} = 540\ cal/g$$

$$Ce_{agua} = 1\ cal/g$$

RESOLUCIÓN : La cantidad total de calor que consumen los 3 kg de agua hielo para llevarlo hasta agua vapor a 150 °C será la suma de:

Q_1 = Calor para subir su temperatura de -20 °C hasta 0 °C.

Q_2 = Calor para fundirse, manteniéndose a 0 °C.

Q_3 = Calor para subir la temperatura del líquido de 0 °C a 100 °C.

Q_4 = Calor para vaporizarse, manteniéndose a 100 °C.

Q_5 = Calor para subir la temperatura del vapor de 100 °C a 150 °C.

http://librosysolucionarios.net

$$Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 + Q_5 \qquad (\alpha)$$

$$Q_1 = Ce.m.\Delta t = 0{,}5\frac{cal}{g\times°C}\times$$
$$\times 3\,000\,g \times 20\,°C$$

$$Q_1 = 30\ kcal$$

$$Q_2 = C_f.m = 80\frac{cal}{g}.3\,000\,g$$

$$Q_2 = 240\ kcal$$

$$Q_3 = Ce.m.\Delta t = 1\frac{cal}{g\times°C}\times$$
$$\times 3\,000\,g \times 100\,°C$$

$$Q_3 = 300\ kcal$$

$$Q_4 = C_v\,.\,m = 540\,\frac{cal}{g} \times 3\,000\,g$$

$$Q_4 = 1\,620\ kcal$$

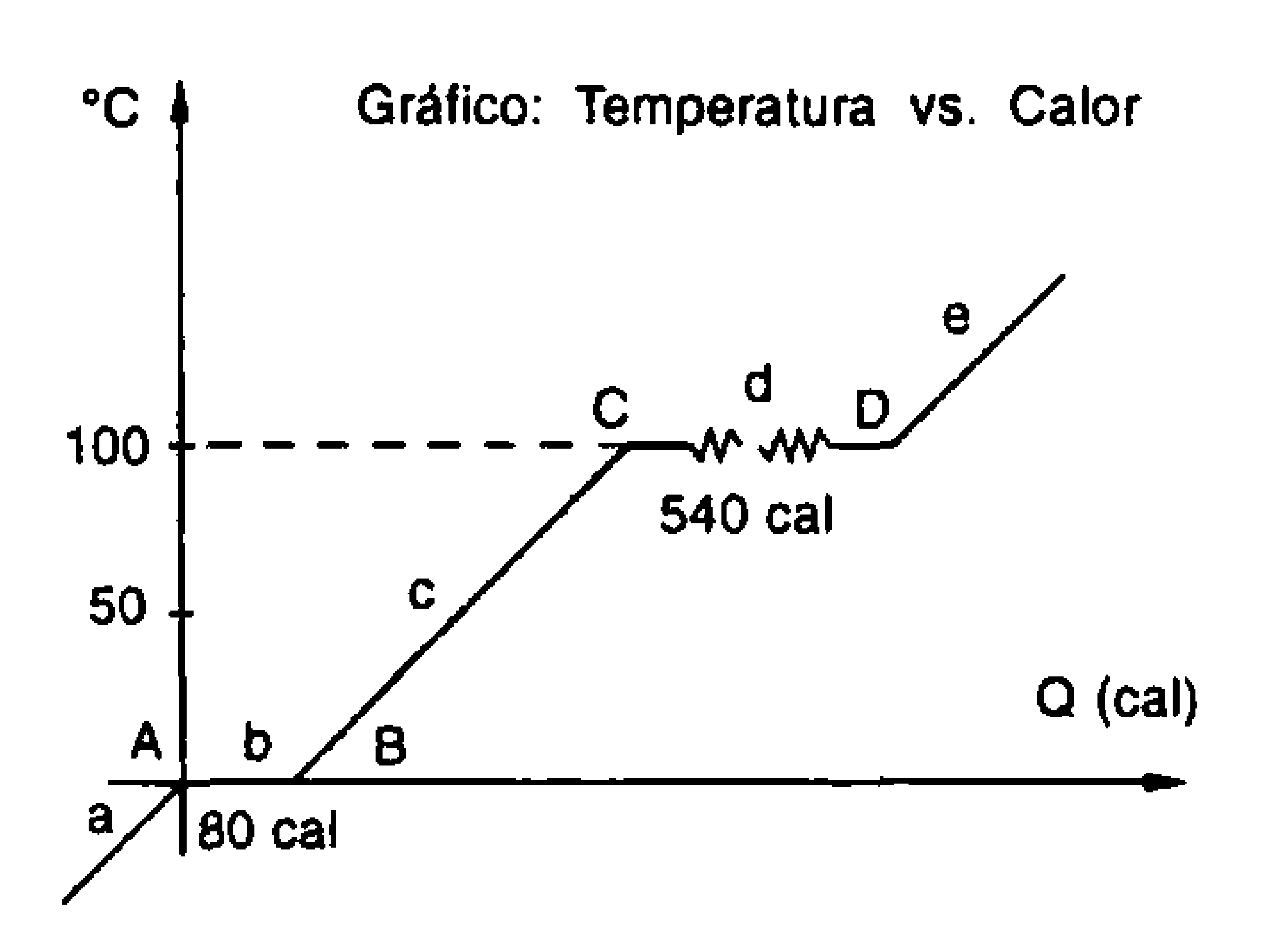
$$Q_5 = Ce\,.\,m\,.\,\Delta t = 0{,}45\,\frac{cal}{g.°C}\times$$
$$\times 3\,000\,g \times 50\,°C$$

$$Q_5 = 67{,}5\ kcal$$

Reemplazando en (a) y sumando:

$$Q = 2\,257{,}5\ kcal = 9\,459 \times 10^3\ J$$

CURVA REPRESENTATIVA DE LOS CAMBIOS DE FASE DEL AGUA



Zona a: Todo sólido.

Zona b: Se está disolviendo el sólido: sólido + líquido.

Zona c: Todo líquido.

Zona d: Se está vaporizando el líquido: líquido + vapor.

Zona e: todo gas.

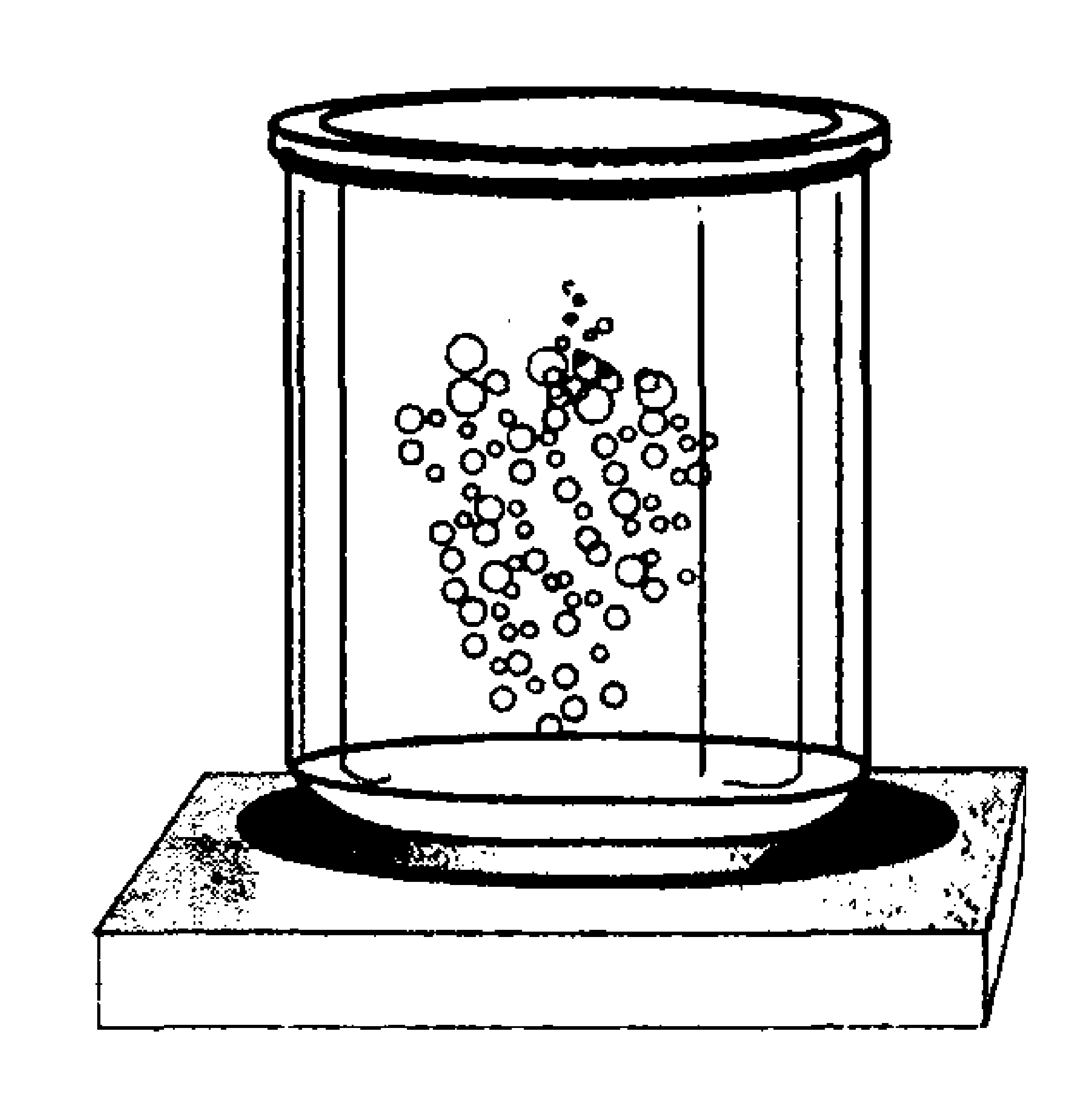
Punto A: Punto de fusión; empieza a fundirse el sólido, cada gramo consume 80 cal y termina de fundirse en el punto B.

Punto C: Punto de ebullición; empieza la ebullición, cada gramo de agua consume 540 cal y termina de vaporizarse en D.

Cuando el vapor regresa a líquido y luego a sólido, la secuencia es así:

Punto D: Punto de condensación; empieza la condensación, cada gramo de vapor pierde 540 cal y termina de condensarse en C.

Punto B: Punto de solidificación; empieza la solidificación del líquido. Cada gramo pierde 80 cal y termina de solidificarse en el punto A.



Aquí se muestran las dos fases del agua: líquida y gaseosa

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la cantidad de calor que necesita 1 Tonelada de cobre que está a 17 °C para fundirlo. Ce Cu = 0,093 cal/g . °C; C_f Cu = 41 cal/g. Temperatura de fusión del Cu = 2 310 °C.

RESOLUCIÓN : $Q = Q_1 + Q_2$ (I)

Q = Calor total.
Q_1 = Calor para subir su temperatura de 17 °C a 2 310 °C.
Q_2 = Calor para fundir los 1 000 kg, manteniéndose a 2 310 °C.

$$Q_1 = Ce.m.\Delta t = 0{,}093\ \frac{cal}{g\times°C} \times$$
$$\times 10^6\ g(2\ 310\ °C - 17\ °C)$$

$$Q_1 = 213\ 249 \times 10^3\ cal$$

$$Q_1 = 213\ 249\ kcal \qquad (1)$$

$$Q_2 = C_f \times m \times = 41\ \frac{cal}{g} \times 10^6\ g =$$
$$= 41\ 000 \times 10^3\ cal$$

$$Q_2 = 41\ 000\ kcal \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

$$Q = 213249\ kcal + 41\ 000\ kcal$$

Rpta.: $Q = 254\ 249\ kcal$

PROBLEMA 2. En un calorímetro de equivalente en agua igual a 20 g, se encuentran en equilibrio térmico 100 g de hielo y 180 g de agua. Si se inyecta 20 g de vapor a 100 °C, calcular la temperatura de equilibrio y el calor transferido en el proceso. $C_{f.h}$ = 80 cal/g; $C_{v_{H_2O}}$ = 540 cal/g.

RESOLUCIÓN :

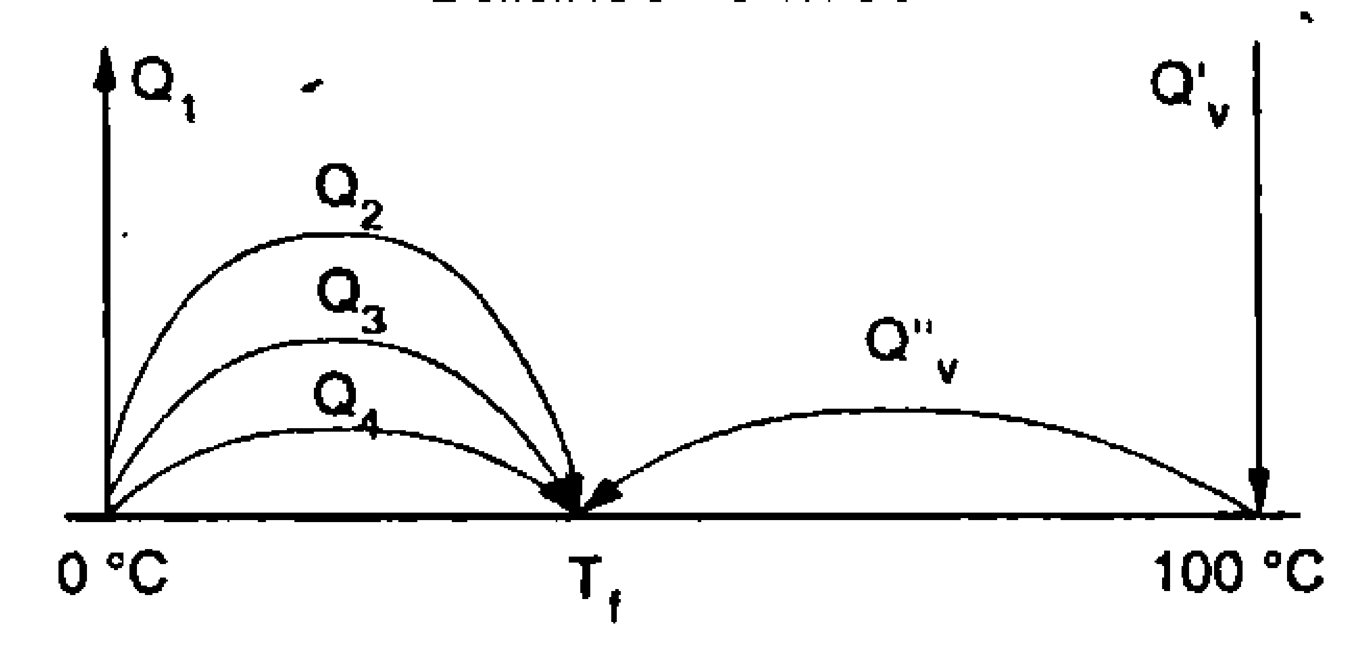
$m_{cal} = 20\ g \qquad C_{f.h} = 80$

$m_h = 100\ g \qquad C_{v.H_2O} = 540\ cal/g$

$m_{H_2O} = 180\ g \qquad t_{final} = ?$

$m_v = 20\ g \qquad Q = ?$

Balance Térmico



-(Calor perdido) = (Calor ganado)

$$-(Q'_v + Q''_v) = (Q_1 + Q_2) + Q_3 + Q_4$$
vapor hielo agua calm.

$$-(m_v\,C_v + m_v\,Ce\,\Delta t) = (m_h\,C_{f.h} + m_h.$$
$$.Ce\,\Delta t) + (m\,Ce\,\Delta t)_{H_2O} + (m\,Ce\,\Delta t)_{calm.}$$

$$-\left[-20 \times 540 + 20 \times 1(t_f - 100)\right] =$$
$$= \left[100 \times 80 + 100 \times 1(t_f - 0)\right] +$$
$$+ 180 \times 1(t_f - 0) + 20 \times 1(t_f - 0)$$

$$10\ 800 - 20\,t_f + 2\ 000 = 8\ 000 +$$
$$+ 100\,t_f + 180\,t_f + 20\,t_f$$

$$320\,t_f = 4\ 800$$

1° Rpta.: $t_f = 15\ °C$

Cálculo del calor transferido:

$$Q = Q'_v + Q''_v$$

$$Q = m_v C_v + (m.Ce.\Delta t)_{vapor}$$

$$Q = 20 \times 540 + 20 \times 1\ (100 - 0)$$

2° Rpta.: $Q = 12\ 800\ cal$ ó $3\ 062\ J$

PROBLEMA 3. En un recipiente de equivalente de agua despre-

http://librosysolucionarios.net

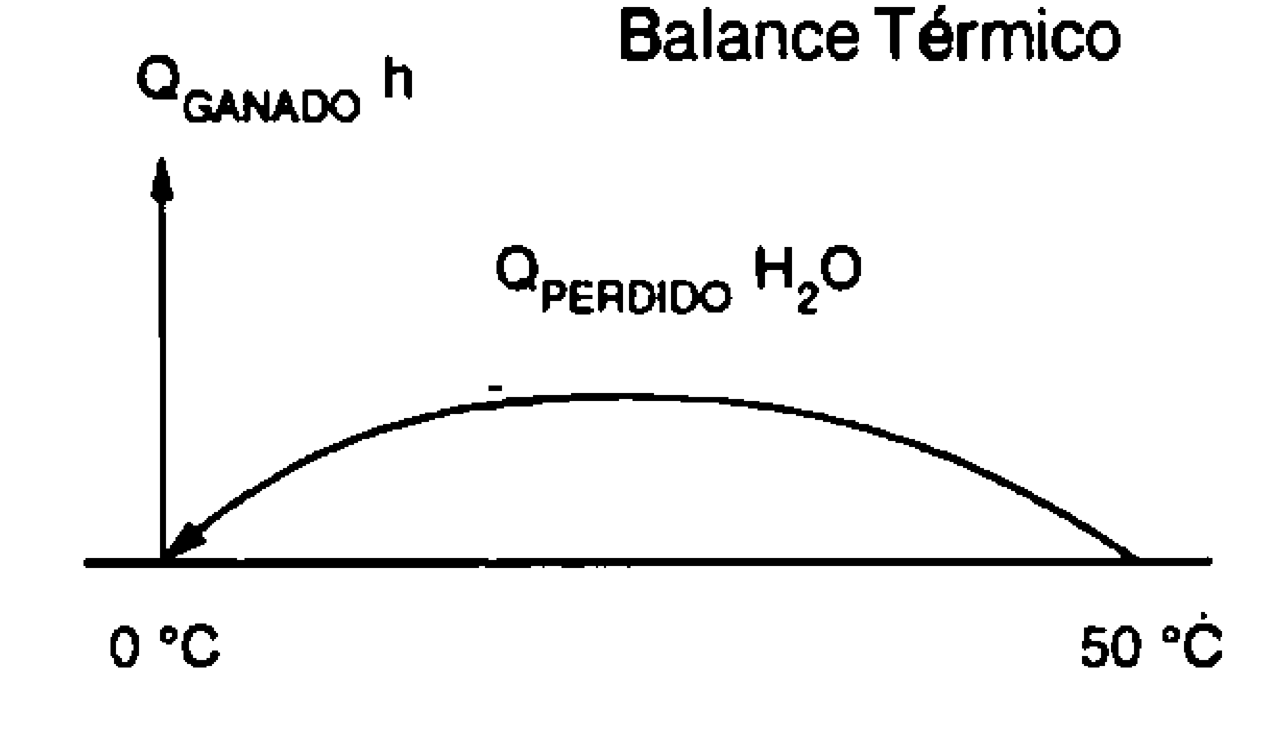
ciable, se tiene 250 g de hielo a 0 °C. Determinar ¿qué masa de agua a 50 °C debe ingresar para derretir al hielo totalmente?

RESOLUCIÓN :

$m_h = 250\text{ g}$ $\quad t_i = 50\text{ °C}$

$C_f = 80\text{ cal/g}$ $\quad t_f = 0\text{ °C}$

$Ce = 1\text{ cal/g.°C}$ $\quad m_{H_2O} = ?$



$$-(\text{Calor perdido})_{H_2O} = (\text{Calor ganado})_{H_2O}$$

$$-(m_{H_2O} \cdot Ce \cdot \Delta t) = m_h \cdot C_f$$

$$-m_{H_2O} \times 1\,(0 - 50) = 250 \times 80$$

Rpta.: $m_{H_2O} = 400\text{ g}$

PROBLEMA 4. En un recipiente de hierro de 40 g de masa hay 50 g de hielo a -30 °C. Calcular la cantidad de vapor de agua a 150 °C que tiene que inyectarse para pasar el conjunto a 20 °C.

Ce del hielo = 0,5 cal/g.°C

C_f del hielo = 80 cal/g

C_v del agua = 540 cal/g

Ce. del hierro = 0,12 /g.°C

Ce. del vapor de agua = 0,46 cal/g.°C

RESOLUCIÓN : Evidentemente que el calor perdido por el vapor de agua tiene que ser igual al calor ganado por el hielo y el recipiente de hierro, hasta que su temperatura suba a 20 °C.

Sea:

Q = Calor perdido por el vapor de agua

Q_1 = Calor para elevar la temperatura del hielo de -30 °C a 0 °C

Q_2 = Calor para fundir los 50 g de hielo

Q_3 = Calor para subir la temperatura de los 50 g de agua líquida de 0 °C a 20 °C

Q_4 = Calor absorbido por el hierro para pasar de -30 °C a 20 °C

Luego: $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4 \quad (I)$

Cálculo de cada uno de estos valores:

Q = Calor perdido para bajar su temperatura de 150 °C a 100 °C + Calor perdido para condensarse la masa "m" de agua + calor perdido por el agua líquida para bajar la temperatura desde 100 °C a 20 °C .

Siendo "**M**" la masa de vapor que se requiere:

$$Q = 0{,}46 \times m \times 50 + 540 \times m + 1 \times m \times 80$$

$$Q = 643 \times m$$

$$Q_1 = 0{,}5 \times 50 \times 30 = 750 \quad (1)$$

$$Q_2 = 80 \times 50 = 4\,000 \quad (2)$$

$$Q_3 = 1 \times 50 \times 20 = 1\,000 \quad (4)$$

$$Q_4 = 0{,}12 \times 40 \times 50 = 240 \quad (5)$$

Sustituyendo estos valores en (I) :

$$643 \times m = 4\,000 + 1\,000 + 240$$

Rpta.: m = 9,32 g de agua

PROBLEMA 5. ¿Qué cantidad de hielo no se funde si a 1,5 kg de hie-

http://librosysolucionarios.net

lo a 0 °C contenido en un recipiente de aluminio de masa 100 g, se le añade 1 litro de agua caliente a 70 °C?

$$Ce_{Al} = 0{,}212 \text{ cal/g.°C}$$

$$Ce_{H_2O} = 1 \text{ cal/g.°C}$$

$$C_{f\ Hielo} = 80 \text{ cal/g.°C}$$

RESOLUCIÓN: $t_f = ?$

$m_{Hielo} = 1\,500$ g $\quad t = 0$ °C

$m_{Al} = 100$ g $\quad t = 0$ °C

$m_{H_2O} = 1\,000$ g $\quad t = 70$ °C

Calor que necesita todo el hielo para fundirse:

$$Q = C_f . m = 80 \text{ cal/g} \times 1\,500 \text{ g}$$

$$Q = 120\,000 \text{ cal} \qquad (1)$$

Calor absorbido por el recipiente de aluminio: nada, porque no sube su temperatura.

Calor entregado por los 1 000 g de agua para bajar la temperatura a 0 °C:

$$Q_2 = Ce . m . \Delta t = 1 \frac{\text{cal}}{\text{g . °C}} \times$$

$$\times 1\,000 \text{ g } (70 \text{ °C} - 0 \text{ °C})$$

$$Q_2 = 70\,000 \text{ cal}$$

Como la cantidad de calor que necesita 1 500 g de hielo para fundirse es 120 000 cal. El agua caliente al bajar su temperatura sólo proporciona 70 000 cal, que no son suficientes para fundir todo el hielo, por consiguiente, al final hay agua líquida y hielo, esa mezcla está a la temperatura de 0 °C.

Cálculo de la cantidad de hielo que se funde con el calor que entrega el agua caliente:

$$Q = C_f . m$$

de donde: $m = \dfrac{Q}{C_f} = \dfrac{70\,000 \text{ cal}}{80 \text{ cal/g}}$

$m = 875$ g (hielo se funde)

Lo que quiere decir que se mantiene bajo la forma de hielo:

$$m_{hielo} = 1\,500 \text{ g} - 875 \text{ g}$$

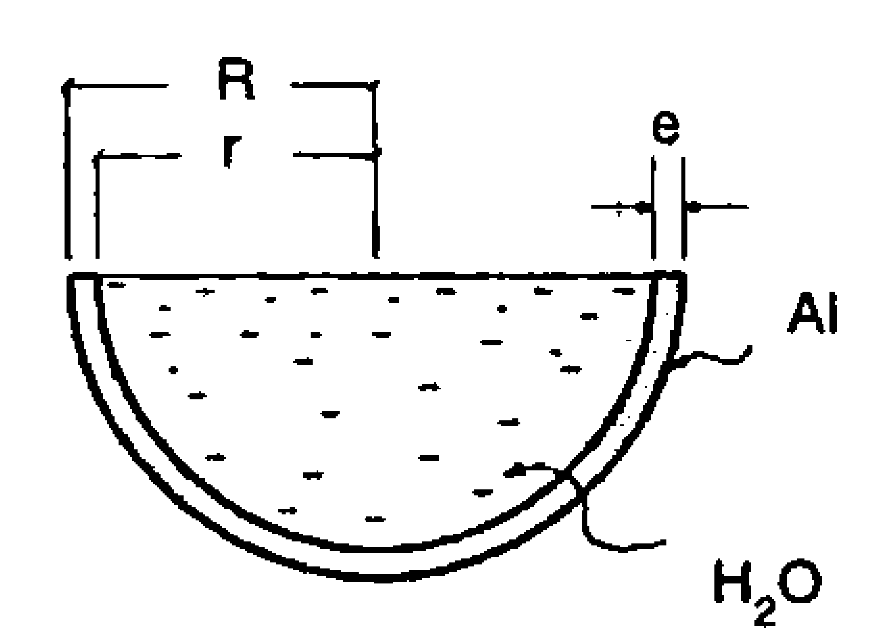
Rpta.: $m_{hielo} = 625$ g no se funde

PROBLEMA 6. Al llenar con 5 litros de agua a 30 °C un recipiente semiesférico de aluminio que está a 0 °C, se logra la temperatura de equilibrio a 25 °C. Calcular el espesor del recipiente de aluminio a 0 °C.

$$Ce\ Al = 0{,}212 \text{ cal/g} \times \text{°C}$$

$$\text{Densidad del Al} = 2{,}7 \text{ g/cm}^3$$

Densidad del agua a 30 °C = 0,996 g/cm³



RESOLUCIÓN: $V = 5$ L

$e = ?$ $\quad t_{H_2O} = 30$ °C

$t_{Al} = 0$ °C $\quad t_f = 35$ °C

y: $e = R - r \qquad (I)$

Cálculo de r: Basado en el volumen de una semiesfera:

$$\frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi r^3 = 5 \text{ dm}^3$$

de donde: $r = \sqrt[3]{\dfrac{15}{2\pi}}$ dm

$$r = 1{,}337 \text{ dm}$$

Se puede calcular la masa del recipiente de aluminio:

$$m = V.\delta = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \pi (R^3 - r^3) \times 2{,}7 \text{ g}$$

http://librosysolucionarios.net

$$m = \frac{5,4}{3}\pi(R^3 - r^3)\,g$$

Por otro lado:

CALOR GANADO POR EL ALUMINIO = CALOR PERDIDO POR EL AGUA

$$Ce_{Al} . m_{Al} . \Delta t = Ce_{H_2O} . m_{H_2O} . \Delta t$$

$$29,97 (R^3 - r^3) = 24,9\ dm^3$$

$$R^3 - r^3 = 0,83$$

$$R^3 = 0,83 + r^3$$

$$R^3 = 0,83 + (1,337)^3$$

$R^3 = 3,22 \Rightarrow R = 1,48\ dm$; luego:

$$e = R - r = 1,48\ dm - 1,337\ dm$$

Rpta.: $e = 0,143\ dm$

PROBLEMA 7. Se coloca una bola de hierro a 400 °C en una cavidad practicada en un bloque de hielo a 0 °C. ¿Cuántos gramos de agua líquida se obtienen? $Ce_{Fe} = 0,11$

RESOLUCIÓN : Sea m_x la cantidad de hielo que se funde, de tal forma que:

$$Q_{GANADO\,(m_x)} = -Q_{PERDIDO\,(Fe)}$$

$$m_x . C_{f\ Hielo} = -m_{Fe} . Ce_{Fe} . \Delta t$$

$$m_x . 80 = -200 \times 0,11 (0 - 400)$$

$$m_x . 80 = 200 \times 400 \times 0,11$$

Rpta.: $m_x = 110$ g de agua líquida

PROBLEMA 8. ¿Cuántos gramos de hielo quedarán después de mezclar 580 g de hielo a 0 °C con 700 gramos de agua a 50 °C?

RESOLUCIÓN : Cálculo de la cantidad de calor cedido por los 700 g de agua:

$$Q = m . Ce . \Delta t$$

$$Q = 700 \times 1 (60 - 0)$$

$$Q = 42\,000\ cal \qquad (1)$$

Cálculo de la cantidad de hielo fundido con este calor:

$$Q = m_{Hielo} . C_{f\ Hielo}$$

$$m_{Hielo} = \frac{Q}{C_{f\ Hielo}} \qquad (2)$$

reemplazando (1) en (2) :

$$m_{Hielo} = \frac{42\,000}{80} = 525\ g$$

$$m_{Hielo} = 525\ g$$

La cantidad de hielo que no se fundirá:

Rpta. : $m = 580\ g - 525\ g = 55\ g$

PROBLEMA 9. Se introduce 30 g de hielo a -20 °C en un calorímetro de 25 g cuyo Ce es 0,2 cal/g . °C. El calorímetro contiene 100 g de agua a 35 °C, la temperatura final resulta ser 7,2 °C. ¿Cuál es el Ce del hielo?

RESOLUCIÓN : Sea X el Ce del hielo.

$$\Sigma Q_{GANADOS} = -\Sigma Q_{PERDIDOS}$$

Calor para subir el hielo a 0 °C + Calor para fundirse el hielo + Calor para subir su temperatura a 7,2 °C = -(Calor para enfriarse el calorímetro de 35 °C a 7,2 °C + Calor para enfriar el agua de 35 °C a 7,2 °C)

$$30 . X . [0 - (-20)] + 80 . 30 + 30.72 =$$

$$= -[25 . 0,2 (7,2 - 35) + 100(7,2 - 35)]$$

Efectuando operaciones:

Rpta.: $X = 0,5\,\frac{cal}{g.\ °C}$

http://librosysolucionarios.net

TRANSMISIÓN O TRANSFERENCIA DE CALOR

El calor puede transmitirse o transferirse por CONVECCIÓN, por CONDUCCIÓN o por IRRADIACIÓN. En esta obra sólo se trata la transmisión del calor por **conducción**.

TRANSMISIÓN DEL CALOR POR CONDUCCIÓN

Es el calor que pasa a través de la masa de un cuerpo.

COEFICIENTE DE CONDUCTIBILIDAD TÉRMICA

Es la cantidad de calor "Q" que pasa por unidad de superficie "S" (1 cm²) en cada unidad de tiempo "τ" (1 s) si la gradiente o caída de la temperatura "G" es la unidad (1 °C/cm).

$$K = \frac{Q}{S.G.\tau}$$

K : Coeficiente de conductibilidad térmica propio de cada cuerpo.

Q : Cantidad de calor que pasa, en cal.

S : Sección del conductor, en cm².

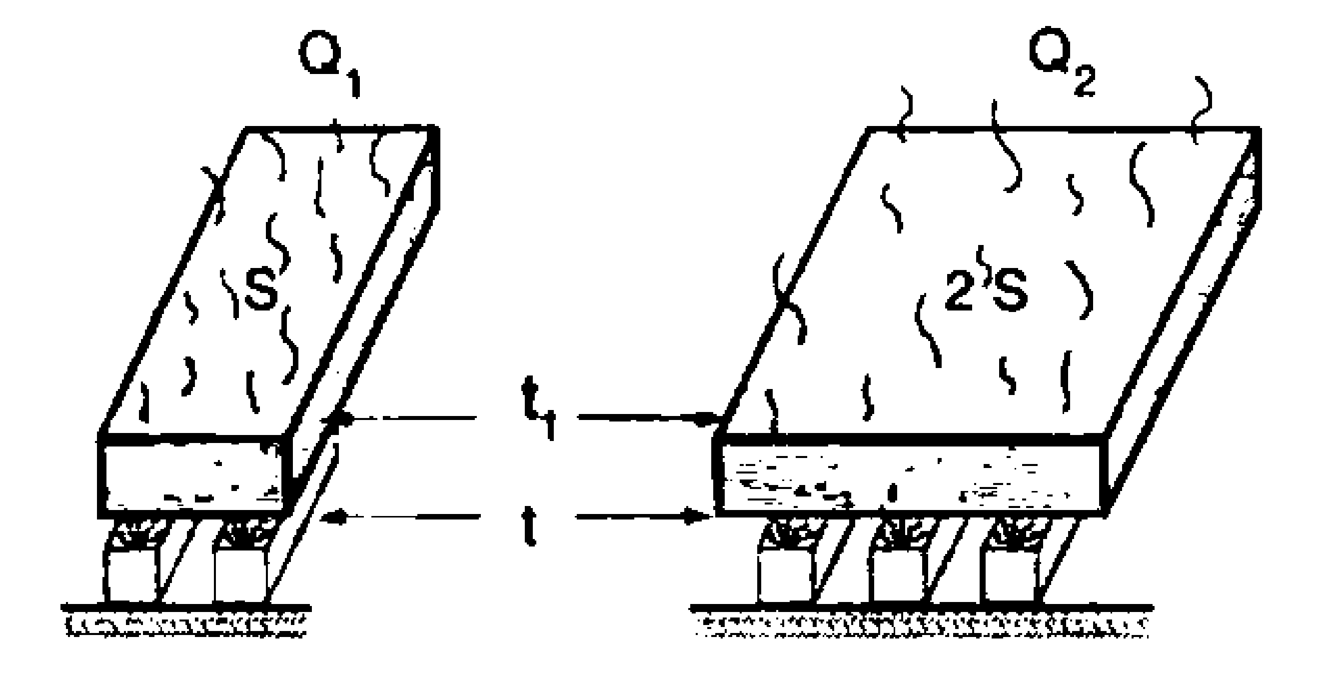
G : Gradiente, o caída de la temperatura, en °C/cm

$$G = \frac{t_1 - t_2}{e}$$

e : Espesor del conductor, o longitud del conductor, en cm

t : Tiempo durante el cual se está transmitiendo calor, en segundo "s".

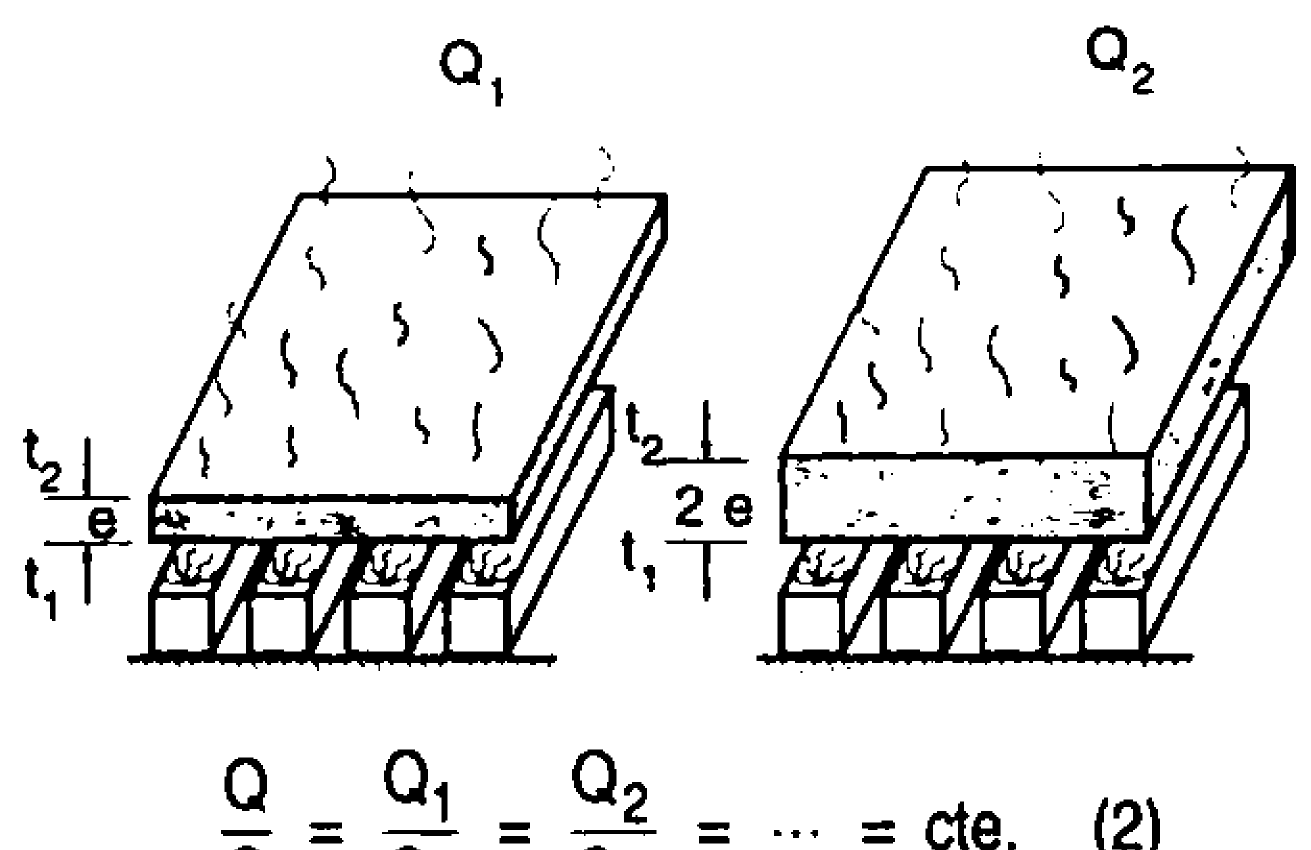
DEDUCCIÓN DE K



1. La cantidad de calor "Q" transmitida a través de un cuerpo, es directamente proporcional a la sección "S".

$$\frac{Q}{S} = \frac{Q_1}{S_1} = \frac{Q_2}{S_2} = \cdots = \text{cte.} \quad (1)$$

2. La cantidad de calor "Q" que pasa a través de un cuerpo es directamente proporcional a la gradiente o caída "G".



$$\frac{Q}{G} = \frac{Q_1}{G_1} = \frac{Q_2}{G_2} = \cdots = \text{cte.} \quad (2)$$

Gradiente:

Es la disminución o caída de temperatura, entre la distancia o espesor que separa dos puntos.

$$G = \frac{t_1 - t_2}{e}$$

ó:

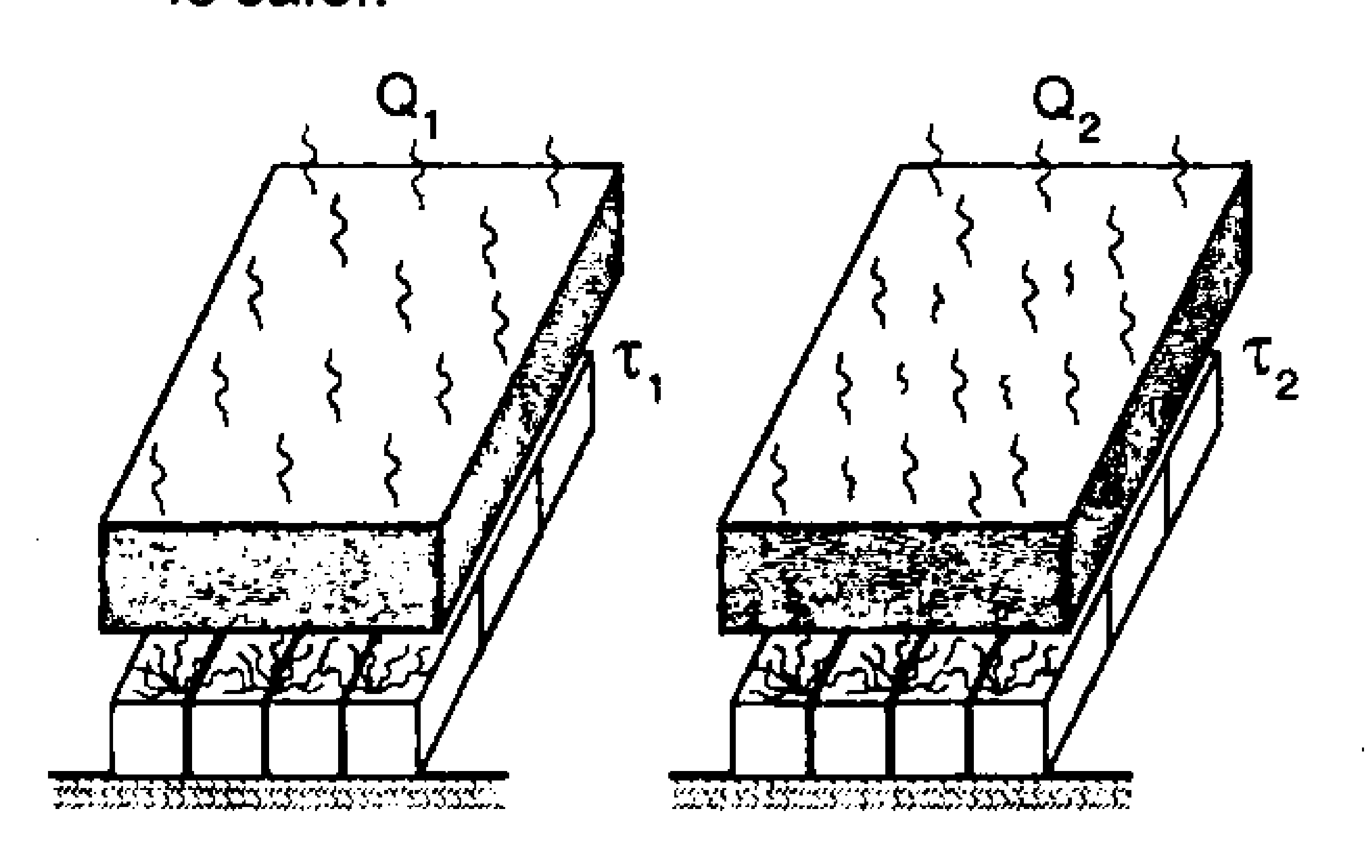
$$G = \frac{\Delta t}{e}$$

Experimentalmente se ha comprobado que si el espesor del conductor se duplica, la temperatura que pasa se reduce a la mitad, por consiguiente, la gradiente o caída se duplica; si el espesor se triplica, la temperatura baja a la tercera parte, por consiguiente la gradiente o caída se triplica, etc.

3. La cantidad de calor "Q" que atraviesa un cuerpo también depende de la calidad del material.

http://librosysolucionarios.net

4. La cantidad de calor "Q" que atraviesa el cuerpo es directamente proporcional al tiempo "t" que se demora en suministrarle calor.



$$\frac{Q}{\tau} = \frac{Q_1}{\tau_1} = \frac{Q_2}{\tau_2} = \cdots = \text{cte.} \qquad (3)$$

Observando las igualdades (1), (2) y (3) se llega a la conclusión que la cantidad de calor que atraviesa un conductor es directamente proporcional a la sección del conductor, a la gradiente y al tiempo de suministro de calor, es decir:

$$\frac{Q}{S.G.\tau} = \frac{Q_1}{S_1.G_1.\tau_1} = \frac{Q_2}{S_2.G_2.\tau_2} = \ldots = \text{cte.}$$

Esta constante es el coeficiente de conductibilidad térmica.

$$\boxed{K = \frac{Q}{S.G.\tau}} \qquad (\text{I})$$

CONSTANTES DE CONDUCTIBILIDAD

$$\left(\text{En: } \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \cdot \text{s}}\right)$$

Aluminio	0,48
Cobre	0,92
Fierro	0,16
Mercurio	0,14
Plomo	0,08
Vidrio	0,002
Agua	0,001
Aire	0,000 055

CANTIDAD DE CALOR TRANSMITIDO

Es la cantidad de calor que pasa de un punto a otro punto a través de un conductor cualquiera, su valor se deduce de (1) :

$$\boxed{Q = K.S.G.t} \qquad (\text{II})$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la cantidad de calor que atravesará en 10 minutos por una plancha de aluminio de 40 cm² de superficie y un espesor de 5 cm si la temperatura en una cara es 120 °C y en la otra cara 70 °C. El K del aluminio es 0,48.

RESOLUCIÓN : $Q = ?$

$\tau = 10\text{ min}$ $\quad t = 120\ °\text{C}$

$S = 40\text{ cm}^2$ $\quad t_1 = 70\ °\text{C}$

$e = 5\text{ cm}$ $\quad K_{Al} = 0,48$

Recordando: $Q = k\,S\,G\,t$

Sustituyendo los datos:

$$Q = 0,48\ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \cdot \text{s}} \times 40\text{ cm}^2 \times$$

$$\times \frac{120°\text{C} - 70\ °\text{C}}{5\text{ cm}} \times 10 \times 60\text{ s}$$

http://librosysolucionarios.net

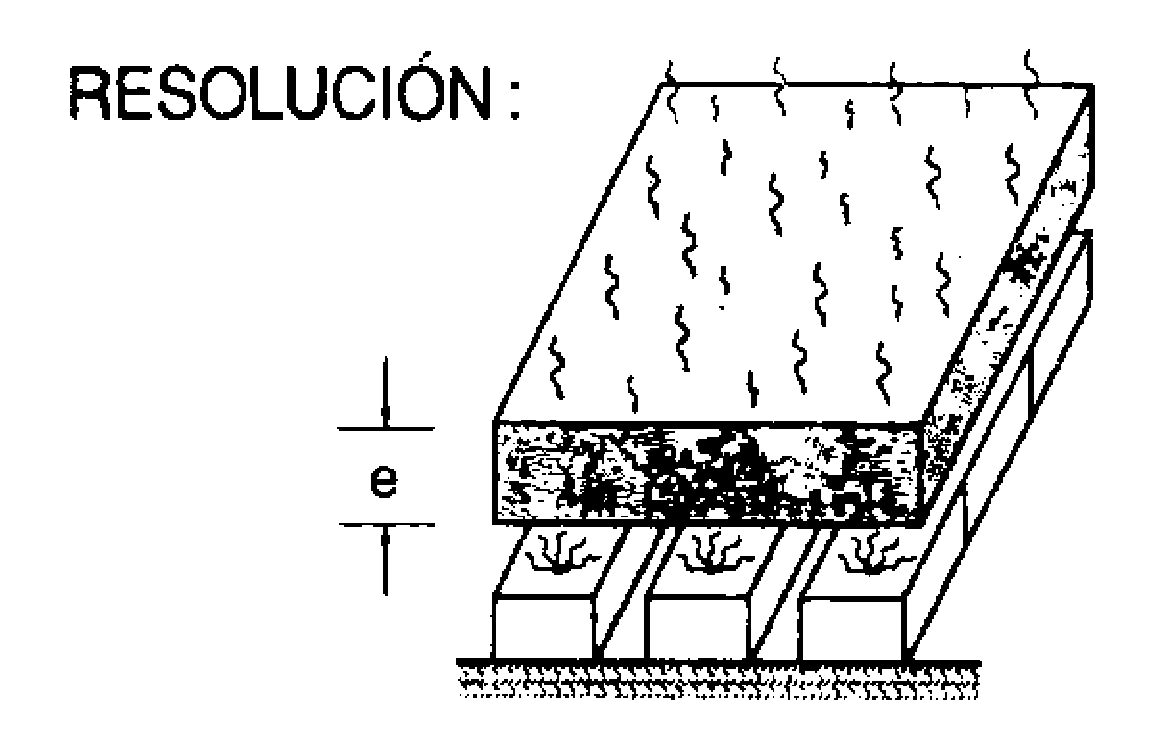
Q = 115 200 cal

Rpta.: Q = 115,2 kcal

PROBLEMA 2. ¿Cuánto tiempo demorará en pasar 100 kcal a través de una plancha de hierro de 13 cm x 14 cm x 5 cm, si la temperatura entre una cara difiere en 60 °C?

$$K_{Fe} = 0{,}16\ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2 \cdot \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \cdot \text{s}}$$

RESOLUCIÓN :



Q = 100 kcal τ = ?

S = $13 \times 14\ \text{cm}^2$ Δt = 60 °C

e = 5 cm

Sabiendo que: $K = \frac{Q}{S\,G\,\tau}$,

de donde: $\tau = \frac{Q}{S\,G\,K}$

sustituyendo datos:

$$\tau = \frac{100\ 000\ \text{cal}}{13 \times 14\ \text{cm}^2\ \frac{60°\text{C}}{5\ \text{cm}} \times 0{,}16\ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\ \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \times \text{s}}}$$

τ = 286,17 s

Rpta.: τ = 4 min 46,17 s

PROBLEMA 3. ¿Cuál será la gradiente de una plancha metálica que tiene una superficie de 100 cm² si en 10 minutos pasa 100 kcal. K del metal es 0,18.

RESOLUCIÓN : $K = \frac{Q}{S\,G\,\tau}$

de donde: $G = \frac{Q}{S\,G\,\tau}$

$$G = \frac{100\ 000\ \text{cal}}{100\ \text{cm}^2 \times 0{,}18\ \frac{\text{cal}}{\text{cm}^2\ \frac{°\text{C}}{\text{cm}} \times \text{s}} \times 2 \times 60\ \text{s}}$$

Rpta.: 46,3 °C/cm

PROBLEMA 4. ¿Cuál es el espesor "e" de una plancha de aluminio de 460 cm² de espesor, si al calentar un lado a 80 °C la otra cara tiene sólo 30 °C. Además, para pasar 200 kcal demora 5 minutos. El K del aluminio es 0,48.

RESOLUCIÓN : Se calcula el valor del gradiente:

$$G = \frac{Q}{S\,G\,\tau}$$

$$G = \frac{200\ 000}{460 \times 0{,}48 \times 5 \times 60} \cdot \frac{°\text{C}}{\text{cm}} = 3\ \frac{°\text{C}}{\text{cm}}$$

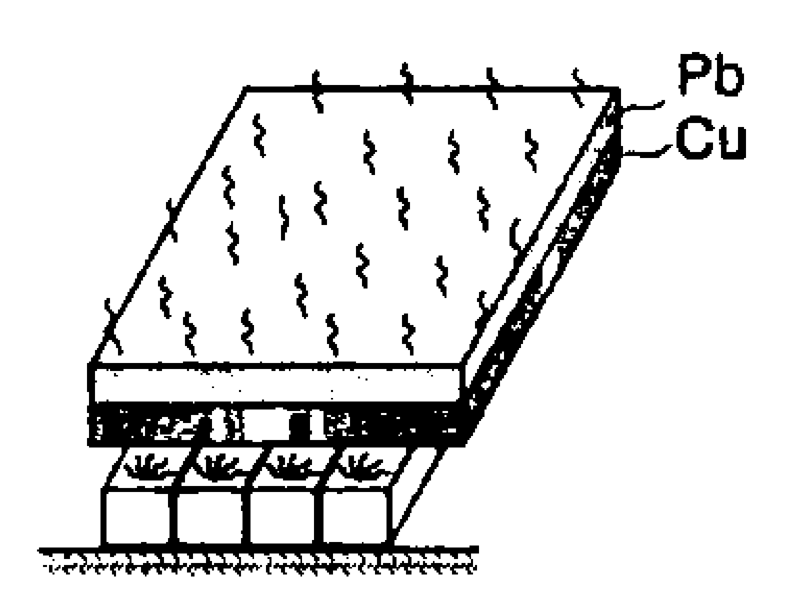
Donde: $G = \frac{\Delta t}{e} \Rightarrow e = \frac{\Delta t}{G}$

$$e = \frac{80\ °\text{C} - 30\ °\text{C}}{3°\text{C/cm}}$$

Rpta.: e = 16,7 cm

PROBLEMA 5. Dos planchas de 100 cm² de sección están superpuestas. Una es de cobre K_1 = 0,92 y la otra de plomo K_2 = 0,08 ; la primera tiene un espesor de 6 cm y la segunda de 4 cm. Si la temperatura que recibe la plancha de cobre es de 100 °C, la cantidad de calor que pasa a la parte superior de la plancha de cobre es de 184 kcal y la que pasa a la parte superior de la plancha de plomo es de 20 kcal en 4 minutos. ¿Cuál es la temperatura en la cara superior de la plancha de plomo?

RESOLUCIÓN :



Sea Q_1 la cantidad de calor y t_1 la temperatura que pasa a la cara superior de la plancha de cobre. Con la fórmula:

$$Q = K S G \tau$$

$$Q_1 = 0{,}92 \times 100 \frac{100 - t_1}{4} \times 4 \times 60$$

$$180 \times 10^3 = 3\,680\,(100 - t_1)$$

$$\therefore \qquad t_1 = 50\ °C$$

Sea Q_2 la cantidad de calor que pasa de la cara inferior a la cara superior de la plancha de plomo, y sea t_1 la temperatura en su cara inferior y t_2 la temperatura de su cara superior.

$$Q_2 = 0{,}08 \times 100 \frac{t_1 - t_2}{4} \times 4 \times 60$$

ó: $$20 \times 10^3 \text{ cal} = 480(50\,°C - t_2)$$

Rpta.: $t_2 = 8{,}33\ °C$

PROBLEMA 6. Una plancha de níquel tiene 0,08 cm de espesor y una diferencia de temperatura entre sus caras de 64 °C. Se transmite 6,67 kcal/min a través de 100 cm². Calcular la conductibilidad térmica del níquel.

RESOLUCIÓN : $$K = \frac{Q}{S G \tau} \qquad (I)$$

Donde: $$G = \frac{64\ °C}{0{,}8 \text{ cm}} = 80 \frac{°C}{cm}$$

Sustituyendo valores en (I):

$$K = \frac{6{,}67 \times 10^3 \text{ cal}/60 \text{ s}}{100 \text{ cm}^2 \times 80 \frac{°C}{cm}}$$

Rpta.: $$K = 0{,}014 \frac{cal}{cm.°C.s} \quad ó:$$

$$K = 5{,}866 \frac{J}{m.°C.s}$$

PROBLEMA 7. ¿Qué gradiente térmica existirá en una plancha de aluminio si transmite 8 cal/s x °C? $K_{Al} = 0{,}5$ cal/cm x °C x s ; S = 1 cm².

RESOLUCIÓN : $$K = \frac{Q}{S G \tau}$$

De donde: $$G = \frac{Q}{S K \tau}$$

$$G = \frac{8 \text{ cal}}{1 \text{ cm}^2 \times \frac{0{,}5 \text{ cal}}{cm.°C.s} \times 1 \text{ s}}$$

Rpta.: $G = 16\ °C / cm$

PROBLEMA 8. Calcular la cantidad de agua a 100 °C que se podría evaporar, por hora y cm², con el calor que se transmite de una plancha de acero de 0,2 cm de espesor que tiene una diferencia de temperatura entre sus caras de 500 °C.

$$K_{acero} = 0{,}11 \text{ cal} / \text{cm} . °C . s$$

RESOLUCIÓN : Se calcula la cantidad de calor que pasa en 1 hora (3 600 s) por cada cm² de la plancha.

$$Q = K S G \tau$$

$$Q = 0{,}11 \frac{cal}{cm.°C.s} \times 1 \text{ cm}^2 \times \frac{500\ °C}{1 \text{ cm}} \times 3\,600 \text{ s}$$

$$Q = 198\,000 \text{ cal}$$

Cálculo de la masa de agua evaporada:

540 cal	vaporiza	1 g
198 000 cal	vaporizará	w

Rpta.: w = 367 g de agua vaporizada

PROBLEMA 9. Una mampostería transmite 100 cal/h a través de

0,1 m^2 de superficie con una gradiente de temperatura de 0,5 °C/cm. Calcular el calor que transmitirá por día una placa de 2 m^2 de área y 0,2 cm de espesor si las temperaturas de sus caras son de 5 °C y 20 °C.

RESOLUCIÓN : Cálculo de la constante "K" de la mampostería:

$$K = \frac{Q}{S\,G\,\tau}$$

$$K = \frac{100 \text{ cal}}{1\,000 \text{ cm}^2 \times 0{,}5 \frac{°C}{cm} \times 3\,600 \text{ s}}$$

$$K = \frac{1 \text{ cal}}{5 \times 3\,600 \text{ cm} \times °C \times s}$$

Por otra parte: $Q = K\,S\,G\,t$

$$Q = \frac{1 \text{ cal}}{5 \times 3600 \text{ cm.°C.s}} \times 20000 \text{ cm}^2 \times \frac{15\ °C}{0{,}2 \text{ cm}} \times 24 \times 3600 \text{ s}$$

Rpta.: $Q = 7\,200$kcal ó:

$Q = 301{,}39 \times 10^5$ J

NOTA : 1 cal = 4,186 J

PROBLEMA 10. ¿Cuál es la capacidad de transporte calorífico de una pared de hierro de 2 cm de espesor cuando entre sus caras hay temperaturas de 800 °C y 200 °C?

$$K_{Fe} = 48 \text{ cal/m.°C.s}$$

RESOLUCIÓN : $Q = KSG\tau$ (A)

Como no de ha dado la superficie y el tiempo al que está sometido el calentamiento de la plancha se toma 1 m^2 y 1 s.

$$Q = \frac{\text{cal} \times 1 \text{ m}^2}{\text{m.°C.s}} \times \frac{300\ °C - 200°C}{10^{-2} \text{ m}} \times 1 \text{ s}$$

Rpta.: $Q = 48\,000$ kcal ó:

$Q = 200{,}93 \times 10^6$ J

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. El radiador de un automóvil contiene 18,5 litros de agua. Si se suministran 300 000 cal al sistema de enfriamiento, y todo el calor se utiliza para elevar la temperatura del líquido, halle el aumento en la temperatura.

Rpta.: 15 °C

2. Una barra de cobre mide 50 cm de longitud cuando se mide con una cinta de acero a 10°C. ¿Cuál será su longitud a 30 °C?

Rpta.: 50,006 cm

3. A 20 °C, la densidad del oro es de 19,3 g/cm^3. Encuentre su densidad a 100°C.

Rpta.: 19,23 g/cm^3

4. Un estudiante desea medir la masa de un recipiente de cobre y para ello vierte 5 kg de agua a 70 °C en el recipiente, que inicialmente estaba a 10 °C. Luego encuentra que la temperatura del agua y de la vasija es de 66 °C. A partir de esta información, determine la masa del recipiente de cobre.

Rpta.: 3,87 kg

5. Un calorímetro de cobre de 300 g contiene 100 g de hielo. El sistema está inicialmente a 0 °C. Si se introduce al calorímetro 50 g de vapor a 100 °C a 1 atm de presión, determine la temperatura final del contenido.

Rpta.: 100 °C

6. Se coloca un recipiente con agua a 0 °c al aire libre, cuando la temperatura ambiental es de -10 °C. Si el área del recipiente es de 500 cm^2 y el agua tiene 5 cm de profundidad, ¿cuánto tiempo necesita el agua para congelarse totalmente? Desprecie los efectos debido a la capacidad térmica del recipiente.

Rpta.: 11,6 h

http://librosysolucionarios.net

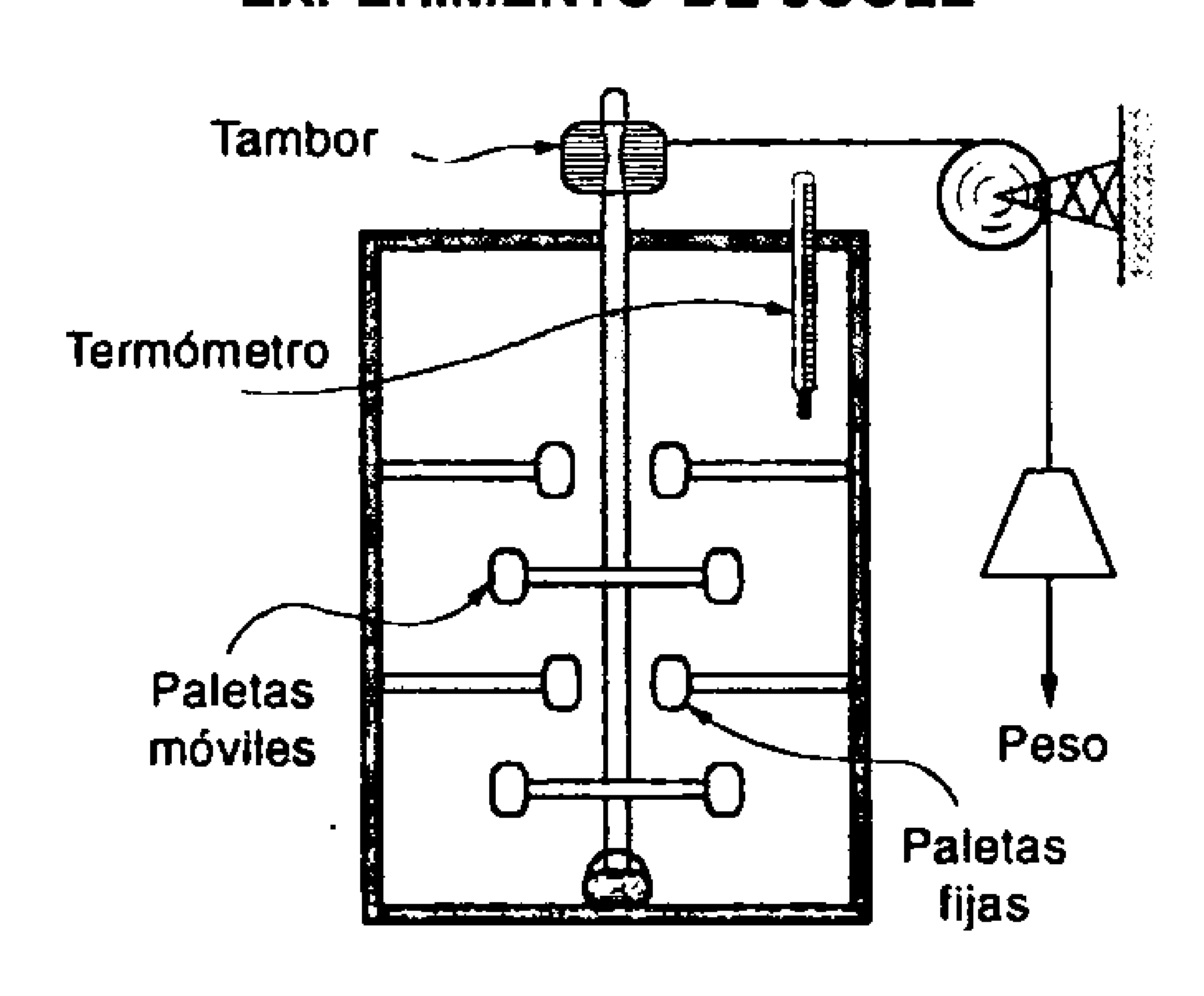
TRABAJO MECÁNICO Y CALOR

EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR

El calor puede transformarse en trabajo mecánico y viceversa.

Al frotarnos las manos el trabajo mecánico nos calienta. Al doblar varias veces un alambre por el mismo sitio, al cabo de un tiempo se calienta. Y viceversa, en los motores de combustión (carros) el calor producido por la combustión de la gasolina mueve los carros. Esto quiere decir que el trabajo produce calor y también el calor produce trabajo.

EXPERIMENTO DE JOULE



Construyó un recipiente térmicamenteaislado (calorímetro), al que le instaló un termómetro, un juego de paletas fijas al calorímetro y un juego de paletas móviles fijadas a su eje, accionadas por un peso el cual pende a través de una polea de un hilo que está enrollado en un tambor conectado al eje de las paletas móviles como se ve en la figura:

Al bajar el peso realiza un trabajo. Como consecuencia, las paletas giran, provoca turbulencia y logran aumentar la temperatura del agua.

EQUIVALENTE MECÁNICO DEL CALOR EN JOULES S.I.

La unidad SI para medir el calor es el JOULE "J", también se acepta como unidad de medida la CALORÍA "cal". Sus equivalencias:

$$1 \text{ cal} = 4{,}186 \text{ J}$$

$$1 \text{ J} = 0{,}24 \text{ cal}$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un cuerpo de 2Ton de masa se desplaza a 30 m/s¿Cuál es el equivalente mecánico de su energía cinética, en calorías cuando para bruscamente? (Se estrella contra una pared)

RESOLUCIÓN: $Q = ?$

$m = 2\,000 \text{ kg}$ $\quad v = 30 \text{ m/s}$

Se sabe: $E = \frac{1}{2} m V^2$

$$E = \frac{1}{2} \times 2\,000 \text{ kg} \times (30 \text{ m/s})^2$$

$$E = 1\,000 \times 900 \text{ kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times \text{m}$$

$$E = 9 \times 10^5 \times \text{N} \times \text{m}$$

$$E = 9 \times 10^5 \text{ J}$$

Pero: $1 \text{ J} = 0{,}24 \text{ cal}$

$$E = 9 \times 10^5 \times 0{,}24 \text{ J}$$

$$E = 2{,}16 \times 10^5 \text{ cal}$$

PROBLEMA 2. Calcular la altura desde la cual debe dejarse caer una masa de 100 g de plomo, que está a una temperatura de 27 °C, para que con el impacto del choque se funda. El calor de fusión del plomo es 5,5 cal/g, su Ce es 0,03 cal/g .°C y

su punto de fusión 327 °C.

RESOLUCIÓN: $m = 100\ g$

$t_1 = 27\ °C$

$C_f = 5{,}5\ cal/g$ $h = ?$

$t_f = 327\ °C$

$Ce = 0{,}03\ cal/g.°C$

La cantidad de calor que necesita los 100 g para fundirse totalmente es:

a) Calor "Q_1" para llegar a 327 °C (punto de fusión).

b) Calor "Q_2" para fundir los 100g, manteniéndose a 327 °C (calor latente de fusión).

$$Q = Q_1 + Q_2 \qquad (A)$$

$$Q_1 = Ce\,.\,m\,.\,\Delta T$$

$$Q_1 = 0{,}03\ \frac{cal}{g \times °C} \times 100\ g\ (327°C - 27°C)$$

$$Q_1 = 900\ cal \qquad (1)$$

$$Q_2 = C_f\,.\,m$$

$$Q_2 = 5{,}5\ \frac{cal}{g} \cdot 100\ g$$

$$Q_2 = 550\ cal \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$Q = 1\ 450\ cal$$

Esta cantidad de calor debe ser producido por el impacto al caer de una altura "h", es decir al realizar un trabajo. Se transforma las calorías en joules.

$$E = 1\ 450 \times 4{,}186\ J$$

$$E = 6\ 069{,}7\ J$$

Esta energía mecánica que tiene que desarrollar el cuerpo es la energía potencial que debe estar almacenada al estar a una altura "h", antes de caer.

La energía potencial se mide por la energía que ha desarrollado hasta el momento del impacto:

$$P\,.\,h = E \quad o: \quad m\,.\,g\,.\,h = E$$

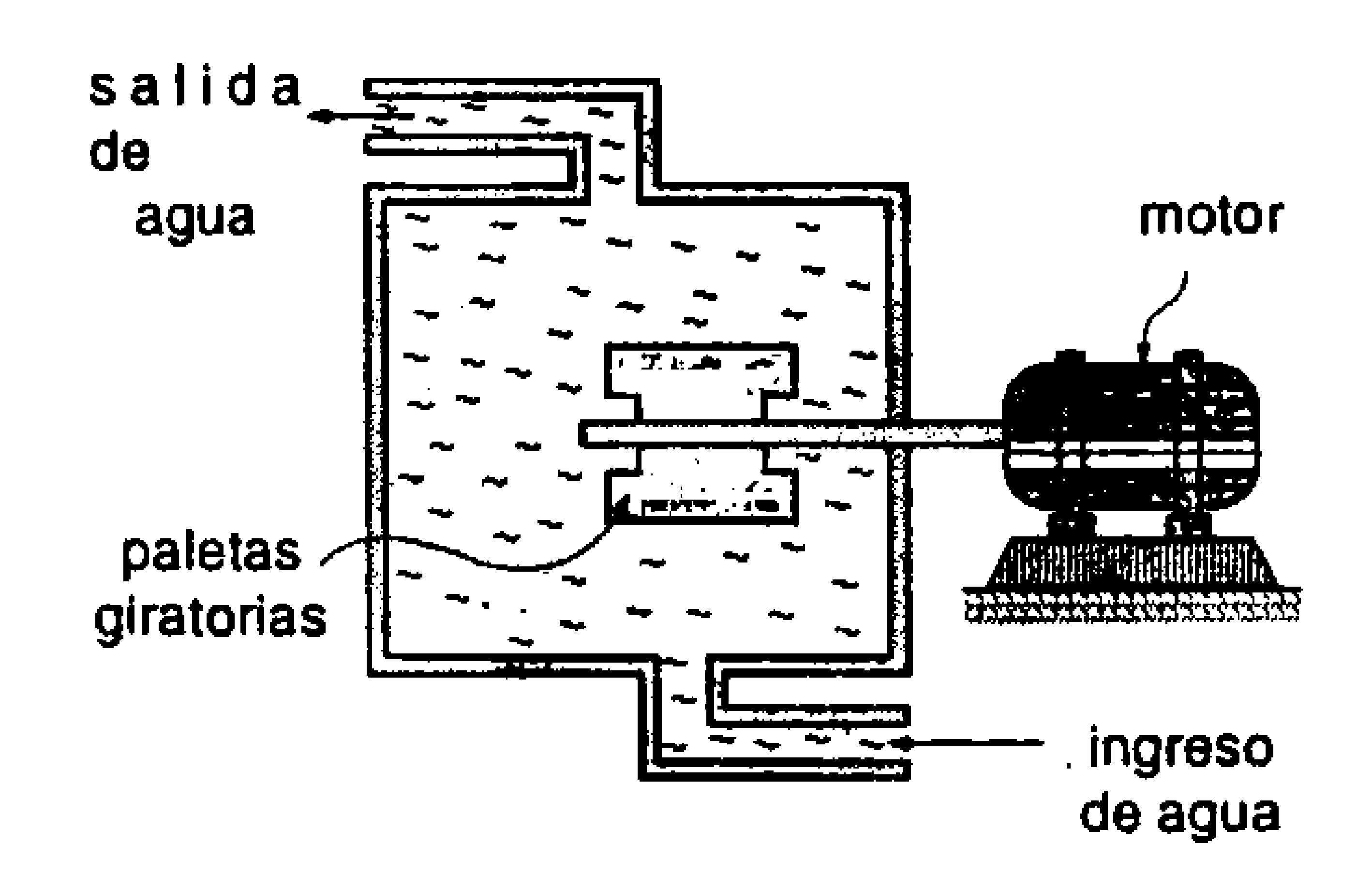
de donde: $$h = \frac{E}{m\,.\,g}$$

$$h = \frac{6\ 069{,}7\ J}{0{,}1\ kg \times 9{,}8\ m/s^2}$$

$$h = \frac{6\ 069{,}7\ N\,.\,m}{0{,}980\ kg \times m/s^2}$$

Rpta.: $h = 6\ 193{,}57\ m$

PROBLEMA 3. En un tanque de agua se acciona unas paletas por un motor de 150 HP. El agua se renueva a razón de 100 litros por minuto. Si el agua ingresa al tanque a 15 °C ¿a qué temperatura sale?



RESOLUCIÓN: Cálculo del trabajo realizado por el motor, en un minuto.

$$W = P\,.\,t \qquad (I)$$

Pero: $P = 150\ HP = 150\ .\ 745\ W$

$P = 111\ 750\ W$

y: $t = 60\ s$

Sustituyendo estos valores en (I):

$$W = 11\,750\,W\,.\,60\,s$$

$$W = 6\,705\,000\,W\,.\,s$$

$$W = 6\,705\,000\,J$$

ó: $Q = 6\,705\,000\,J$

Ahora: $1\,J = 0{,}24\,cal$

Luego: $Q = 6\,705\,000\,J \Rightarrow$

$$Q = 1\,609\,200\,cal = 1\,609{,}2\,kcal$$

Este es el calor que ha absorbido el agua que ha pasado por el tanque en 1 minuto y que ha elevado su temperatura.

Recordando que: $Q = Ce\,.\,m\,.\,\Delta t$

de donde:

$$\Delta t = \frac{Q}{Ce\,.\,m} = \frac{1\,609,\,2\,kcal}{1\,\frac{kcal}{kg\,.\,°C}100\,kg}$$

$$\Delta t = 16{,}09\,°C$$

Este es el incremento que ha experimentado el agua; por consiguiente la temperatura final con la que sale el agua será:

$$t_f = t + \Delta t = 15\,°C + 16{,}09\,°C$$

$$t_f = 31{,}09\,°C$$

PROBLEMA 4. Un cuerpo cuya masa es de 60 kg eleva su temperatura de 10 °C a 100 °C. Su calor específico es 0,3 cal/g . °C. Calcular el trabajo que se requiere:

a) En joulios ; b) En ergios

RESOLUCIÓN: Calor absorbido por el cuerpo:

$$Q = Ce\,.\,m\,.\,\Delta t = 0{,}3\,\frac{cal}{g\,.\,°C} \times \cdots$$

$$\cdots \times 60\,kg\,(100\,°C - 10\,°C)$$

$$Q = 1\,620 \times 10^3\,cal$$

a) Transformando a joules, para expresar el trabajo:

$$T = 1\,620 \times 10^3 \times 4{,}186\,J$$

$$T = 6\,781{,}3 \times 10^3\,J$$

b) Transformando a ergios:

Se sabe que: $1\,J = 10^7\,erg$

Luego: $T = 6\,781{,}3 \times 10^{10}\,erg$

PROBLEMA 5. El trabajo realizado al trasladar 20 kg de masa a una distancia de 1 km, ¿a cuántas kcal equivale?

RESOLUCIÓN:

$$T = F \times d = m.g.d$$

$$T = 20\,kg \times 9{,}8\,\frac{m}{s^2} \times 1\,km$$

$$T = 196\,000\,(kg \times \frac{m}{s^2}) \times m$$

$$T = 196\,000\,N \times m$$

$$T = 196\,000\,J$$

pero: $1\,J = 0{,}24\,cal$

$\therefore \quad Q = 196\,000 \times 0{,}24\,cal$

Rpta.: $Q = 47\,000\,cal$ ó

$Q = 47\,kcal$

PROBLEMA 6. A 90 km/h se desplaza un automóvil de 1 200 kg de masa. Calcular la cantidad de calor que se desprende cuando se le frena hasta detenerlo.

RESOLUCIÓN: $V = 80\,km/h$

$m = 1\,200\,kg$

Cálculo de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2}\,m\,V^2 = \frac{1}{2} \times 1\,200\,kg \times$$

$$\times \left(\frac{80\,000\,m}{3\,600\,s}\right)^2$$

$$E_C = 296\,296\,kg \times \frac{m^2}{s^2} =$$

http://librosysolucionarios.net

$$= 296\,296\left(kg \times \frac{m}{s^2}\right)m$$

$$E_C = 296\,296\ N \times m = 296\,296\ J$$

Transformando a calorías:

$$Q = 296\,296 \times 0{,}24\ cal$$

Rpta.: $Q = 71\,111\ cal$

$Q = 71{,}1\ kcal$

PROBLEMA 7. Un cuerpo celeste (meteorito) de 10 g penetra a la atmósfera a la temperatura de -150 °C y a la velocidad de 30 km/s. Calcular:

a) La energía cinética.
b) Qué parte de esta energía se emplea para aumentar su temperatura de -150 °C a 1 500 °C (temperatura de incandescencia del meteorito). Ce del medio 0,12 cal/g . °C.

RESOLUCIÓN: $m = 10\ g$

$T_1 = -150\ °C$ $V = 30\ km/s$

$T_2 = 1\,500\ °C$ $Ce = 0{,}12$

a) Calculo de la energía cinética:

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times 10^{-3}\ kg \times$$

$$\times \left(\frac{30 \times 10^3\ m}{s}\right)^2$$

$$E_C = 4\,500 \times 10^3 \times \left(kg \times \frac{m}{s^2}\right)m$$

$$E_C = 4\,500 \times 10^3\ N \times m$$

Rpta.: $E_C = 4\,500 \times 10^3\ J$

b) Cálculo de la energía, en joule, consumida para elevar su temperatura de -150 °C a 1 500 °C.

$$Q = Ce \,.\, m \,.\, \Delta t$$

$$Q = 0{,}12\ \frac{kcal}{kg\,.\,°C} \times 10 \times 10^3\ kg \times$$

$$\times [1\,500\ °C - (-150\ °C)]$$

$$Q = 1980 \times 10^3\ kcal = 1{,}98\ kcal$$

Pero 1 kcal = $4{,}186 \times 10^3$ J, luego:

$$E_1 = 1{,}98 \times 4{,}186 \times 10^3\ J$$

Rpta.: $E_1 = 8\,288{,}3\ J$

PROBLEMA 8. ¿Qué velocidad debe llevar una bala de plomo para que al chocar contra una pared completamente dura:

a) Alcance su temperatura de fusión 327 °C;
b) Para que todo el plomo se licúe?

La temperatura inicial es 10 °C. El Ce del plomo es 0,031 cal/g . °C y su calor de fusión es 5,37 cal/g.

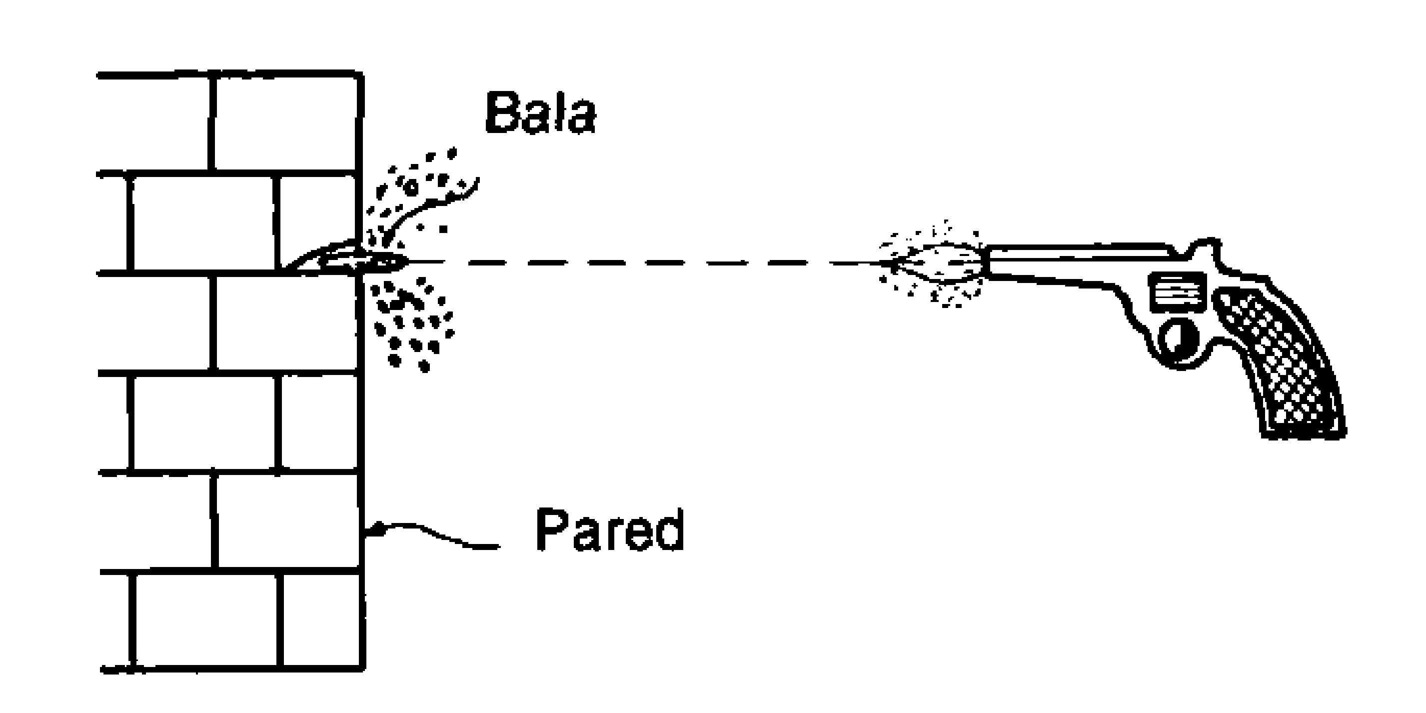
RESOLUCIÓN:

a) Cálculo de la energía cinética de la bala de masa m:

$$E_C = \frac{1}{2} m V_1^2 \qquad (1)$$

Cálculo de la cantidad de calor que debe absorber para que eleve su temperatura de 10 °C a 327 °C:

$$Q = Ce \,.\, m \,.\, \Delta T \qquad (2)$$



Pero como la energía cinética debe transformarse en calor, igualando (1) y (2), se tiene:

$$Ce\,.\,m\,.\,\Delta t = \frac{1}{2} m V_1^2$$

de donde: $V_1^2 = 2\,Ce\,.\Delta t$

$$V_1^2 = 2\times 0{,}31 \frac{cal}{g\,.\,°C}(327\,°C - 10\,°C)$$

$$V_1^2 = 19{,}654\ cal/g$$

Pero 1 cal = 4,186 J, luego:

$$V_1^2 = 19{,}654 \times \frac{4{,}186\ J}{g} = 82{,}27\ \frac{J}{g}$$

$$V_1^2 = 82{,}27\ \frac{N \times m}{10^{-3}\ kg}$$

$$V_1^2 = \frac{82{,}27}{10^{-3}} \times \frac{kg \times \frac{m}{s^2} \times m}{kg}$$

$$V_1^2 = 82\,270\ \frac{m^2}{s^2}$$

Rpta.: $V_1 = 286{,}83\ m/s$

b) Del mismo modo se calcula la velocidad que debe llevar para fundirse totalmente al chocar con la pared, es decir: calor para subir su temperatura a 327 °C + calor par fundirse totalmente.

Energía cinética.

$$Ce\,.\,m\,.\,\Delta t + C_f \times m = \frac{1}{2} m V_2^2$$

Para transformar a joules, los sumandos del primer miembro que salen en calorías, se multiplican por el factor de conversión 4,186 joules/cal.

Sustituyendo y simplificando:

$$4{,}186\ \frac{J}{cal} \times 0{,}031\ \frac{cal}{g\,.\,°C} \times (327\,°C - 10\,°C) + 5{,}37\ \frac{cal}{g} = \frac{1}{2} V_2^2$$

$$41{,}13\ \frac{J}{cal} + 22{,}48\ \frac{J}{g} = \frac{1}{2} V_2^2$$

de donde: $V_2^2 = 127{,}2\ \frac{J}{g} = 127{,}2\ \frac{N \times m}{g}$

$$V_2^2 = 127{,}2 \times \frac{kg \times \frac{m}{s^2} \times m}{g}$$

$$V_2^2 = 127\,200\ \frac{m^2}{s^2}$$

Rpta.: $V_2 = 356{,}65\ m/s$

PROBLEMA 9. En un recipiente cuyo equivalente en agua es de 200 g hay 1 800 cm³ de agua. Desde una altura de 4 m se deja caer, sobre el agua, una masa de 20 kg. Calcular la elevación de la temperatura del agua.

RESOLUCIÓN: Al caer el cuerpo al agua toda su energía potencial ha sido transformada en energía cinética, y ésta a su vez ha sido absorbida por el agua en forma de calor par aumentar su temperatura.

$$W = P\,.\,h = m\,.\,g\,.\,h$$

$$W = 20\ kg \times 9{,}8\ \frac{m}{s^2} \times 4\ m$$

$$W = 784\ J \qquad (1)$$

Pero: $1\ J = 0{,}24\ cal$

luego, el agua absorbe la energía (1) en forma de calorías:

$$Q = 784 \times 0{,}24\ cal$$

$$Q = 188{,}16\ cal \qquad (I)$$

Estas calorías han provocado el aumento de temperatura del agua y del recipiente cuyo valor se calculará así:

$$Ce\,.\,m\,.\,Dt \qquad (II)$$

Igualando (I) y (II):

$$Ce\,.\,m\,.\,\Delta t = 188{,}16$$

http://librosysolucionarios.net

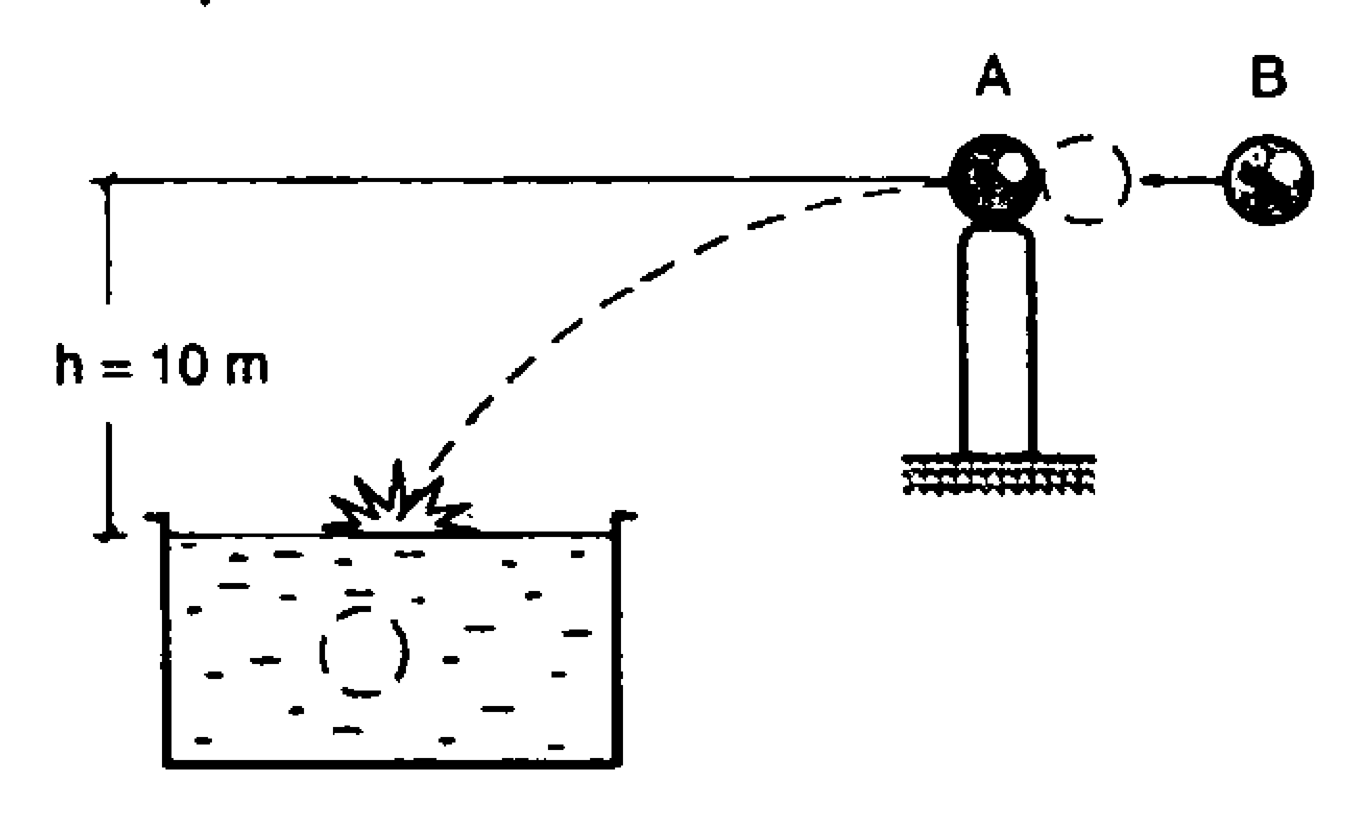
de donde: $\Delta t = \dfrac{188{,}16}{Ce \cdot m}$

$$\therefore \quad \Delta t = \frac{188{,}16}{1.(200 + 1\,800)}$$

Rpta.: $\Delta t = 0{,}094\ °C$

PROBLEMA 10. Un cuerpo "A" de masa 200 g está en la posición que indica la figura, 10 m arriba de un calorímetro que contiene 500 cm³ de agua; el equivalente del calorímetro en agua es 100 cm³. Sobre el cuerpo "A" hace impacto un proyectil de masa también igual a 200 g que llega a una velocidad de 30 m/s. ¿Cuál es el aumento de temperatura del agua cuando "A" cae como se indica en la figura?

RESOLUCIÓN: La energía cinética que lleva el proyectil al hacer el impacto transmite íntegramente al cuerpo en reposo.



Con esta energía absorbida cae 10 m y aumenta su energía. Al llegar a sumergirse en el agua el calor es absorbido por ésta, ocasionando el aumento de temperatura.

Cálculo de la energía cinética de B:

$$E_C = \frac{1}{2} m V^2 = \frac{1}{2}\, 0{,}2\ \text{kg}\ (30\ \text{m/s})^2$$

$$E_C = 90\ \text{J}$$

Energía potencial de A:

$$E_P = P \cdot h = m \cdot g \cdot h$$

$$E_P = 0{,}2\ \text{kg} \times 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 10\ \text{m}$$

$$E_P = 19{,}6\ \text{J} \qquad (\text{II})$$

La energía total del cuerpo A, al caer al agua será:

$$E_T = E_C + E_P = 109{,}6\ \text{J}$$

Cuyo equivalente en calor es:

$$Q = 109{,}6\ \text{J} = 109{,}6\ .\ 0{,}24\ \text{cal}$$

$$Q = 26{,}304\ \text{cal}$$

Calor absorbido por el agua:

$$Q = Ce \cdot m \cdot \Delta t$$

de donde: $\Delta t = \dfrac{Q}{Ce \cdot m}$

$$\Delta t = \frac{26{,}304\ \text{cal}}{1\ \dfrac{\text{cal}}{\text{g}\cdot°\text{C}}\ 500\ \text{g}}$$

Rpta.: $\Delta t = 0{,}053\ °C$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Una barra de cobre de 3 m de longitud eleva su temperatura de 5 °C a 95 °C. Si $\alpha = 17 \cdot 10^{-6}/°C$ ¿cuál es su longitud final?

Rpta.: 3,004 59 m

2. Una esfera de aluminio de 10 cm de diámetro se calienta de 0 °C a 300 °C. ¿Cuál es el aumento de su volumen?

Rpta.: 11,31 cm³

3. Una barra de 99,7 cm de longitud se alarga en 0,3 cm cuando se calienta de

10 °C a 100 °C. ¿Cuál es el coeficiente de dilatación lineal?

Rpta.: $\alpha = 33{,}4 \times 10^{-6}/°C$

4. Los coeficientes de dilatación lineal de dos varillas son:

$$\alpha_1 = 9 \times 10^{-6}/°C$$

$$\alpha_2 = 17 \times 10^{-6}/°C$$

¿Cuáles deben ser sus longitudes para que a cualquier temperatura su diferencia de longitudes sea de 50 cm?

Rpta.: $L_1 = 56{,}25$ m

$L_2 = 106{,}25$ m

5. Se tienen dos varillas de hierro y zinc cuyas longitudes son 61,2 cm y 61,0 cm, respectivamente a 0 °C ¿A qué temperatura las dos varillas tendrán la misma longitud?

$$\alpha_{Fe} = 12 \times 10^{-6}/°C$$

$$\alpha_{Zn} = 63 \times 10^{-6}/°C$$

Rpta.: t = 64,3 °C

6. A 30 °C de temperatura, un listón de madera mide 1,50 m, medido con una regla de cobre que fue graduada a 20 °C. ¿Cuál será la longitud de la regla a 20 °C? El coeficiente de dilatación lineal del cobre es $14 . 10^{-6}\ °C^{-1}$

Rpta.: 1,499 79 m

7. Un tubo de vidrio de un cm de longitud está cerrado por uno de sus extremos. Calcular la altura del mercurio a 0 °C, que hay en el tubo para que el volumen no ocupado por el mercurio permanezca constante cualquiera que sea la temperatura.

$$\alpha_{VIDRIO} = 10 \times 10^{-6}\ °C^{-1}$$

Rpta.: h = 0,5 m

8. Dos calorímetros "A" y "B" contienen en sus interiores dos espirales de platino por las cuales puede pasar una misma cantidad de corriente. El calorímetro "A" contiene 94,40 g de agua; el calorímetro "B" contiene 80,34 g de esencia de trementina. El equivalente en agua de la espiral y de los accesorios es igual para los dos calorímetros y vale 2,21 g. Se hace pasar corriente eléctrica durante cierto tiempo y la temperatura de "A" se eleva en 3,17 °C y la de "B" en 8,36 °C. Calcular el Ce de la esencia de trementina.

Rpta.: 0,427 7 cal/g . °C

9. Calcular la cantidad de calor que se necesita para cambiar 40 kg de hierro de -10 °C a vapor de agua a 100 °C. El Ce del hierro es 0,51 cal/g . °C.

Rpta.: 29 004 kcal

10. ¿Cuántos grados por debajo de su punto de fusión hay que enfriar el fósforo para que por su solidificación brusca y completa suba su temperatura al punto de fusión? Para el fósforo:

$$C_f = 5{,}4 \text{ cal/g}$$
$$Ce = 0{,}20 \text{ cal/g} \times °C$$

Temperatura de fusión = 44 °C.

Rpta.: 27 °C

11. Una caldera de acero pesa 7 840 N y contiene 400 litros de agua. Calcular el calor nacesario para elevar la temperatura del conjunto de 10 °C a 100 °C sabiendo que el rendimiento es del 80%

$$Ce_{ACERO} = 0{,}11 \text{ cal/g .°C}$$

$$Ce_{AGUA} = 1 \text{ cal/g .°C}$$

Rpta.: $Q = 54{,}9 \times 10^3$ kcal ó:

$Q = 230 \times 10^6$ J

12. Una plancha de níquel de 0,4 cm de espesor tiene una diferencia de temperatura de 32 °C entre sus caras opuestas. De una a otra transmiten 200 kcal/h a través de 5 cm

http://librosysolucionarios.net

de superficie. Hallar la con-ductividad térmica del níquel.

Rpta.: $K = 0{,}14\ cal/cm.°C.s$ ó:

$K = 58{,}6\ J/m.°C.s$

13. Una plancha de corcho transmite 1,5 kcal/ día a través de 0,1 cm^2 cuando la gradiente de temperatura vale 0,5 °C/cm. Hallar la cantidad de calor transmitidad por día que tiene lugar en una plancha de corcho de 2 m^2 y 0,5 cm de espesor si una de sus caras está a 0 °C y la otra a 15 °C.

Rpta.: $Q = 1\,800\ kcal/dia$ ó:

$Q = 75{,}42 \times 10^5\ J/dia$

14. Una esfera de plomo de 96,6 N, está suspendida al extremo de una cuerda de 4m. El período de este péndulo es $4\pi\sqrt{10}$. Cuando está en reposo choca con ella un proyectil de 40 g que se incrusta por efecto del choque y desprende 24 cal, al mismo tiempo que el péndulo se desvía 60° de la vertical. Calcular la velocidad con que choca el proyectil.

Rpta.: 122 m/s

15. ¿En cuánto subirá la temperatura de un martillo de 980 N al caer de 1 m de altura sobre una pieza de cobre de 30,2 N.

$$Ce_{COBRE} = 0{,}09\ cal/g.°C$$

$$Ce_{MARTILLO} = 0{,}1\ cal/g.°C$$

No hay pérdidas ($g = 10\ m/s^2$)

Rpta.: 0,024 °C

16. Dos cuerpos de 40 kg y 12 kg demasa chocan frontalmente con ve-locidades de 4 m/s y 6 m/s. El choque es inelástico. Calcular la cantidad de calor que produce.

Rpta.: $Q = 111\ cal = 464{,}65\ J$

17. Una bala de 100 g impacta sobre un bloque de hielo que está a 0 °C. La entrada tiene una velocidad de 600 m/s y la salida 400 m/s. Calcular la cantidad de hielo que se ha fundido.

Rpta.: 30 g

18. Un destilador es de paredes de aluminio de 3 mm de espesor, cuyas paredes tienen las temperaturas de 250 °C y 125 °C. Calcular qué cantidad de agua destilada se puede obtener por hora. Siendo:

$$K_{ALUMINIO} = 200\ kcal/m.°C.h$$

$$C_{f\ AGUA} = 540\ cal/g$$

Superficie de calefacción: 1,5 m^2
Presión del ambiente: 760 mm Hg

Rpta.: 23 184,1 kg

"En la vida hay que sudar para lograr sus objetivos, ese sudor el el motor que te lleva al éxilto, suda la vida, súdala"

J. Goñi Galarza

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 14

TERMODINÁMICA

(INTRODUCCIÓN)

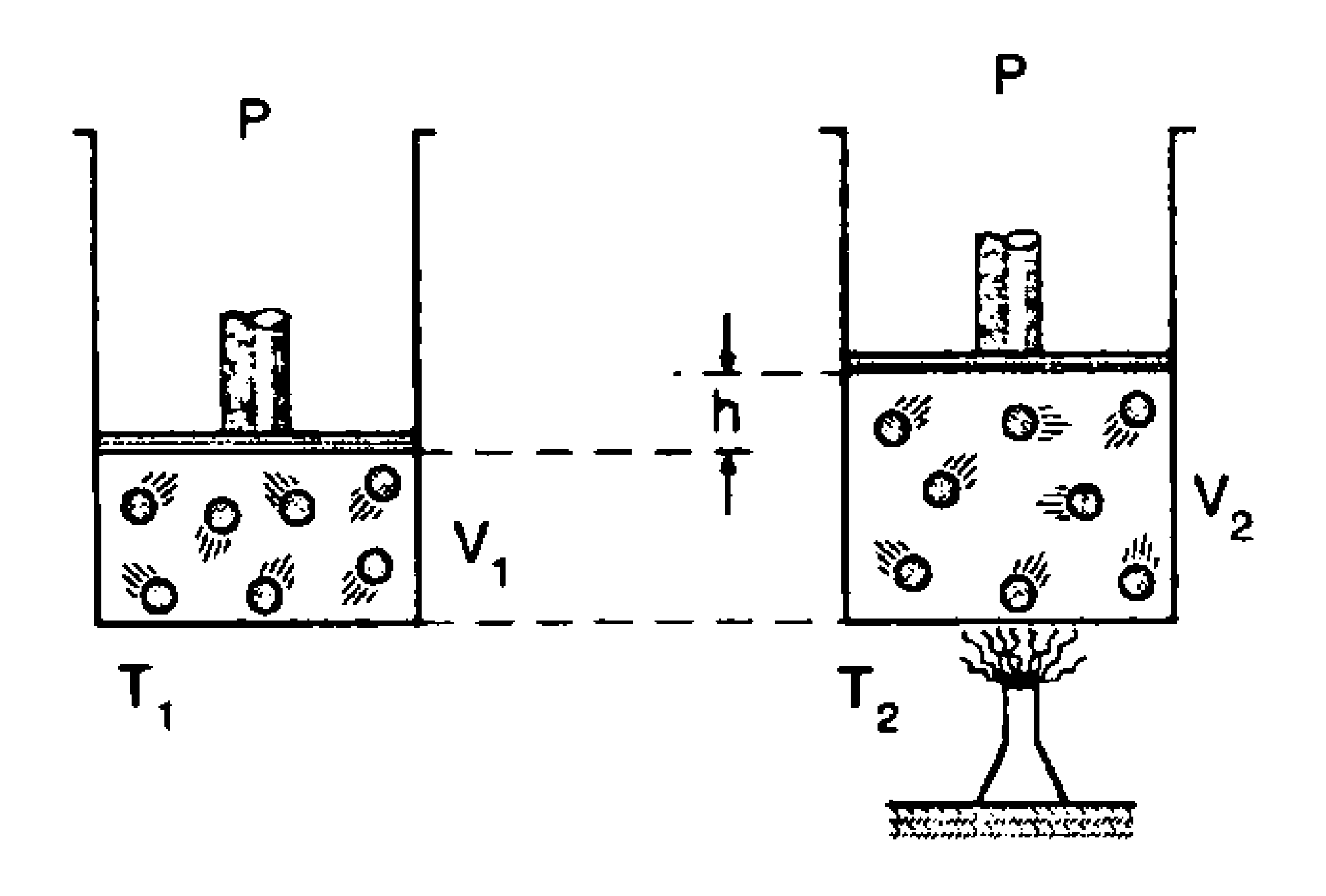
DEFINICIÓN

"Es el estudio de la fuerza mecánica del calor", o también: "Es el estudio de la relación que existe entre la energía mecánica y la energía calorífica".

TRABAJO REALIZADO POR UN GAS

De acuerdo a la ley de Charles: "A presión constante, el volumen de un gas es directamente proporcional a su temperatura absoluta".

En la figura **1**, mostrada a continuación, la posición del émbolo de sección A, con una temperatura T_1 y un volumen V_1 es la que se grafica; pero cuando el gas se calienta a temperatura T_2 su volumen aumenta a V_2, desplazándose el émbolo una altura h, según la figura **2**.



El gas ha realizado un trabajo al haber desplazado el émbolo la altura "h", el peso del émbolo que ejerce presión sobre el gas es invariable, llamando "W" al trabajo realizado:

$$W = F \,.\, h$$

pero: $F = P \,.\, A$

luego: $W = P \,.\, A \,.\, h$

donde: P = Presión

pero: $A \,.\, h = V_2 - V_1 = \Delta V$

Esto quiere decir que ΔV es la variación del volumen del gas.

$$\therefore \quad W = P \,.\, \Delta V$$

Como la presión se mide en atmósferas y el volumen en litros, el trabajo realizado por un gas que se expande se mide en:

Unidad de Trabajo = atm . L

Esta es, pues una nueva unidad para medir el trabajo provocado por la expansión de un gas a presión contante.

UNIDADES SI.

Las unidades para medir este trabajo son el JOULE "J" y la CALORÍA "cal".

Recordando que:

$$1 \text{ atm} = 101\,300 \text{ Pa}$$

$$1 \text{ L} = 10^{-3} \text{ m}^3$$

http://librosysolucionarios.net

Se tiene:

$$1 \text{ atm} . 1 \text{ L} = 101\,300 \text{ Pa} . 10^{-3} \text{ m}^3$$

$$1 \text{ atm} . 1 \text{ L} = 101{,}3 \frac{\text{N}}{\text{m}^2} \cdot \text{m}^3$$

$$\boxed{1 \text{ atm} . \text{L} = 101{,}3 \text{ J}} \qquad (a)$$

$$1 \text{ atm} . \text{L} = 101{,}3 \times 0{,}24 \text{ cal}$$

$$\boxed{1 \text{ atm} . \text{L} = 24{,}31 \text{ cal}} \qquad (b)$$

Ejemplo : Un gas soporta una presión constante de 3 atm y se calienta de 27 °C a 67 °C. Si su volumen inicial es de 5 litros, calcular el trabajo realizado en joules.

RESOLUCIÓN : $P = 3$ atm

$W = ?$ $\qquad t_1 = 27$ °C

$V_1 = 5$ L $\qquad t_2 = 67$ °C

Sabiendo que: $W = P . DV$ (1)

Cálculo del volumen final:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

de donde: $$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

Sustituyendo datos:

$$V_2 = 5 \text{ L} \frac{67° + 273 °C}{27° + 273 °C} = 5{,}67 \text{ L}$$

Luego: $\Delta V = V_2 - V_1 = 5{,}67 \text{ L} - 5 \text{ L}$

$$\Delta V = 0{,}67 \text{ L}$$

Sustituyendo valores en (1) :

$$W = 3 \text{ atm} . 0{,}67 \text{ L} = 2{,}01 \text{ atm} . \text{L}$$

luego: $W = 2{,}01 . 101{,}3$ J

Rpta.: $W = 203{,}6$ J

Ejemplo : A la presión constante de 900 mm Hg, 20 litros de gas se enfría de 127 °C a 0 °C. Calcular:

a) Cuántos joules ha perdido.

b) Cuántas calorías.

RESOLUCIÓN : $P = 900$ mm Hg

$t_2 = 0$ °C $\qquad t_1 = 127$ °C

$V_1 = 20$ L

Sabiendo que: $W = P . DV$ (I)

Cálculo del volumen final:

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

de donde: $$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$V_2 = 20 \text{ L} \frac{0 °C + 273 °C}{127 °C + 273 °C}$$

$$V_2 = 13{,}65 \text{ L}$$

Luego: $\Delta V = V_1 - V_2 = 20 \text{ L} - 13{,}65 \text{ L}$

$$\Delta V = 6{,}35 \text{ L}$$

Sustituyendo valores en (I) :

$$W = 900 \text{ mm Hg} . 6{,}35 \text{ L}$$

$$W = \frac{900 \text{ mm Hg}}{760 \text{ mm Hg/atm}} \times 6{,}35 \text{ L}$$

$$W = 7{,}52 \text{ atm} . \text{L} \qquad (a)$$

Luego, por haberse enfriado el gas pierde:

a) $W = 7{,}52 \times 101{,}3$ J

$W = 761{,}78$ J

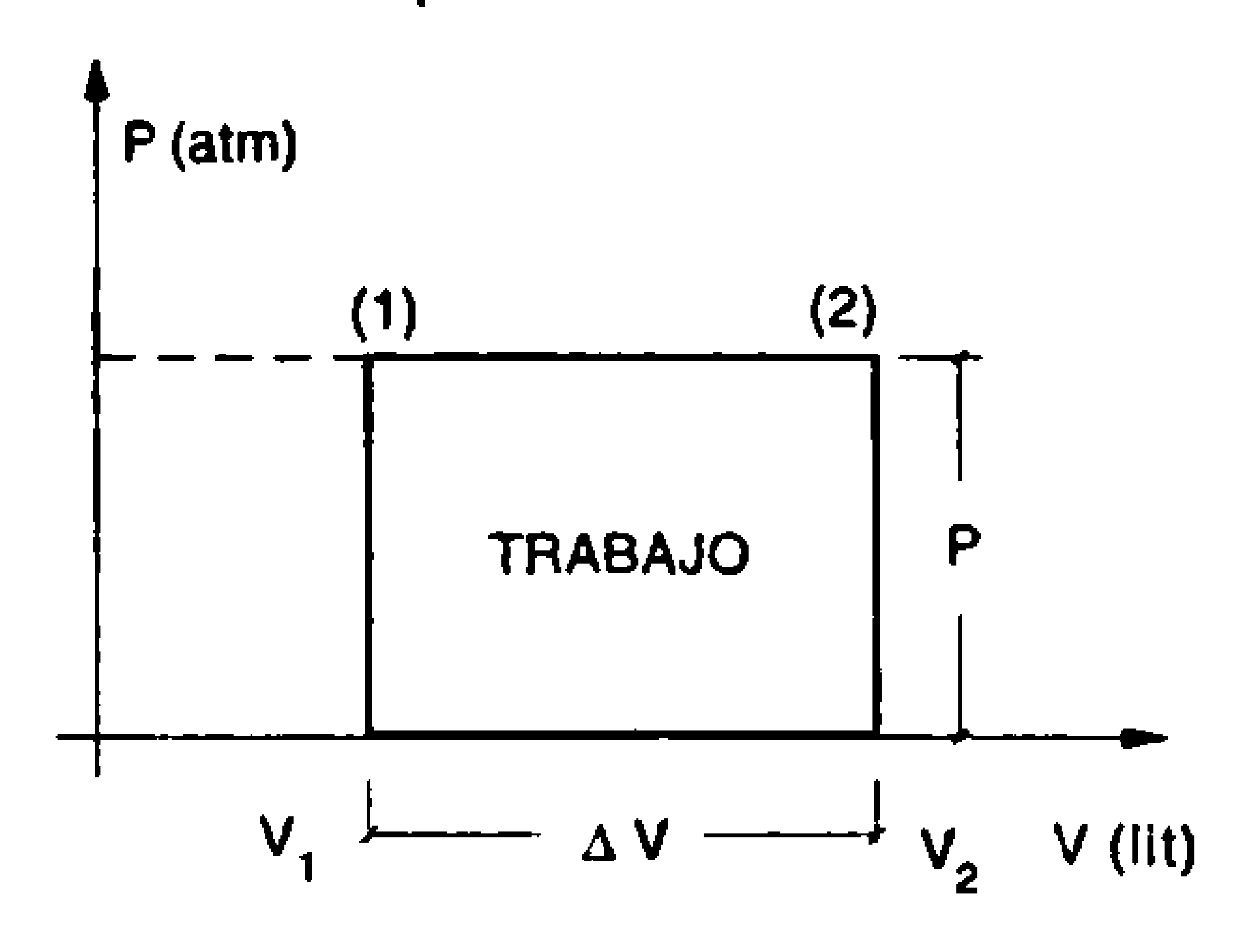
b) $W = 761{,}78 \times 0{,}24$ cal

$W = 182{,}83$ cal

http://librosysolucionarios.net

REPRESENTACIÓN GRÁFICA DEL TRABAJO DE UN GAS

El trabajo se representa por un área en un sistema de ejes coordenados, presión - volumen, cuando varía la temperatura, manteniéndose la presión constante.



El trabajo realizado está representado por la parte sombreada

$$W = P . DV$$

CALOR ABSORBIDO POR UN GAS

Es la cantidad de calor que absorbe una masa gaseosa al variar su temperatura, manteniendo su presión o su volumen constante.

$$Q = Ce . m . \Delta t$$

CALOR ESPECÍFICO DE UN GAS

Es la cantidad de calor que necesita 1 g de gas para subir su temperatura en 1 °C.

$$Ce = \frac{Q}{m . \Delta t}$$

NOTA : El calor específico de un gas que se calienta a presión constante, es mayor que el calor específico de un gas que se calienta a volumen constante.
La razón: Cuando se calienta a presión constante el calor absorbido sirve para aumentar la temperatura del gas (energía interna) y para aumentar su volumen (trabajo realizado), mientras que cuando se calienta manteniendo el volumen constante, el calor absorbido sirve sólo para aumentar la temperatura del gas (energía interna).

$$Ce_{P_k} > Ce_{V_k}$$

Ejemplo : Un cilindro con un émbolo contiene 580 g de aire que ocupa un volumen de 500 L a 1 atm y 17 °C. Se calienta a 37 °C. Calcular:

a) El calor absorbido cuando el volumen es constante.

b) El calor absorbido cuando la presión es constante.

c) El trabajo realizado por el gas al aumentar su volumen y compararlo con la diferencia de calor de las preguntas a y b.

$$Ce_{V_K} = 0{,}168 \frac{cal}{g . °C}$$

$$Ce_{P_K} = 0{,}24 \frac{cal}{g . °C}$$

RESOLUCIÓN :

a) $$Q_{V_K} = Ce_{V_K} . m . \Delta t$$

$$Q_{V_K} = 0{,}168 \frac{cal}{g . °C} \times 580 \text{ g} \times 20 \text{ °C}$$

$$Q_{V_K} = 1\,948{,}8 \text{ cal} \qquad (\text{I})$$

b) $$Q_{P_K} = Ce_{P_K} . m . \Delta t$$

$$Q_{P_K} = 0{,}24 \frac{cal}{g . °C} \times 580 \text{ g} \times 20 \text{ °C}$$

$$Q_{P_K} = 2\,784 \text{ cal} \qquad (\text{II})$$

c) $$W = P . \Delta V \qquad (\alpha)$$

http://librosysolucionarios.net

Sería necesario calcular ΔV, para lo cual se calcula el volumen del gas a 37 °C.

$$\frac{V_1}{T_1} = \frac{V_2}{T_2}$$

de donde: $$V_2 = V_1 \frac{T_2}{T_1}$$

$$V_2 = 500\,L \times \frac{(37 + 273)\,K}{(10 + 273)\,K}$$

$$V_2 = 534{,}5\,L$$

$$\therefore \quad \Delta V = V_1 - V_2 = 34{,}5\,L$$

Sustituyendo valores en (α):

$$W = 1\,atm \,.\, 34{,}5\,L$$

$$W = 34{,}5\,atm \,.\, L$$

Transformando en calorías:

$$W = 34{,}5 \,.\, 24{,}31\,cal$$

$$W = 838{,}7\,cal \qquad (A)$$

La diferencia entre el calor absorbido para variar la temperatura con presión constante y con volumen constante es:

$$\Delta Q = Q_{P_K} - Q_{V_K} = 2\,784\,cal - 1\,948{,}8\,cal$$

$$\Delta Q = Q_{P_K} - Q_{V_K} = 835{,}2\,cal \qquad (B)$$

Comparando (A) y (B) son sensiblemente iguales, luego:

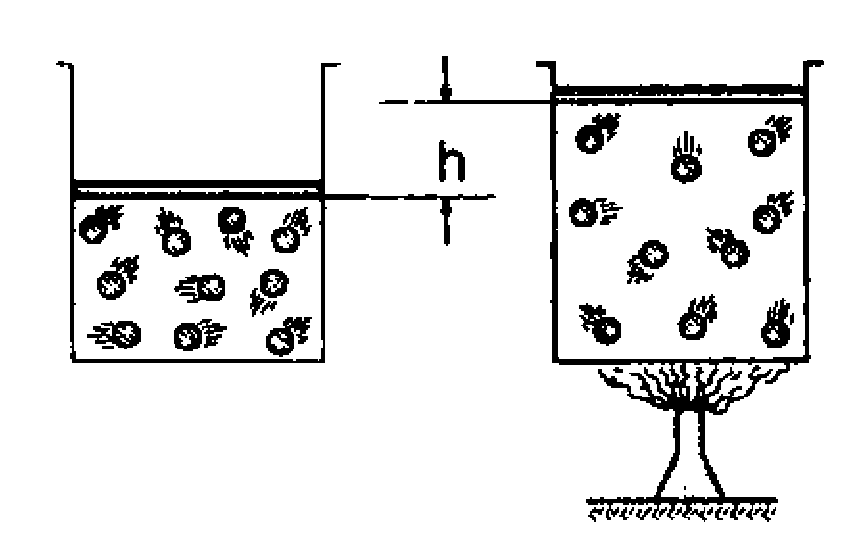
$$Q_{P_K} - Q_{V_K} = W_i$$

de donde: $$Q_{P_K} = W_i + Q_{V_K}$$

Lo que quiere decir que: El calor absorbido a presión constante sirve para realizar un trabajo "W" y para calentar el gas a volumen constante "Q_{V_K}", que constituye un aumento de su energía interna.

PRIMERA LEY DE LA TERMODINÁMICA

"En toda transformación, entre calor y trabajo, la cantidad de calor entregado a un sistema es igual al trabajo realizado, mas el aumento de su energía interna".



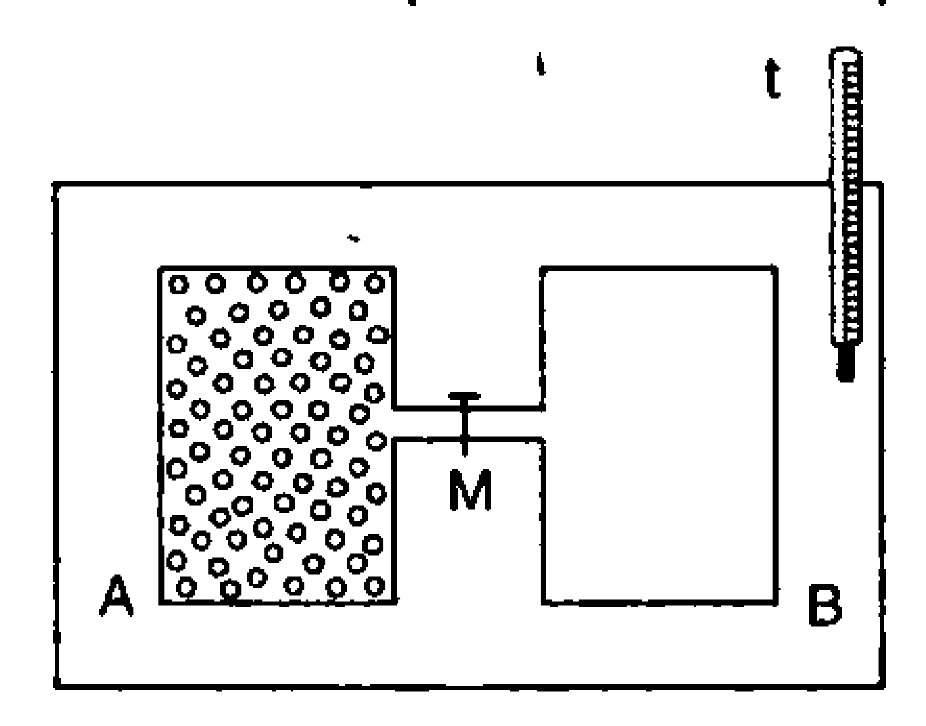
$$\boxed{Q = W + \Delta E}$$

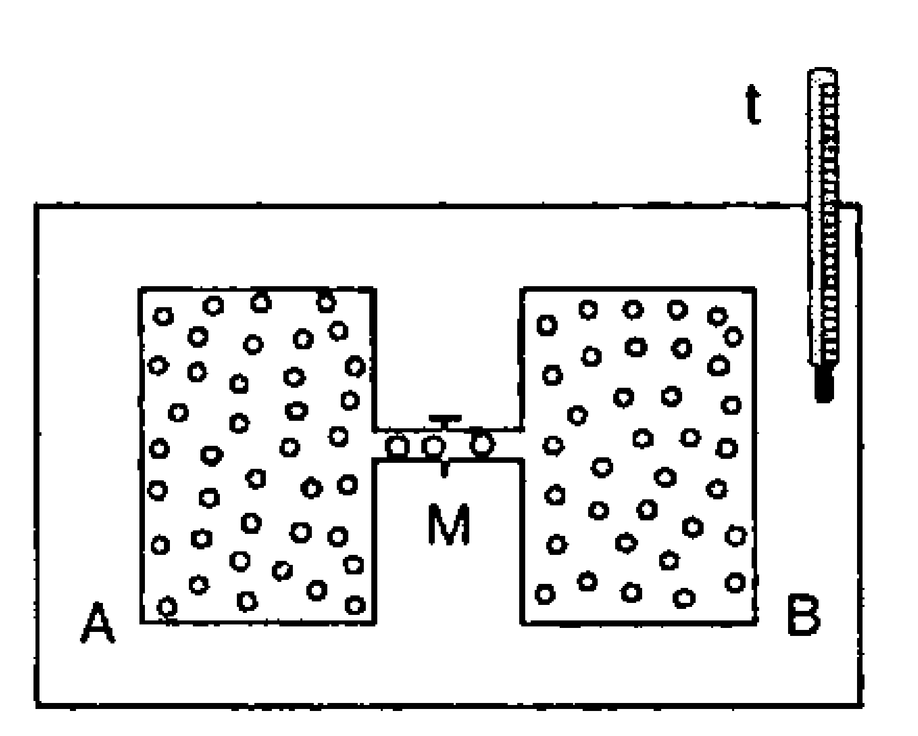
Q : Calor entregado
W : Trabajo realizado
ΔE : Aumento de la energía interna por aumento de temperatura

A presión constante el calor entregado ha servido para realizar el trabajo "W" al subir el émbolo una altura "h", y en aumentar su temperatura o energía interna "Δ E".

OTRO EXPERIMENTO DE JOULE

Con este experimento demuestra que la acción interna sólo depende de la temperatura.





Dos cilindros, conectados entre sí por un tubo, están dentro de un calorímetro al cual se le ha instalado un termómetro.

El primer cilindro se ha llenado con gas, y el en segundo se ha realizado un cuidadoso vacío.

Se abre la llave M, pasa el gas de A a B y se llenan los dos cilindros, el volumen aumenta, la presión disminuye pero la temperatura no varía, ésto se observa en el termómetro instalado.

Análisis razonado: Recordando que:

$$Q = W + \Delta E$$

1. Al pasar el gas de A a B no realiza ningún trabajo (W = 0) porque nada se opone a su expansión.

2. Como la temperatura no ha variado quiere decir que no ha habido ingreso ni salida de calor, luego Q = 0.
3. Como consecuencia la energía interna no ha variado, $\Delta E = 0$.

De las tres variables de un gas P, V, T sólo la temperatura se mantuvo constante, este hecho indujo a Joule a sostener que "la energía interna de un gas sólo depende de la temperatura".

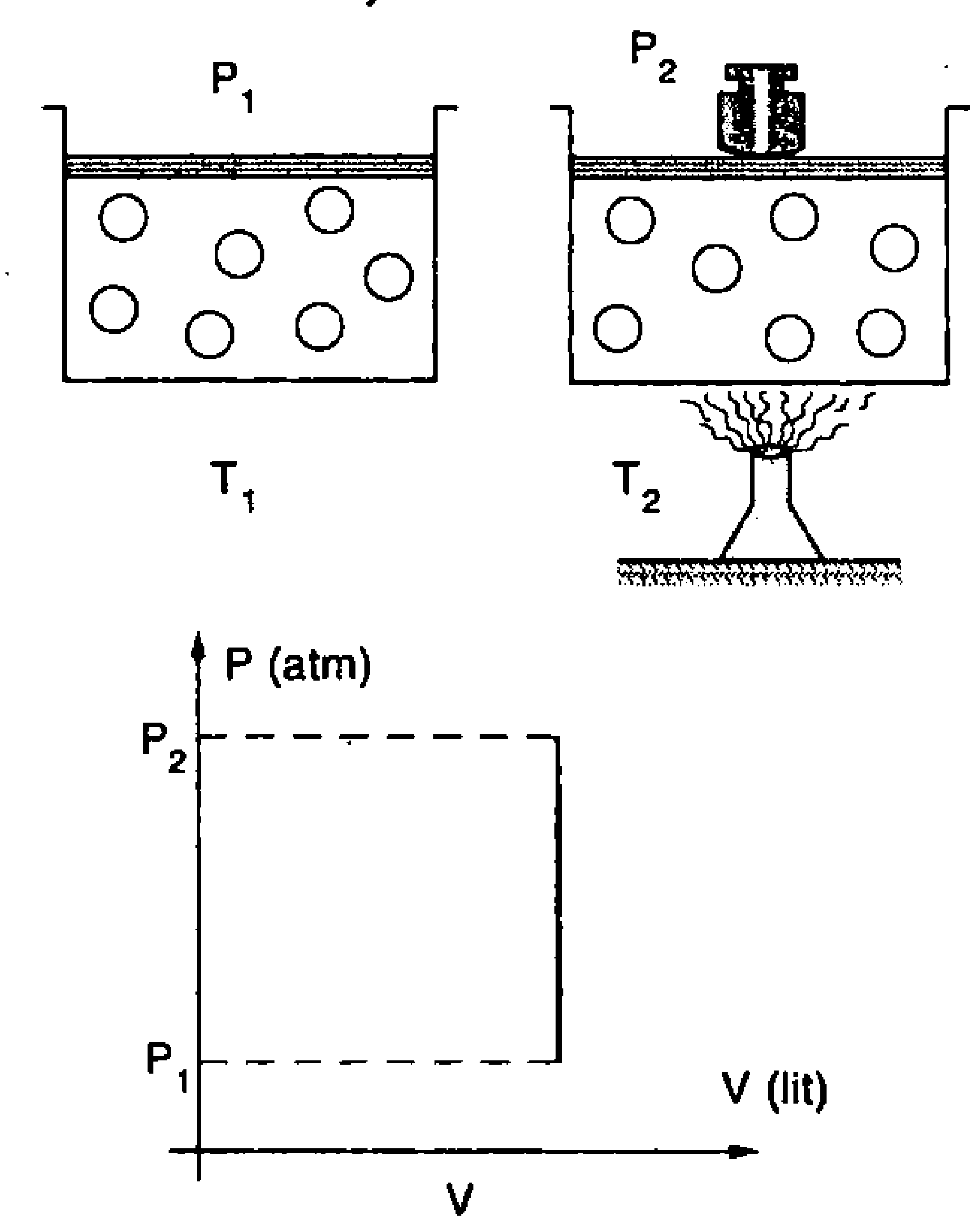
FORMAS Y DERIVACIONES DE TRANSFORMACIÓN DEL CALOR EN EL TRABAJO

1. Transformación isométrica de un gas (V = cte.)

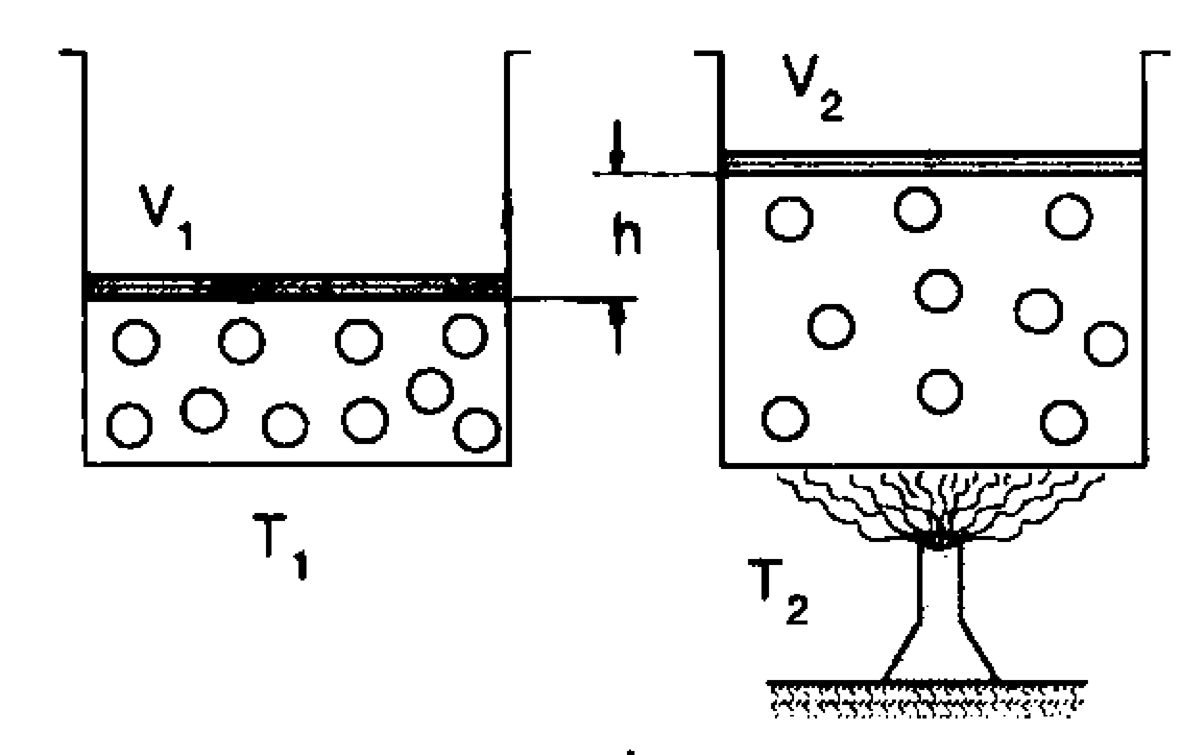
Cuando el volumen permanece constante no hay trabajo (W = 0), sólo hay aumento de energía interna dentro del gas ($Q = \Delta E$).

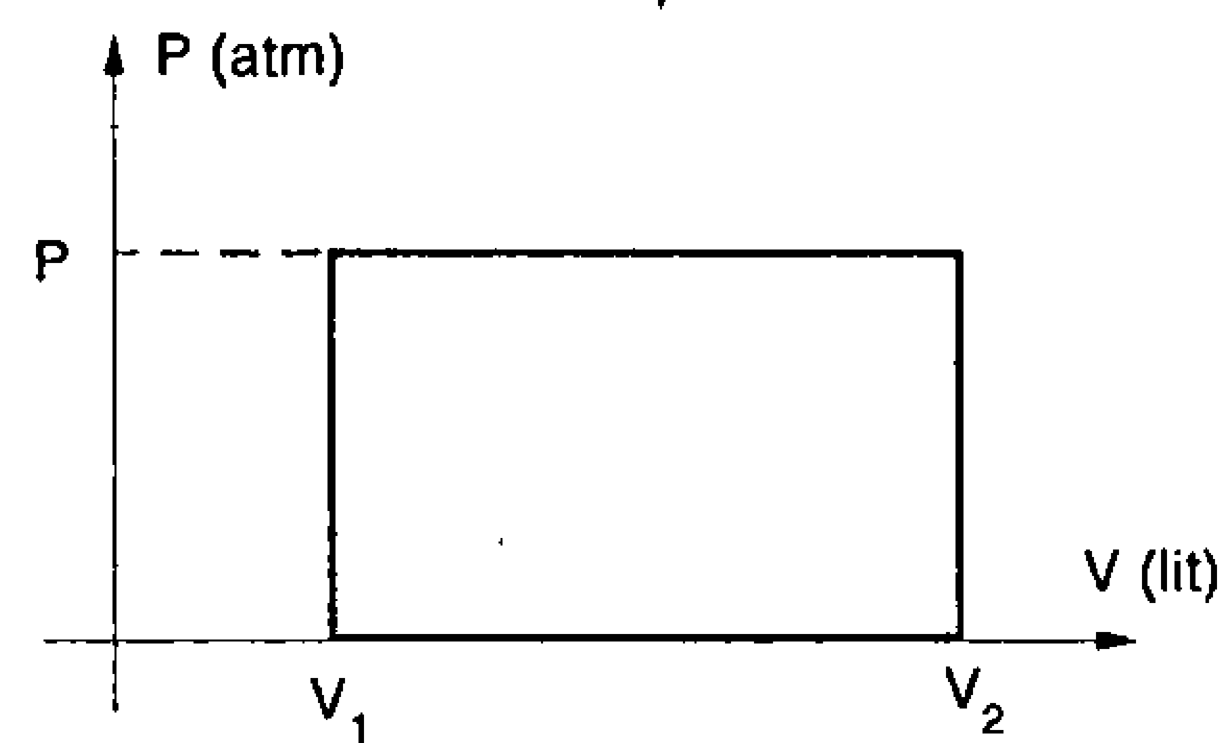
En el sistema cartesiano, su representación es una recta cuya área es cero.

El calor entregado sólo ha aumentado la energía interna del gas, mas no se ha transformado en trabajo.



2. Transformación isobárica de un gas (P = cte.)



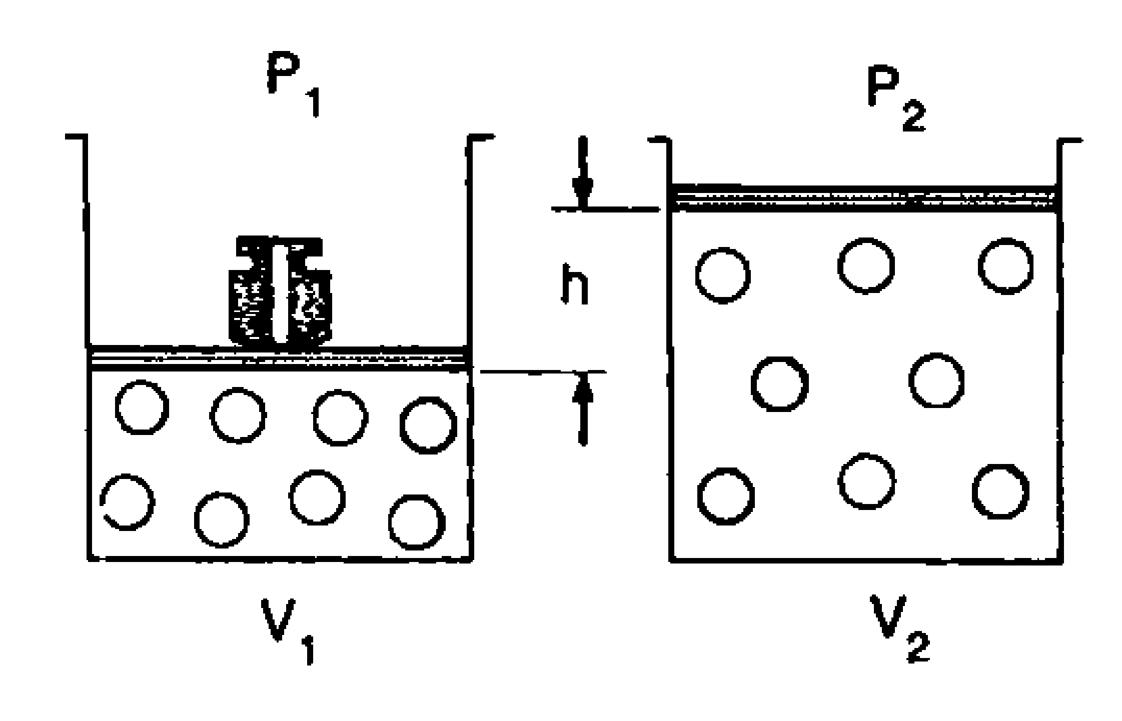


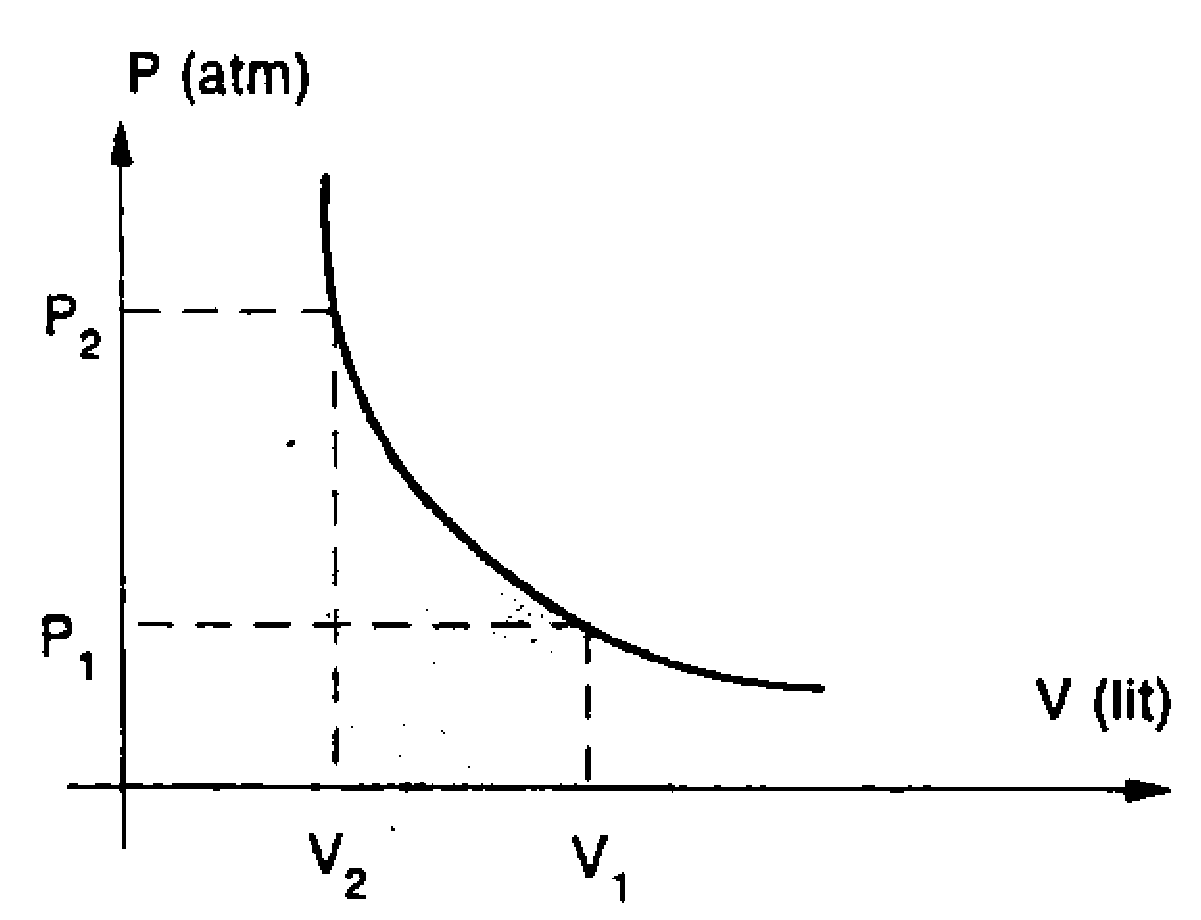
Cuando la presión no varía, el calor entregado "Q" realiza el trabajo "W" de aumentar el volumen del gas y aumentar también la temperatura del gas, es decir aumentar la energía interna, "Δ E".
($Q = W + \Delta E$)

http://librosysolucionarios.net

3. Transformación isotérmica de un gas (T = cte.)

Cuando la temperatura no varía, para variar el volumen, es decir para realizar un trabajo "W", debe variar la presión, pero como no varía la temperatura la variación de la energía interna es 0 ($\Delta E = 0$). Luego: $Q = W$





Conclusión: $Q = W$

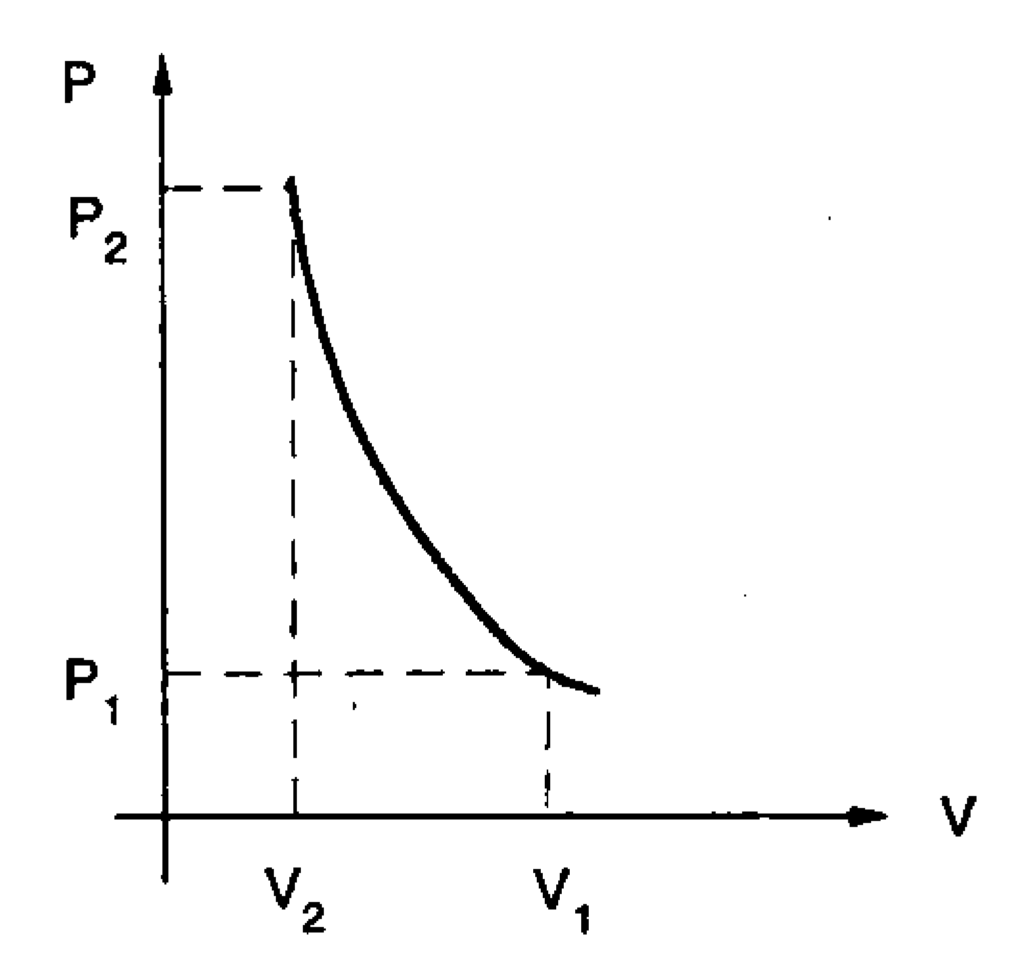
El trabajo "W" que es el área achurada se calcula así:

$$W = 2{,}3 . n . R . T . \log \frac{V_2}{V_1}$$

n = # de moles contenidos de gas.
R = Constante universal de los gases.
V_2 = Volumen en el estado final.
V_1 = Volumen en el estado inicial.

4. Transformación adiabática

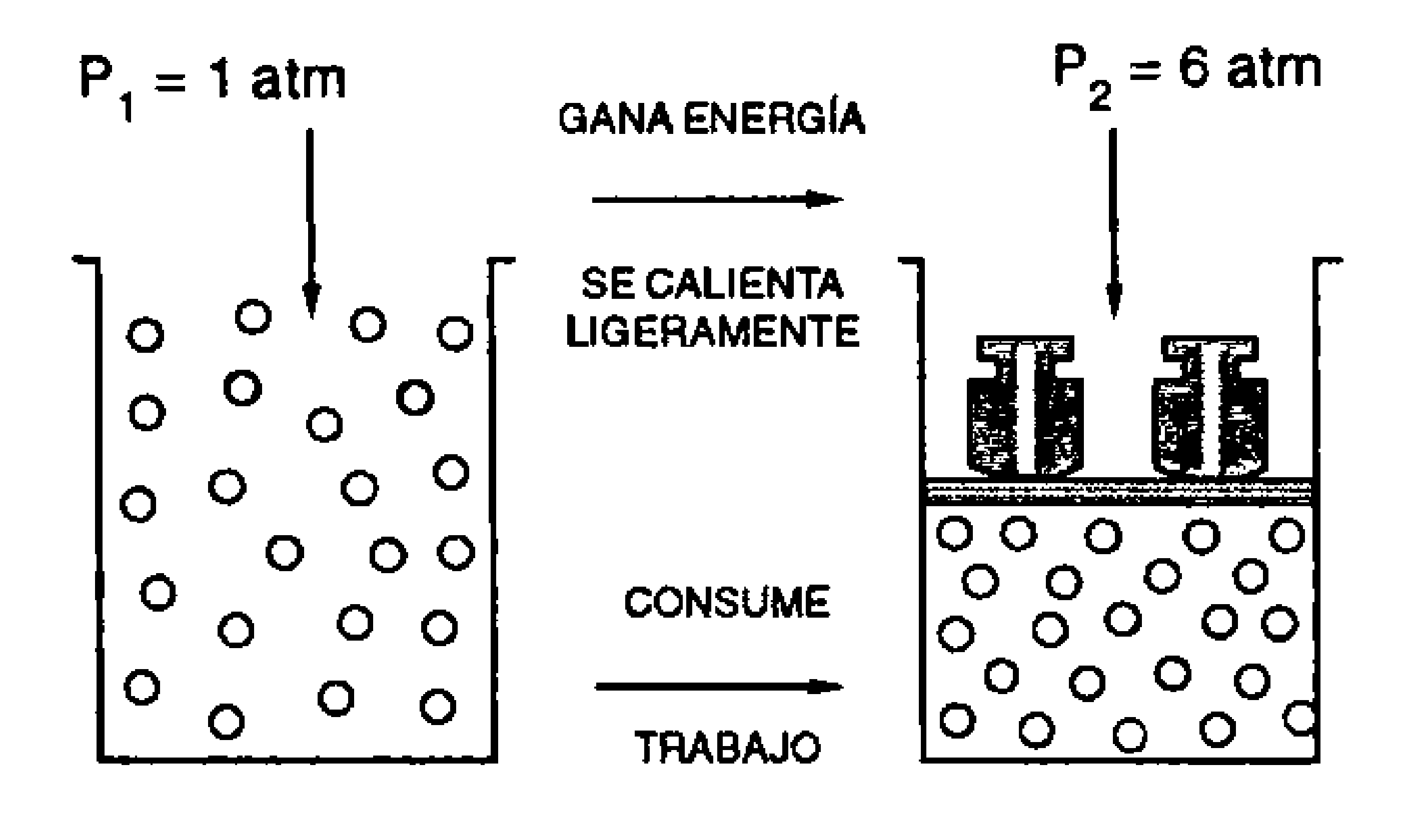
(Adiabático se dice del cuerpo impenetrable al calor).
Cuando el gas no gana ni pierde calor ($Q = 0$) sin embargo se realiza un trabajo, eso se debe a la variación de su presión, sobre la base de la variación de su energía interna.



Conclusión: $W + \Delta E = 0$

$$\therefore \quad \boxed{W = -\Delta E}$$

Sin embargo como $\Delta E \neq 0$ significa que ha habido variación de temperatura, a pesar que no se le ha dado ni quitado calor, quiere decir que el trabajo que realiza lo hace a expensas de su propia energía.



Esto es: si pierde energía interna produce trabajo, si gana energía interna consume trabajo.

La Presión, Temperatura y Volumen en un proceso adiabático están relacionados así:

$$P_1 V_1{}^{\gamma} = P_2 V_2{}^{\gamma}$$

$$T_1 V_1{}^{\gamma-1} = T_2 V_2{}^{\gamma-1}$$

Donde: $\gamma = \dfrac{Ce_{P_K}}{Ce_{V_K}}$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la variación de la energía interna de 60 g de H_2, cuando se calienta de 50 °C a 100 °C.

$$Ce_{V_K} H_2 = 2,4 \frac{cal}{g\,.°C}$$

RESOLUCIÓN: $m = 60\ g$

$\Delta E = ?$ $\Delta t = 50\ °C$

El cálculo se hace independientemente, si el proceso ha sido isométrico o isobárico:

$$\Delta E = Ce_{V_K} . m . \Delta t$$

$$\Delta E = 2,4 \frac{cal}{g\,.°C} \times 60\ g \times 50\ °C$$

$$\Delta E = 7\ 200\ cal$$

PROBLEMA 2. 300 g de O_2 a 27 °C y 6 atm, se calienta isométricamente hasta 77 °C. Calcular:

a) El calor entregado.
b) Trabajo realizado.
c) Aumento de la presión del agua.

El Ce_{V_K} del O_2 es 0,157 cal/g .°C

RESOLUCIÓN: $m = 300\ g$

$t_1 = 27\ °C$ $P_1 = 6\ atm$

$t_2 = 77\ °C$

a) $$Q = Ce_{V_K} . m . \Delta t$$

$$Q = 0,157 \frac{cal}{g\,.°C} \times 300\ g \times 50\ °C$$

$$Q = 2\ 335\ cal$$

b) El trabajo realizado es cero: W = 0 porque el proceso es isométrico. No hay desplazamiento del volumen del gas, consecuentemente no hay trabajo.

c) $$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2}$$

$$P_2 = P_1 \frac{T_2}{T_1} = 6\ atm\ \frac{350\ K}{300\ K}$$

$$P_2 = 7\ atm$$

Luego, la variación de la presión será:

$$\Delta P = P_2 - P_1 = 7\ atm - 6\ atm$$

$$\Delta P = 1\ atm$$

PROBLEMA 3. Un cilindro con un émbolo contiene 200 g de N_2 que ocupa un volumen de 20 L a 10 atm. Sin variar la temperatura (iso-térmicamente), se le expande hasta un volumen igual al triple del anterior. Si log 3 = 0,477 12, calcular:

a) La temperatura.
b) La presión final.
c) El trabajo realizado.
d) La variación de la energía.
e) El calor que ha intervenido.

RESOLUCIÓN:

a) Basado en la ecuación universal de los gases.

$$PV = nRT$$

de donde: $$T = \frac{PV}{nR}$$

$$T = \frac{10\ atm \times 20\ L}{\frac{200\ g}{28\ g/mol} \times 0,82 \frac{atm \times L}{mol \times K}}$$

$$T = 341,6\ K \quad ó:$$

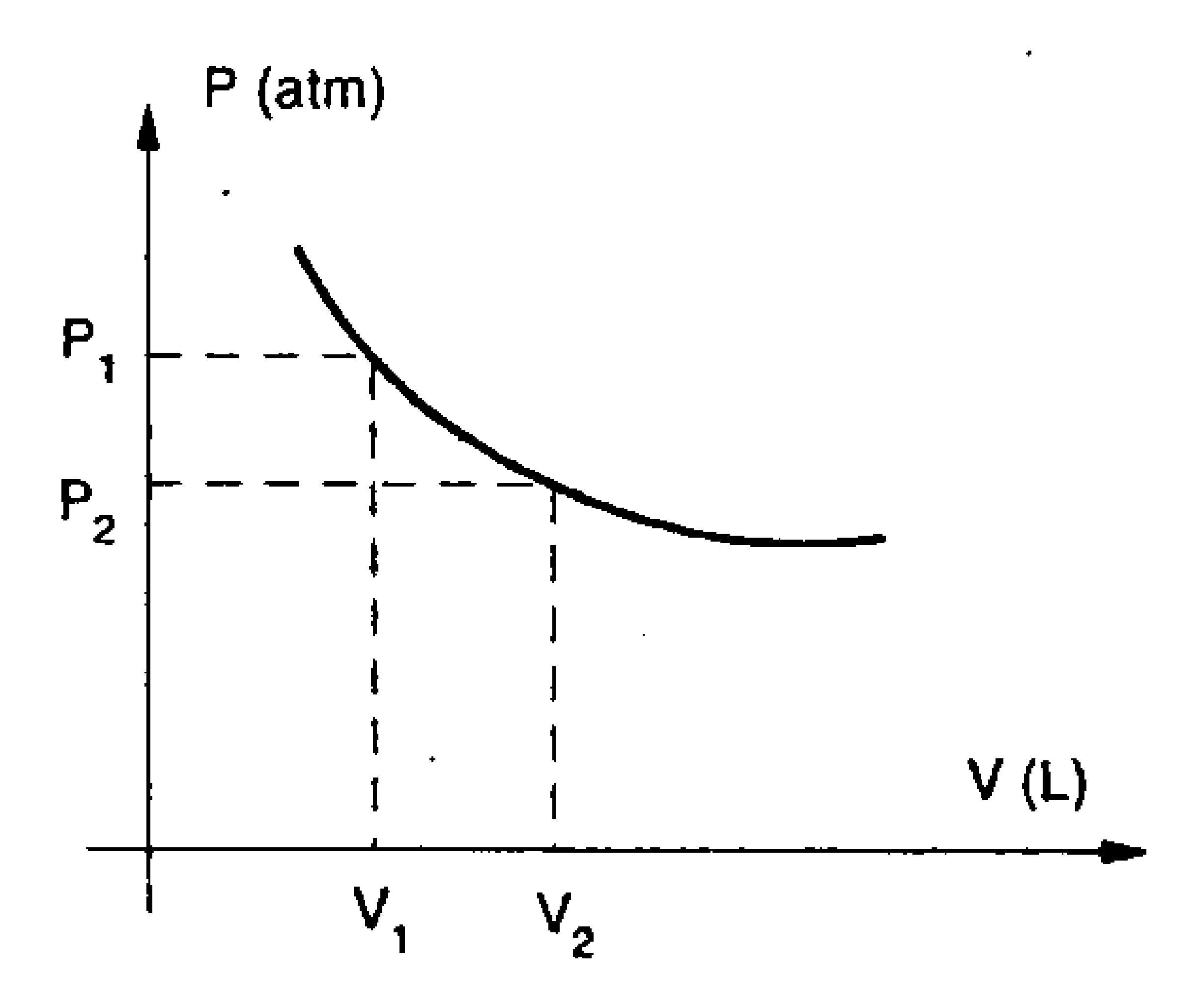
$$t = 341,6 - 273 = 68,6\ °C$$

b) $$P_1 V_1 = P_2 V_2$$

de donde: $$P_2 = P_1 \frac{V_1}{V_2} = 10\ atm\ \frac{20\ L}{3 \times 20\ L}$$

$$P_2 = 3,33\ atm$$

http://librosysolucionarios.net



c) El trabajo es un proceso isotérmico está dado por el área accurada de la figura, cuyo valor aproximadamente sería

$$W = \frac{P_1 - P_2}{2}(V_2 - V_1) + P_2(V_2 - V_1)$$

$$W = \frac{P_1 + P_2}{2}(V_2 - V_1)$$

$$W = \frac{10\text{ atm} + 3{,}33\text{ atm}}{2}(60\text{ L} - 20\text{ L})$$

$$W = 266{,}6\text{ atm} \times \text{L}$$

$$W = 266{,}6 \times 101{,}3\text{ J}$$

$$W = 27\,006{,}58\text{ J}$$

ó: $$Q = 6\,451{,}64\text{ cal}$$

OTRO MÉTODO : Con la fórmula:

$$W = 2{,}3\,n.R.T.\log\frac{V_2}{V_1}$$

$$W = 2{,}3\,\frac{200\text{ g}}{28\text{ g/mol}} \times 0{,}082\,\frac{\text{atm . L}}{\text{mol . K}} \times$$

$$\times\,341{,}46\text{ K} \times \log\frac{60\text{ L}}{20\text{ L}}$$

$$W = 2{,}3 \times \frac{16{,}4}{28} \times 341{,}46 \times \log 3$$

$$W = 459{,}99\,.\,0{,}477\,12\text{ atm . L}$$

$$W = 219{,}47\text{ atm} \times \text{L}$$

$$W = 219{,}47 \times 101{,}3\text{ J}$$

$$W = 22\,232{,}61\text{ J}$$

ó: $$W = 5\,311{,}18\text{ cal}$$

Se notará la diferencia de las respuestas. La primera una forma muy aproximada, la segunda más precisa. La deducción de la fórmula usada en el 2° método no se hace en esta obra por ser sólo una física introductoria y el estudiante desconoce matemáticas superiores que conducen a su deducción.

PROBLEMA 4. Un cilindro con un émbolo que pesa 196 N tiene 30 g de O_2, se deja resbalar el émbolo unos 8 cm con lo cual se comprime el gas adiabáticamente (no gana ni pierde calor). ¿Cuánto aumenta la temperatura del oxígeno?

$$Ce_{V_K}\,O_2 = 0{,}157\text{ cal/g .°C}$$

RESOLUCIÓN : $m = 30\text{ g}$

$$h = 8\text{ cm}$$

$$\text{Peso del émbolo} = 196\text{ N}$$

$$Ce_{V_K}\,O_2 = 0{,}157\text{ cal/g .°C}$$

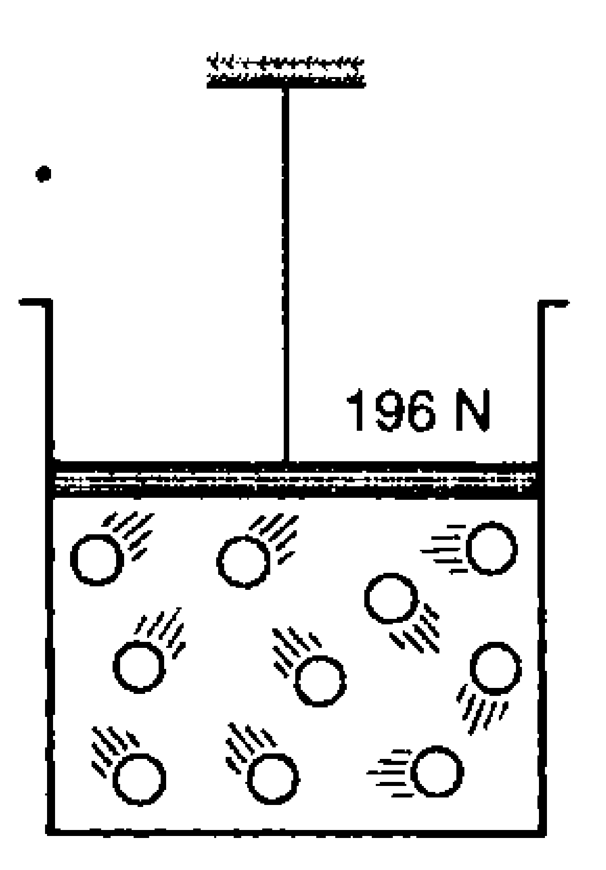
Como el proceso esa adiabático, no hay desplazamiento de calor, es decir:

$$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad W + \Delta E = 0$$

$$\therefore \quad W = -\Delta E \qquad \text{(A)}$$

Como con el émbolo que resbala el volumen disminuye, se realiza el trabajo W:

$$W = -F\,.\,h \qquad (1)$$



Además: $\Delta E = Ce_{V_K}\,.\,m\,.\,\Delta t \qquad (2)$

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo (1) y (2) en (A):

$$-F\,.\,h = -Ce_{V_K}\,.\,m\,.\,\Delta t$$

de donde: $$\Delta t = \frac{F\,.\,h}{Ce_{V_K}\,.\,m}$$

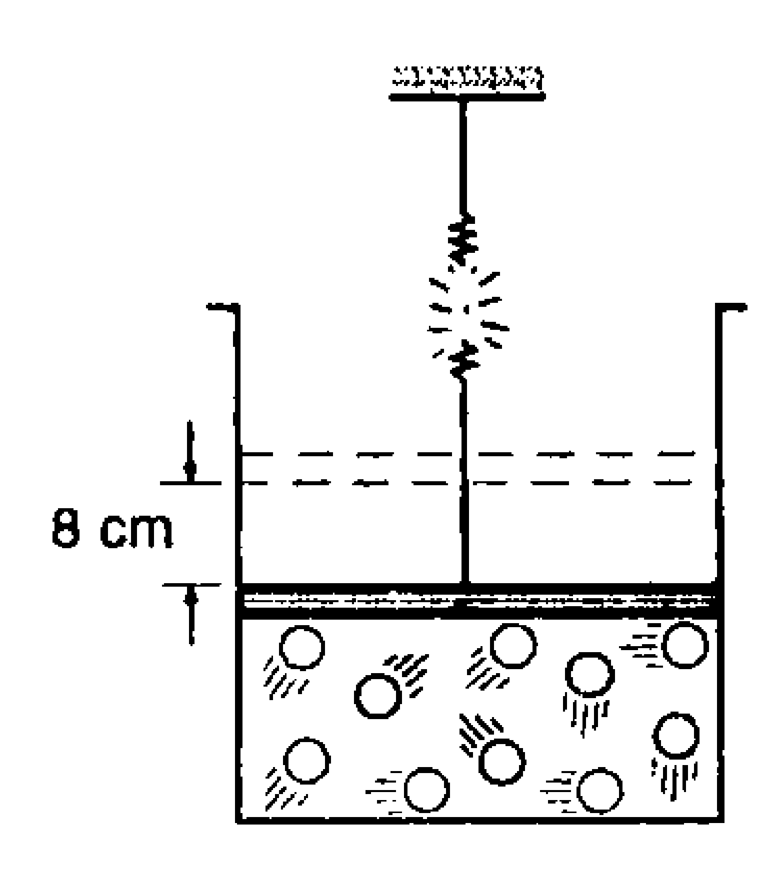
$$\Delta t = \frac{196\ N \times 0{,}08\ m}{0{,}157\ \frac{cal}{g\,.\,°C} \times 30\ g}$$

$$\Delta t = 2{,}87\ \frac{N\,.\,m}{cal} \times °C$$

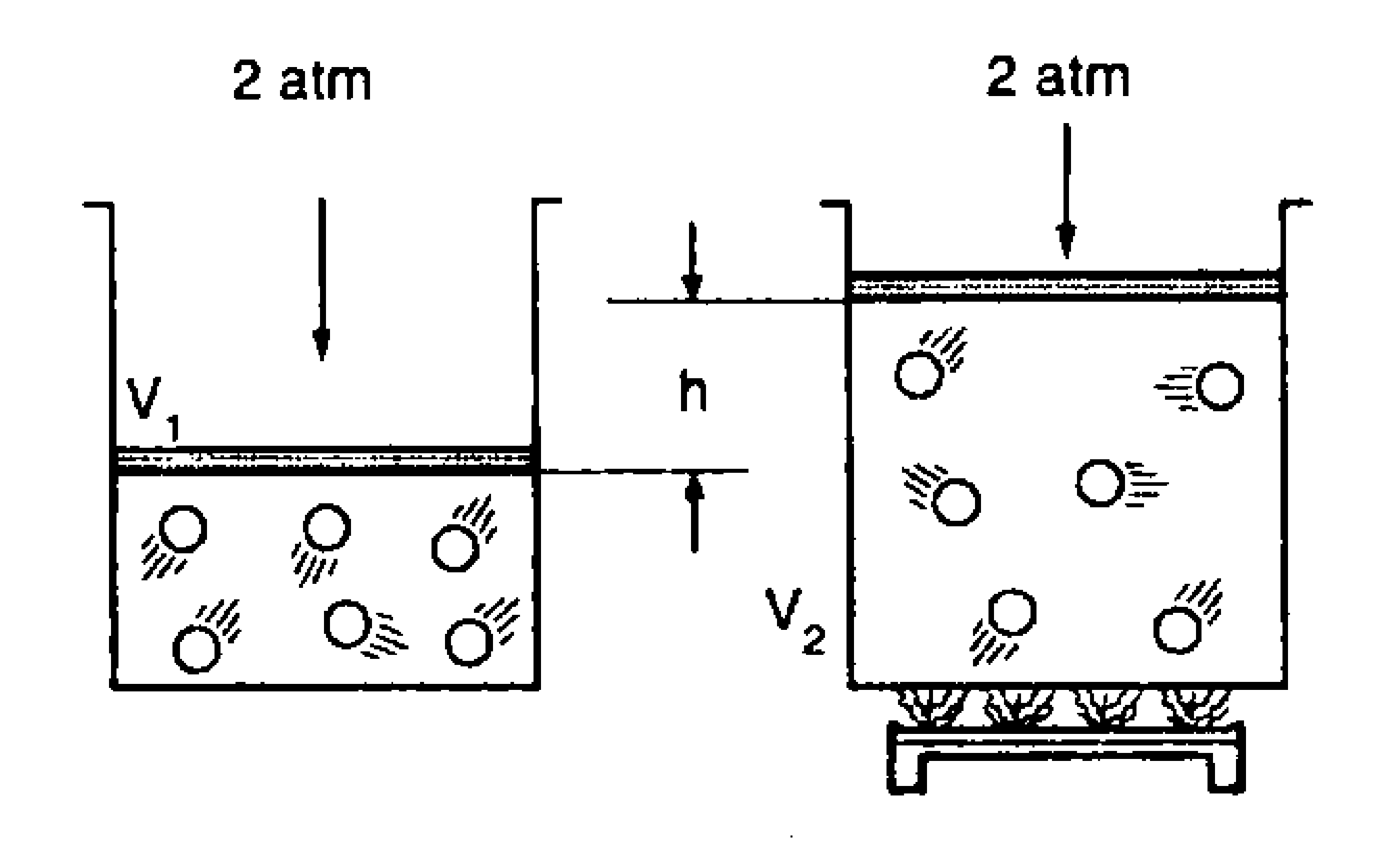
$$\Delta t = 2{,}87\ \frac{J}{cal} \times °C$$

$$\Delta t = 2{,}87\ \frac{0{,}24\ cal}{cal} \times °C$$

$$\Delta t = 0{,}69\ °C$$



PROBLEMA 5. Un cilindro con un émbolo contiene 4 litros de gas a la presiòn de 2 atm. Se le calienta isobáricamente y su volumen aumenta a 5 litros. ¿Cuál es el trabajo realizado por el gas?



RESOLUCIÓN: $V_1 = 4\ L$

$W = ?$ $V_2 = 5\ L$

$P = 2\ atm$

$$W = P\,.\,\Delta V \qquad (I)$$

$$W = 2\ atm\ (5\ L - 4\ L)$$

$$W = 2 \times atm\,.\,L$$

$$W = 2\ .\ 101{,}3\ J$$

$$W = 202{,}6\ J$$

PROBLEMA 6. ¿Cuánto varía la energía interna de un gas que recibe 200 cal y realiza un trabajo de 8 joules?

RESOLUCIÓN: $Q = 200\ cal$

$\Delta E = ?$ $W = 6\ J$

De: $$Q = W + D\,E$$

$$\Delta E = Q - W$$

$$\Delta E = 200\ cal - 6\ J$$

$$\Delta E = 200\ cal - 6 \times 0{,}24\ cal$$

$$\Delta E = 198{,}56\ cal$$

PROBLEMA 7. El agua hierve a 100 °C y 1 atm de presión Si 1 g de agua al vaporizarse ocupa un volumen de 1 640 cm³. Calcular:

a) El trabajo en calorías realizado por el gramo de agua contra el medio ambiente.
b) La variación de la energía interna.

RESOLUCIÓN: $V_1 = 1\ cm^3$

$m = 1\ g$ de H_2O $V_2 = 1\ 640\ cm^3$

a) $$W = P\,.\,\Delta V = P\,(V_2 - V_1)$$

$$W = 101{,}3\ Pa \times 1\ 639 \times 10^{-3}\ m^3$$

$$W = 166\ Pa \times m^3$$

$$W = 166\ J$$

http://librosysolucionarios.net

ó: $W = 166 \times 0{,}24$ cal

$W = 40$ cal

b) $Q = W + \Delta E$

$\Delta E = Q - W$

$\Delta E = 540 \text{ cal} - 40 \text{ cal}$

$\Delta E = 500 \text{ cal}$

o: $\Delta E = 119{,}45 \text{ J}$

BREVE REFERNCIA SOBRE MÁQUINAS TÉRMICAS

MÁQUINAS TÉRMICAS

Son aquellas que transforman el calor en trabajo mecánico y viceversa. Pueden ser:

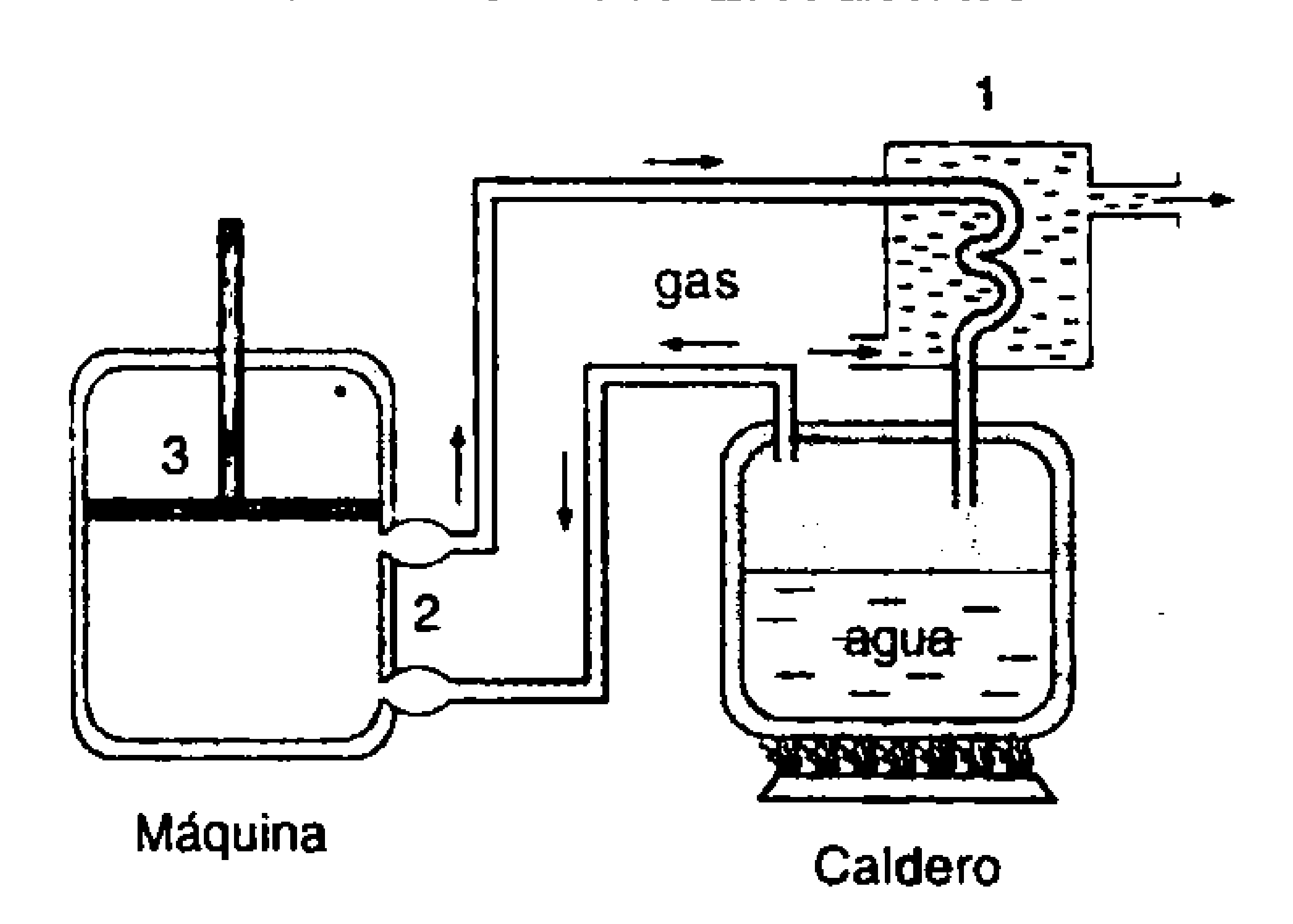
1. Máquinas de combustión externa:

Cuando la fuente de energía calorífica está en el exterior de la máquina. Ejemplo: la locomotora de vapor.

2. Máquinas de combustión interna:

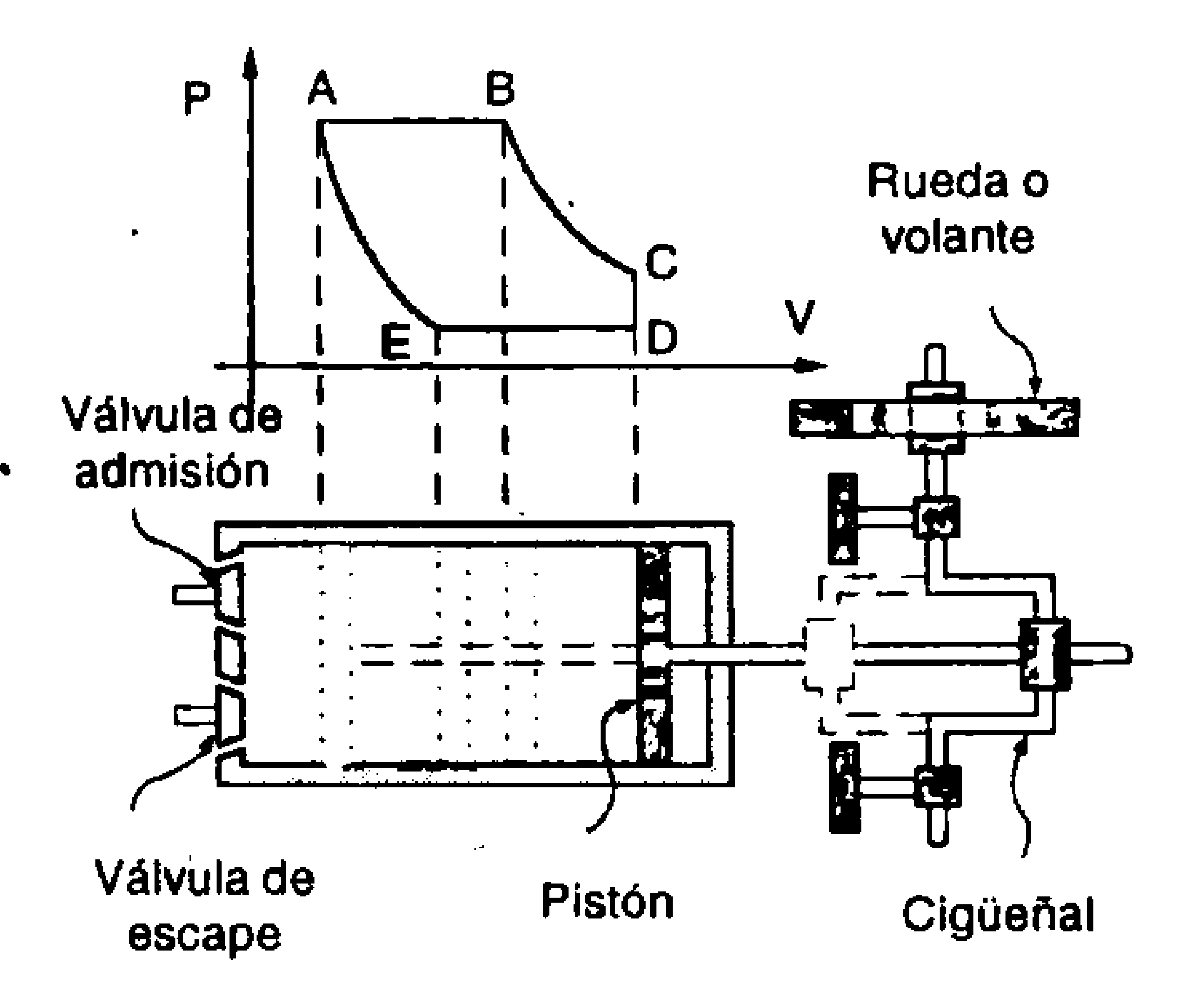
Cuando la fuente de energía calorífica pertenece a la máquina. Ejemplo: motores de explosión y Diesel.

1. MÁQUINAS DE VAPOR O DE COMBUSTIÓN EXTERNA



Se instala un caldero junto a una máquina. El calor entregado al caldero vaporiza el agua contenida en el caldero, el cual por una tubería adecuada (se desprecia la pérdida de energía, en este transporte), ingresa al cilindro de la máquina a través de una válvula de admisión (1). Del vapor que llega al cilindro una parte realiza el trabajo de levantar del pistón (3) y otra parte pasa al condensador (4) sin realizar trabajo, lo que quiere decir que no toda la energía entregada al cilindro se transforma en trabajo , sólo una parte, lo que indica que el rendimiento de la energía entregada al cilindro nunca es 100%.

Cuatro tiempos de la máquina A VAPOR SON



1° tiempo: Admisión: AB

Ingresa el vapor a alta presión por la válvula de admisión que está abierta y ocupa aproximadamente 1/4 de la carrera del pistón, se realiza a presión constante, es decir isobáricamente (AB). La válvula de escape (2) está cerrada.

2° tiempo: Expansión: BC

Se cierra la válvula de admisión. Es un proceso adiabático. Hay un aumento de volumen con disminución de presión no absorbe ni expele calor, este movimiento, es por inercia. (BC)

http://librosysolucionarios.net

3° Tiempo: Expulsión: CD + DE

Comienza cuando el pistón alcanza su máxima carrera (C), en este instante se abre la válvula de escape y se produce un brusco descenso de presión (CD) al haberse expulsado una parte del gas por la válvula de escape, el proceso de barrido o expulsión del gas continúa pero a presión constante (DE), sin embargo no se expulsa todo el gas, por que la válvula de escape se cierra un poco antes que salga todo el vapor.

4° tiempo: Compresión adiabática del **saldo de los vapores: EA**

Comienza cuando se cierra la válvula de escape y se produce una comprensión (EA) de los vapores restantes por la inercia del regreso del pistón adiabá-ticamente.

RENDIMIENTO O EFICIENCIA

Es la relación entre el trabajo realizado por una máquina y el calor total entregado.

$$R = \frac{W}{Q} \times 100$$

Ejemplo : A una máquina se le entrega 50 kcal y se realiza un trabajo de 156 800 J. Calcular su rendimiento.

RESOLUCIÓN: $Q = 50\ kcal$

$R = ?$ $W = 156\,800\ J$

$$R = \frac{W}{Q} \times 100 = \frac{156\,800\ J}{50\ kcal} \times 100$$

$$\therefore \quad R = \frac{156\,800\ J}{50\,000 \times 4{,}186\ J} \times 100$$

Rpta.: $R = 75\%$

El rendimiento de una máquina térmica también se calcula así:

$$R = \frac{Q_1 - Q_2}{Q_1}$$

Q_1 : Calor entregado.

Q_2 : Calor absorbido por la fuente fría o calor no aprovechado en realizar trabajo.

También se puede calcular el rendimiento así:

$$R = \frac{T_1 - T_2}{T_1}$$

T_1 : Temperatura absoluta mayor

T_2 : Temperatura absoluta menor

Ejemplo : Una máquina térmica funciona entre 27 °C y 127 °C.
Si se le suministra 10 kcal, ¿Qué cantidad de calor entregado se transforma en trabajo útil?

RESOLUCIÓN: $t_1 = 127\ °C$

R = ? $t_2 = 27\ °C$

$Q = 10\ kca$

$$R = \frac{t_1 - t_2}{T_1} \times 100$$

$$R = \frac{400\ K - 300\ K}{400\ K} \times 100 = 25\%$$

Luego, calor trasformado en trabajo útil:

$$W = 0{,}25 \, . \, 10\ kcal$$

Rpta.: $W = 2{,}5\ kcal$

SEGUNDA LEY DE LA TERMÓDINÁMICA

Esta ley fue enunciada por el alemán Rudolf Clausius, en el año 1 850.
Se enuncia de varias maneras, pero en todas ellas se plantea que una máquina térmica no puede rendir el 100%, siempre hay una varjedad de factores que impiden este óptimo rendimiento.

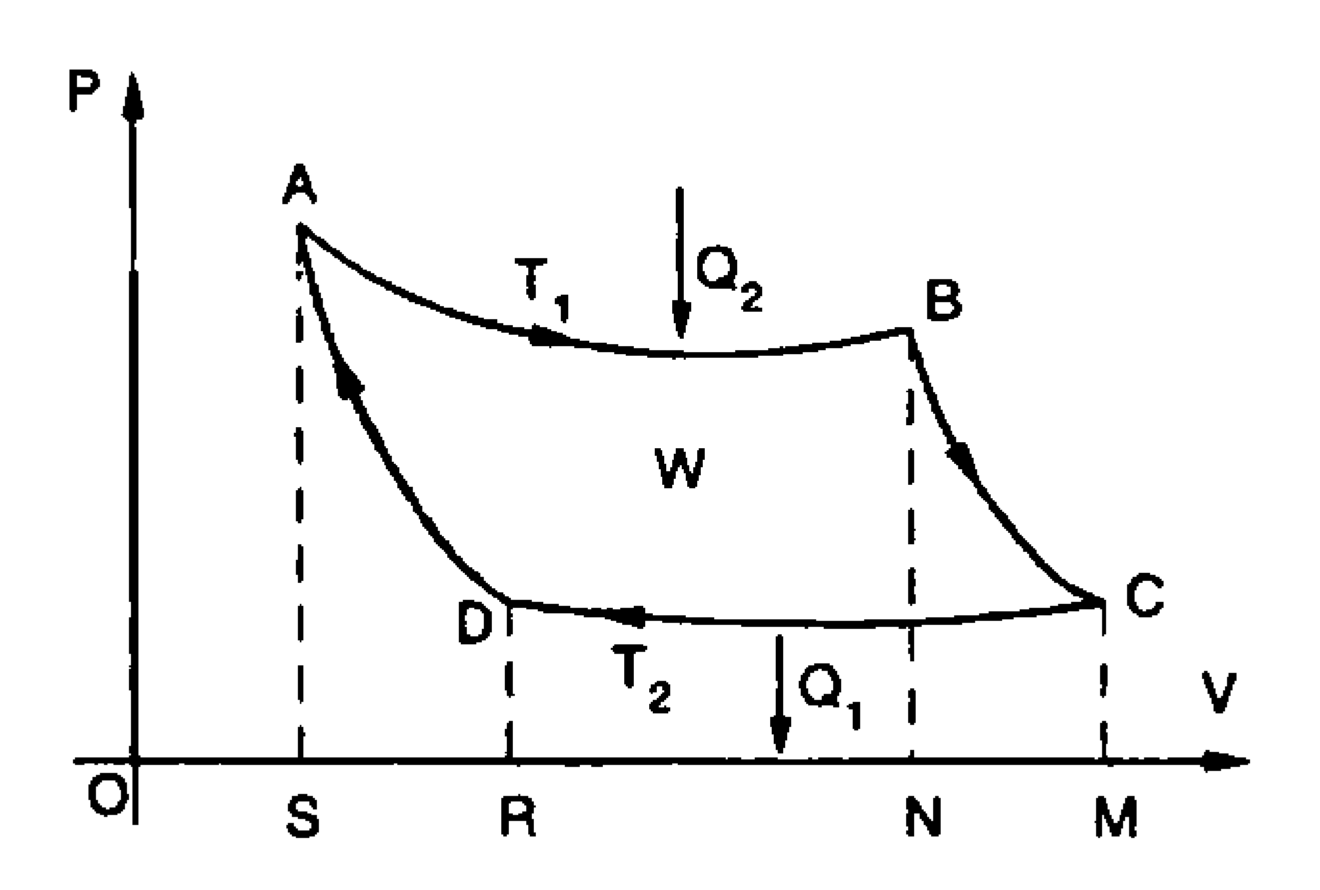
http://librosysolucionarios.net

Otra cosa también importante es que, no siempre al consumir calor se va a producir trabajo, si así fuera siempre, en el experimento de Joule al enfriarse el agua calentada por el movimiento de las paletas, el peso que bajó para realizar el trabajo de mover las paletas debería subir, sin embargo esto no sucede. La ley puede enunciarse así:

"En una máquina térmica es imposible el movimiento continuo, que sin recibir calor del exterior pueda transferir calor de un foco frío a otro caliente".

CICLO DE CARNOT

Sadi Carnot, de nacionalidad francesa, el año 1 828, realizó un estudio sobre la "Potencia motriz del fuego"; afirmaba y reiteraba que para que una máquina térmica pueda funcionar, era necesario la existencia de dos fuentes térmicas con desnivel de calor, de tal manera que haya flujo de calor de la de mayor calor a la de menor calor (la fría) y sólo de este modo se podrá producir trabajo, por el flujo de calor.



El ciclo de Carnot, para el funcionamiento de una máquina térmica, consiste en plantear el hecho de que si se podría construir una máquina de acuerdo a este ciclo, el rendimiento de la máquina sería superior a cualquier otra, sin embargo si se consideraría el Ciclo de Carnot como un caso "perfecto" su rendimiento llegaría al 100%.

AB: Expansión isotérmica (T_1 = cte.)
BC: Expansión adiabática.
CD: Compresión isotérmica (T_2 = cte.).
DA: Compresión adiabática.

Interpretación de las áreas del ciclo:

ABNS : Calor "Q" tomado de la fuente caliente para realizar el trabajo.

BCMN: Calor absorbido por la sustancia motora (vapor) al enfriarse de T_1 a T_2

CMRD : Calor absorbido por la fuente fría, calor que no se convierte en trabajo, calor perdido "Q_2".

DRSA : Calor absorbido de la máquina por la sustancia motora (gas) al subir la temperatura de T_2 a T_1.

Para que el rendimiento sea el máximo o lo ideal, debe cumplirse que:

BCMNB = ADRSA

¿Por qué?

Por que BCMNB es el calor entregado al sistema frío o máquina, y ADRSA
es el calor recogido de la máquina ya calentada.

ABCDA: Calor convertido en trabajo útil

Q_1 : Calor que entrega la fuente de calor a la sustancia motora (gas)

Q_2 : Calor absorbido por la máquina o foco frío, es el calor perdido o energía perdida.

2. MÁQUINA DE COMBUSTIÓN INTERNA O DE EXPLOSIÓN

Básicamente un motor de explosión es igual que un motor o máquina de vapor. La diferencia es que, en el motor de explosión o combustión interna, como su nombre lo indica, la combustión se hace en el interior del motor y no se necesita caldero externo, y por consiguiente ocupa un volumen enormemente menor que el motor de vapor.

Consiste de un cilindro donde se realiza

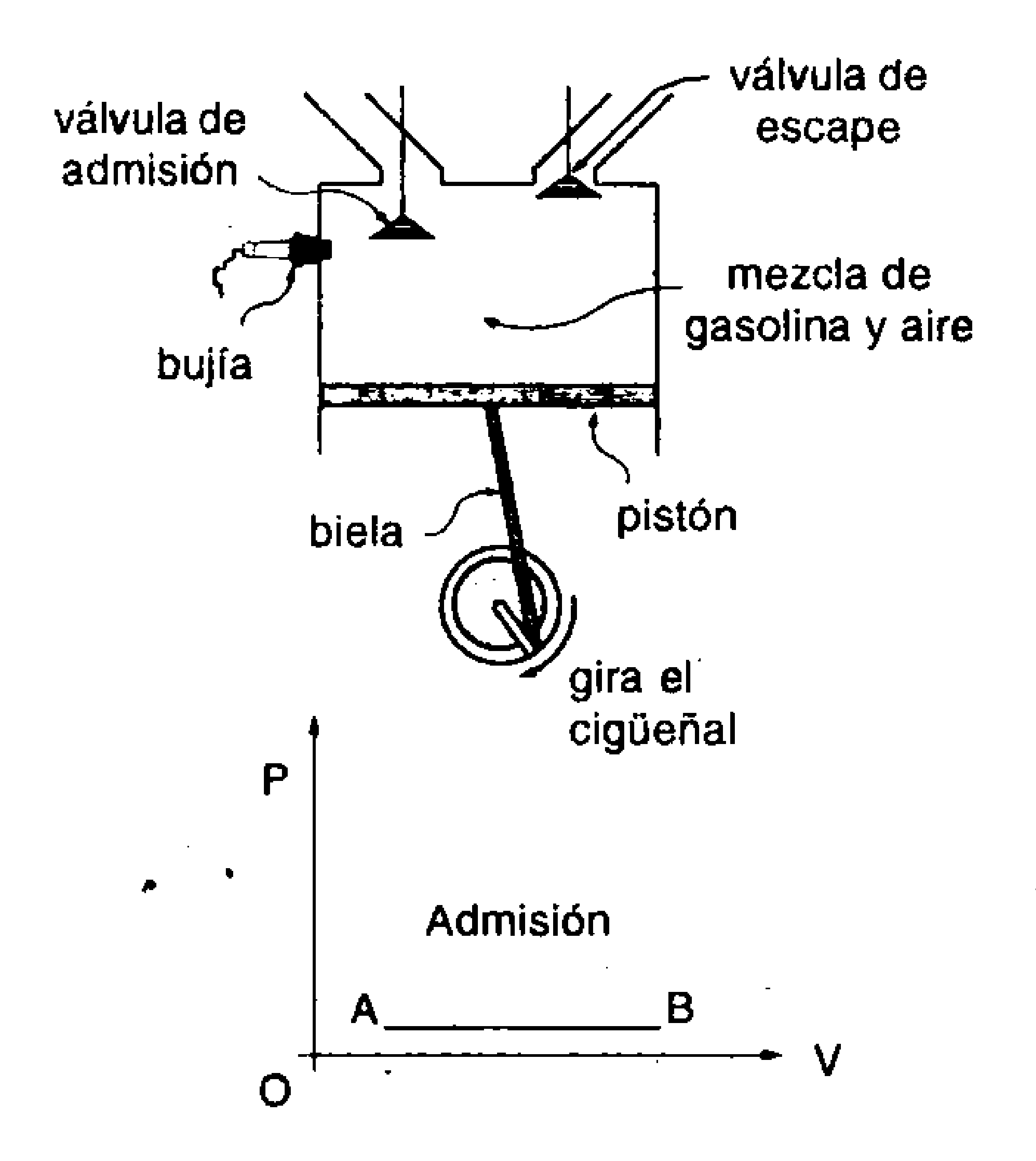
http://librosysolucionarios.net

la combustión de una mezcla de aire y gasolina pulverizada, la chispa que inicia la combustión de esta mezcla proviene de una bujía a la cual llega corriente eléctrica enviada por un distribuidor de corriente.

El motor de combustión interna también tiene 4 tiempos:

1er Tiempo: Admisión

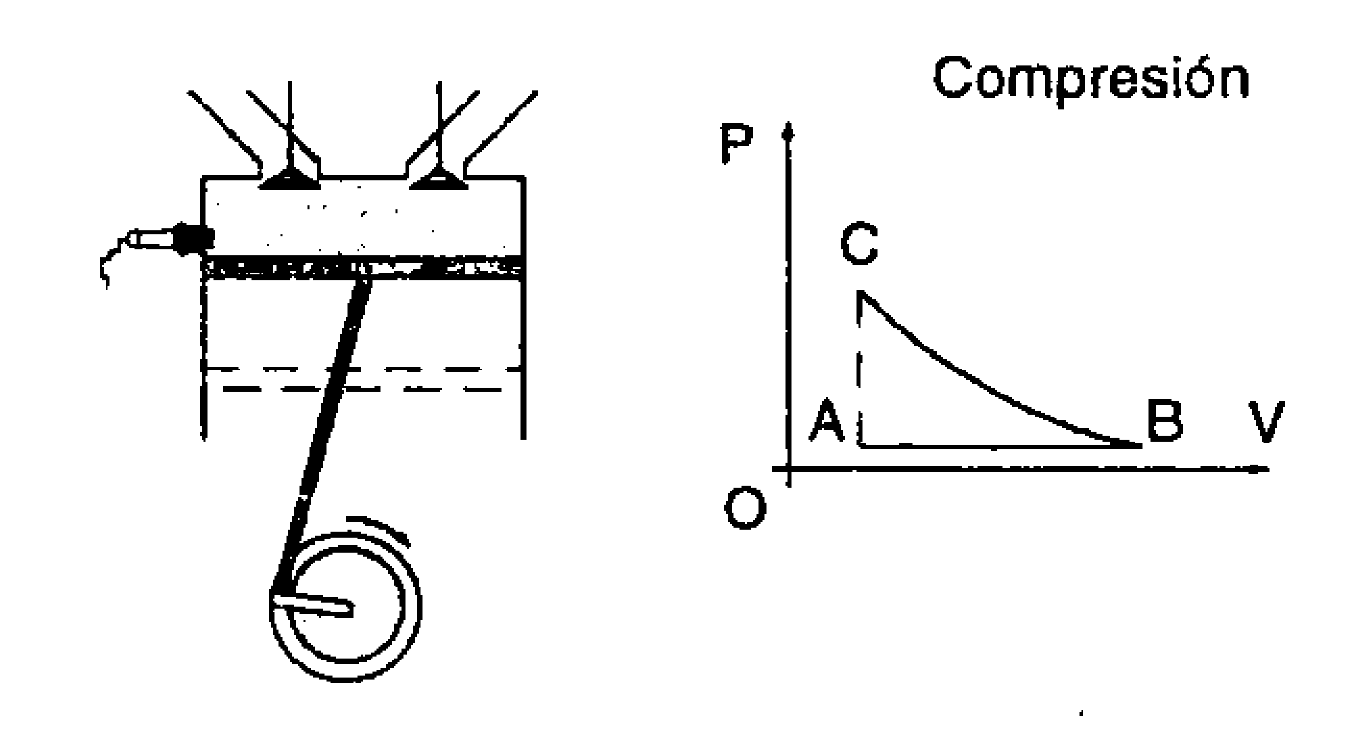
El pistón está en el "Punto Muerto Superior" (P.M.S.) El pistón empieza a bajar por acción del cigüeñal, al cual está conectado por un brazo que se llama biela, en este mismo instante se abre la válvula de admisión que comunica con el carburador. Como el pistón baja se produce un vacío en el cilindro; ésta es la razón por la que ingresa la mezcla de aire y gasolina al cilindro a la presión atmosférica. Ha habido pues una expansión isobárica.



2da Tiempo: Compresión

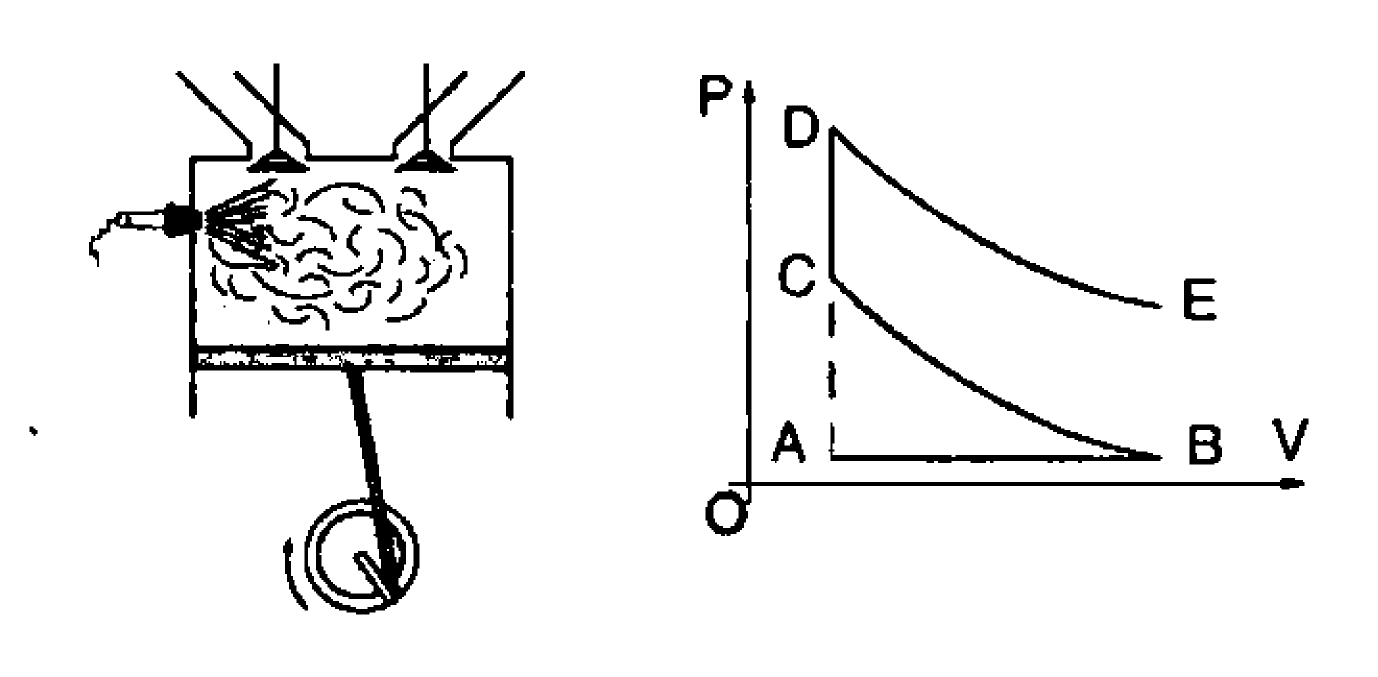
La válvula de admisión se cierra, la válvula de escape está cerrada, el pistón sube accionado por el cigüeñal y comprime la mezcla hasta regresar el pistón a su P.M.S., en este momento la mezcla tiene una presión aproximada de 8 atm.

Esta compresión se ha realizado mediante un proceso teóricamente adiabático, la temperatura de la mezcla es alta, cerca al punto de combustión.



3er Tiempo: Encendido, Explosión y Expansión

Cuando la mezcla está comprimida en la cámara de combustión, llega el chispazo de la bujía enviada por el distribuidor de corriente, el calor se propaga instantáneamente en toda la mezcla y se enciende, produciendo una explosión de la mezcla gaseosa, esta explosión da lugar a un aumento violento de gas y temperatura, originando un aumento formidable de la presión, antes que baje el pistón, este instante se considera **isométrico**.



Luego, esta fuerza empujada al pistón produciéndose la segunda parte de este 3er. tiempo, la expansión, proceso que que se considera adiabático.

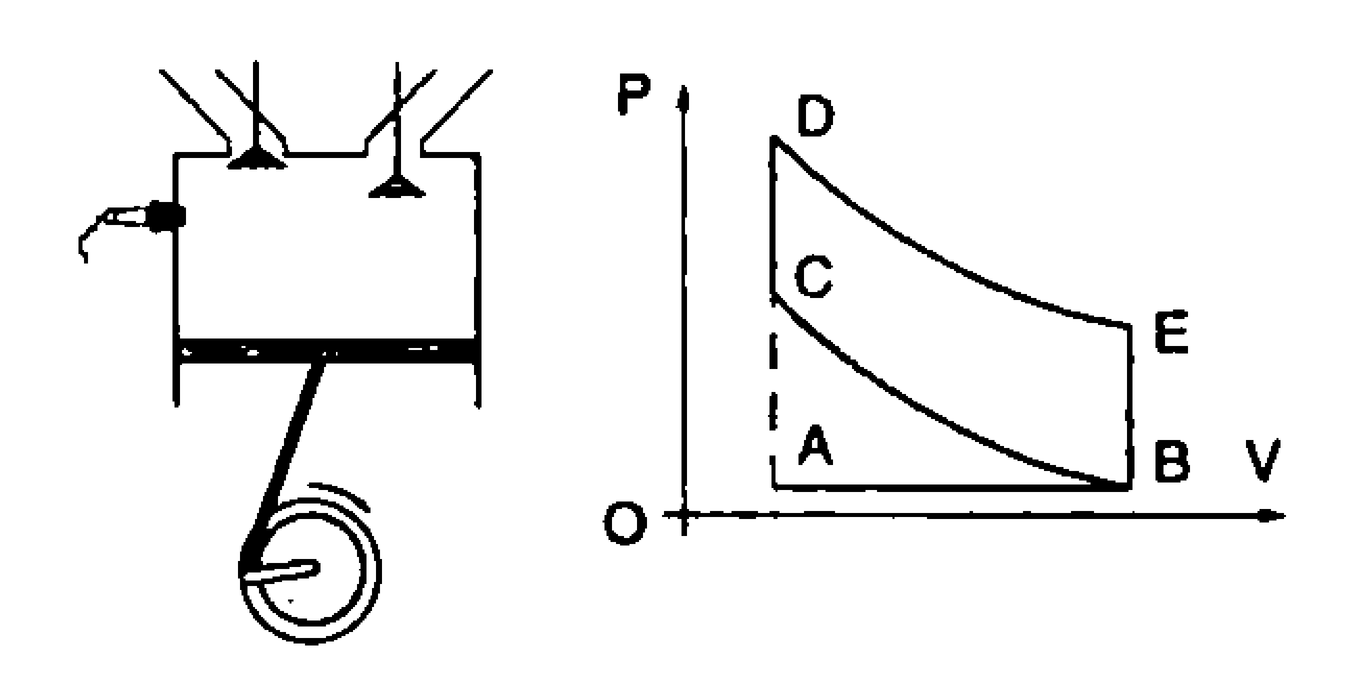
4to. Tiempo: Escape

Cuando el pistón ha cumplido su carrera de bajada, es decir, cuando está en su "Punto Muerto Inferior" (P.M.I.), la presión del gas es muy baja, casi igual a la atmosférica, en ese

http://librosysolucionarios.net

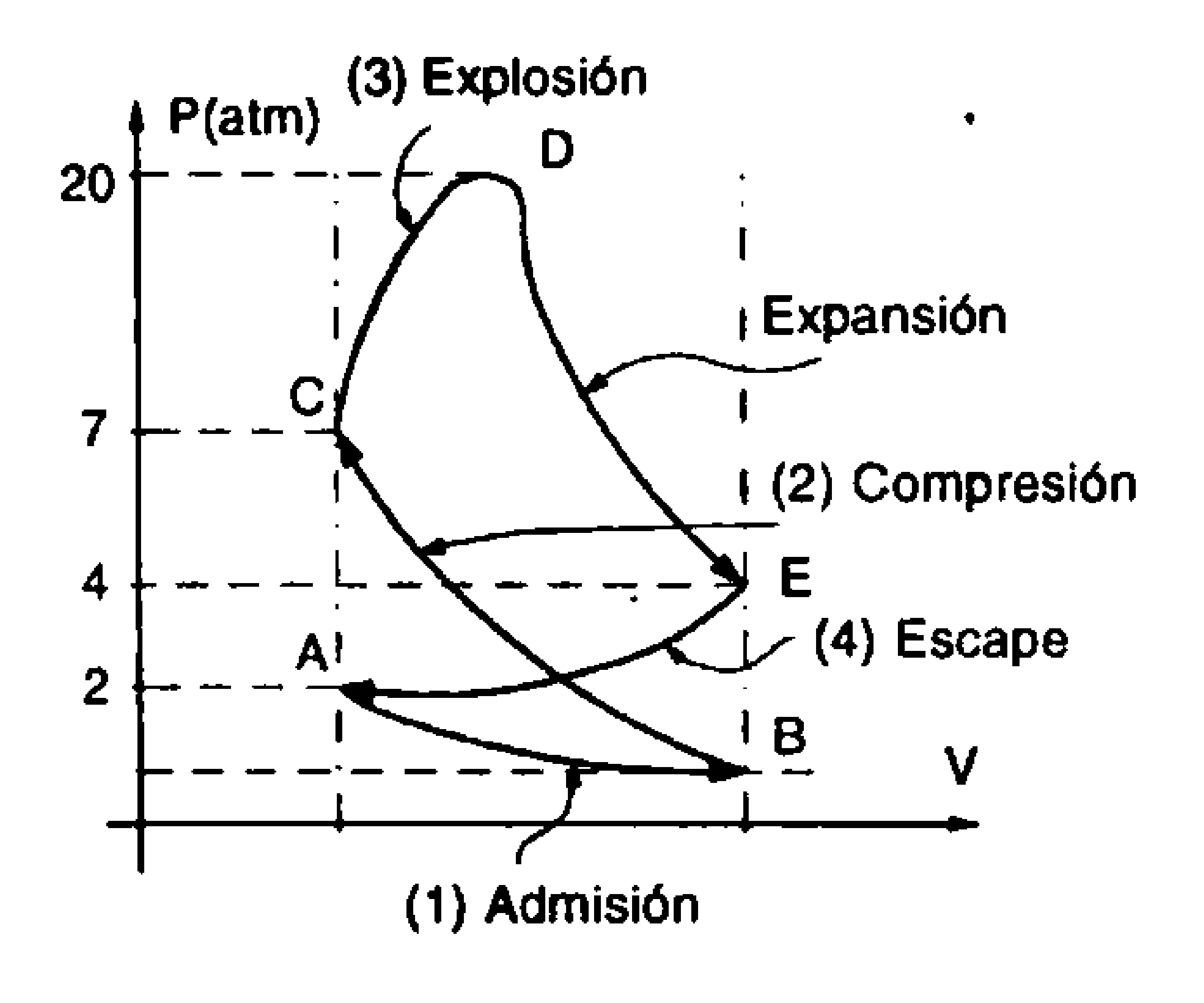
ınstante se abre la válvula de escape y la presión baja bruscamente isométricamen-te, es decir, tan rápido que el pistón no ha logrado moverse. Luego, con la válvula de escape abierta, el pistón asciende, expulsando todo el gas del cilindro hasta llegar al Punto Muerto Superior.

En este instante se cierra la válvula de escape, se abre la de admisión y se repite el ciclo. De lo descrito se observa que **sólo la expansión "DE"** es la carrera que produce trabajo, las otras tres carreras no, por lo tanto el trabajo que produce esta carrera debe ser mayor que el que absorben las otras tres carreras para que el motor tenga movimiento útil.



El primer movimiento, el de admisión, debe ser suministrado por una máquina exterior, como la batería de los motores de automóvil que da el movimiento inicial o como la "manivela", con el cual los carros antiguos "arrancaban".

CICLO REAL DE UN MOTOR DE EXPLOSIÓN

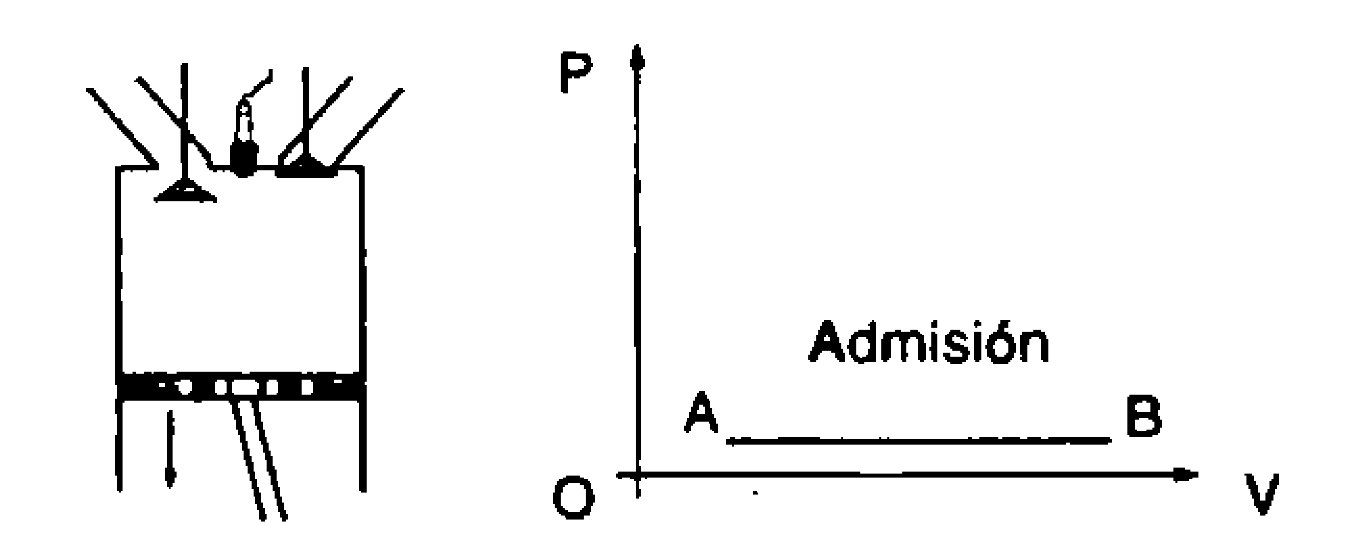


MOTOR DIESEL

Una reseña muy elemental de lo que es un motor Diesel es la siguiente:

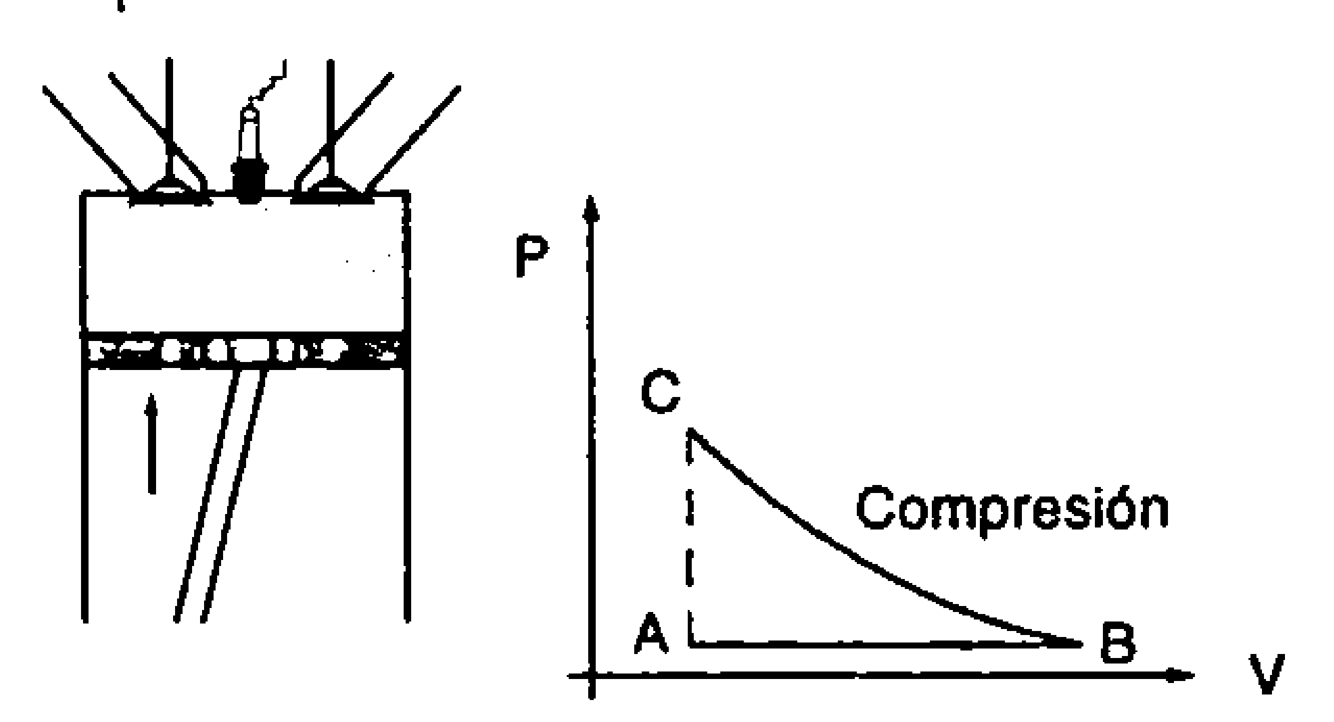
1er. Tiempo: Admisión

Se abre la válvula de admisión e ingresa aire puro (AB) a diferencia de los motores de explosión que ingresa al cilindro mezcla de aire con gasolina pulverizada.



2do. Tiempo: Compresión

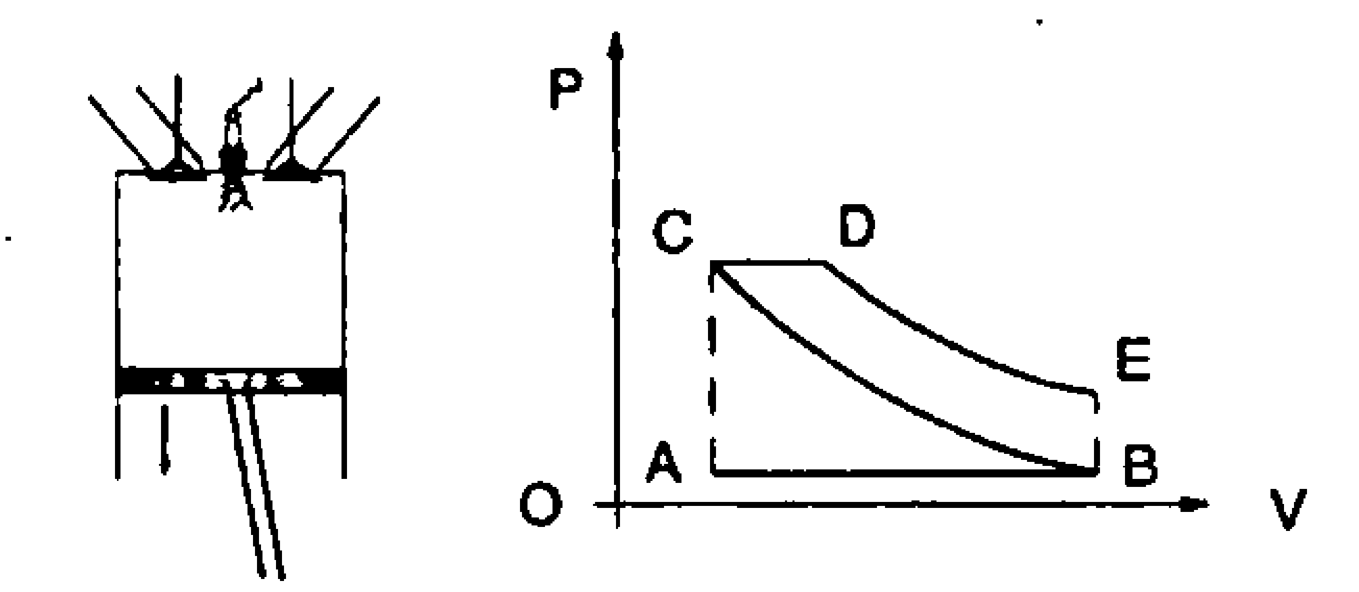
Se cierra la válvula de admisión y el émbolo sube comprimiendo el aire puro (BC), la compresión se hace hasta reducirlo u ocupar simplemente la cámara de combustión a unas 30 atm, razón por la que alcanza una muy alta temperatura.



3er. Tiempo: Combustión y expansión

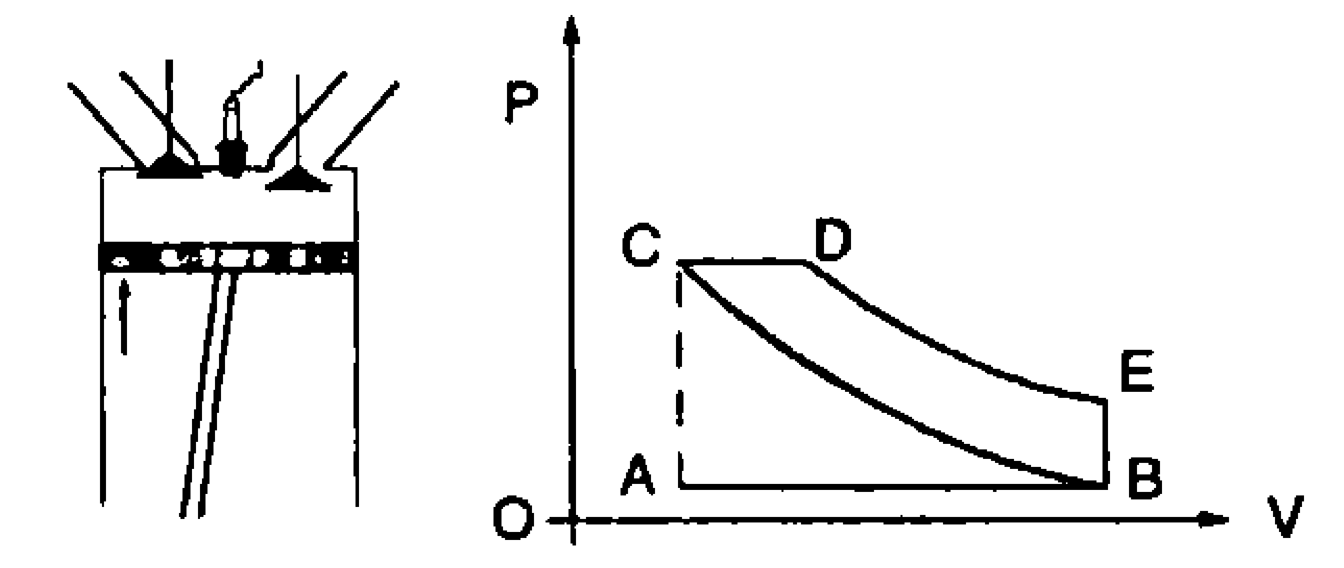
Cuando el pistón llega a su Punto Muerto Superior se inyecta el combustible pulverizado (petróleo), en este momento se enciende y se produce un brusco
aumento de volumen isobáricamente (CD) y como la inyección de combustible continúa, la combustión continúa, y se produce la expansión (DE)

http://librosysolucionarios.net



4to. Tiempo: Escape

Instantes antes que el pistón llegue a su Punto Muerto se abre la válvula de escape y se produce una brusca baja de la presión (EB), a esta presión se expulsan todos los gases hasta que el pistón llegue a su Punto Muerto Superior (BA). A partir de ese momento empieza a repetirse el ciclo.



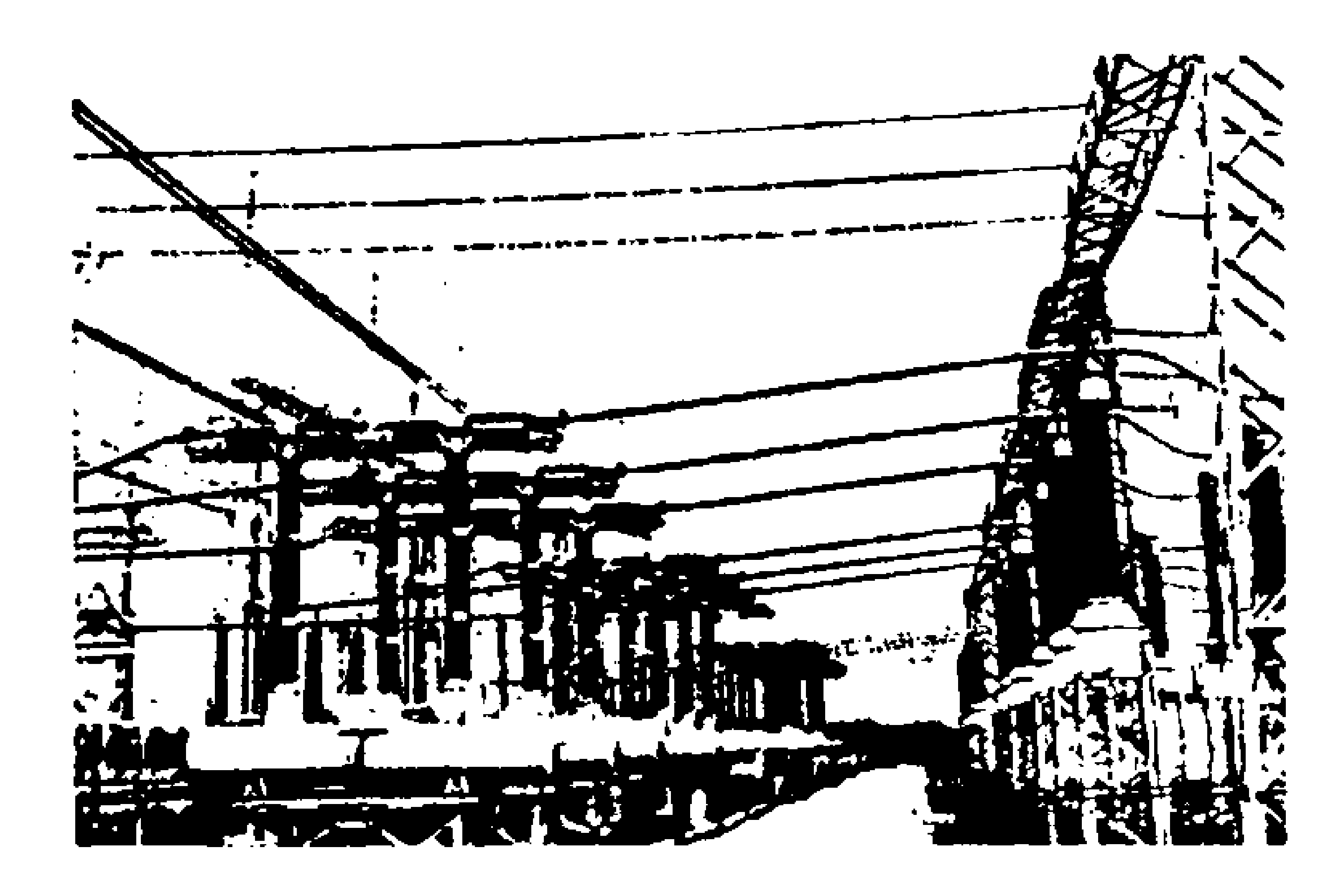
"Estudia,
medita,
razona y
practica"

Juan Goñi Galarza

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 15

ELECTRICIDAD



Estación eléctrica

INTRODUCCIÓN

Los términos "electricidad" y "corriente eléctrica" son usuales por cada persona. En la cultura actual de nuestro mundo nos encontramos rodeados de aparatos eléctricos de diversas clases, desde lámparas, relojes de batería, hornos microondas, equipos de audio, telefonía celular, robots, computadoras y mucho más.

Pero ¿qué es electricidad? y ¿cuál es su naturaleza? Para responder estas preguntas hay que conocer un conjunto de fenómenos llamados eléctricos; empezamos por analizar partículas y objetos con cargas en reposo y en el vacío (Electrostática). Luego estudiaremos las cargas eléctricas en movimiento (Electrodinámica).

Los fenómenos eléctricos fueron descubiertos por los científicos de la antigua Grecia, quienes utilizaban con frecuencia una sustancia llamada "ámbar". Ellos advirtieron que al frotar el "ámbar" con lana, aquél comenzaba a atraer diferentes cuerpos muy livianos.

Cabe señalar que "ámbar" es un término árabe con el cual se designa a una resina fósil de un vegetal que creció en la Tierra hace miles de años. Además los griegos llamaban al "ámbar" con el término equivalente "electrón". De aquí se origina la denominación "electricidad".

ELECTROSTÁTICA

Es la parte de la electricidad que comprende el estudio de las cargas eléctricas en reposo, los campos eléctricos asociados, las interacciones eléctricas y su característica energética.

En seguida recordemos que todo cuerpo sustancial está formado por partículas, cada partícula a su vez está formada por moléculas y cada molécula la conforman infinidad de

http://librosysolucionarios.net

átomos. Ahora recordemos los puntos más importantes de la teoría atómica de la materia.

ÁTOMO

1. Todo átomo está conformado por dos zonas: la zona nuclear o núcleo con carga positiva y una zona extranuclear, que rodea al núcleo, en la cual se distribuyen los electrones.
2. Los electrones de todos los átomos son idénticos y cada electrón tiene la misma cantidad de carga negativa y la misma masa.
3. En todo átomo la zona nuclear o núcleo se compone de **protones** y **neutrones**. Los protones tienen casi 2 000 veces más masa que los electrones, pero poseen carga positiva igual en valor a la negativa de los electrones. Los neutrones tienen masa un poco mayor que la de los protones pero son eléctrica-mente neutros.
4. Todo átomo normal, neutro ó basal, posee el **mismo número** de protones y electrones.
5. El número atómico de un átomo está dado por el número de protones o electrones y se le representa por "Z". La suma de protones y neutrones o (nucleones) da el número de masa y se le representa por la letra "A". Luego el número de neutrones se le representa por la letra "N"; se cumple la siguiente relación:

$$N = A - Z$$

Por ejemplo: el átomo de Hidrógeno está constituído por un protón y un electrón, por lo que:

$$Z = 1$$
$$A = 1$$
$$N = 0$$

La fórma común del átomo de Hidrógeno n posee neutrones, es la única excepción

6. Se llama **ión** al átomo que ha ganado o perdido electrones.
7. Cuando un átomo neutro pierde uno o más electrones queda "ionizado positivamente". El átomo que gana uno o más electrones queda "ionizado negativamente".

CARGA ELÉCTRICA "q"

¿Qué nos expresa la carga eléctrica?

La carga eléctrica es una magnitud física escalar cuyo valor expresa si los átomos de un cuerpo han ganado o perdido electrones.

Asimismo la **carga eléctrica** es una propiedad de la materia que se caracteriza por generar alrededor suyo su respectivo **campo eléctrico**, del cual se tratará más adelante. El campo eléctrico permite las interacciones eléctricas.

UNIDAD DE MEDIDA:

La unidad de medida de la carga eléctrica en el SI. es el COULOMB "C"

Los submúltiplos usuales de la carga eléctrica son:

1 milicoulomb	1 m C	= 10^{-3} C
1 microcoulomb	1 m C	= 10^{-6} C
1 nanocoulomb	1 n C	= 10^{-9} C
1 picocoulomb	1 p C	= 10^{-12} C

CARGA ELÉCTRICA Y MASA DE LAS PARTÍCULAS SUB ATÓMICAS		
	Carga eléctrica, en coulomb "C"	Masa, en kg
Electrón	$e^- = -1,6 \cdot 10^{-19}$	$9,11 \cdot 10^{-31}$
Protón	$e^+ = +1,6 \cdot 10^{-19}$	$1,673 \cdot 10^{-27}$
Neutrón	cero	$1,674 \cdot 10^{-27}$

1 coulomb <> $6,25 \cdot 10^{18}\ e^-$

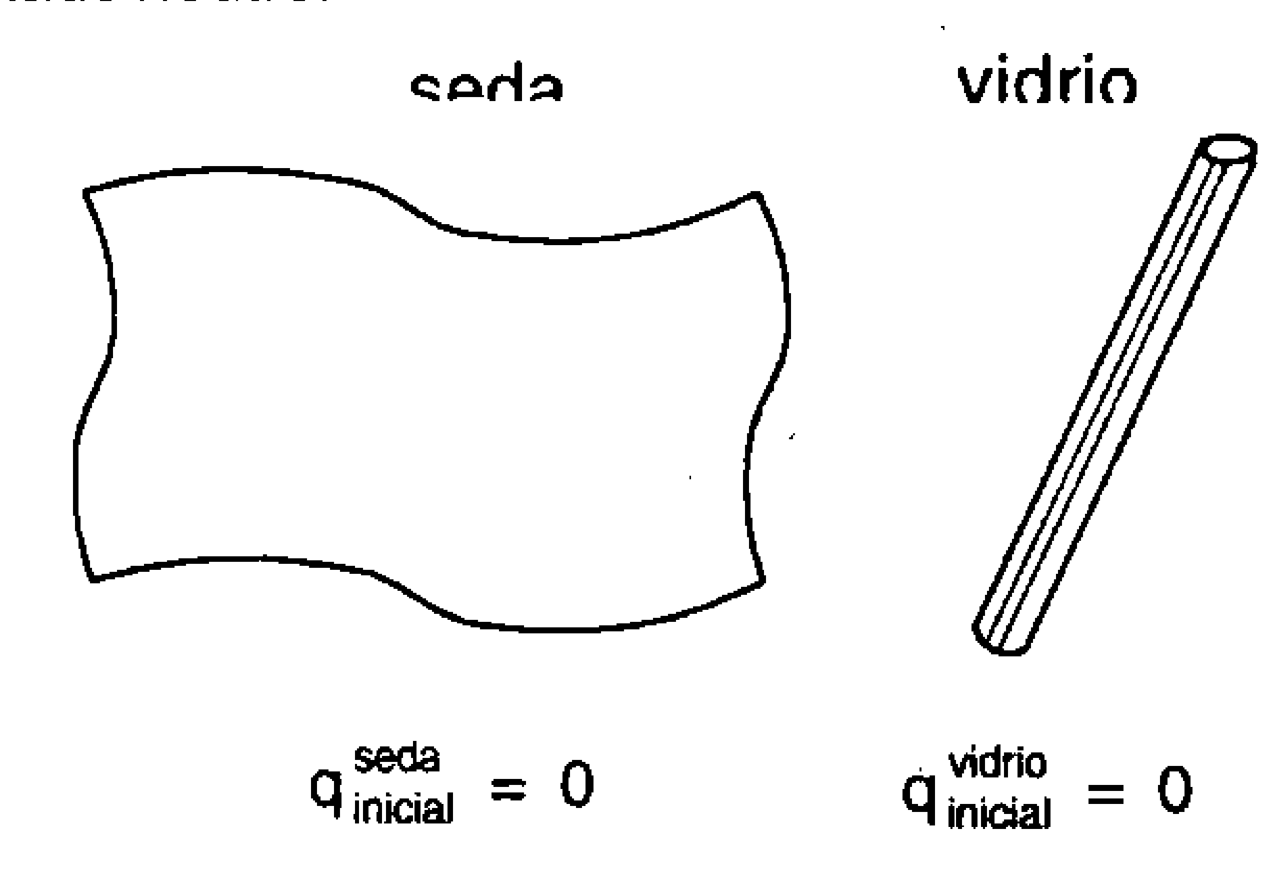
http://librosysolucionarios.net

¿Cómo se logra la electrización de los cuerpos?

Analicemos el caso de una varilla de vidrio la cual frotaremos con un pedazo de tela de seda.

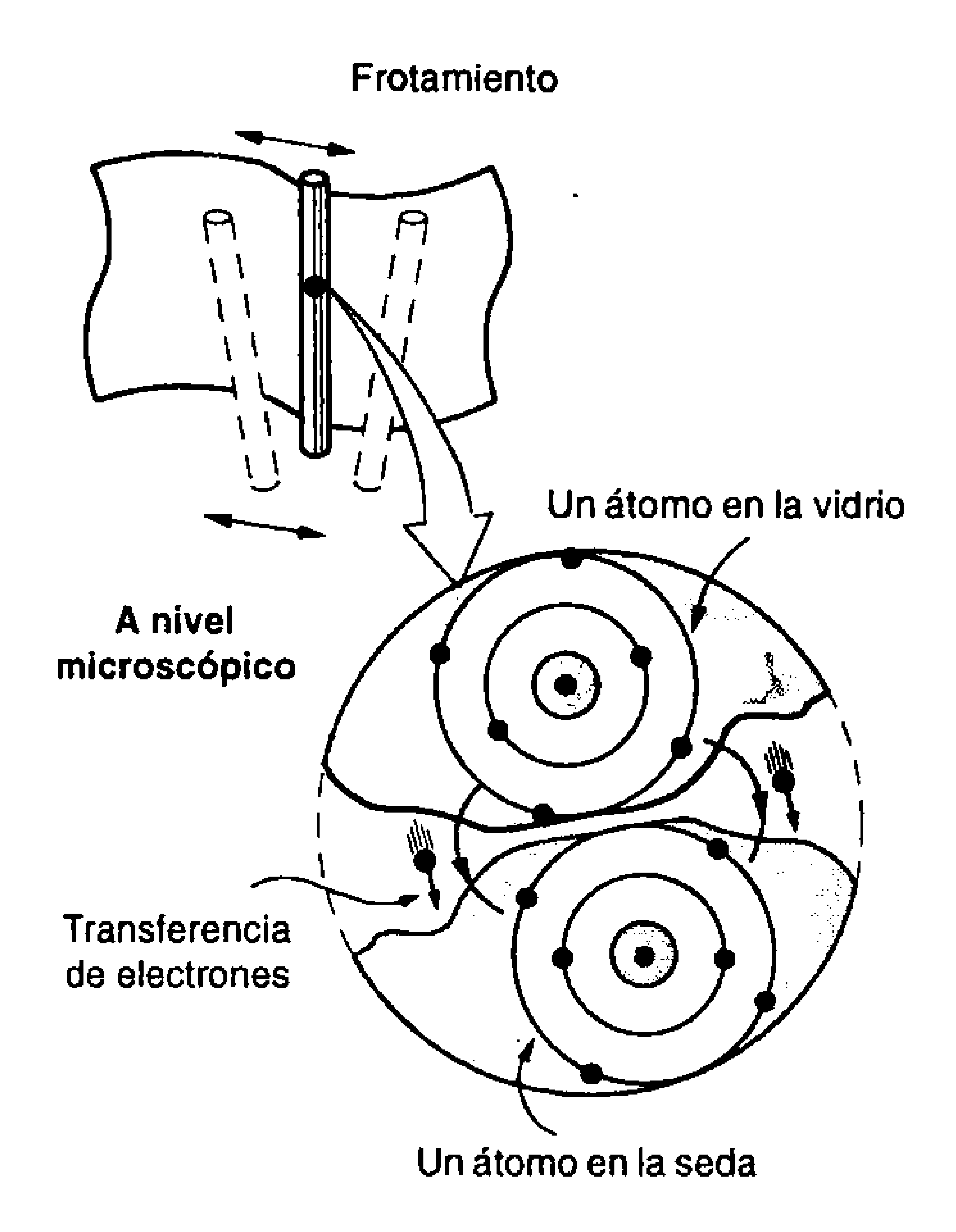
AL INICIO:

Antes de frotar todos los cuerpos, se encuentran en estado neutro, por lo tanto el vidrio como la seda, se encuentran también en estado neutro.



$q^{seda}_{inicial} = 0$ $q^{vidrio}_{inicial} = 0$

Durante el frotamiento del vidrio y la seda se incrementa la energía interna de los cuerpos. Durante este proceso ocurre una transferencia de electrones superficiales del vidrio hacia la seda, lo que determina que ambos cuerpos adquieran carga eléctrica.



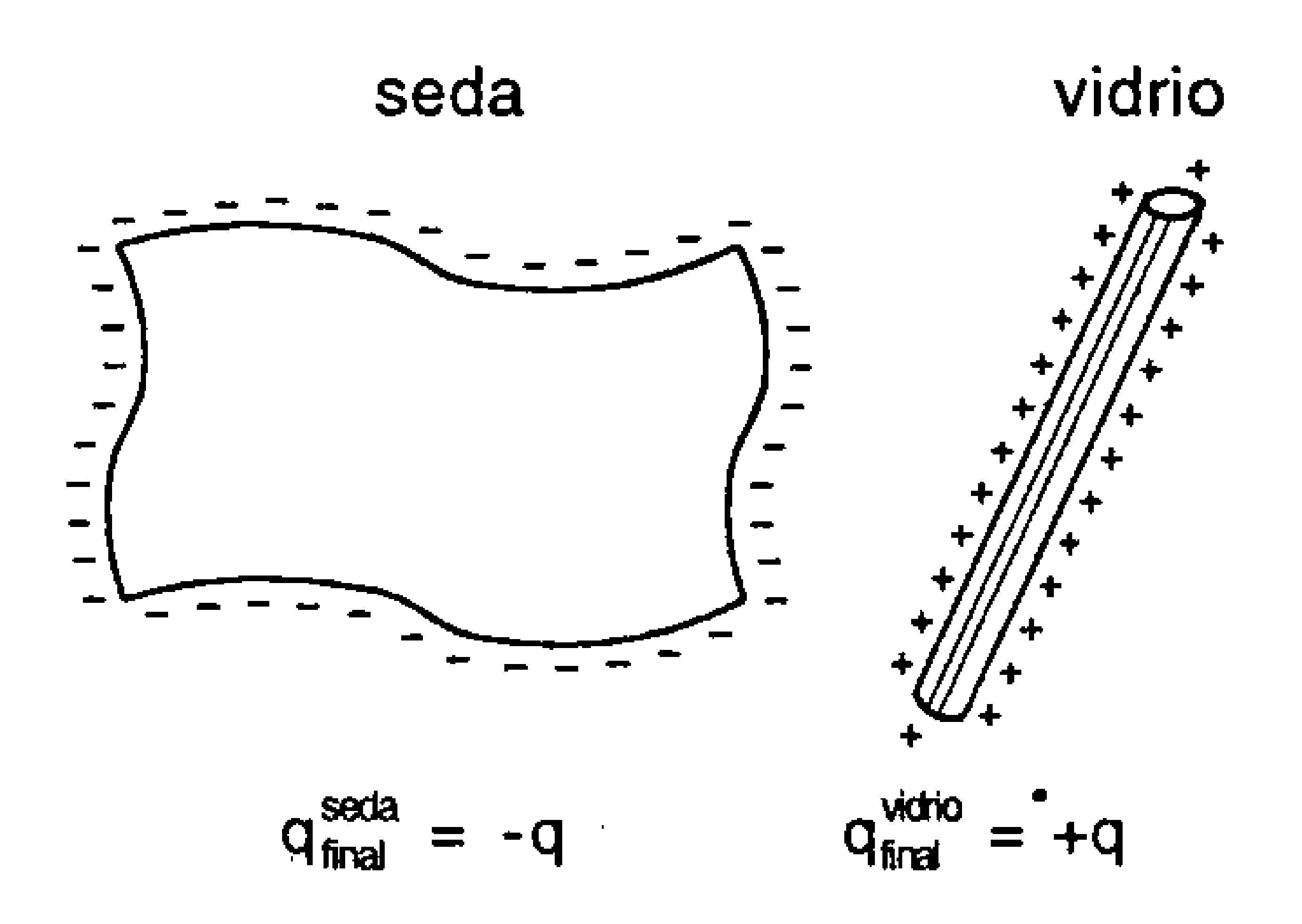
En esta interacción eléctrica entre dos cuerpos uno de ellos se carga en forma positiva y el otro en forma negativa y ¿de qué depende que un cuerpo adquiera carga positiva o negativa?

Depende del carácter electronegativo de sus átomos; es decir, los átomos de mayor electronegatividad mantienen a sus electrones ligados al núcleo con mayor fuerza eléctrica, esta propiedad les da también la posibilidad de ganar electrones (cargarse negativamente). Experimentalmente se verifica que el grado de electronegatividad de los átomos de la seda es mayor que el grado de electronegatividad de los átomos del vidrio. De ahí que durante el frotamiento ocurre que la seda gana electrones (se carga negatinamente) mientras que el vidrio pierde electrones (se carga positivamente).

AL FINAL:

El vidrio perdió electrones luego adquiere carga positiva: ^{+}q.

La seda ganó electrones luego adquiere carga negativa : ^{-}q.



$q^{seda}_{final} = -q$ $q^{vidrio}_{final} = +q$

¿Cómo cuantificar la carga que adquiere un cuerpo electrizado?

La carga que adquiere un cuerpo depende del número de electrones transferidos y se le determina mediante la siguiente ecuación:

$$q = n\,|e^{-}|$$

Donde:

n : Es el número de electrones transferidos. Siempre es un número entero y positivo.

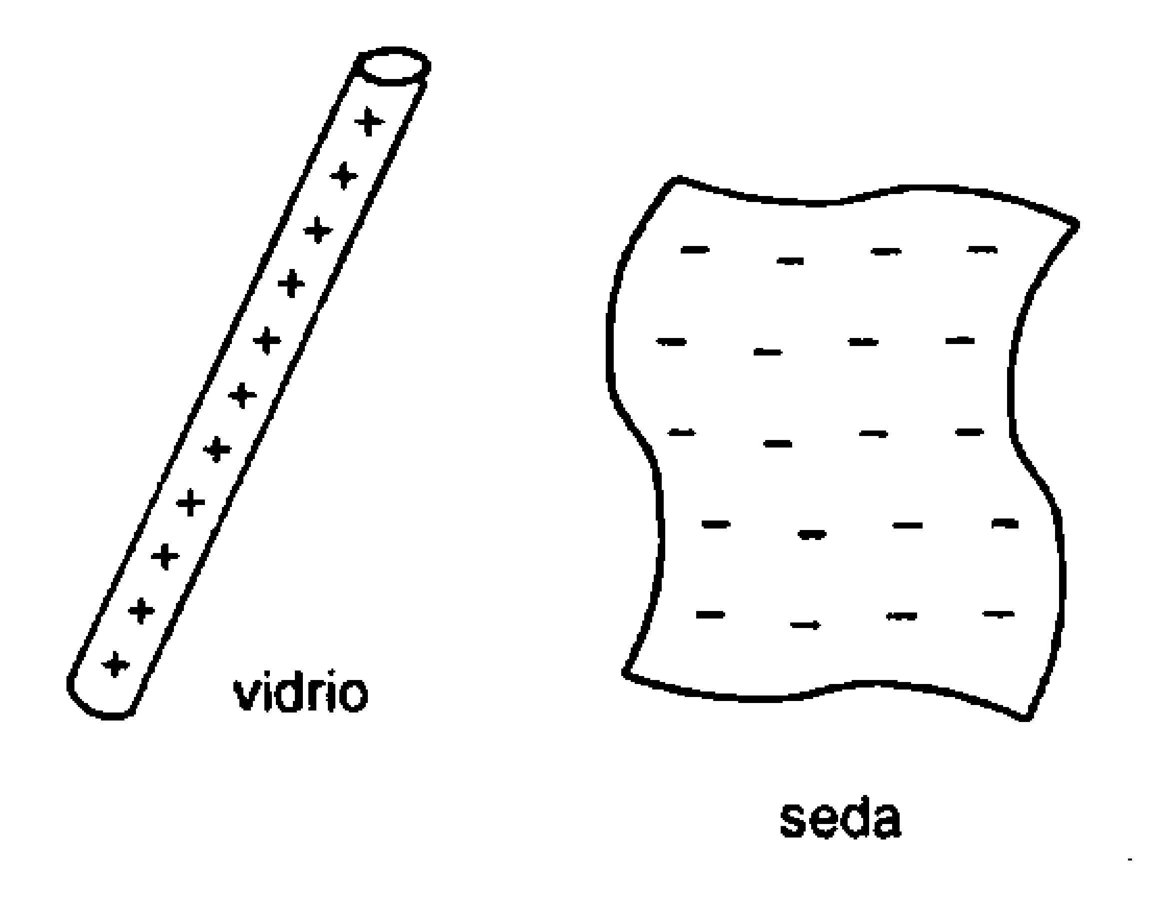
http://librosysolucionarios.net

| e⁻ | : Es el valor de la carga del electrón medida en coulomb "C".

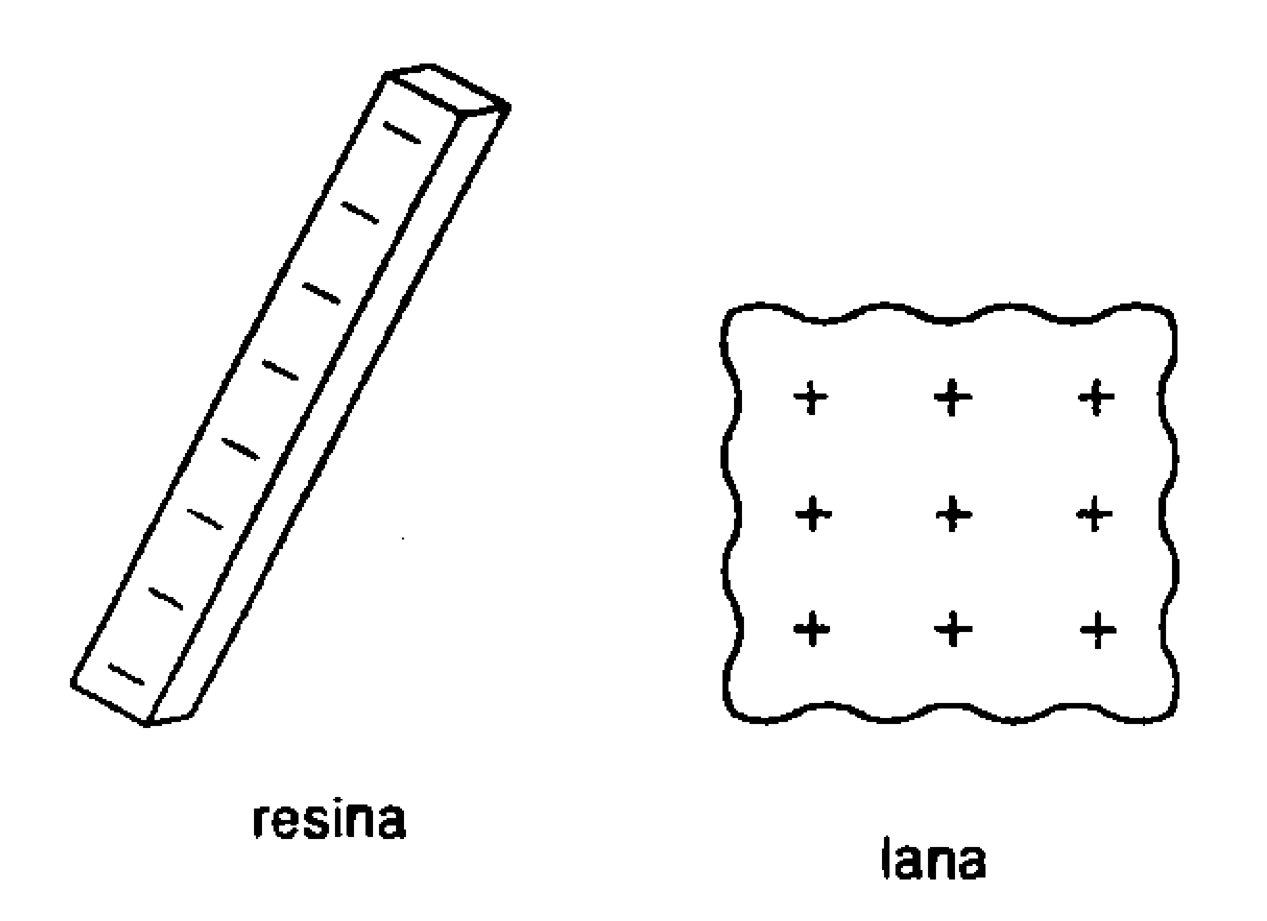
$$e^- = -1{,}6 \times 10^{-19}\ C$$

NOTA:
Cabe señalar que actualmente se investiga sobre la posibilidad de la existencia de partículas que puedan tener un tercio o dos tercios de la carga del electrón. Quienes estudian física nuclear y los fenómenos de alta energía suponen que debe existir una carga más pequeña que la carga del electrón; la cual, por cierto, aún no se comprueba, pero en los estudio teóricos se le llama cuark o quark.
Al realizar experimentos con varios cuerpos electrizados, estos se pueden clasificar en dos grupos:

1er. Grupo:
Son aquellos que como el vidrio se cargan positivamente (porque pierden electrones).



2do. Grupo
Son aquellos que como la seda o la resina se cargan negativamente (porque ganan electrones).



Es así como los experimentos han mostrado que existen dos tipos de cargas eléctricas (positivas y negativas) y que la interacción entre los cuerpos electrizados es diferente.
Los cuerpos de cargas eléctricas de igual signo se repelen mientras que los cuerpos de cargas eléctricas de signo contrario se atraen.

TABLA TRIBO ELÉCTRICA

¿Qué es una tabla tribo eléctrica?
Es aquella tabla obtenida experimentalmente, donde se indica algunas sustancias ordenadas de manera creciente de acuerdo a su electronegatividad.

1.	Plexiglás
2.	Vidrio
3.	Marfil
4.	Lana
5.	Madera
6.	Papel
7.	Seda
8.	Azufre

De modo que cualquiera de ellas adquiere carga positiva cuando se le frota con aquellas que le siguen y viceversa adquirirá carga negativa cuando sea frotada con las sustancias que le preceden.

CUERPOS CONDUCTORES Y NO CONDUCTORES

Con respecto al comportamiento eléctrico, los materiales pueden clasificarse, en general, en dos clases: conductores y no conductores (aisladores o dieléctricos) de la electricidad.

Los conductores; son sustancia metálicas como el cobre, la plata, el hierro, etc. los cuales se caracterizan por poseer un gran número de electrones libres alrededor del átomo, los cuales son portadores de carga. Estos portadores de carga se mueven libremente en el conductor.

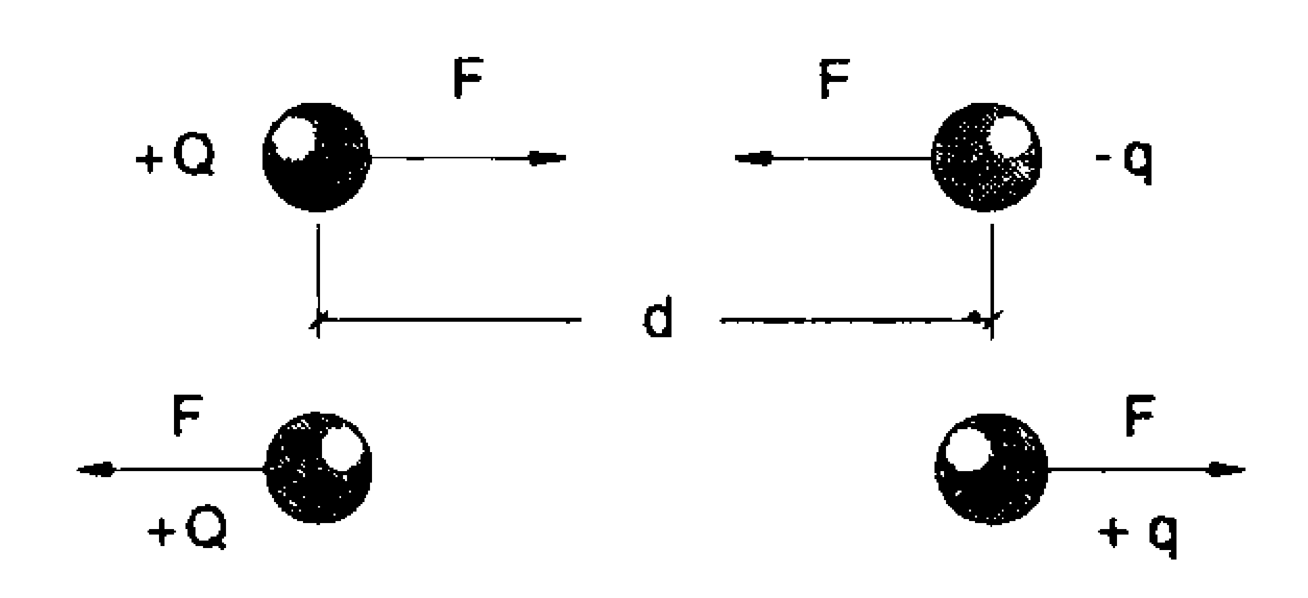
Los no conductores, llamados también aisladores o dieléctricos, son materiales en los que las partículas cargadas no se mueven debido a que está fuertemente ligadas a los

http://librosysolucionarios.net

átomos de las que forman parte, por ejemplo tenemos el vidrio, el plástico, la porcelana, el caucho, etc.

LEY FUNDAMENTAL DE LA ELECTROSTÁTICA LEY DE COULOMB

Establece que: "Dos cargas puntuales y fijas, situadas en el vacío experimentan una fuerza de interacción eléctrica que es directamente proporcional al producto de los valores de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia de separación".
¿A qué se llama carga puntual?
Una carga es puntual si está distribuida en un cuerpo cuyas dimensiones relativas son despreciables en comparación con las demás dimensiones que intervienen en un problema.



$$F = K \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{d^2}$$

Donde:

- F : Es la fuerza eléctrica, en newton "N".
- |Q| y |q| : Valores de las cargas puntuales, en coulomb "C".
- d : Distancia entre las dos cargas puntuales, en metro "m".
- K : Coeficiente de la ley de Coulomb.

El valor de K depende del medio material que rodea a las cargas eléctricas. El valor de K en el aire y/o vacío es:

$$K = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

NOTA : Cabe señalar que a nivel de educación superior la ecuación de la ley de Cou-lomb también la podemos escribir así:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{d^2}$$

El valor del coeficiente de la Ley de Coulomb está dada por:

$$K = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} = 9 \times 10^9 \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

Donde:

ε_0 : Es la constante dieléctrica del vacío

El valor de ε_0 para el aire y el vacío es:

$$\varepsilon_0 = 8{,}86 \times 10^{-12} \frac{C^2}{N \cdot m^2}$$

En un medio ambiente dieléctrico diferente del vacío y el aire se cumple:

$$F = \frac{1}{4\pi\varepsilon_m} \cdot \frac{|Q| \cdot |q|}{d^2}$$

Donde:

ε_m : Es la constante de permitividad eléctrica del medio material (diferente al vacío y al aire), donde se encuentran las cargas eléctricas.

El valor de ε_m nos indica el grado de dificultad que ofrece el medio material al paso de la corriente eléctrica.

En otro medio material diferente al vacío o al aire, la constante de permi-tividad del medio ε_m es mayo que ε_0 ; experimentalmente se cumple:

$$\varepsilon_m = \varepsilon \cdot \varepsilon_0$$

Donde:

ε : Es la constante dieléctrica relativa del medio material, es adimensional.

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_m}{\varepsilon_0}$$

UNIDADES EN EL SISTEMA cgs

Dado que todavía se usan, citamos a continuación las unidades del sistema cgs.

- Q y q : unidades electrostáticas de carga "u.e.q." también llamadas stat-coulomb "stc" o franklin "F_K"
- d : Distancia en cm
- F : Fuerza en dina

http://librosysolucionarios.net

$$K = 1\ \frac{din \times cm^2}{(u.e.q.)^2}$$ (en el aire y/o vacío)

Para valorar cada una de estas unidades obsérvese detenidamente estas equivalencias: ($e^- = 1$ electrón)

$$1\ C = 6{,}25 \times 10^{18}\ e^-$$

$$1\ C = 3 \times 10^{9}\ u.e.q.$$

$$1\ (-e) = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$$

$$1\ (+e) = 1{,}6 \times 10^{-19}\ C$$

$$1\ u.e.q. = 0{,}33 \times 10^{-9}\ C$$

$$1\ u.e.q. = 2{,}062\,5 \times 10^{9}\ e^-$$

$$1\ e^- = 0{,}48 \times 10^{-9}\ u.e.q.$$

NOTA: 1 u.e.q. = 1 stat coulomb

ó 1 u.e.q. = 1 franklin

1 C = 10^9 u.e.q. ó stc. ó frank.

Masa 1 e^- = $9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

Masa 1 protón = $1{,}67 \times 10^{-27}$ kg

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la fuerza con que se repelen dos electrones que están a $0{,}2 \times 10^{-8}$ m.

RESOLUCIÓN : Sabiendo que la carga "q" de un electrón $1{,}6 \times 10^{-19}$ C:

$$F = K\frac{Q\cdot q}{d^2} = 9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ C)^2}{(0{,}2 \times 10^{-8}\ m)^2}$$

Rpta.: $F = 576 \times 10^{-13}$ N

PROBLEMA 2. ¿Con qué fuerza se atraen una masa de 4 protones con una masa de 12 electrones que están separados una distancia de 2×10^{-9} m?

RESOLUCIÓN: La carga de un protón es igual a la carga de un electrón igual a $1{,}6 \times 10^{-19}$ C.

$$F = K\frac{Q\cdot q}{d^2} = 9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{(4 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ C)(12 \times 1{,}6 \times 10^{-19}\ C)}{(2 \times 10^{-9}\ m)^2}$$

Rpta.: $F = 276{,}48 \times 10^{-11}$ N

PROBLEMA 3. Dos esferitas iguales tienen cargas de +60 u.e.q. y -100 u.e.q. Calcular:

a) ¿Con qué fuerza se atraen o se repelen si se les pone en contacto?

b) ¿Con qué fuerza si después de juntarlos se separan a 20 cm de distancia?

RESOLUCIÓN :

$Q = +60$ u.e.q. $\quad F_1 = ?$

$q = -100$ u.e.q. $\quad F_2 = ?$

$d_1 = 0$ cm

$d_2 = 20$ cm

$$K = 1\ \frac{din \times cm^2}{(u.e.q.)^2}$$

a) Si se ponen en contacto la fuerza de atracción neta viene a ser la suma de las cargas:

$$(+60) + (-100) = -40\ u.e.q.$$

Pero apenas se juntan se establece un equilibrio de carga con -20 u.e.q. para cada uno y se produce una repulsión.

b) Como al entrar en contacto, la carga neta se reparte entre las dos esferitas, la fuerza a 20 cm de distancia es de repulsión, y su valor es:

$$F = K\frac{Q\,q}{d^2}$$

Reemplazando valores:

$$F = 1\ \frac{din \times cm^2}{(u.e.q.)^2} \times \frac{(-20\ u.e.q.)\ (-20\ u.e.q.)}{(20\ cm)^2}$$

http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $F = 1\ din = 10^{-5}\ N$

PROBLEMA 4. Un átomo de hidrógeno (un protio) tiene un protón y un electrón; cada una de estas partículas posee $1{,}6 \times 10^{-19}$ C. Suponiendo que la órbita que recorre el electrón es circular y que la distancia entre ambas partículas es de $5{,}3 \times 10^{-11}$ m. Calcular:

a) La fuerza eléctrica de atracción entre el protón y el electrón.
b) La velocidad lineal del electrón.

Masa de 1 $e^- = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

RESOLUCIÓN: $Q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$d = 5{,}3 \times 10^{-11}$ m $\qquad q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C

$m = 9{,}11 \times 10^{-31}$ kg

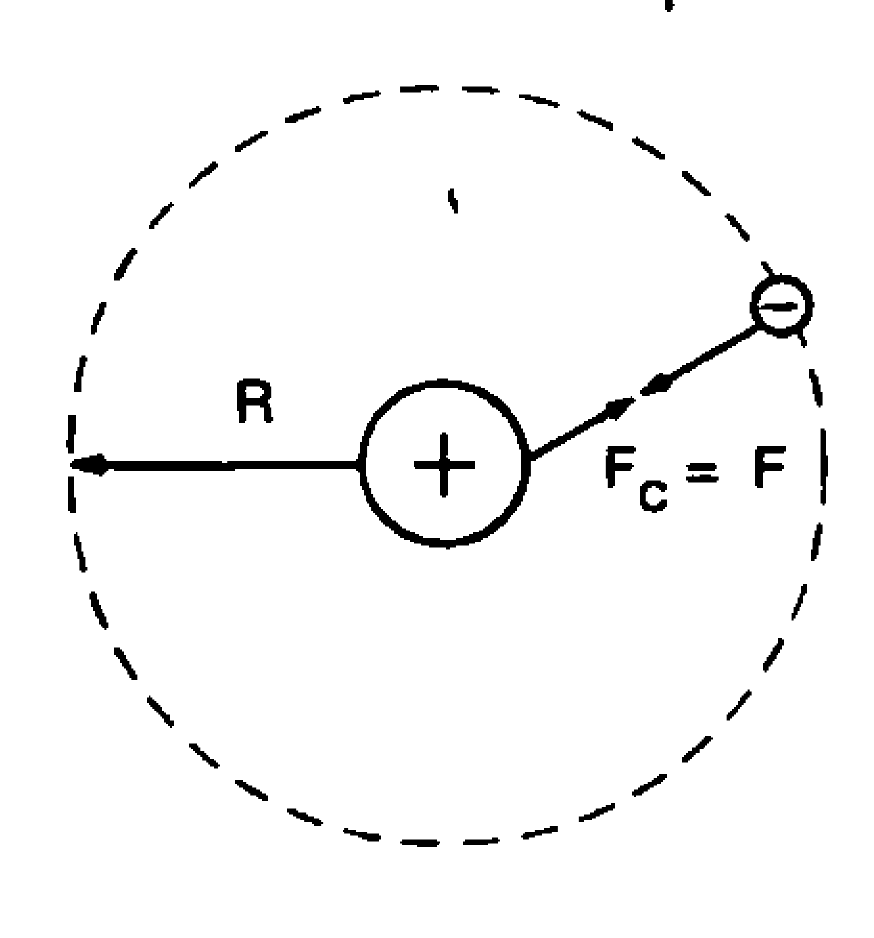
Recordando que: $F = K\dfrac{Q\,q}{d^2}$

$$F = 9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{(1{,}6 \times 10^{-19}\ C)^2}{(5{,}3 \times 10^{-11}\ m)^2}$$

Rpta.: $F = 8{,}2 \times 10^{-8}$ N

ó $\quad F = 8{,}2 \times 10^{-3}$ din

b) La fuerza de atracción entre el protón y el electrón es centrípeta, por consiguiente su aceleración es centrípeta.



$$F = m \cdot a_c$$

pero: $a_c = \dfrac{V^2}{R} \quad \therefore \quad F = \dfrac{m.V^2}{R}$

Luego: $V = \sqrt{\dfrac{F.R}{m}}$

$$V = \sqrt{\frac{8{,}2 \times 10^{-8}\ N \times 5{,}3 \times 10^{-11}\ m}{9{,}11 \times 10^{-31}\ kg}}$$

$$V = \sqrt{\frac{43{,}46 \times 10^{-19}\ N \times m}{9{,}11 \times 10^{-31}\ kg}}$$

pero: $N = \dfrac{kg \times m}{s^2}$; luego:

$$V = \sqrt{4{,}47 \times 10^{+12}\ \frac{kg \times m}{s^2} \times \frac{m}{kg}}$$

Rpta.: $V = 2{,}2 \times 10^6$ m/s

PROBLEMA 5. En los extremos de la hipotenusa de un triángulo, cuyos catetos miden 3 cm y 4 cm, hay dos cargas positivas de 18 u.e.q. y de 100 u.e.q. Calcular:

a) La fuerza que ejercen sobre una carga positiva de 2 u.e.q. situada en el vértice del ángulo recto.
b) Calcular también con qué fuerza se rechazan entre ellas.

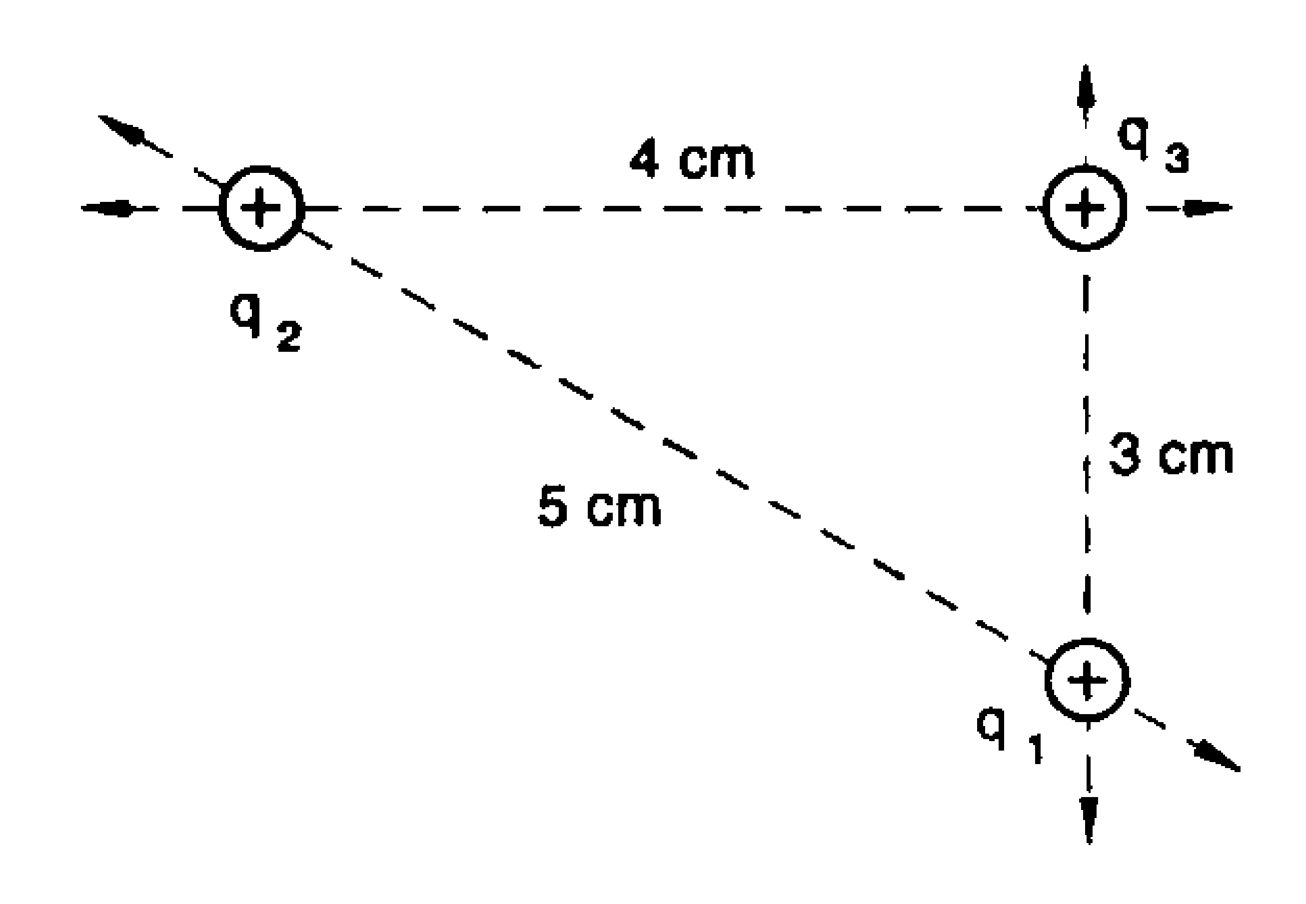
RESOLUCIÓN:

$q_1 = 18$ u.e.q. $\qquad d_{1-3} = 3$ cm

$q_2 = 100$ u.e.q. $\qquad d_{1-2} = 4$ cm

$q_3 = 2$ u.e.q.

a) $F = ?$ $\qquad$ b) $F_{1-2} = ?$



Recordando que: $F = K\dfrac{Q\,q}{d^2}$

$$F_{1-3} = 1\ \frac{\text{din} \times \text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2} \times \frac{(18\ \text{u.e.q.})\ (2\ \text{u.e.q.})}{(3\ \text{cm})^2}$$

$$F_{1-3} = 4\ \text{din} \qquad (1)$$

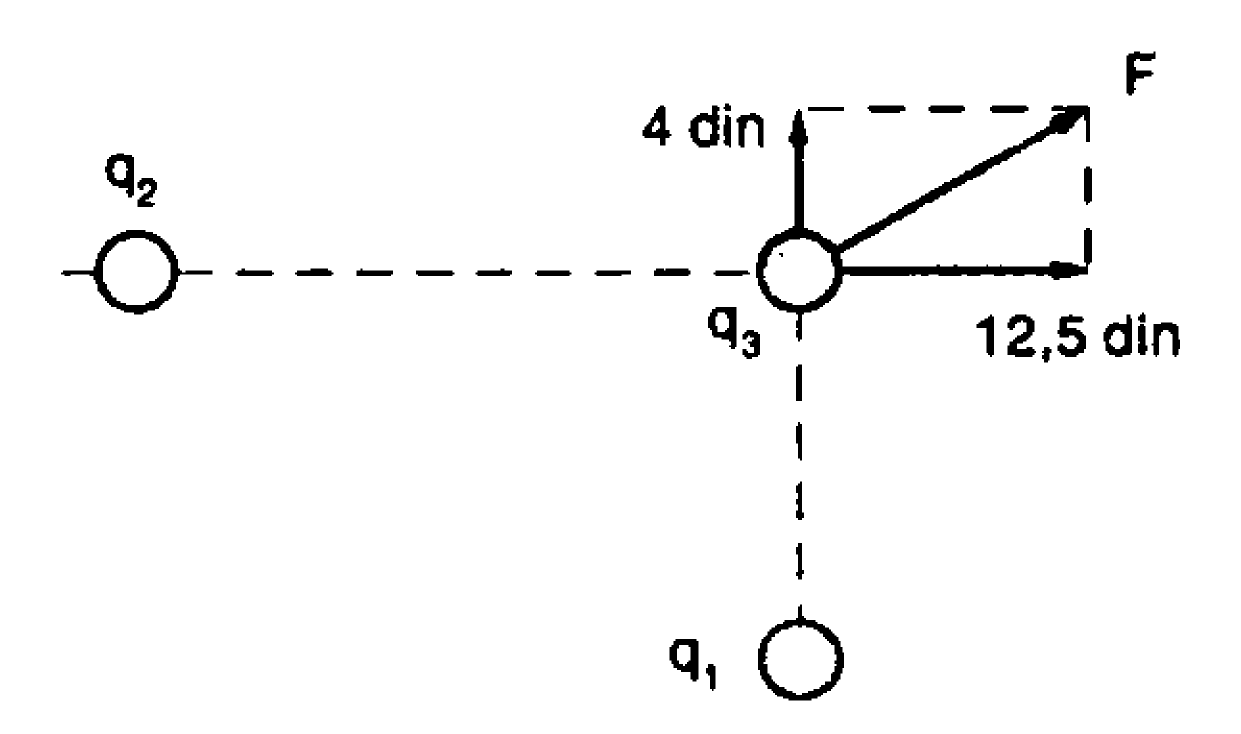
$$F_{2-3} = 1\ \frac{\text{din} \times \text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2} \times \frac{(100\ \text{u.e.q.})\ (2\ \text{u.e.q.})}{(4\ \text{cm})^2}$$

$$F_{2-3} = 12{,}5\ \text{din} \qquad (2)$$

Las fuerzas (1) y (2) son componentes de las fuerzas de repulsión de q_1 y q_2 sobre q_3; mediante la diagonal del para-lelogramo se halla la repulsión o rechazo total.

$$F = \sqrt{(F_{1-3})^2 + (F_{2-3})^2}$$

$$F = \sqrt{(4\ \text{din})^2 + (12{,}5\ \text{din})^2}$$



Rpta.: $F = 13{,}12\ \text{din}$

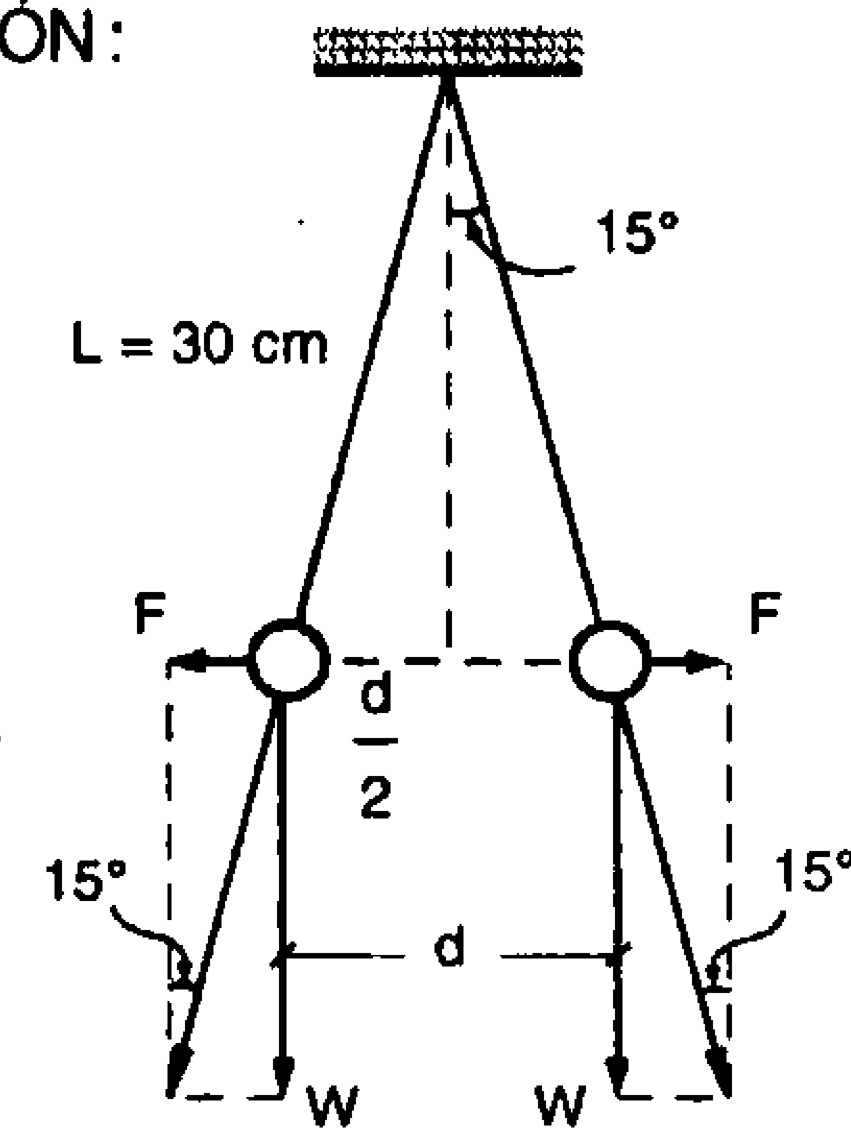
$$F_{1-2} = 1\ \frac{\text{din} \times \text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2} \times \frac{(18\ \text{u.e.q.})\ (100\ \text{u.e.q.})}{(5\ \text{cm})^2}$$

Rpta.: $F_{1-2} = 72\ \text{din}$

PROBLEMA 6. Dos esferas están suspendidas de un mismo punto mediante dos hilos de ceda. Cada esfera tiene una masa de 300 g. Calcular la carga que deben poseer las esferas para que al separarse los hilos hagan un ángulo de 30°. tg 15° = 0,27.

RESOLUCIÓN :





La fuerza F que los separa se debe a que cada esfera tiene una carga del mismo signo y se calcula por la Ley de Coulomb:

$$F = K\frac{Q.q}{d^2} \qquad (\text{I})$$

Por la posición que adquieren las esferas, la fuerza F en función del peso W se calcula así:

$F = W\,.\,\text{tg}\ 15°$; Pero: $W = m\,.\,g$,

luego: $F = m\,.\,g\,.\,\text{tg}\ 15°$

$$F = 0{,}3\ \text{kg} \times 9{,}8\ \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \times 0{,}27$$

$$F = 0{,}793\,8\ \text{N} \qquad (\text{a})$$

Este es el valor de rechazo de las fuerzas electrostáticas que existen en las esferas, cuyo valor es igual a la fuerza de rechazo dada en (I). Sustituyendo valores en (I), por dato Q = q

$$0{,}793\,8\ \text{N} = 9 \times 10^9\ \text{N} \times \frac{\text{m}^2}{\text{C}^2} \times \frac{q^2}{d^2}$$

de donde:

$$q^2 = d^2 \times 0{,}882 \times 10^{-10}\ \frac{\text{C}^2}{\text{m}^2} \qquad (\text{II})$$

Cálculo de d:

$$\frac{d}{2} = L\ \text{sen}\ 15° \ ; \ d = 2\,L\ \text{sen}\ 15°$$

$$d = 2L\sqrt{\frac{1 - \cos 30°}{2}} = 2L\sqrt{\frac{1 - 0{,}87}{2}}$$

pero: $L = 0{,}30\ \text{m}$

$\therefore$ $d = 0{,}15\ \text{m}$

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo en (II):

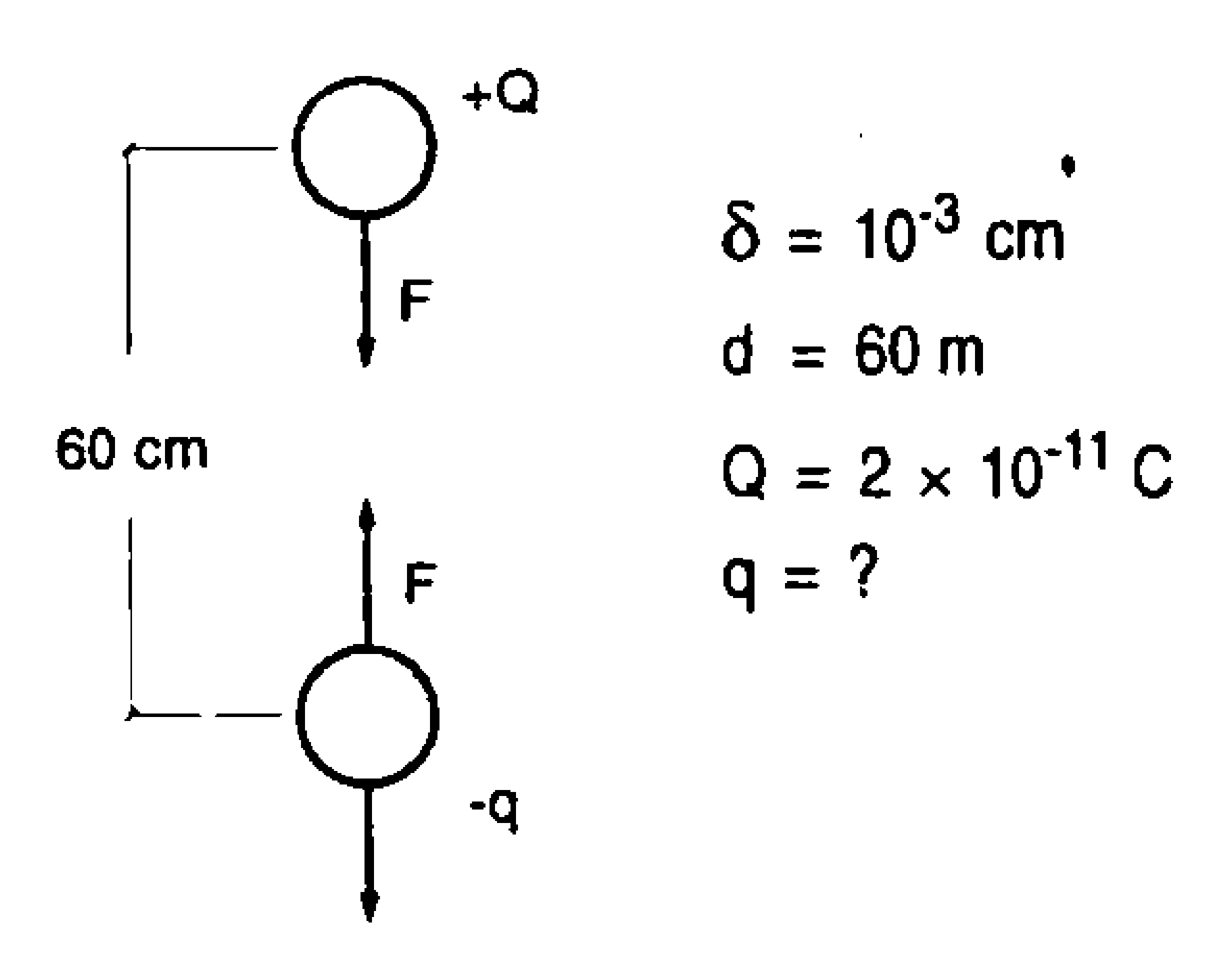
$$q^2 = (0{,}15\ m)^2 \times 0{,}882 \times 10^{-10}\ \frac{C^2}{m^2}$$

de donde:

Rpta.: $q = 1{,}41 \times 10^{-6}\ C$

PROBLEMA 7. Una esfera de aluminio de 10^{-3} m de diámetro, está debajo de otra del mismo tamaño cargada positivamente de 2×10^{-11} C. Ambas están en el vacío. ¿Cuál será la carga negativa de la esfera que está debajo, a 60 cm, para que por atracción por la de arriba la cual no se mueve, se mantenga en equilibrio? La densidad del Al es 2,7 g/cm³.

RESOLUCIÓN :



$\delta = 10^{-3}$ cm

$d = 60$ m

$Q = 2 \times 10^{-11}$ C

$q = ?$

Cálculo del volumen de la esferita:

$$V = \frac{\pi d^3}{6} = \frac{\pi (10^{-3}\ m)^3}{6}$$

$$V = 0{,}52 \times 10^{-9}\ m^3$$

Masa material de la esferita:

$$m = V \cdot \delta$$

$$m = 0{,}52 \times 10^{-9}\ m^3 \times 2{,}7 \times 10^3\ kg/m^3$$

$$m = 1{,}404 \times 10^{-6}\ kg$$

La esfera tiende a caer por su propio peso, la fuerza que la sostiene y evita su caída es la fuerza de atracción que ejerce la carga eléctrica "Q" de la esfera cargada positivamente y que está en la parte superior.

Cálculo de la fuerza con que tiende a caer la esferita:

$$w = m \cdot g$$

$$w = 1{,}404 \times 10^{-6}\ kg \times 9{,}8\ m/s^2$$

$$w = 13{,}76 \times 10^{-6}\ kg \times m/s^2$$

$$w = 13{,}76 \times 10^{-6}\ N$$

Cálculo de la masa eléctrica que debe tener "q" que pesa $13{,}76 \times 10^{-6}$ N, para que no se caiga:

Se sabe que: $F = K\,\frac{Q\,q}{d^2}$

De donde: $q = \frac{F\,d^2}{KQ}$

$$q = \frac{13{,}76 \times 10^{-6}\ N \times (0{,}60\ m)^2}{9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times 2 \times 10^{-11} C}$$

Rpta.: $q = 0{,}275\,2 \times 10^{-4}\ C$

PROBLEMA 8. Los protones de los rayos cósmicos llegan a la Tierra a razón de 6 protones/cm² x s, promediando toda la superficie de la Tierra. ¿Qué cantidad de carga recibe el globo terrestre de fuera de su atmósfera, en forma de protones de radiación cósmica incidente?

Radio terrestre = $6{,}4 \times 10^6$ m

RESOLUCIÓN :

Cálculo de la superficie de la Tierra en cm² :

$$S = 4\pi R^2 = 4\pi (6{,}4 \times 10^8\ cm)^2$$

$$S = 514{,}7 \times 10^{16}\ cm^2$$

Total de protones "n" que recibe la superficie terrestre:

$$n = \frac{6\ protones}{cm^2 \times s} \times 514{,}7 \times 10^{16}\ cm^2$$

$$n = 3{,}09 \times 10^{19}\ \frac{protones}{s}$$

Como cada protón tiene una carga de $1{,}6 \times 10^{-19}$ C, la carga total que recibe la Tierra será:

$$q = 3{,}09 \times 10^{19}\ \frac{protones}{s} \times$$

$$\times\ 1{,}6 \times 10^{-19}\ \frac{C}{protones}$$

Rpta.: $q = 4{,}95$ C/s

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 9. ¿Qué separación de-be haber entre dos protones para que la fuerza repulsiva eléctrica entre ellos sea igual al peso de un protón?

$$q = 1,6 \times 10^{-19}\ C$$

$$\text{masa del protón} = 1,67 \times 10^{-27}\ kg$$

RESOLUCIÓN : Por enunciado:

$$F = Peso$$

sustituyendo por sus equivalentes:

$$K\frac{q.q}{d^2} = m.g$$

$$K\frac{q^2}{d^2} = m.g$$

de donde: $d = q\sqrt{\frac{K}{m.g}}$

$$d = 1,6 \times 10^{-19}\ C \times$$

$$\times\sqrt{\frac{9 \times 10^9\ N \times m^2/C^2}{1,67 \times 10^{-27}\ kg \times 9,8\ m/s^2}}$$

$$d = 1,6 \times 10^{-19}\ C \times$$

$$\times\sqrt{\frac{9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2}}{1,67 \times 9,8 \times 10^{-27}\ kg \times \frac{m}{s^2}}}$$

$$d = 1,6 \times 10^{-19}\ C \times$$

$$\times\sqrt{\frac{9 \times 10^9\ N \times m^2}{1,67 \times 9,8 \times 10^{-27}\ N}}$$

de donde: $d = 1,18 \times 10^{-1}\ m$

Rpta.: $d = 0,118\ m$

PROBLEMA 10. Calcular la carga positiva que hay en un litro de a gua pura.

RESOLUCIÓN : Cálculo del número de moléculas de agua que hay en un litro de agua:

$$\# = n \times 6,023 \times 10^{23} \text{moléculas/mol}$$

$$\# = \frac{W}{M} \times 6,023 \times 10^{23} \text{moléculas/mol}$$

$$\# = \frac{1\,000\ g}{18\ g/mol} \times 6,023 \times$$

$$\times 10^{23} \text{moléculas/mol}$$

$$\# = 334,61 \times 10^{23} \text{moléculas de agua}$$

Ahora, en una molécula de agua hay:

2 átomos de H, total 2 protones

1 átomos de O, total 8 protones

Luego en una molécula de agua hay 10 protones.

Entonces la carga de un protón es $1,602 \times 10^{-19}$ C, luego la carga total en una molécula de agua será $10 \times 1,602 \times 10^{-19}$ C.

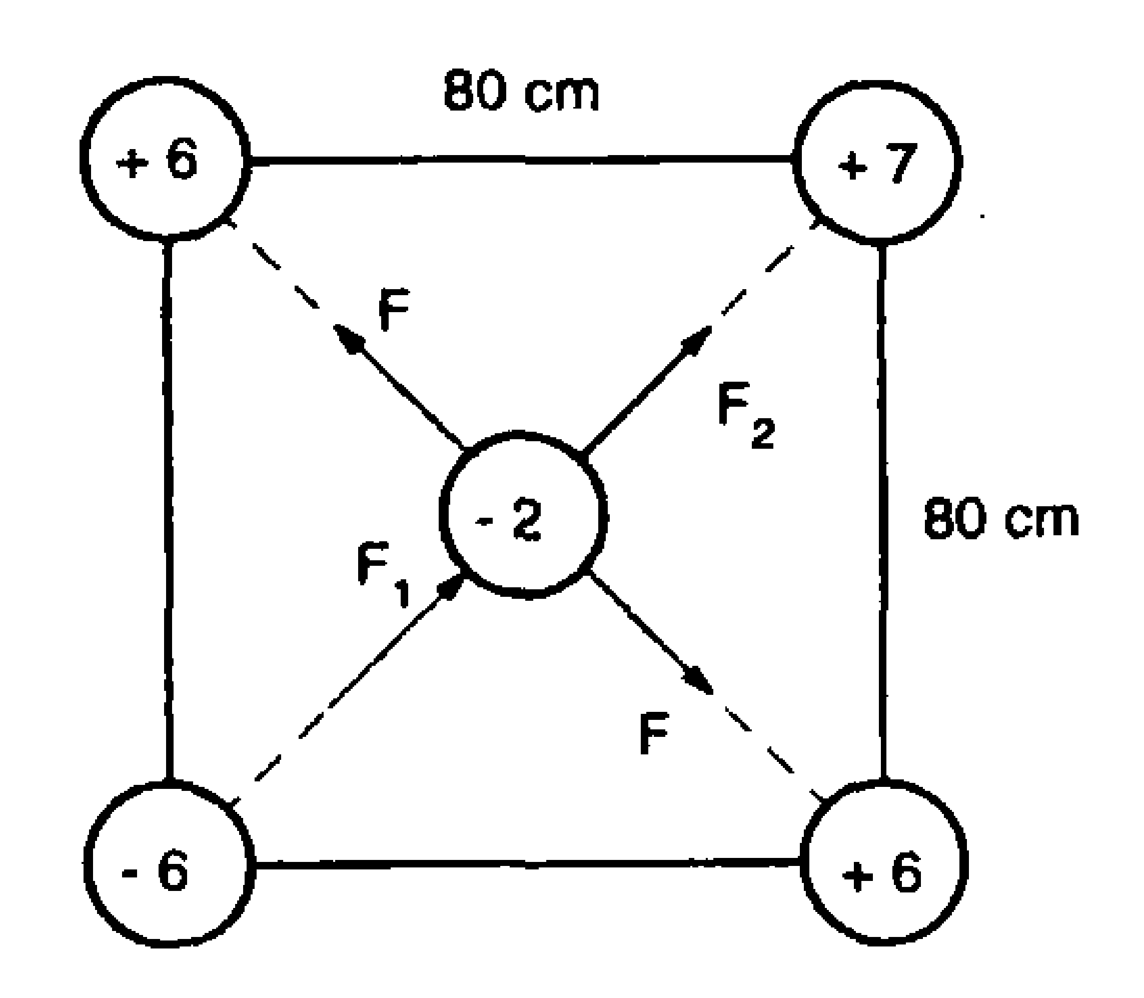
Carga total de 1 litro de agua =

= $334,61 \times 10^{-23}$ moléculas de agua x

$\times\ 10 \times 1,602 \times 10^{-19}$ C/molécula

Rpta.: $q_T = 5\,360,45 \times 10^{4}$ C

PROBLEMA 11. En los vértices de un cuadrado hay cuatro caras, conforme lo indica la figura. En el centro del cuadrado hay una quinta carga. ¿Cuál es la fuerza sobre la carga central y qué sentido tiene? Todas las cargas son coulombs.



RESOLUCIÓN :

Las dos cargas +6 se anulan por ser iguales y de signo contrario y no ejercerán ninguna influencia sobre la carga -2 del centro.

Las cargas +7 y -6 actúan sobre la carga central de -2 en el mismo sentido, dirigido hacia la carga +7 que la atrae y la -6 que la rechaza y la envía hacia +7. Su valor será:

$$F_T = F_1 + F_2$$

Cálculo del valor de la diagonal del cuadrado

$$d = \sqrt{(80\ cm)^2 + (80\ cm)^2}$$

$$d = 113,14\ cm = 1,1314\ m$$

Cálculo de la fuerza F_1:

$$F_1 = K\frac{Q.q}{d^2}$$

$$F_1 = 9\times10^9\frac{N\times m^2}{C^2}\times\frac{6\ C\times 2\ C}{\left(\frac{1,1314\ m}{2}\right)^2}$$

$$F_1 = 337,5\times 10^9\ N \qquad (1)$$

Cálculo de la fuerza F_2:

$$F_2 = K\frac{Q.q}{d^2}$$

$$F_2 = 9\times10^9\frac{N\times m^2}{C^2}\times\frac{2\ C\times 7\ C}{\left(\frac{1,1314\ m}{2}\right)^2}$$

$$F_1 = 393,75\times 10^9\ N \qquad (2)$$

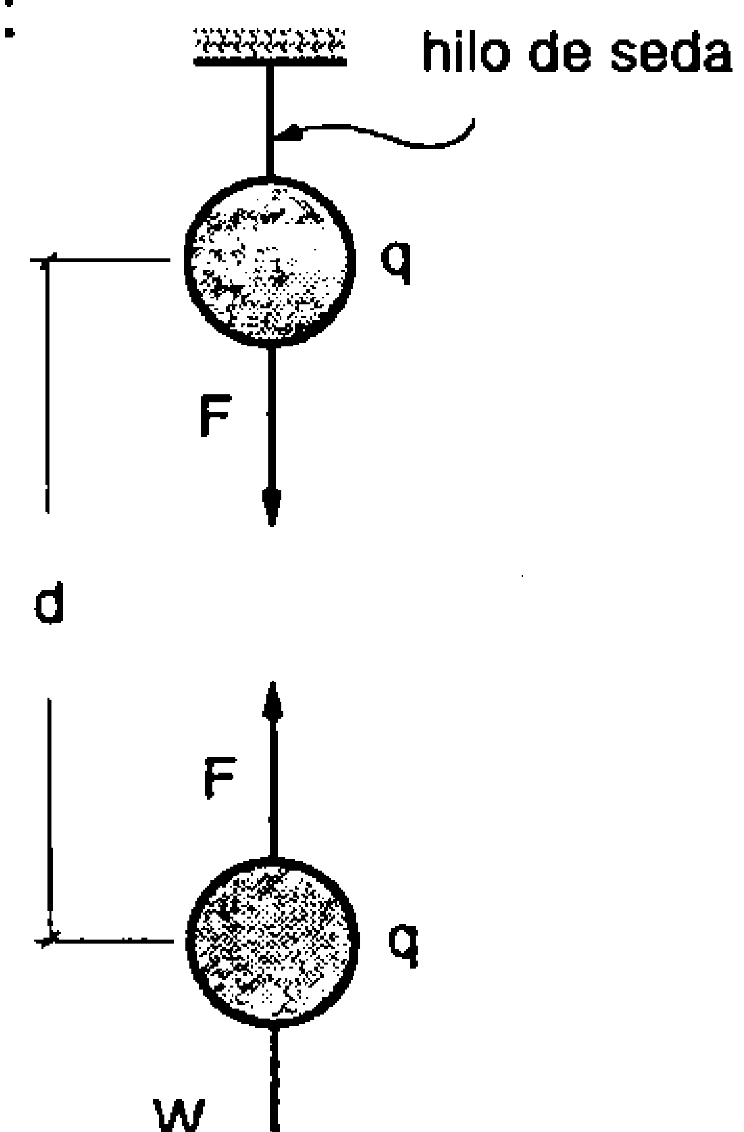
Sumando (1) y (2):

Rpta.: $F_T = F_1 + F_2$

$$F_T = 731,25\times 10^9\ N$$

PROBLEMA 12. Se tienen esferillas iguales de cargas iguales "q" y pesos iguales "w". ¿A qué distancia vertical debe estar una de ellas encima de la otra fija, de tal manera que se equilibren?

RESOLUCIÓN :



De la figura, para la esfera de abajo:

$$\Sigma F_y = 0 \ \rightarrow\ F = W \qquad (1)$$

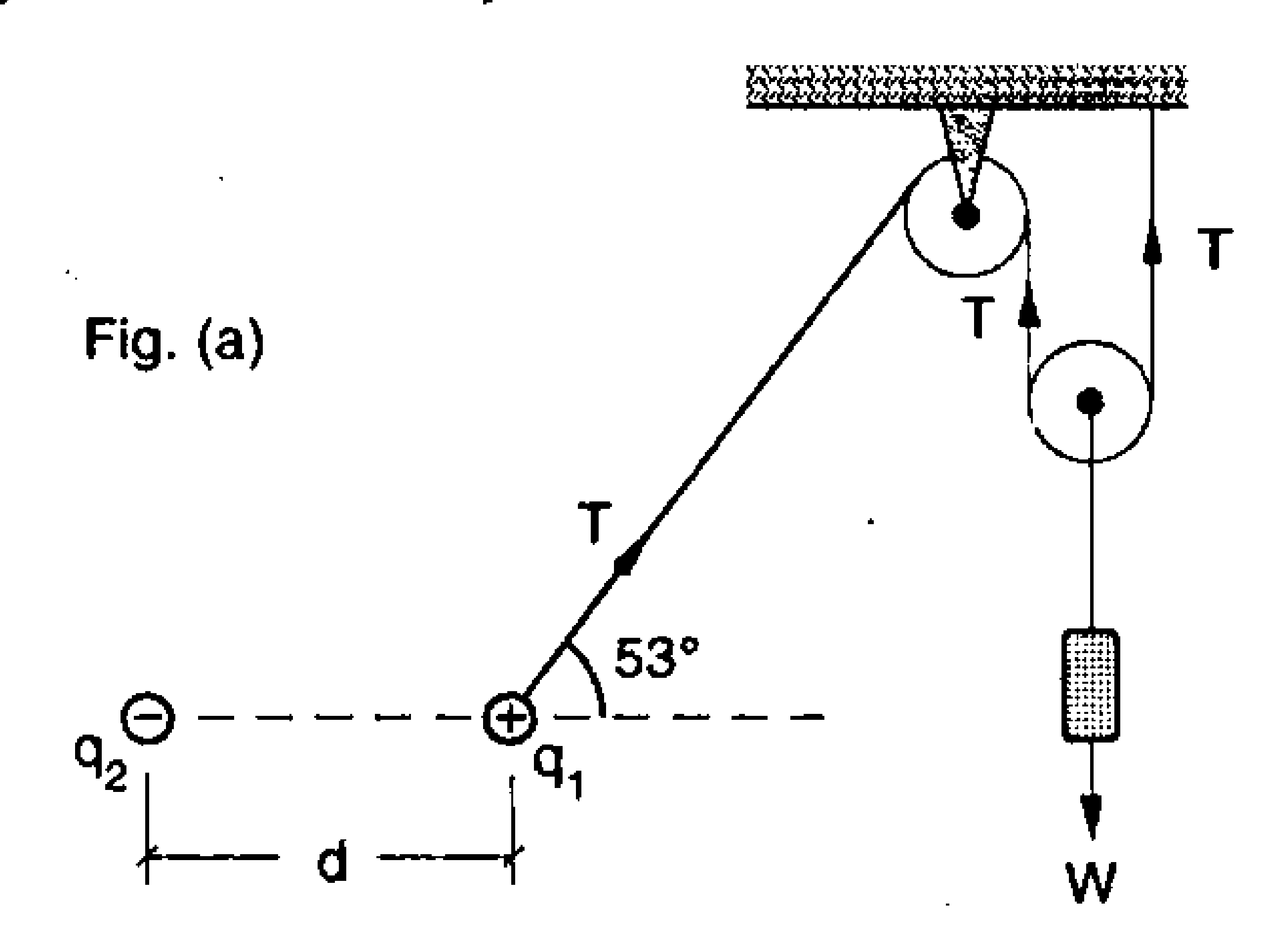
También: $$F = \frac{Kq^2}{d^2} \qquad (2)$$

Igualando (1) y (2):

$$\frac{Kq^2}{d^2} = W \text{ de donde:}$$

Rpta.: $d = q\sqrt{\frac{K}{W}}$

PROBLEMA 13. Si el sistema de la figura se mantiene en equilibrio. ¿Cuál será el valor de W?



RESOLUCIÓN :

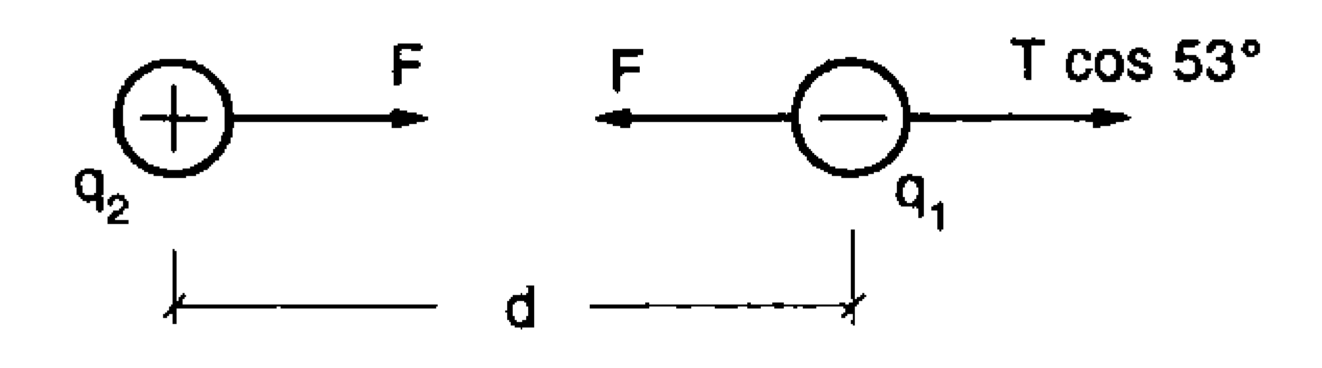


Fig. (b)

De la Fig. (a): $\Sigma F_y = 0$

$$2T = W \quad \therefore \quad T = \frac{W}{2} \qquad (1)$$

De la Fig. (b): $\Sigma F_x = 0$

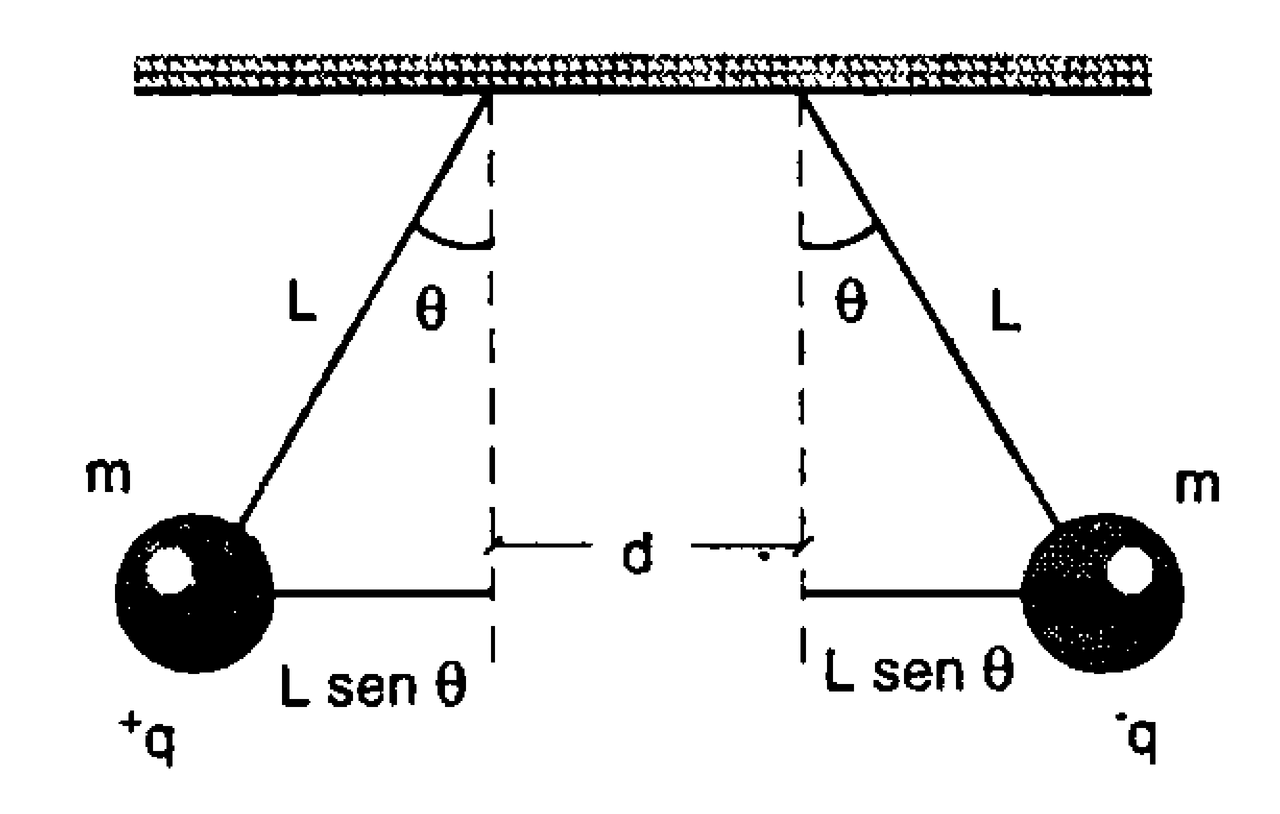
$$T\cos 53° = F = K\frac{q_1 q_2}{d^2} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

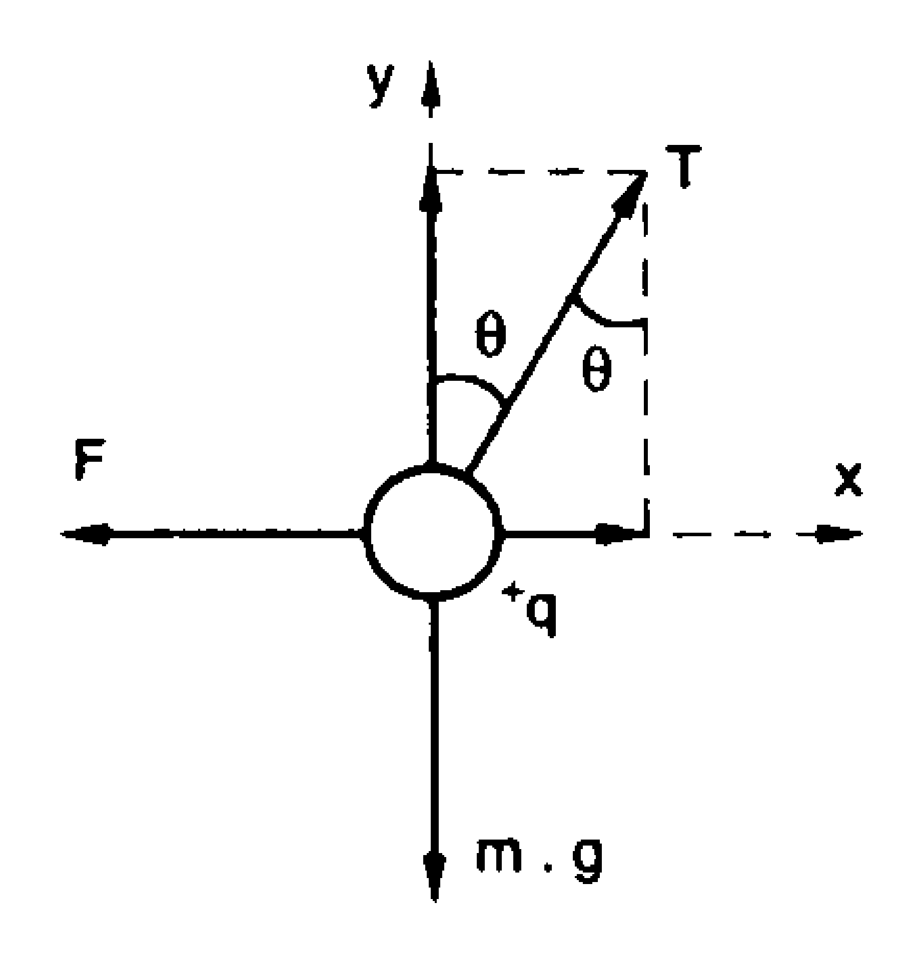
$$\frac{W}{2}\cdot\frac{3}{5} = K\frac{q_1 q_2}{d^2}$$

Rpta.: $W = \frac{10}{3} K \frac{q_1 q_2}{d^2}$

PROBLEMA 14. Para el siguiente sistema en equilibrio, mostrado en la figura, calcular el valor de "q^2".



RESOLUCIÓN : Diagrama libre para la esfera de la izquierda:



Del gráfico, como el sistema está en equilibrio:

$$\Sigma F_x = 0$$

$$F = T \operatorname{sen} \theta \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$T \cos \theta = m \, . \, g$$

$$T = \frac{m.g}{\cos \theta} \qquad (2)$$

Por otro lado, en la figura del problema, por Coulomb:

$$F = \frac{Kq^2}{(d + 2L \operatorname{sen} \theta)^2} \qquad (3)$$

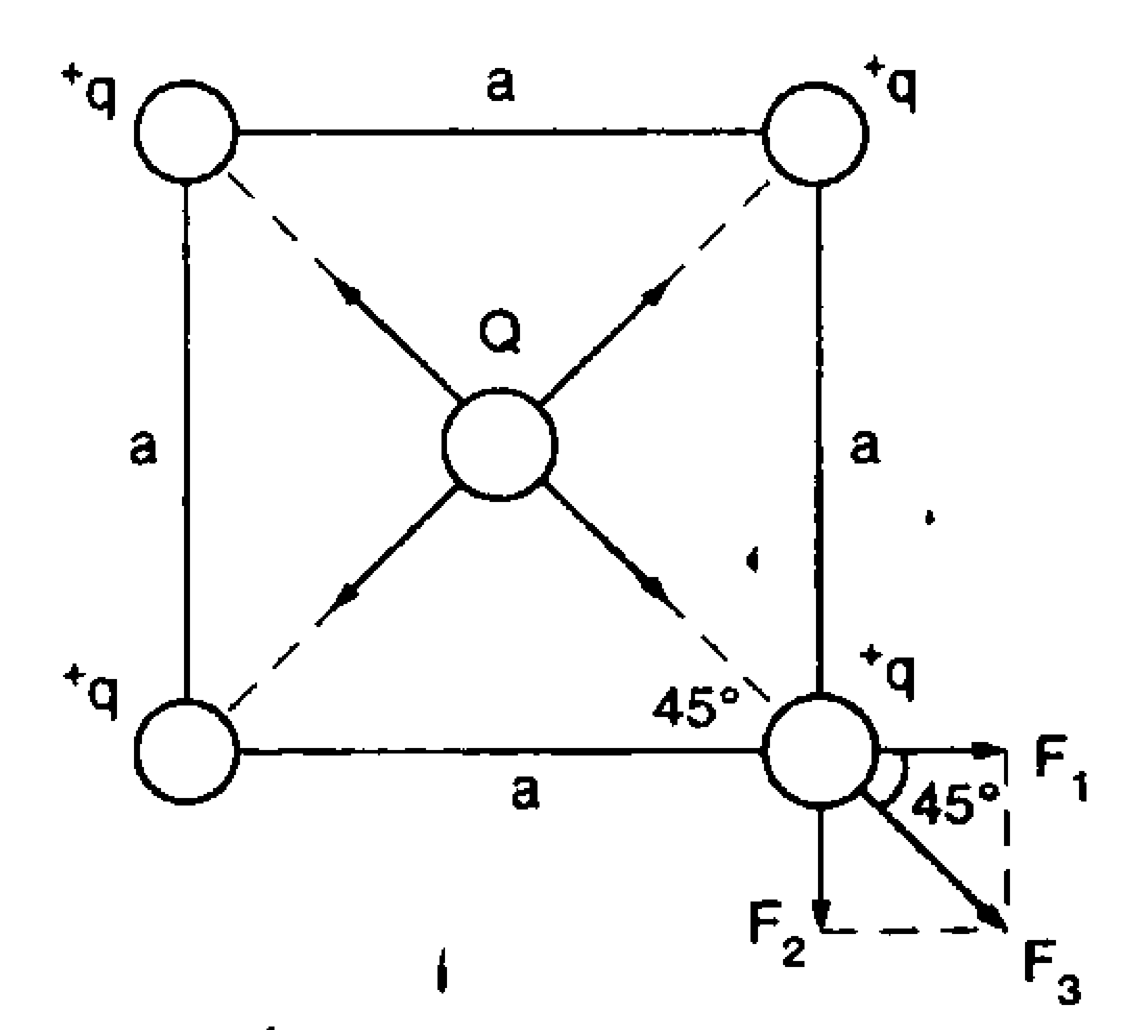
Sustituyendo (2) y (3) en (1):

$$\frac{Kq^2}{(d + 2L \operatorname{sen} \theta)^2} = \frac{m.g}{\cos \theta} \cdot \operatorname{sen} \theta$$

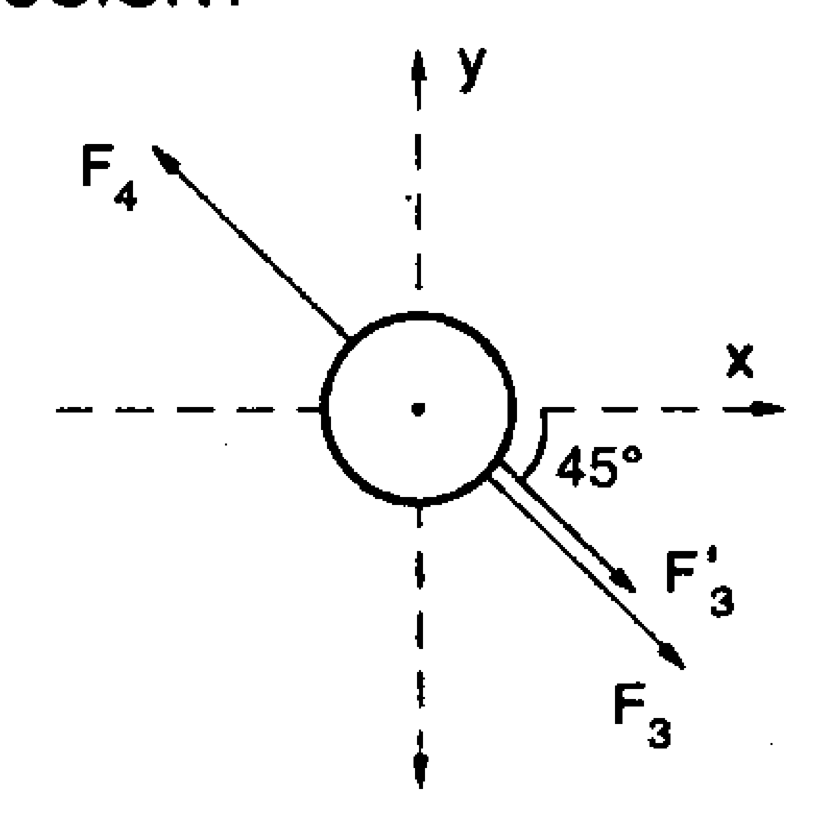
De donde:

Rpta.: $q^2 = \frac{m.g.\operatorname{tg}\theta (d + 2L \operatorname{sen}\theta)^2}{K}$

PROBLEMA 15. Cuatro cargas iguales, de valor "q" cada una, están situadas en los vértices de un cuadrado. ¿Cuál será la carga "Q" de signo contrario que será necesario colocar en el centro del cuadrado para que todo el sistema se encuentre en equilibrio?



RESOLUCIÓN :



Entre F_1 y F_2 dan una resultante F_3 cuyo valor está dado por:

$$F_3 = \sqrt{F_1^2 + F_2^2} \qquad (1)$$

pero: $F_1 = F_2 = \frac{K.q^2}{a^2} \qquad (2)$

(2) en (1): $F_3 = \frac{K.q^2}{a^2} \sqrt{2} \qquad (\phi)$

http://librosysolucionarios.net

Por otro lado: $F_3' + F_3 = F_4$ (3)

$$F_3' = \frac{K.q^2}{(a\sqrt{2})^2} = \frac{K.q^2}{2a^2} \quad (4)$$

$$F_4 = \frac{K.Q.q}{\left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)} = \frac{2K.Q.q}{a^2} \quad (5)$$

Reemplazando (ϕ), (4) y (5) en (3):

$$\frac{K.q^2}{2a^2} + \frac{K.q^2}{a^2}\sqrt{2} = \frac{2K.Q.q}{a^2}$$

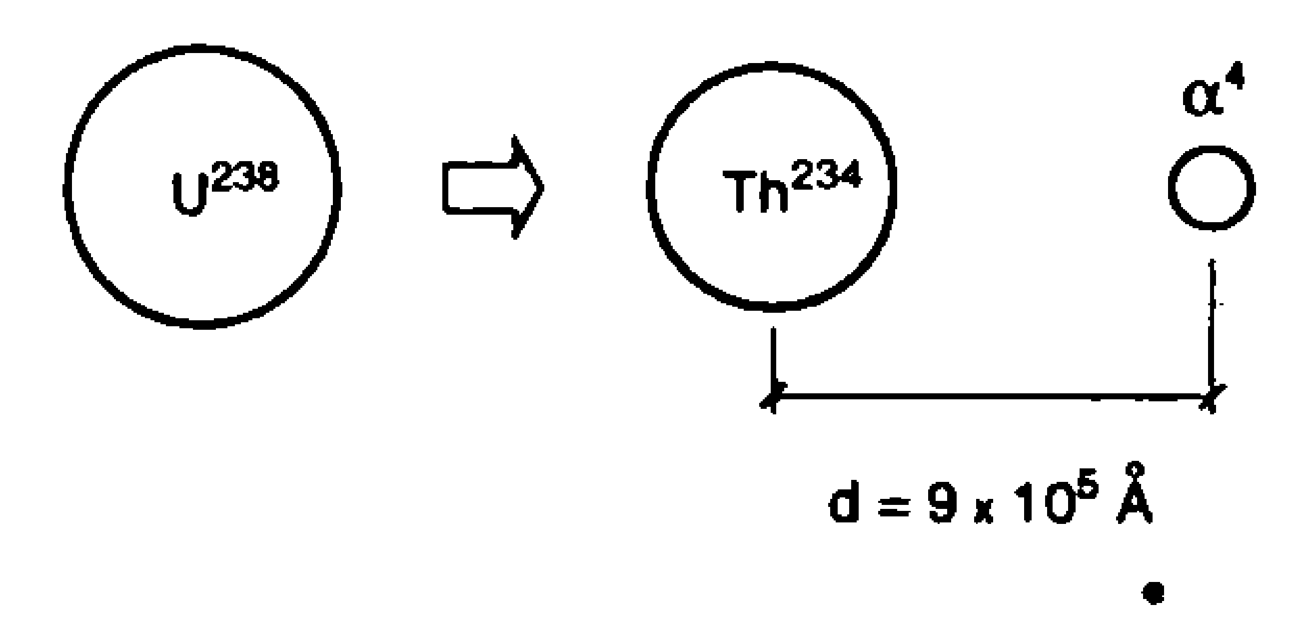
$$q\sqrt{2} + \frac{q}{2} = 2Q$$

$$Q = \frac{q(2\sqrt{2}+1)}{4}$$

PROBLEMA 16. En la desintegración atómica de un núcleo de Uranio (U^{238}), resulta un núcleo de Torio (Th^{234}) y una partícula α (núcleo de helio). Si en un instante dado la separación que existe entre los núcleos es de 9×10^{-5} Å determinar:

a) La fuerza de repulsión.
b) La aceleración de la partícula α.

RESOLUCIÓN:



a) La estructura atómica de cada núcleo es la siguiente:

$$U^{238}\begin{cases}92\,p^+\\146\,n^0\end{cases};\quad Th^{234}\begin{cases}90\,p^+\\144\,n^0\end{cases};\quad \alpha^4\begin{cases}2\,p^+\\2\,n^0\end{cases}$$

Aplicando: $F = K\dfrac{q_{Th}\,q_\alpha}{d^2}$

$$F = 9\times10^9\,\frac{N\times m^2}{C^2}\times\frac{(90\times1{,}6\times10^{-19}C)(2\times1{,}6\times10^{-19}C)}{(9\times10^{-15}m)^2}$$

Simplificando: $F = 512\ N$

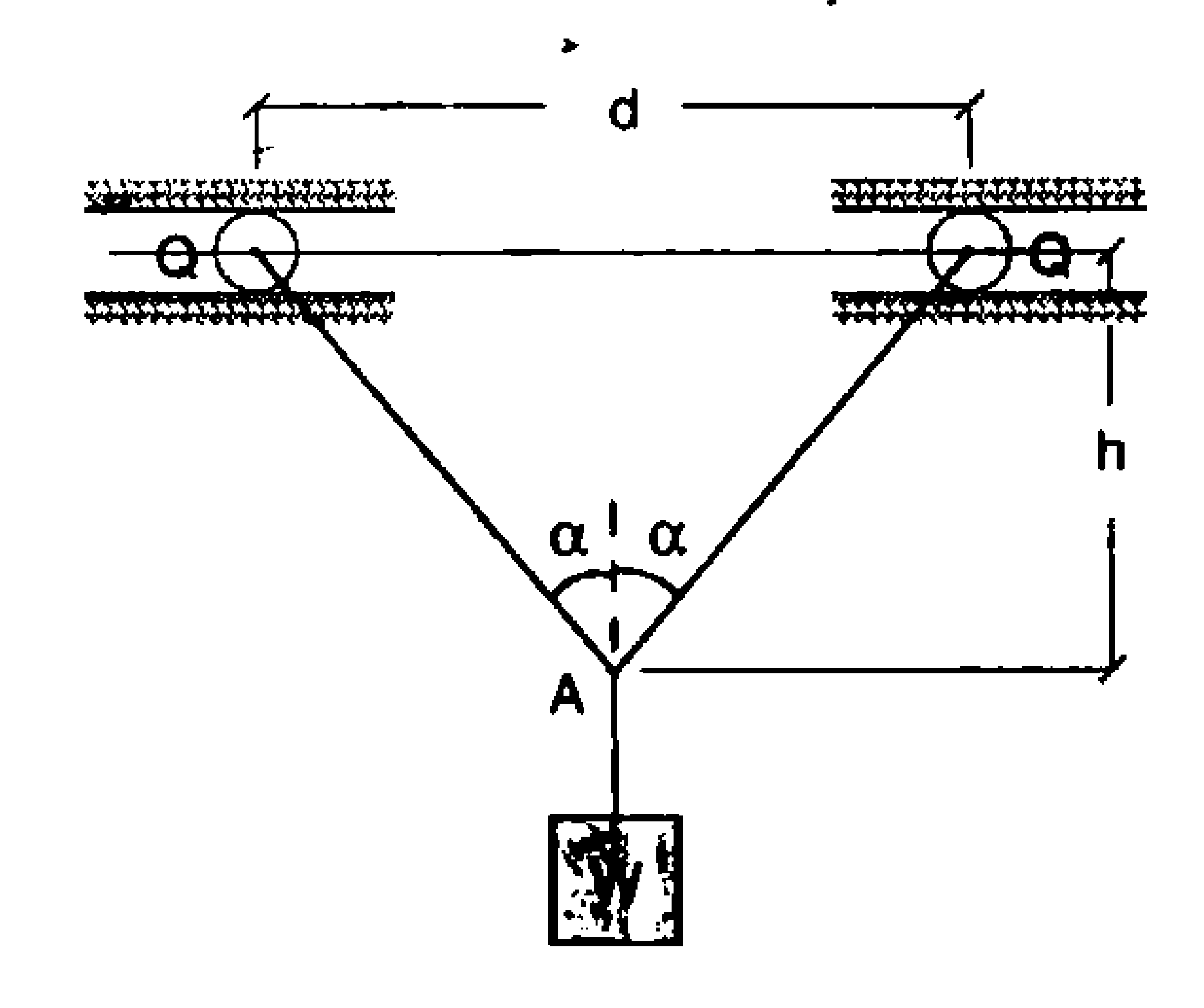
b) Se sabe que: $a_\alpha = \dfrac{F}{m_\alpha}$

$$a_\alpha = \frac{512\ N}{4\times1{,}6\times10^{-27}\ kg}$$

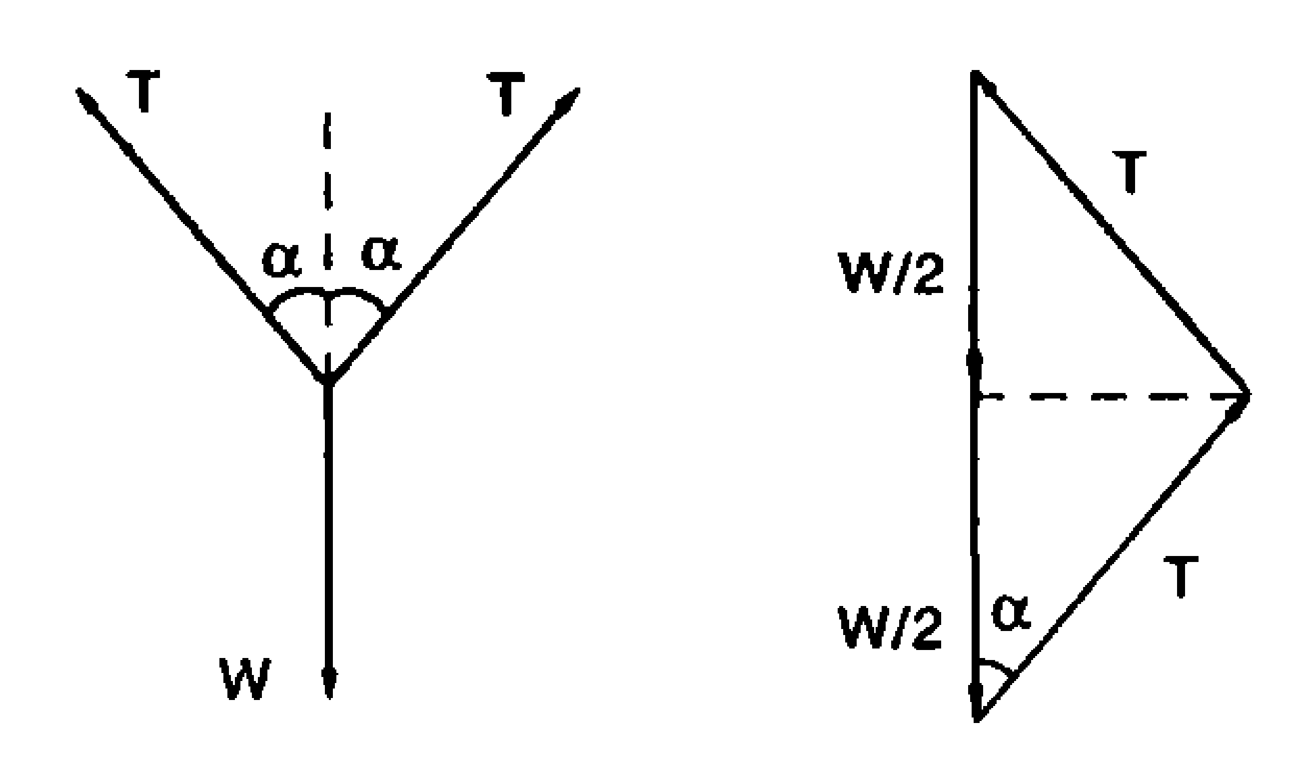
$$a_\alpha = \frac{512\ kg\times m/s^2}{4\times1{,}6\times10^{-27}\ kg}$$

$$a_\alpha = 7{,}66\times10^{28}\ m/s^2$$

PROBLEMA 17. En la figura, el sistema se encuentra en equilibrio y carece de fricción. Hallar la expresión de Q.



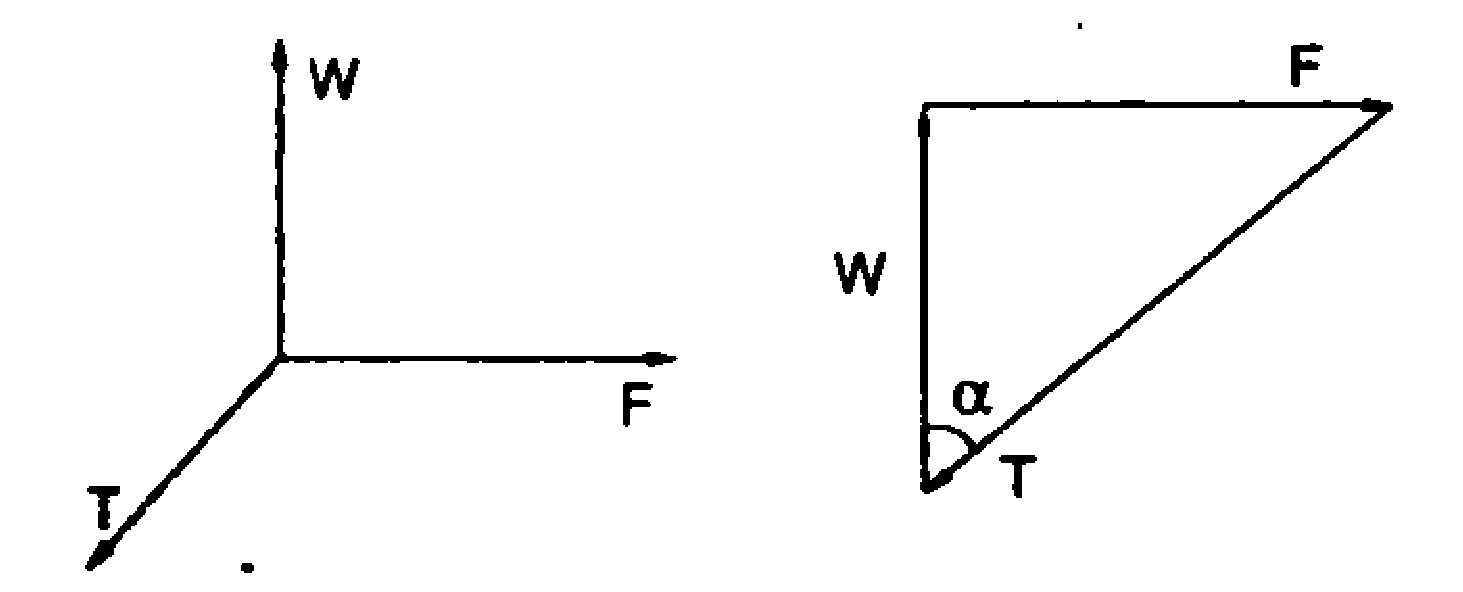
RESOLUCIÓN: En el nudo A:



De la figura:

$$T = \frac{W}{2}\sec\alpha \quad (1)$$

Haciendo el diagrama de cuerpo libre de una carga:



De la figura: $F = T \operatorname{sen} \alpha$ (2)

(1) en (2): $F = \frac{W}{2} \sec \alpha . \operatorname{sen} \alpha$

$$F = \frac{W}{2} \operatorname{tg} \alpha \text{ ; ó también}$$

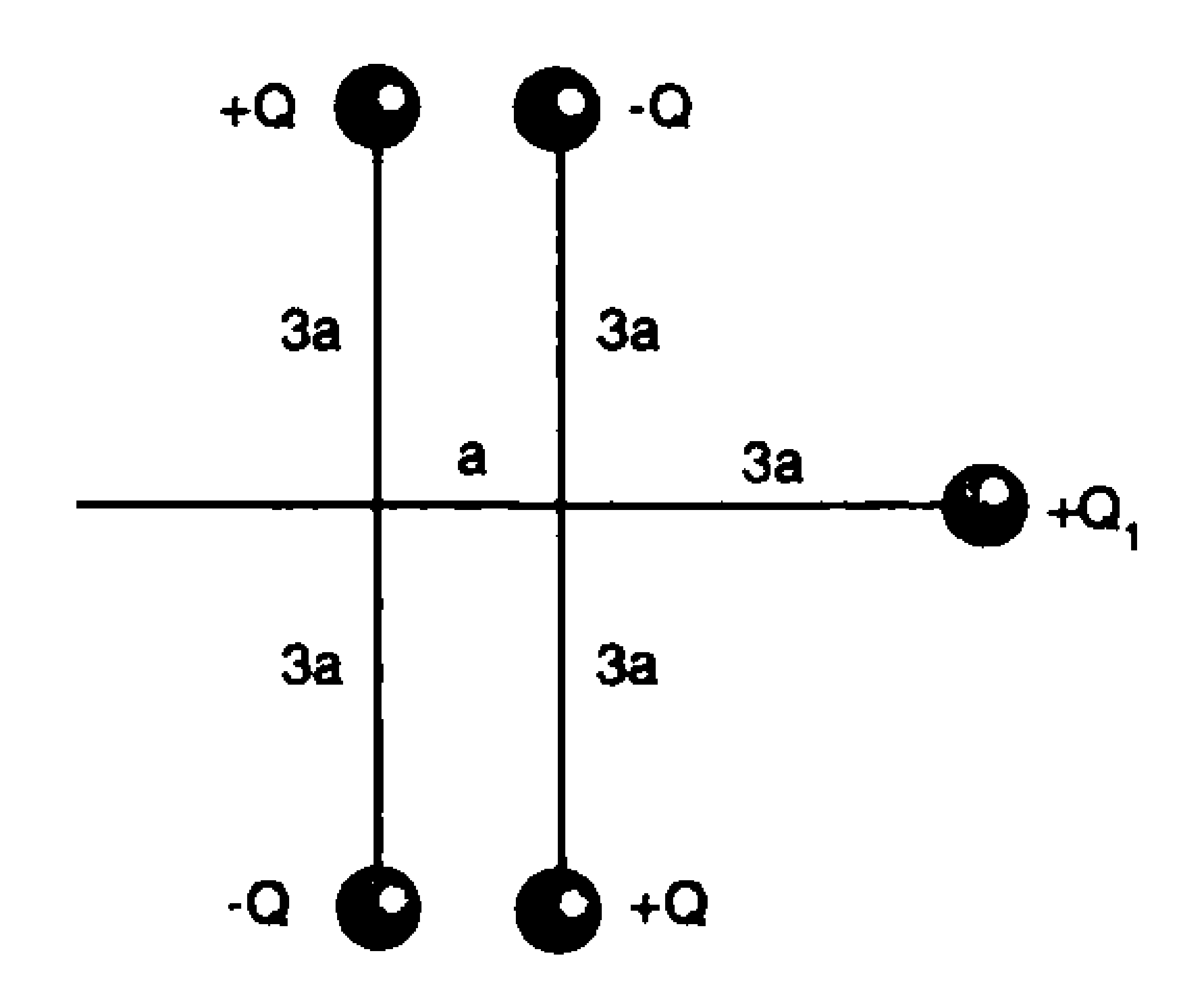
$$K \cdot \frac{Q \,.\, Q}{d^2} = \frac{W}{2} \cdot \frac{d/2}{h}$$

$$\therefore \quad K \cdot \frac{Q^2}{d^2} = \frac{W}{4} \cdot \frac{d}{h}$$

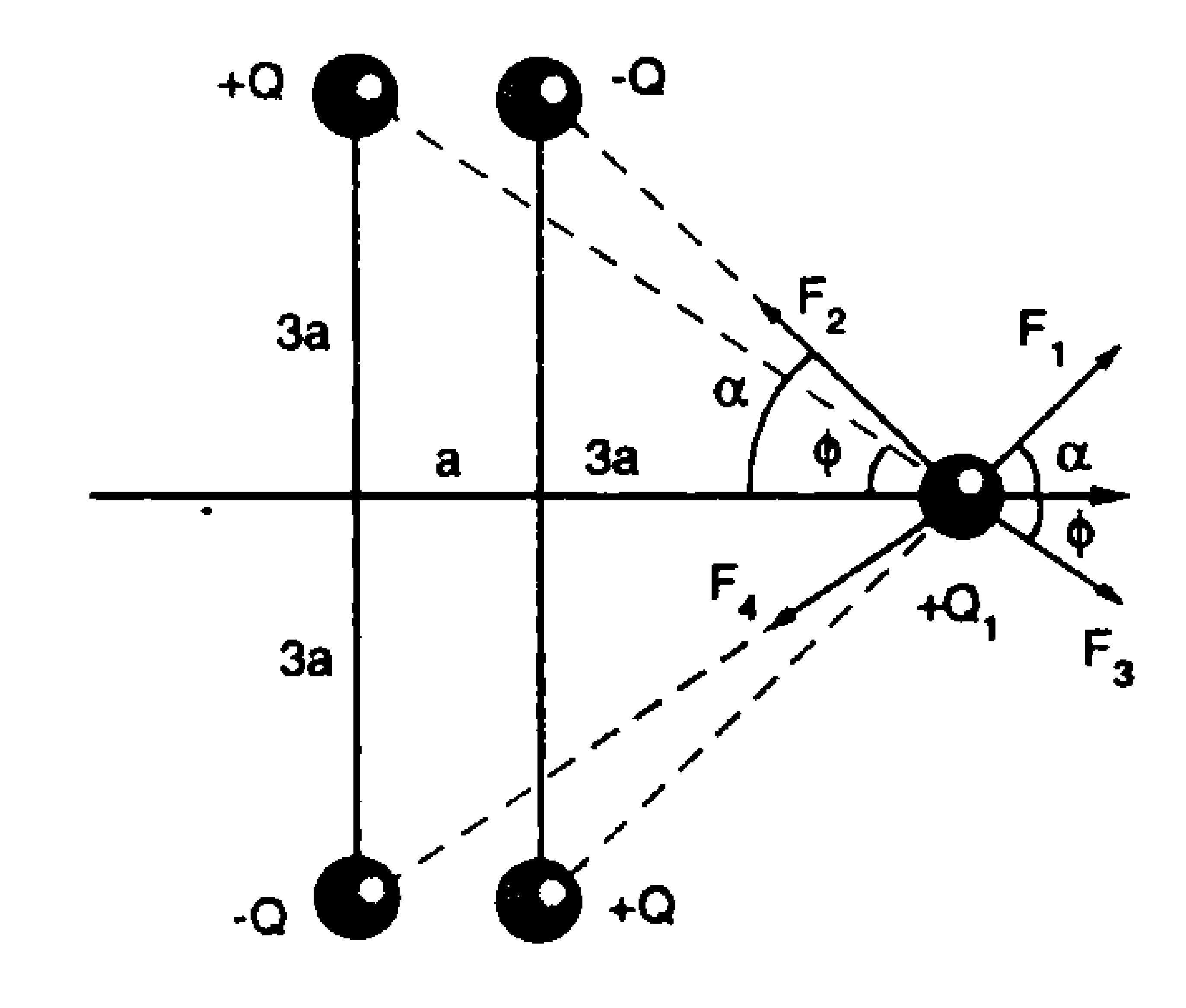
Despejando:

Rpta.: $Q = \frac{d}{2} \sqrt{\frac{W.d}{K.h}}$

PROBLEMA 18. Se dispone de 5 cargas puntuales tal como se muestra en la figura. ¿Dónde debe colocarse una carga puntual de +2Q para que la fuerza que actúe sobre la carga $+Q_1$ se pueda anular? ($+Q_1 = +Q$).



RESOLUCIÓN : De la figura se nota que los módulos de F_1 y F_2 son iguales, del mismo modo F_3 y F_4. Analizando se nota que la resultante de estas fuerzas debe estar so-bre el eje "y" ya que las componentes horizontales se anulan mutuamente.



La fuerza resultante será:

$$\Sigma F_y = 2 F_1 \operatorname{sen} \alpha - 2 F_3 \operatorname{sen} \phi$$

$$\Sigma F_y = 2 (F_1 \operatorname{sen} \alpha - F_3 \operatorname{sen} \phi) \qquad \text{(A)}$$

Por otra parte:

$$F_1 = \frac{K Q^2}{(3 a \sqrt{2})^2} = \frac{K Q^2}{18 a^2} \qquad (1)$$

$$F_2 = \frac{K Q^2}{(5 a)^2} = \frac{K Q^2}{25 a^2} \qquad (2)$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{3 a}{3 a \sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad (3)$$

$$\operatorname{sen} \phi = \frac{3 a}{5 a} = \frac{3}{5} \qquad (4)$$

Sustituyendo (1), (2), (3) y (4) en (A):

$$\Sigma F_y = 2 \left[\frac{K Q^2}{18 a^2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{K Q^2}{25 a^2} \cdot \frac{3}{5} \right]$$

De donde:

$$\Sigma F_y = \frac{K Q^2}{a^2} \cdot \left(\frac{125 \sqrt{2} - 108}{18 \times 25} \right)$$

Como $+Q_1 = +Q$ permanece en reposo, en su intersección con +2Q se cumplirá:

$$\frac{K 4 Q^2}{d^2} = \frac{K Q^2}{a^2} \cdot \left(\frac{125 \sqrt{2} - 108}{18 \times 25} \right)$$

De donde, simplificando y efectuando se tiene:

Rpta.: $d = 5{,}14\, a$

Es decir (+2Q), se deberá ubicar por encima de $+Q_1$, y sobre la vertical.

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Dos cargas de 0,1 g de masa, están suspendidas de un mismo punto mediante dos hilos de seda de 13 cm de longitud. Como están cargadas con cargas positivas se separan 10 cm. ¿Cuál es la carga de cada una?

Rpta.: $2{,}1 \times 10^{-8}$ C

2. Cuatro cargas iguales de valor "q" cada una, están en los vértices de un cuadrado de lado "a". ¿Cuál es el valor de la fuerza de repulsión en cada vértice? (resultante).

Rpta.: $\dfrac{K q^2 (2\sqrt{2} + 1)}{2 a^2}$

3. ¿Cuál es la fuerza eléctrica de repulsión entre dos electrones separados un distancia $d = 10^{-10}$ m?

Rpta.: $2{,}313 \times 10^{-8}$ N

4. Cuatro cargas están colocadas en los vértices de un cuadrado de lado 20 cm. Dos de +5 C, diametralmente opuestos y de -2 C y +2 C también diametralmente opuestos. Al centro va una carga de -1 C. ¿Cuál es la fuerza que actúa sobre esta carga?

Rpta.: $1{,}8 \times 10^{12}$ N (hacia +2)

5. Dos pequeñas esferas de 0,1 g de masa cada una, están suspendidas en el aire de un mismo punto, con hilos de 30 cm de longitud. Cuando las esferas tienen igual carga se separan una distancia de 1,8 cm calcular:
a) Cuál es la fuerza repulsiva
b) Cuál es la carga de cada esfera

Rpta.: a) $2{,}94 \times 10^{-5}$ N

b) $1{,}03 \times 10^{-9}$ C

6. Hallar la fuerza de repulsión entre dos cargas iguales de 2 C separadas en el aire 500 m.

Rpta.: $1{,}44 \times 10^{5}$ N

7. Dos pequeñas esferas metálicas se encuentran cargadas eléctricamente y se sitúan a 8 cm una de la otra, rechazándose con una fuerza de 2 N. Si la carga de una de las esferas es 18×10^{-7} C, calcular el número de electrones en exceso en la segunda esfera.

Rpta.: $6{,}28 \times 10^{12}$ e^-

8. Si cada kilogramo de las masas de la Tierra y la Luna se toman como una carga de 1 C, positiva la de la Tierra y negativa la de la Luna. ¿Cuál es la relación entre las fuerzas de atracción gravitatoria y elec-trostática?

Rpta.: $7{,}4 \times 10^{-21}$

9. Una persona apoya sobre su estómago una barra aisladora en cuyo extremo coloca una carga puntual "q_1" y se sitúa a una distancia "d" de una carga puntual "q_2". ¿Qué fuerza resulta aplicada sobre el estómago de la persona?

Rpta.: $F = K\dfrac{q_1 q_2}{d^2}$

10. En los vértices de un cuadrado se colocan cuatro cargas +Q iguales. ¿Qué carga se deba colocar en el centro geométrico del cuadrado con la finalidad de que las demás se encuentren en equilibrio?

Rpta.: $q = -\dfrac{Q}{4}(2\sqrt{2} - 1)$

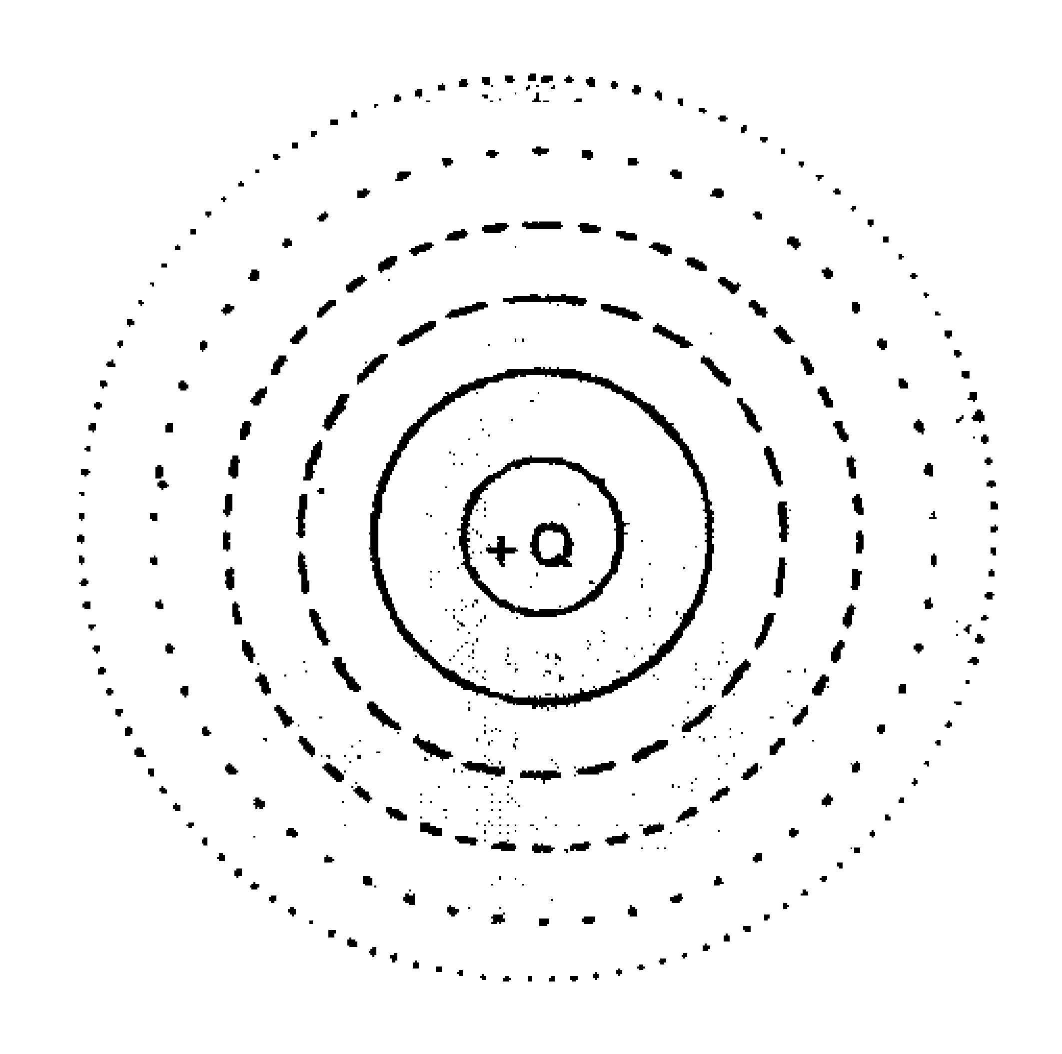
11. Una carga "Q" se divide en dos cargas de valores: "Q_1" y "$Q - Q_1$", las cuales se colocan en una distancia de 1 m una de la otra. Hallar la relación entre dichas cargas de modo que la fuerza de repulsión entre dichas cargas sea máxima.

Rpta.: $Q = 2Q_1$

http://librosysolucionarios.net

CAMPO ELÉCTRICO

El Campo Eléctrico es aquel espacio que rodea a toda carga eléctrica. Es una forma de existir de la materia en forma no sustancial, es imperceptible para los sentidos del ser humano y se le detecta en forma indirecta y mediante instrumentos eléctricos.



+Q : Es la carga "generadora" del campo eléctrico

Toda carga eléctrica tiene asociado su campo eléctrico, el cual es responsable de que ocurran las interacciones eléctricas.

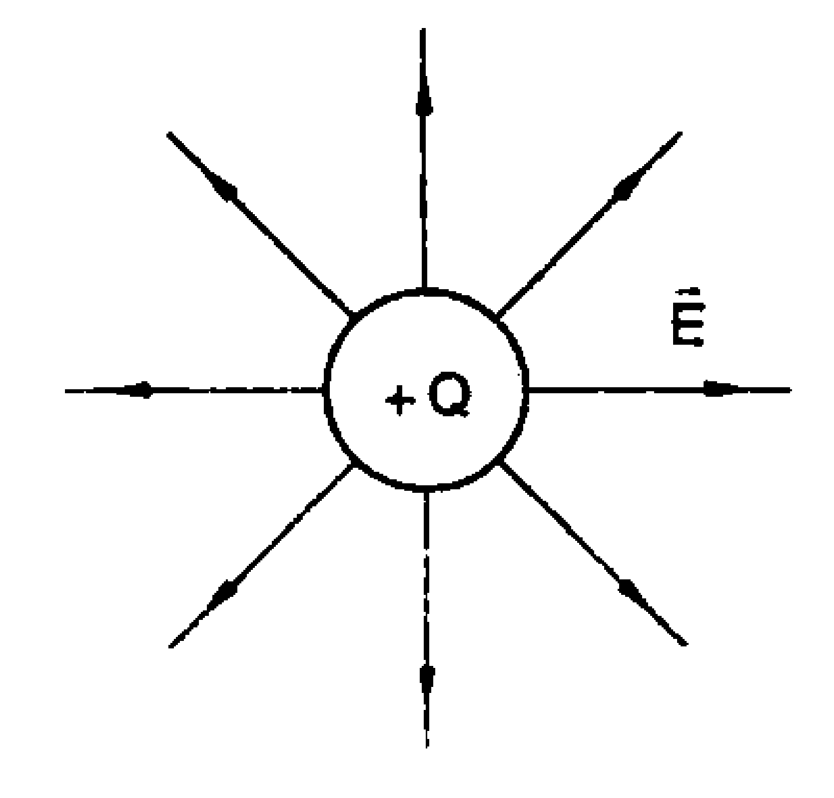
REPRESENTACIÓN DEL CAMPO ELÉCTRICO

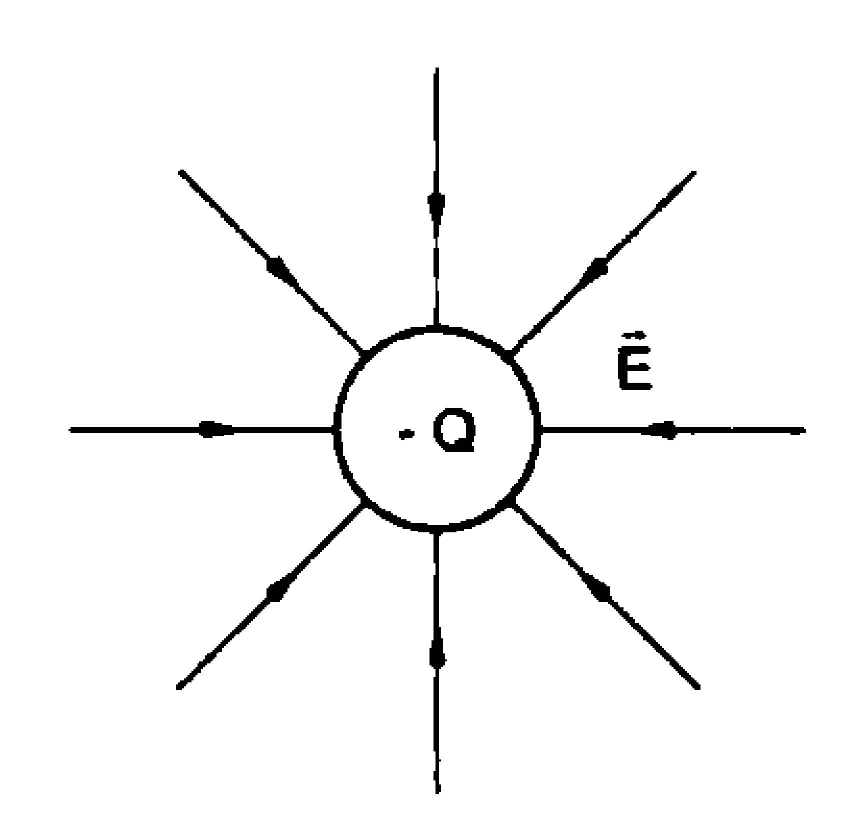
¿Cómo se representa, en forma gráfica al campo eléctrico?

Se le representa mediante las llamadas "líneas de campo" o "líneas de fuerza"

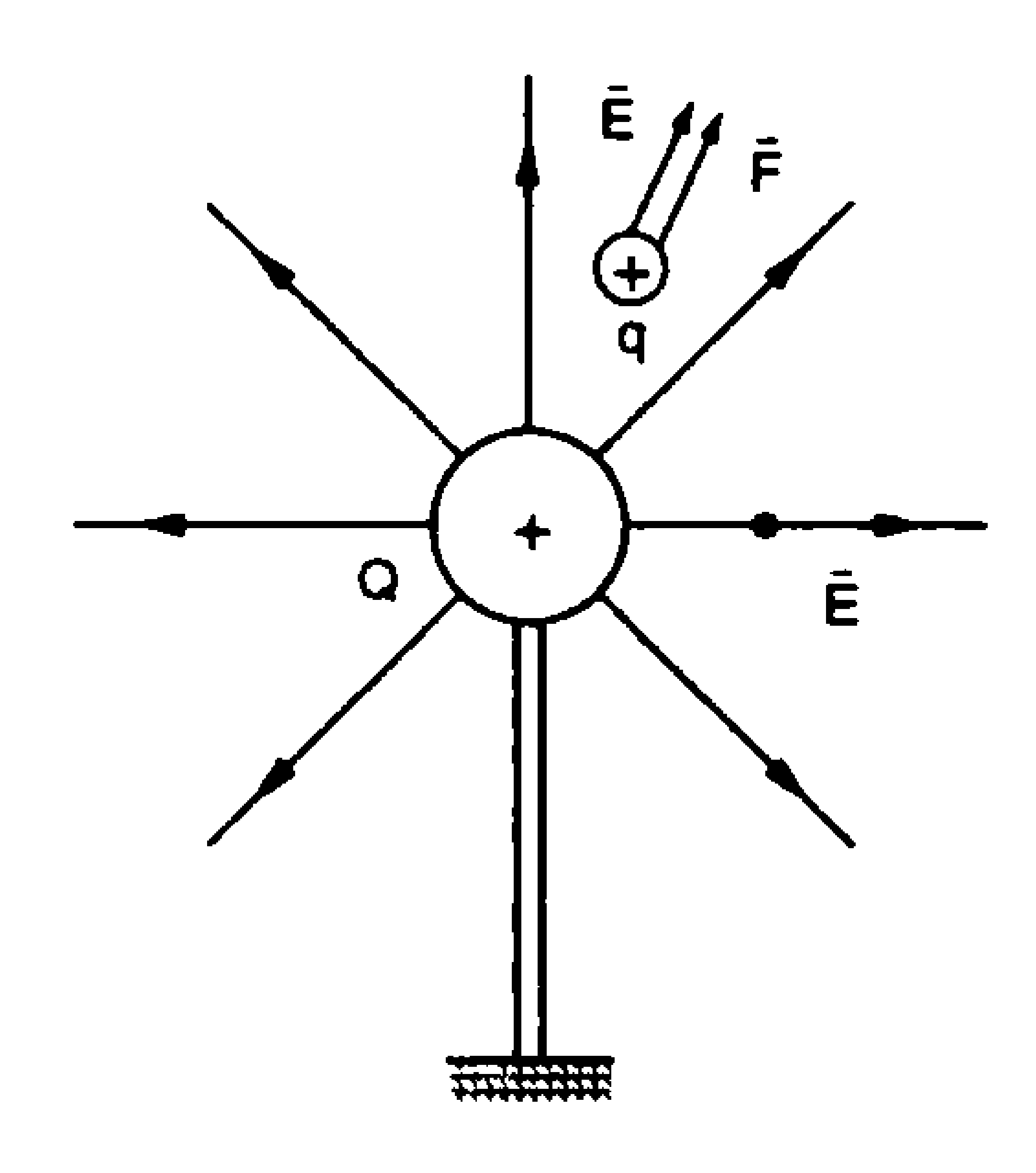
¿En qué consiste la "líneas de fuerza" o "líneas de campo"?

Son líneas imaginarias ideadas y sugeridas por el físico inglés Michael Faraday; estas líneas sirven para representar en forma gráfica al campo eléctrico. Convencionalmente se representa mediante líneas de campo salientes si la carga del cuerpo, creador del campo, es positiva y líneas de campo entrantes si la carga del cuerpo es negativa.



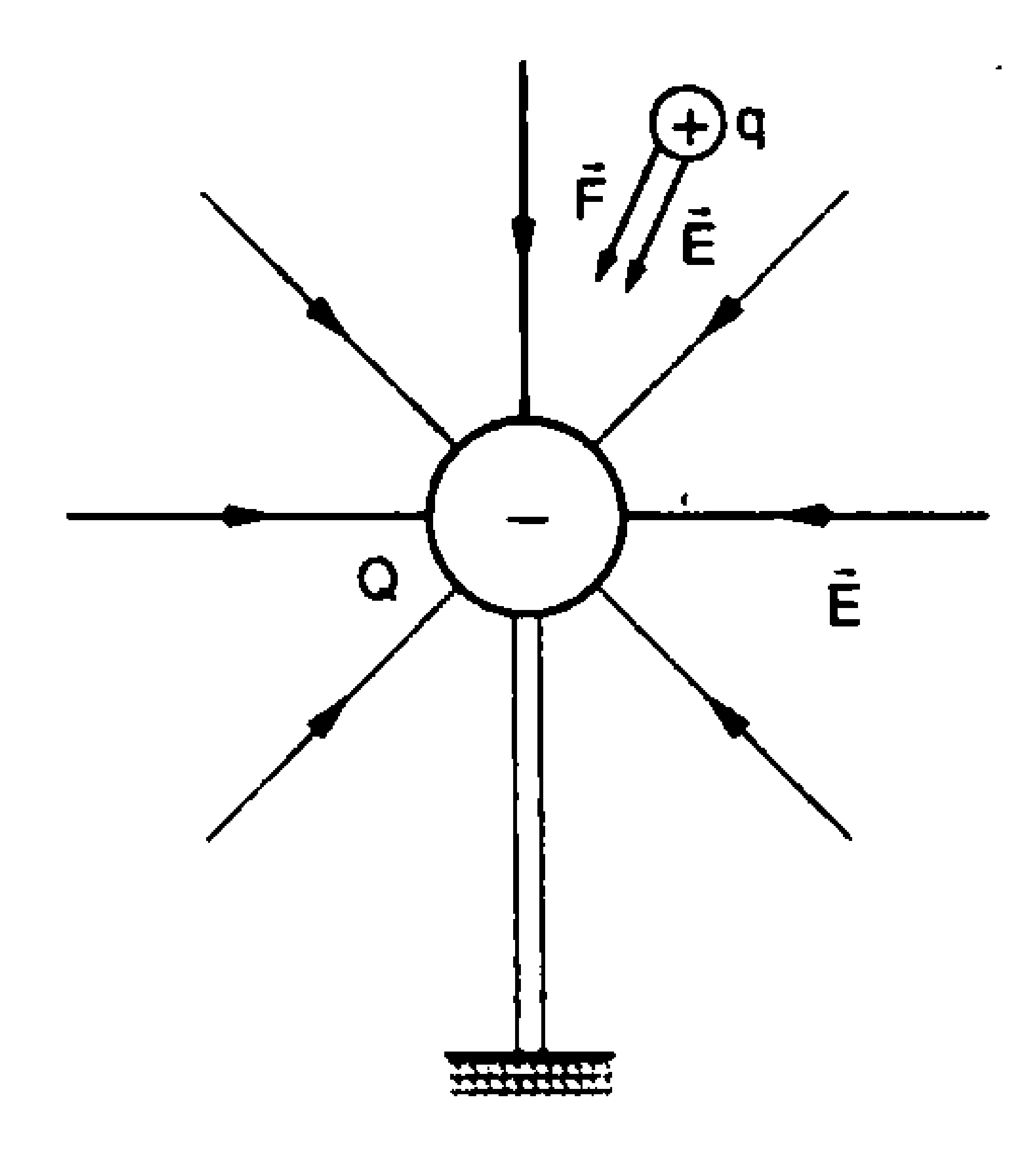


En el primer caso las líneas de campo son salientes por que siguen la dirección de una carga puntual positiva +q, soltada dentro del campo magnético generado por una carga positiva +Q



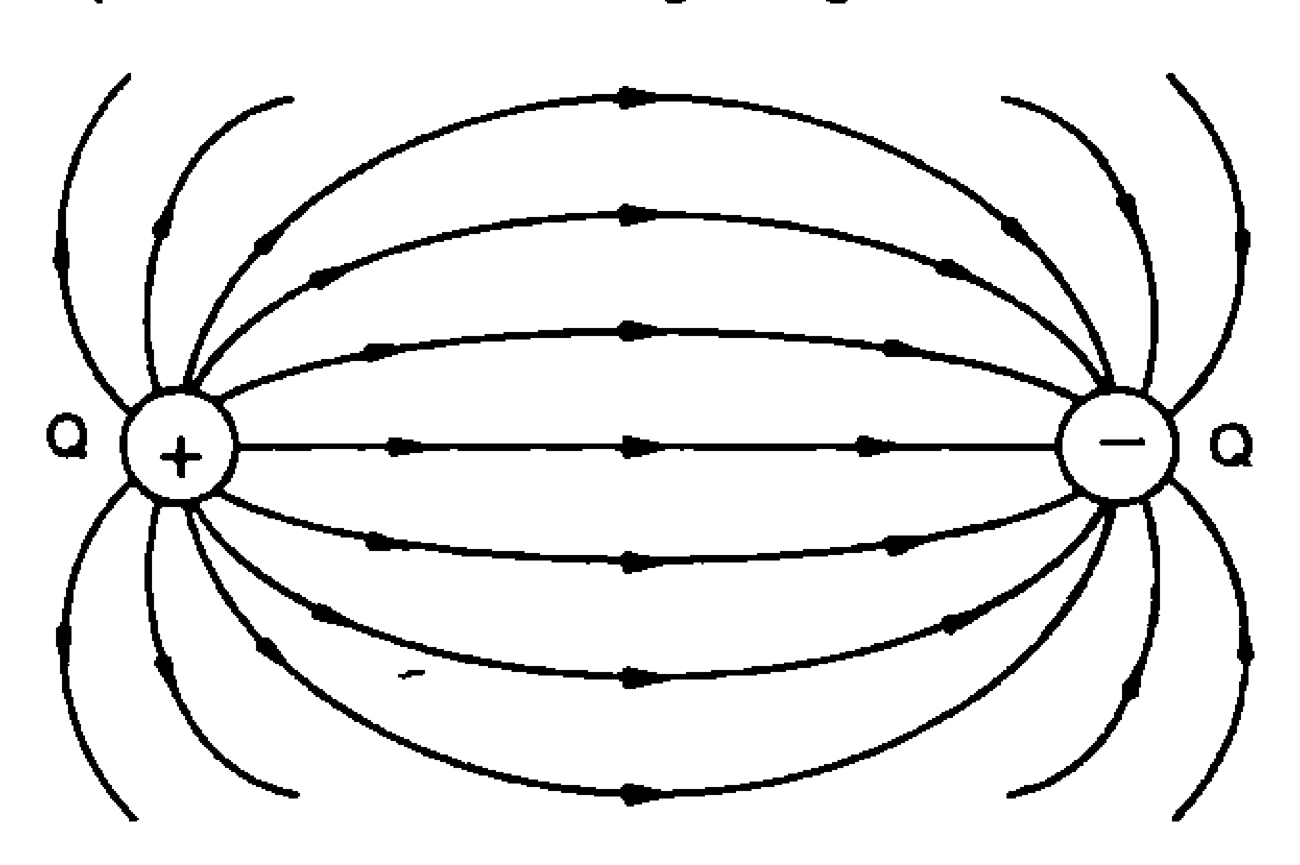
Mientras que en el segundo caso las líneas de campo son entrantes por que siguen la dirección de una carga puntual +q soltada dentro de un campo eléctrico generada por una carga negativa -Q.

http://librosysolucionarios.net



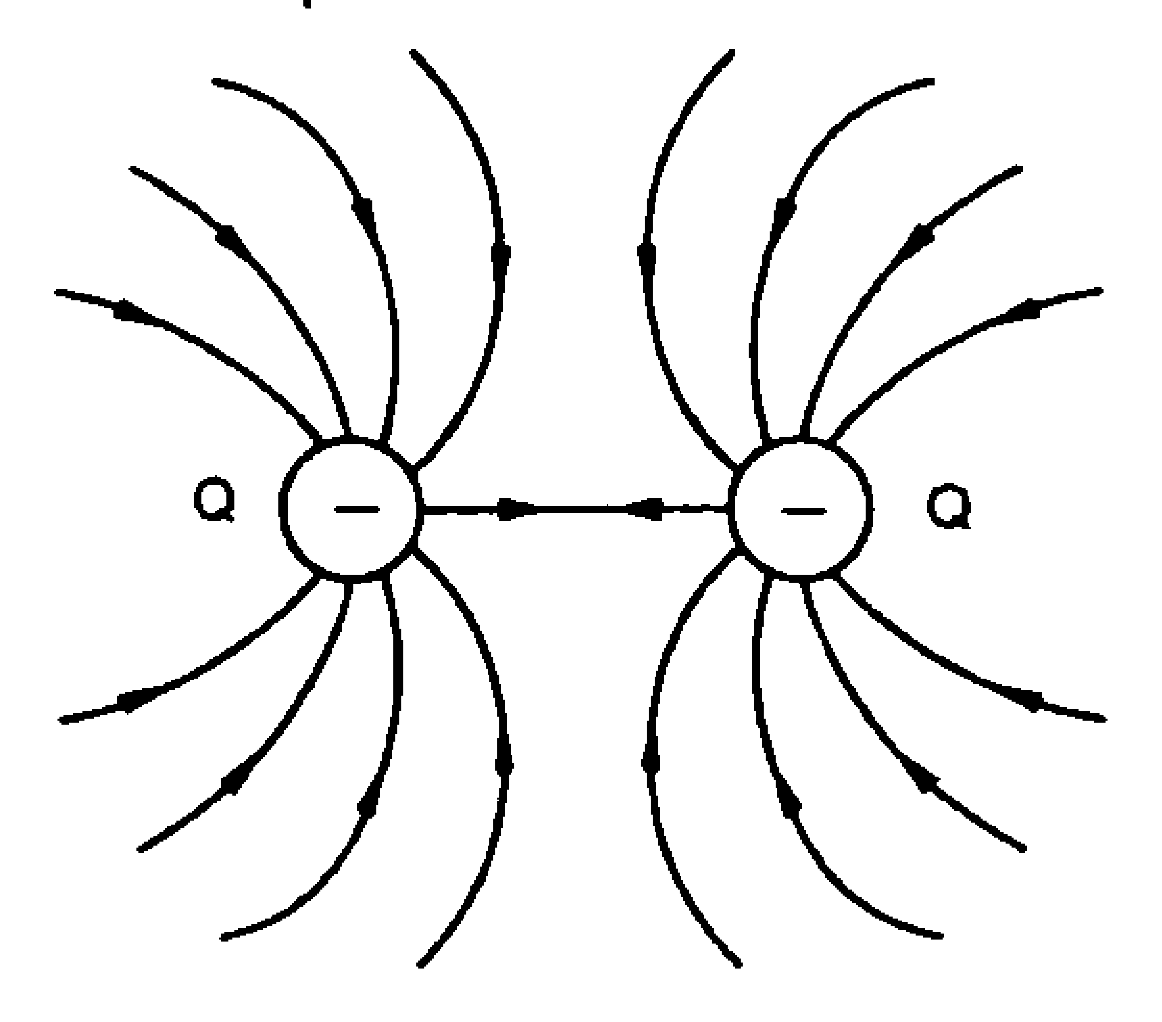
Representación de las líneas de campo para dos cargas puntuales de la misma magnitud

1. Para cargas de signos contrarios: las líneas de campo se dirigen desde la carga positiva hacia la carga negativa.



Cargas de signos contrarios

2. Para cargas de signos iguales: las líneas de campo se rechazan.



Cargas de signos iguales

MAGNITUD DE CAMPO ELÉCTRICO

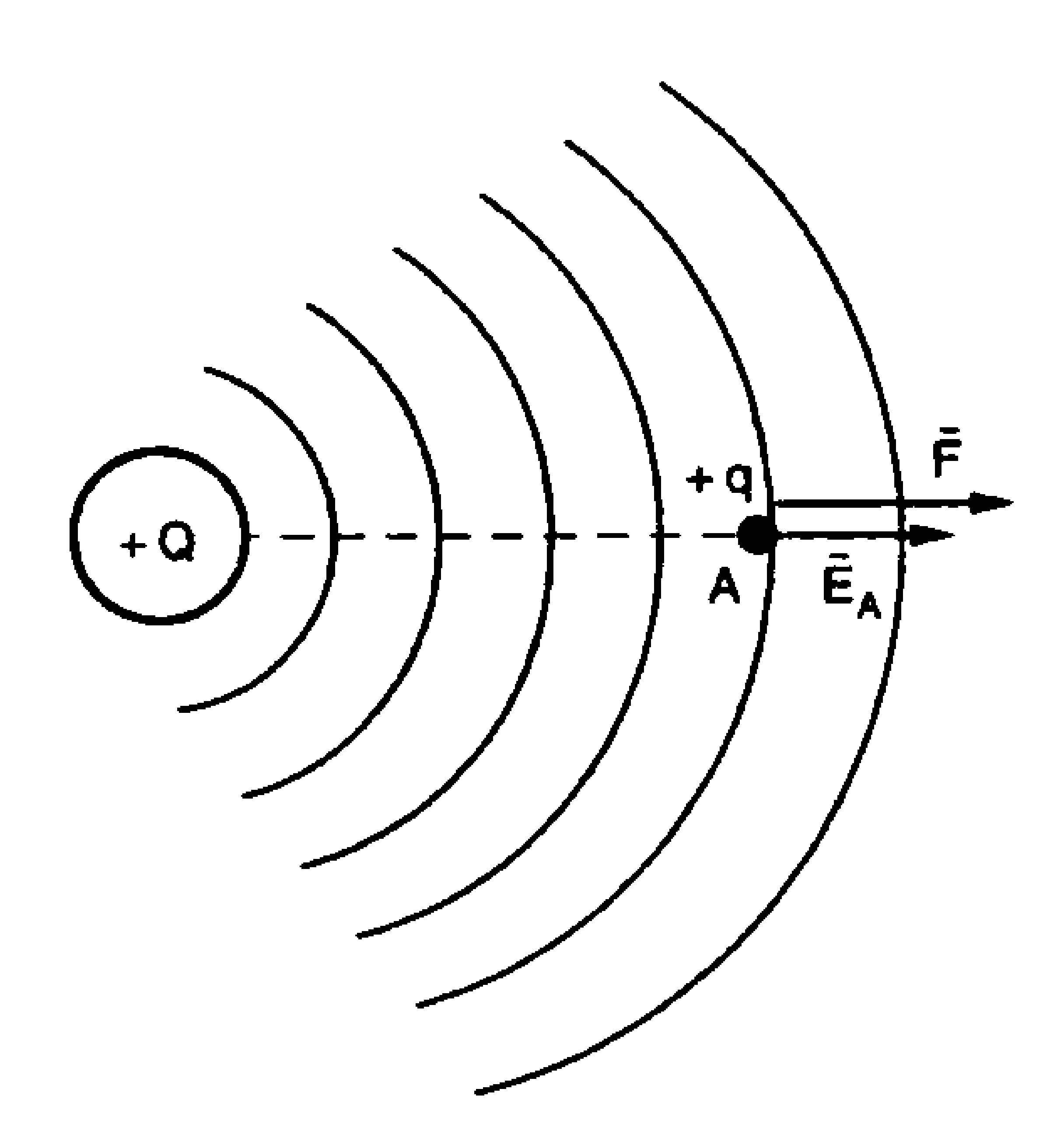
¿Cómo se mide la magnitud del campo eléctrico en un punto?

Para ello vamos a definir lo que es Intensidad de Campo Eléctrico.

INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO " $\vec{E}$ "

Es una magnitud física vectorial que expresa la fuerza eléctrica que experimenta una carga de prueba positiva +q, ubicada en el campo.

Consideremos una carga positiva +Q y su campo eléctrico asociado, luego ubiquemos una carga puntual muy pequeña +q situada en "A", dentro del campo.



La intensidad de campo eléctrico $\vec{E}$ de la carga Q en ese punto se define así:

$$|\vec{E}_A| = \frac{|\vec{F}|}{q} \qquad (I)$$

Donde:

$|\vec{F}| = F$: Es el valor de la fuerza eléctrica, en newton "N"

+q : Es la carga puntual de prueba, en coulomb "C".

$|\vec{E}_A| = E_A$: Es la intensidad de campo eléctrico en el punto "A", se le mide

http://librosysolucionarios.net

en "N/C". También en voltio sobre metro "V/m".

¿Cómo se manifiesta el campo eléctrico?

El campo eléctrico se manifiesta mediante una fuerza de naturaleza eléctrica que actúa sobre cualquier otra carga que se encuentre dentro del campo.

De la ecuación anterior (I) se define:

$$\boxed{|\vec{F}| = |\vec{E}| \cdot q} \quad \text{o} \quad \boxed{F = E \cdot q}$$

Donde F es la fuerza de campo con la que el campo eléctrico actúa sobre una carga eléctrica ubicada dentro de él.

Ejemplo1. Calcular la intensidad del campo eléctrico, de manera que un electrón colocado en el campo, experimenta una fuerza eléctrica igual a su peso.

RESOLUCIÓN:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q} \qquad (\text{I})$$

Pero según el problema $|\vec{F}|$ debe ser igual al peso del electrón.

Sabiendo que: $\vec{F} = W = m \cdot g$

sustituyendo en (I):

$$\therefore \quad |\vec{E}| = \frac{m \cdot g}{q}$$

sustituyendo valores:

$$|\vec{E}| = \frac{(9{,}1 \times 10^{-31}\ \text{kg})\,(9{,}8\ \text{m/s}^2)}{1{,}6 \times 10^{-19}\ \text{C}}$$

$$|\vec{E}| = 55{,}737\,5 \times 10^{-12}\ \frac{\text{kg} \times \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\text{C}}$$

Rpta.: $|\vec{E}| = 55{,}737\,5 \times 10^{-12}\ \frac{\text{N}}{\text{C}}$

NOTA: $|\vec{E}| = E$

Ejemplo 2. Un electrón que se mueve a una velocidad de 6×10^9 cm/s, es disparado siguiendo la dirección radial de un campo eléctrico cuya intensidad es 2×10^4 N/C, de modo que retarde su movimiento. Si la carga "q" del electrón es $1{,}6 \times 10^{-19}$ y su masa $9{,}1 \times 10^{-31}$ kg. Calcular:

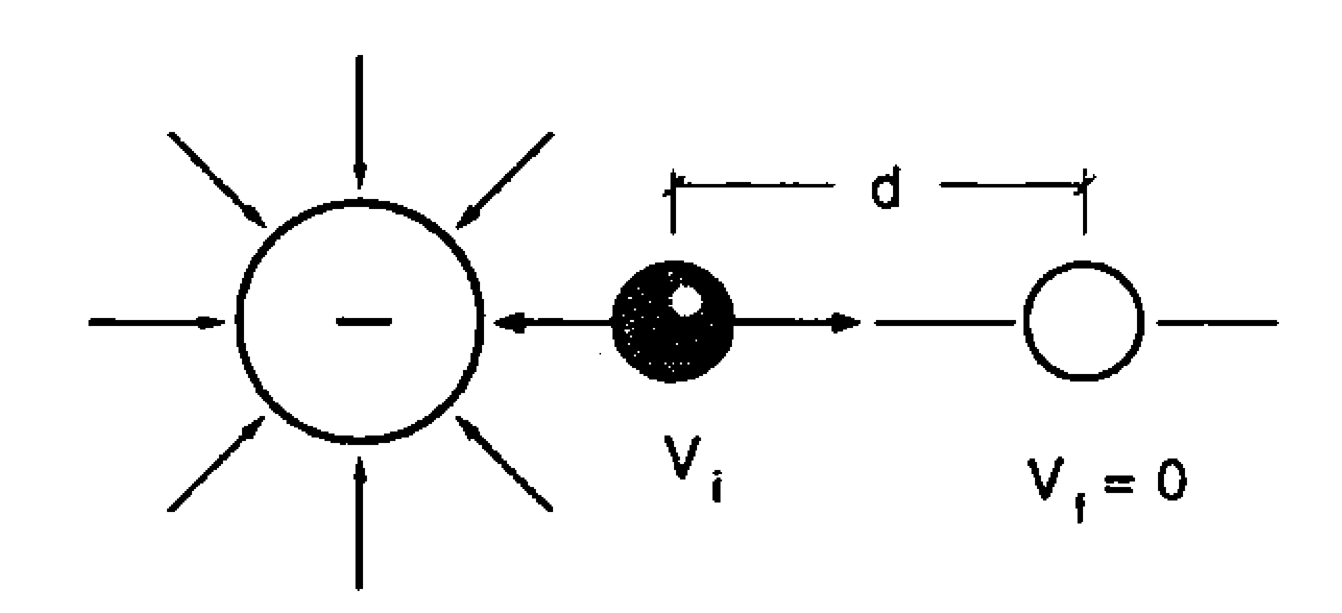
a) Alcance máximo que se desplaza el electrón.
b) El tiempo que demorará para detenerse momentáneamente.

RESOLUCIÓN: $V_i = 6 \times 10^7$ m/s

$E = 2 \times 10^4$ N/C

$q = 1{,}6 \times 10^{-19}$ C $\qquad d = ?$

$m = 9{,}1 \times 10^{31}$ kg $\qquad t = ?$



Sea +Q la carga creadora del campo eléctrico la que por atracción electrostática frenará el desplazamiento del electrón hasta su detención.

a) El alcance máximo se calculará así:

$$V_f^2 = V_i^2 - 2\,a\,d$$

Pero cuando logra el alcance máximo:

$$V_f = 0$$

Luego: $\quad 0 = V_i^2 - 2\,a\,d$

$$\therefore \quad d = \frac{V_i^2}{2\,a} \qquad (\text{I})$$

Cálculo de la aceleración:

Para calcular la aceleración, mejor dicho la desaceleración del electrón:

$$E = \frac{F}{q}$$

Pero: $F = m \cdot a$ luego, reemplazando:

$$E = \frac{m \cdot a}{q}$$

de donde: $\quad a = \frac{E \cdot q}{m} \qquad (2)$

En (1): $\quad d = \frac{V_i^2 \cdot m}{2\,E \cdot q}$

http://librosysolucionarios.net

$$d = \frac{(6 \times 10^7 \text{ m/s})^2 \times 9,1 \times 10^{-31} \text{ kg}}{2 \times 2 \times 10^4 \frac{N}{C} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

Rpta.: $d = 51,18$ cm

b) Cálculo del tiempo:

$$V_f = V_i - at \;;\; V_f = 0$$

$$\therefore\; 0 = V_i - at \;\rightarrow\; t = \frac{V_i}{a}$$

Sustituyendo el valor de a dado en (2):

Sust. valor de (2): $t = \dfrac{V_i . m}{E . q}$

$$t = \frac{6 \times 10^7 \text{ m/s} \times 9,1 \times 10^{-31}}{2 \times 10^4 \frac{N}{C} \times 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}}$$

Rpta.: $t = 0,17 \times 10^{-7}$ s

INTENSIDAD DE CAMPO ELÉCTRICO EN UN PUNTO DEL CAMPO

¿La intensidad de campo en un punto, depende de la carga de prueba "q" ubicada en dicho punto? ¡No!

Vamos a probarlo, sabemos que:

$$E_A = \frac{F}{q} = \frac{K \frac{|Q|.|q|}{d^2}}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{E_A = K \frac{|Q|}{d^2}}$$

¡ La intensidad de campo eléctrico en un punto es independiente de la carga puntual +q !. Depende sólo del valor absoluto de la carga "Q" y la distancia "d".

Donde:

E_A : Es la intensidad de campo eléctrico en el punto A, se mide en "N/C" ó "V/m" que se verá más adelante.

$|Q|$: Es el valor de la carga "generadora" del campo eléctrico, se mide en "C"

d : Distancia entre el centro de la carga Q y el punto A, se mide en "m"

Esta ecuación nos expresa que la intensidad de campo eléctrico en un punto de dicho campo es directamente proporcional al valor de la carga Q, e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Se tiene una carga Q = 5 x 10^{-9} C, que está en el aire y crea un campo eléctrico. Calcular:

a) La intensidad del campo a 30 cm de la masa "Q".
b) La fuerza con que actúa sobre una carga q = 4 x 10^{-10} C

RESOLUCIÓN : $Q = 5 \times 10^{-9}$ C

$E = ?$ $\quad q = 4 \times 10^{-10}$ C

$F = ?$ $\quad d = 30$ cm

a) $$|\vec{E}| = K\frac{Q}{d^2} = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{5 \times 10^{-9} \text{ C}}{(0,30 \text{ m})^2}$$

Rpta: $|\vec{E}| = 500$ N/C

b) $|\vec{E}| = \dfrac{|\vec{F}|}{q} \;\Rightarrow\; F = q.E$

$$\vec{F} = 4 \times 10^2 \text{ C} \times 500 \frac{N}{C}$$

Rpta.: $\vec{F} = 2 \times 10^7$ N

PROBLEMA 2. ¿Cuál es la carga eléctrica "Q" cuyo cameléctrico a 50 cm de ella tiene una magnitud de 2 N/C?

RESOLUCIÓN : $E = K\dfrac{Q}{d^2}$

Se trata de calcular la carga eléctrica creadora del campo:

http://librosysolucionarios.net

$$Q = \frac{E d^2}{K} = \frac{2\,\frac{N}{C} \times (0{,}50\text{ m})^2}{9 \times 10^9\,\frac{N \times m^2}{C^2}}$$

Rpta.: $Q = 5{,}5 \times 10^{-11}$ C

PROBLEMA 3. Calcular la fuerza con que repele una carga eléctrica creadora de un campo eléctrico a una carga puntual de 13×10^{-9} u.e.q. situada dentro de ese campo. Calcular en dinas si la intensidad del campo es 1 N/C. ($1\text{ N} = 10^5$ din)

RESOLUCIÓN : Se calcula la fuerza de repulsión en N y luego, se transforma a dinas:

$$|\vec{E}| = \frac{|\vec{F}|}{q}$$

de donde: $|\vec{F}| = |\vec{E}| \times q$

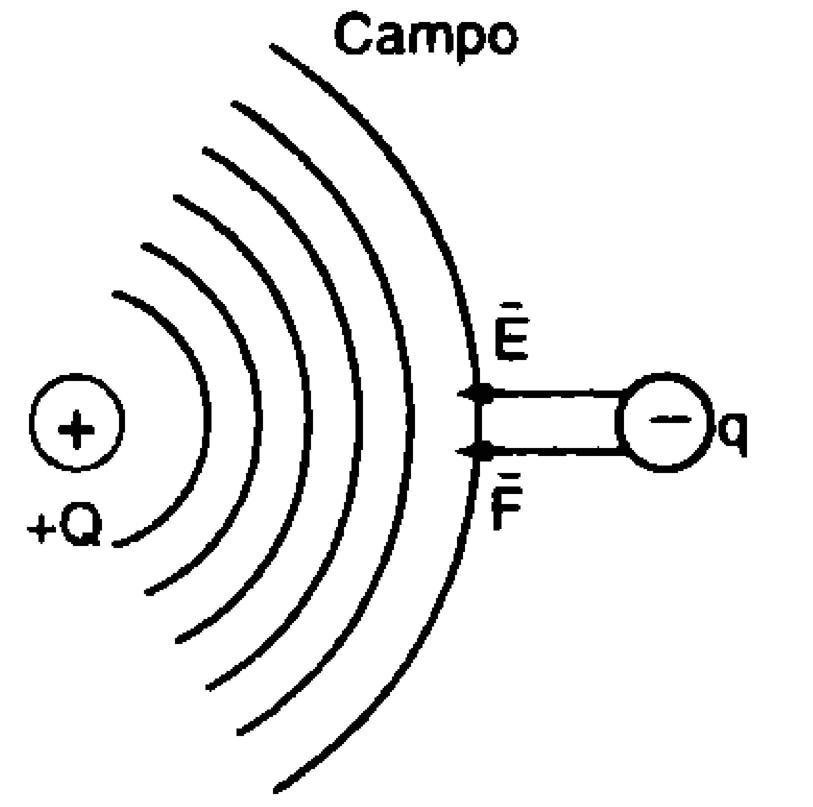
$$|\vec{F}| = 1\,\frac{N}{C} \times 13 \times 10^9 \text{ u.e.q.}$$

$$|\vec{F}| = 1\,\frac{N}{C} \times 13 \times 10^9 \times \frac{1\text{ C}}{3 \times 10^9}$$

$|\vec{F}| = 4{,}33$ N

Rpta.: $|\vec{F}| = 4{,}33 \times 10^5$ din

PROBLEMA 4. Dentro de una campo cuya intensidad es $\vec{E} = 8 \times 10^9$ N/C hay una carga eléctrica, de signo contrario a la carga eléctrica creadora del campo de 2×10^{-8} C de carga. Calcular su masa expresada en gramos.



RESOLUCION : $E = \frac{'}{q}$

de donde: $F = E \times q$

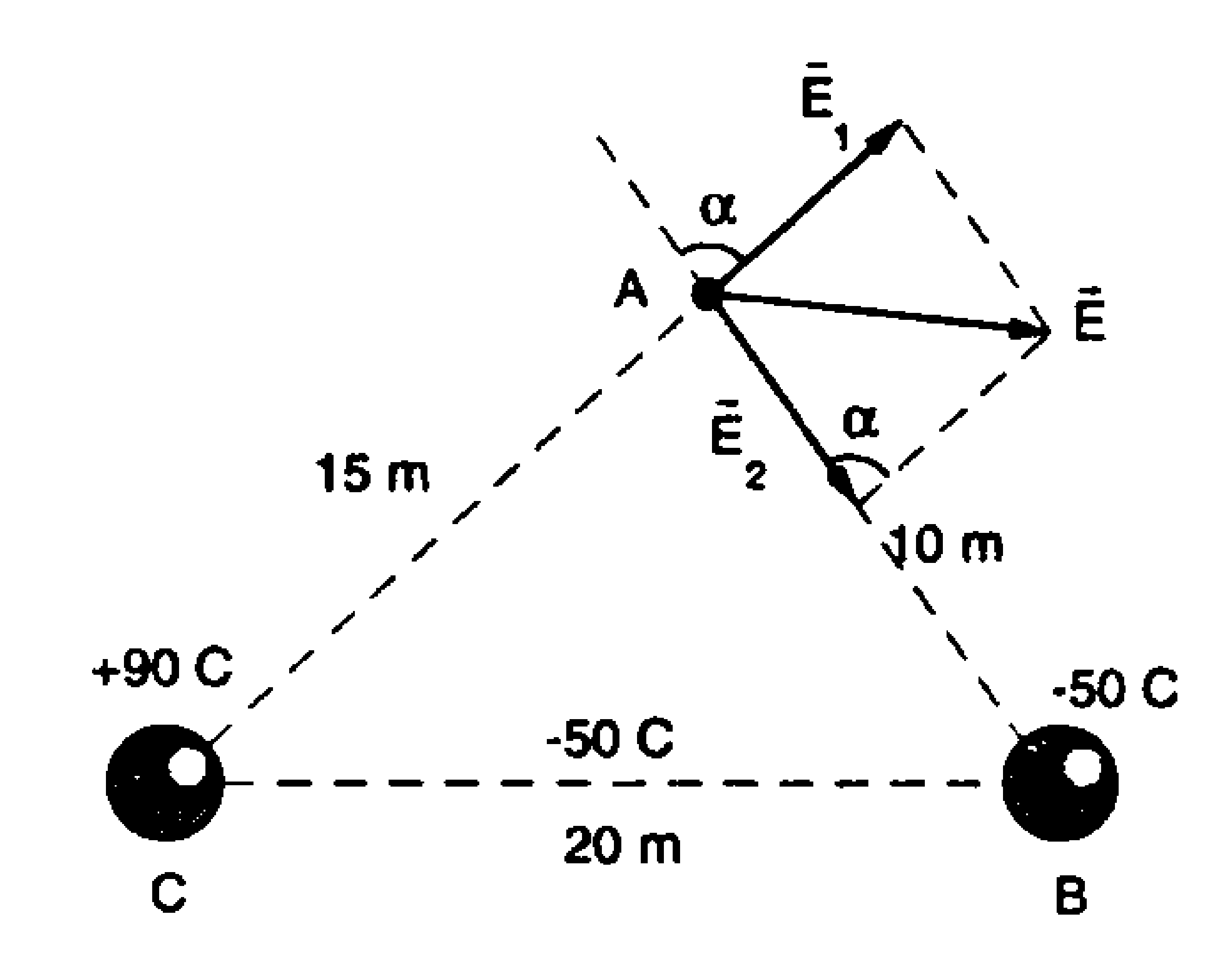
ó: $m.g = E.q$; $m = \frac{E.q}{g}$

sustituyendo los datos:

$$m = \frac{8 \times 10^9\,\frac{N}{C} \times 2 \times 10^{-8}\text{ C}}{9{,}8\text{ m/s}^2}$$

Rpta.: $m = 16{,}3$ kg $= 16\,300$ g

PROBLEMA 5. ¿Cuál es la intensidad del campo eléctrico de un punto "A" que está a 10 m de una carga eléctrica "B" de -50 C y a 15 m de una carga eléctrica "C" de +90 C, sabiendo que "B" y "C" están a 20 m de distancia?



RESOLUCIÓN : Cálculo de la intensidad de campo en "A", creado por "C"

$$|\vec{E}_1| = K\,\frac{Q}{d^2}$$

$$|\vec{E}_1| = 9 \times 10^9\,\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{90\text{ C}}{(15\text{ m})^2}$$

$$\therefore \quad |\vec{E}_1| = 3{,}6 \times 10^9\,\frac{N}{C}$$

Cálculo de la intensidad de campo en "A" creado por "C":

$$|\vec{E}_2| = K\,\frac{Q}{d^2}$$

$$|\vec{E}_2| = 9 \times 10^9\,\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{50\text{ C}}{(10\text{ m})^2}$$

$$\therefore \quad |\vec{E}_2| = 4{,}5 \times 10^9\,\frac{N}{C}$$

Cálculo de la intensidad resultante:

$$|\vec{E}| = \sqrt{|\vec{E}_1^2| + |\vec{E}_2^2| + 2|\vec{E}_1||\vec{E}_2| \times \cdots}$$

$$\cdots \overline{\times \cos(180 - \alpha)} \qquad (I)$$

Cálculo del ángulo a:

En el triángulo ABC:

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$tg\frac{\alpha}{2} = \sqrt{\frac{7,5 \times 12,5}{22,5 \times 2,5}} = 1,29$$

$$\therefore \qquad \alpha = 104,43°$$

Sustituyendo los datos en (I):

$$|\vec{E}| = \sqrt{\left(3,6\times10^9\frac{N}{C}\right)^2 + \left(4,5\times10^9\frac{N}{C}\right)^2 \cdots}$$

$$\cdots \overline{+2\left(3,6\times10^9\frac{N}{C}\right)\left(4,5\times10^9\frac{N}{C}\right)\times}$$

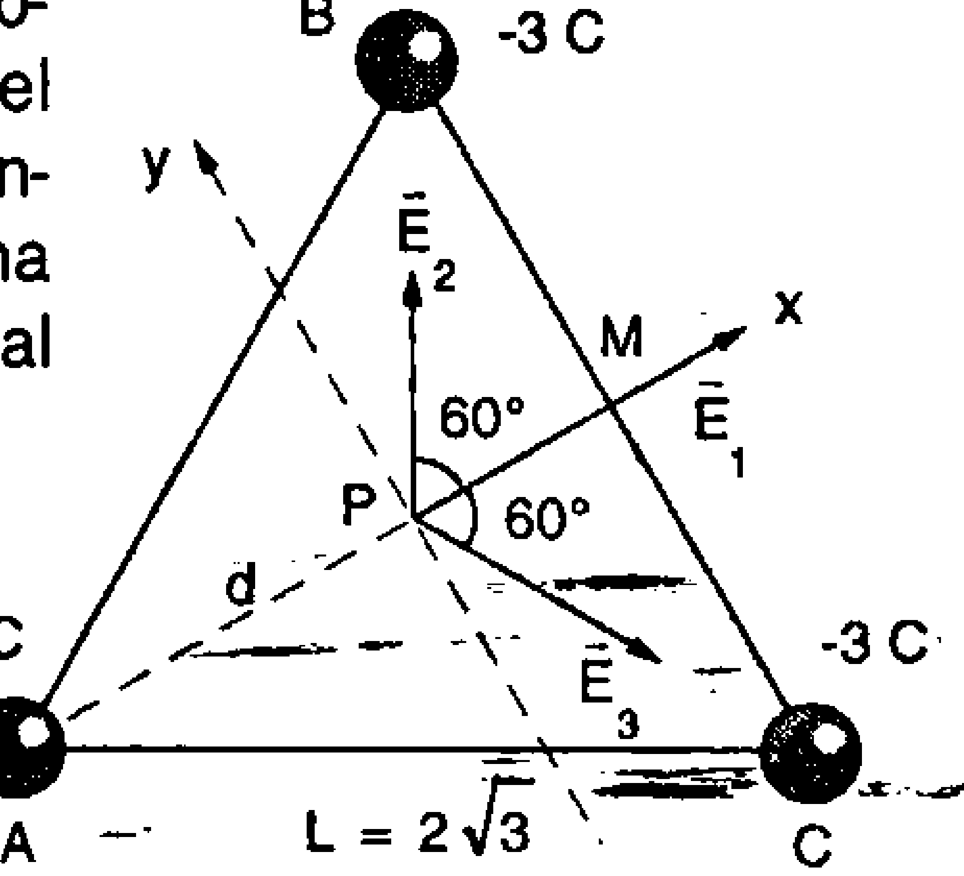
$$\cdots \overline{\times \cos 75.28°}$$

$$|\vec{E}| = \sqrt{12,96 \times 10^{18}\frac{N^2}{C^2} + 20,5\times \cdots}$$

$$\cdots \overline{\times10^{18}\frac{N^2}{C^2} + 8,23\times10^{18}\frac{N^2}{C^2}}$$

Rpta.: $|\vec{E}| = 6,44 \times 10^9 \frac{N}{C}$

PROBLEMA 6. Calcular la intensidad de campo en el circuncentro de un triángulo equilátero de lado $L = 2\sqrt{3}$ m cuyas cargas en los vértices tienen los valores mostrados en la figura. Se supone que en el centro del triángulo hay una carga puntual positiva.



RESOLUCIÓN :

Cálculo de la intensidad de campo $\vec{E}$ de cada una de las cargas sobre el punto central "P". Las intensidades de "B" y "C" son atractivas , la intensidad de "A" es expulsiva, conforme se ha indicado en la figura.

* Intensidad de "A", es impulsiva:

$$|\vec{E}_1| = K\frac{Q}{d^2}$$

$$|\vec{E}_1| = 9 \times 10^9\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{90\,C}{d^2}$$

Cálculo de "d", o sea AP:

$$d = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}L\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$d = \frac{2}{3} \times 2\sqrt{3} \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 2$$

$$|\vec{E}_1| = 9 \times 10^9\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{6\,C}{(2\,m)^2}$$

$$|\vec{E}_1| = 13,5 \times 10^9\frac{N}{C} \qquad (1)$$

* Intensidad de "B", es atractiva:

$$|\vec{E}_1| = K\frac{Q}{d^2}$$

$$|\vec{E}_1| = 9 \times 10^9\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{3\,C}{(2\,m)^2}$$

de donde:

$$|\vec{E}_2| = 6,75 \times 10^9\frac{N}{C} \qquad (2)$$

* Intensidad de "C", atractiva:

$$|\vec{E}_3| = |\vec{E}_2| = 6,75 \times 10^9\frac{N}{C}$$

Para encontrar la resultante de estos tres vectores se traza un sistema "x y", y sobre este sistema se proyectan los vectores para calcular Σ_{Ex} y Σ_{Ey}.

$$\Sigma_{Ex} = |\vec{E}_1| + |\vec{E}_2|\cos 60° + |\vec{E}_3|\cos 60°$$

$$\Sigma_{Ex} = |\vec{E}_1| + 2|\vec{E}_2|\cos 60°$$

$$\Sigma_{Ex} = 13,5 \times 10^9\frac{N}{C} + 2 \times 6,75 \times$$

$$\times 10^9 \times \frac{N}{C} \times \frac{1}{2}$$

$$\Sigma_{Ex} = 20{,}5 \times 10^9 \ \frac{N}{C} \qquad (a)$$

$$\Sigma_{Ey} = |\vec{E}_2| \text{sen } 60° - |\vec{E}_3| \text{sen } 60°$$

Pero: $|\vec{E}_2| = |\vec{E}_3|$

Luego: $\Sigma_{Ey} = 0$

Como: $|\vec{E}_2| = \sqrt{(\Sigma_{Ex})^2 + (\Sigma_{Ey})^2}$

$$|\vec{E}_2| = \sqrt{(20{,}25 \times 10^9 \ N/C)^2 + 0}$$

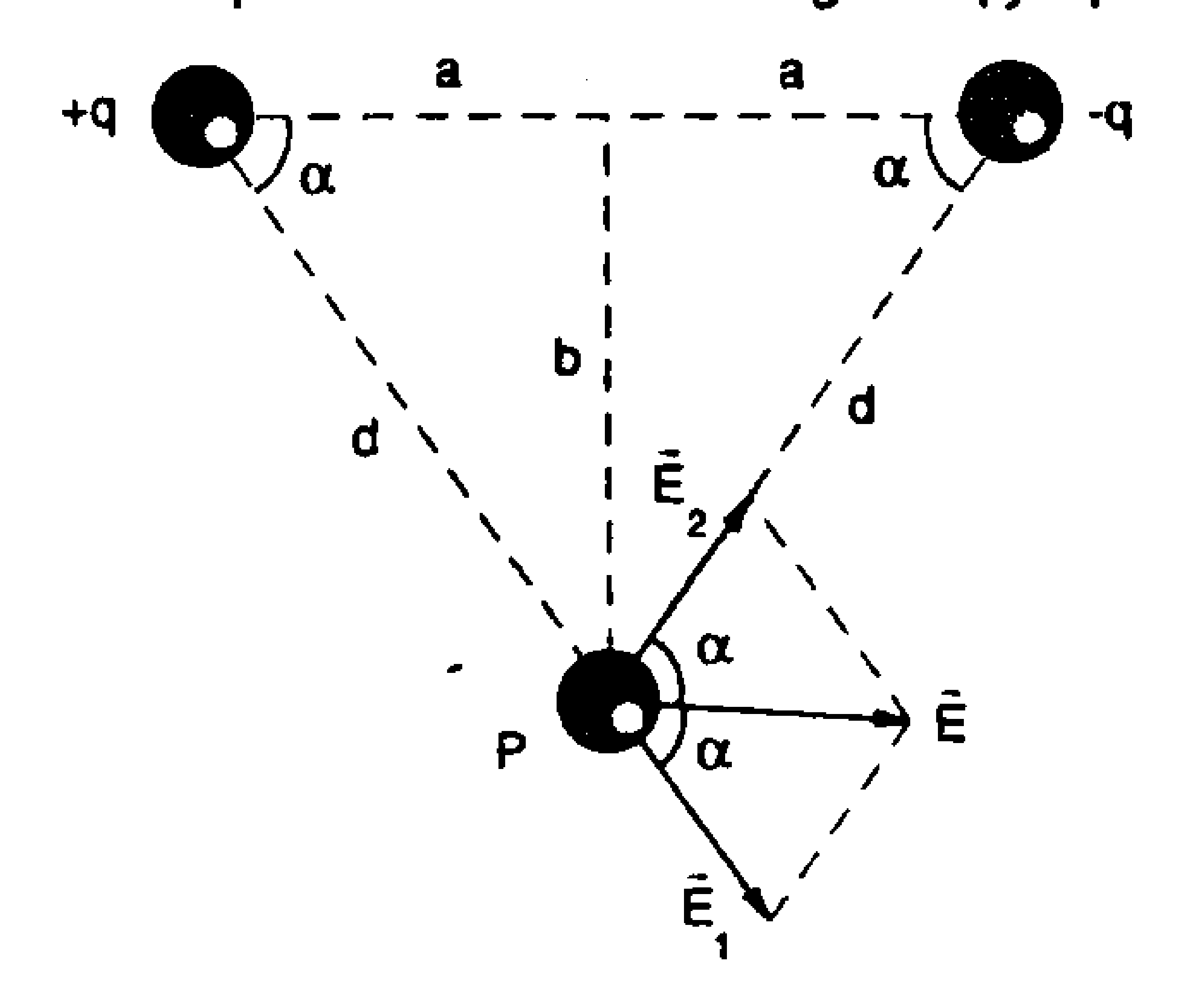
Rpta.: $|\vec{E}_2| = 20{,}25 \times 10^9 \ N/C$

Cálculo del ángulo que forma, con el eje "x" el vector resultante E de la intensidad de campo creada por las cargas A, B y C.

$$\text{tg}\,\alpha = \frac{\Sigma_{Fy}}{\Sigma_{Fx}} = \frac{0}{20{,}25 \times 10^9} = 0$$

Rpta.: $\alpha = 0°$

PROBLEMA 7. Sobre un mismo plano hay dos cargas iguales "q", una positiva y la otra negativa. La separación de las cargas "q" es de 2 a, este conjunto se llama "dipolo eléctrico". Sobre la mediatriz de la recta que los une y a una distancia b (donde b > a) se encuentra un punto "P" de carga positiva. Calcular el valor del campo E en ese punto debido a las cargas +q y -q.



RESOLUCIÓN:

El valor del campo E en el punto "P" es la resultante de los valores de los campos E_1 y E_2, conforme se muestra en la figura, hallada gráficamente mediante el método del paralelogramo. Por consiguiente, para hallar su valor numérico, es preciso calcular E_1 y E_2.

Ahora por otro lado, como las cargas "q" son iguales pero de signo contrario sus valores modulares son iguales, es decir:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2| = K\frac{q}{d^2} = \frac{q}{a^2 + b^2}$$

Pero en el paralelogramo la resultante se calcula así:

$$|\vec{E}|^2 = |\vec{E}_1|^2 + |\vec{E}_2|^2 + 2|\vec{E}_1||\vec{E}_2|\cos\alpha$$

como: $|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|$, luego:

$$|\vec{E}|^2 = 2|\vec{E}_1|^2 + 2|\vec{E}_1|^2\cos\alpha$$

$$|\vec{E}|^2 = 2|\vec{E}_1|^2(1 + \cos 2\alpha)$$

pero: $1 + \cos\alpha = 2\cos^2\alpha$

luego: $|\vec{E}| = 2|\vec{E}_1|\cos\alpha \qquad (II)$

Sustituyendo (I) en (II):

$$|\vec{E}| = 2K\frac{q}{(a^2 + b^2)}\cos\alpha\,;$$

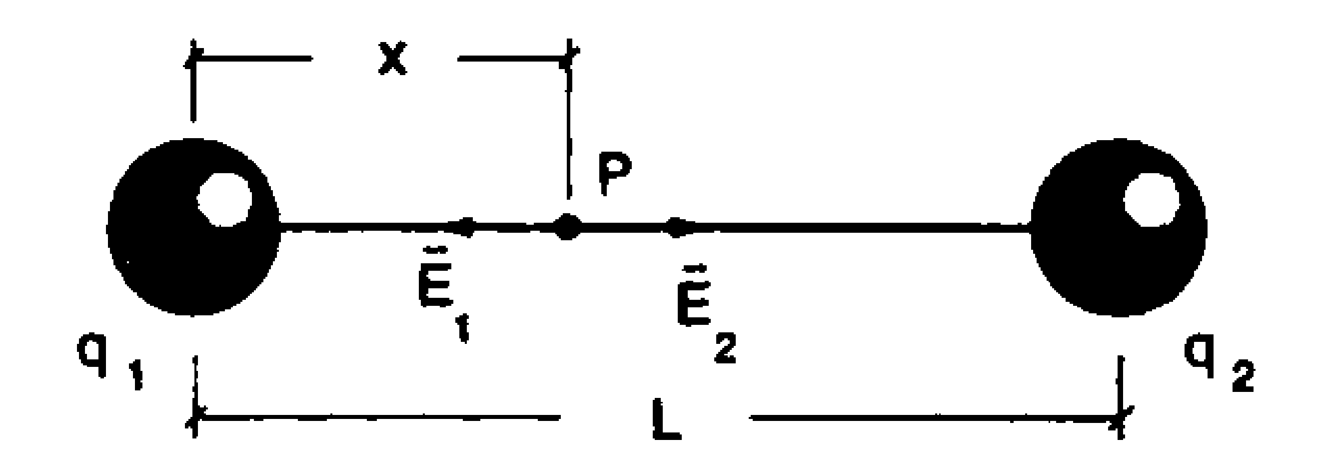
pero: $\cos\alpha = \frac{a}{x} = \frac{q}{(a^2 + b^2)^{1/2}}$

$$\therefore \quad |\vec{E}| = \frac{2kq}{(a^2 + b^2)^{1/2}} \cdot \frac{a}{a^2 + b^2}$$

Rpta.: $|\vec{E}| = \frac{2akg}{(a^2 + b^2)^{3/2}}$

PROBLEMA 8. La carga $q_1 = 2 \times 10^5$ coulombios y la carga $q_2 = 4 \times 10^{-5}$ coulombios están a una distancia de 1 000 m. ¿A qué distancia de q_1 la intensidad de campo es nula?

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN :

Sea **P** el punto donde las intensidades de campo son nulas; o en otras palabras, el punto en el cual se anulan los campos por ser iguales, es decir:

$$|\vec{E}_1| = |\vec{E}_2|\,,\ \text{ó: } K\frac{q_1}{x^2} = K\frac{q_2}{(L-x)^2}$$

Sustituyendo datos y simplificando:

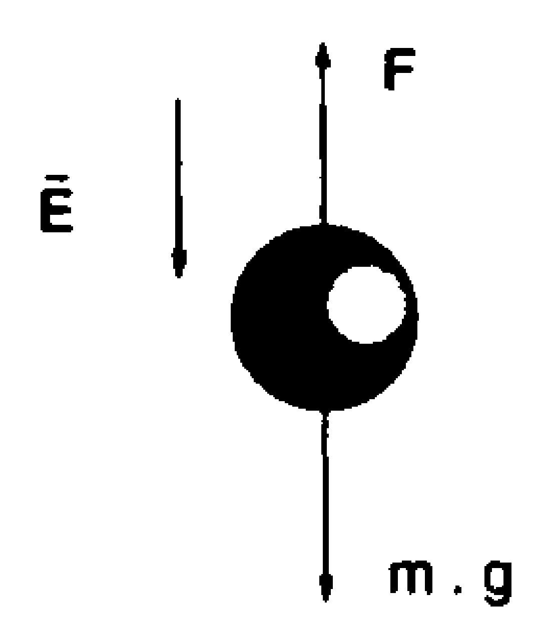
$$\frac{2 \times 10^{-5}}{x^2} = \frac{4 \times 10^{-5}}{(1-x)^2}$$

de donde: $x^2 + 2x - 1 = 0$

Rpta.: $x = 0{,}41$ m

PROBLEMA 9. ¿Cuál es la carga de una partícula de masa 2 g, para que permanezca en reposo, en el laboratorio, al ubicarse donde el campo eléctrico está dirigido hacia abajo y es de intensidad igual a 500 N/C?

RESOLUCIÓN : D.C.L. partícula



Para que haya reposo o equilibrio la carga de la pequeña masa debe ser de signo contrario al del campo. Sobre esta base:

$$\Sigma F_y = 0$$

$$F = m.g$$

también: $F = E.q$: luego :

$$E.q = m.g \quad ; \quad q = \frac{m.g}{E}$$

$$q = \frac{2 \times 10^{-3}\ \text{kg} \times 9{,}8\ \text{m/s}^2}{500\ \text{N/C}}$$

Rpta.: $q = 3{,}92 \times 10^{-5}$ C

PROBLEMA 10. ¿Qué ángulo forman la cuerda que sostiene a una carga de 4 C y masa igual a 2 kg, con la vertical, si actúa un campo eléctrico de 4,9 N/C?

RESOLUCIÓN :

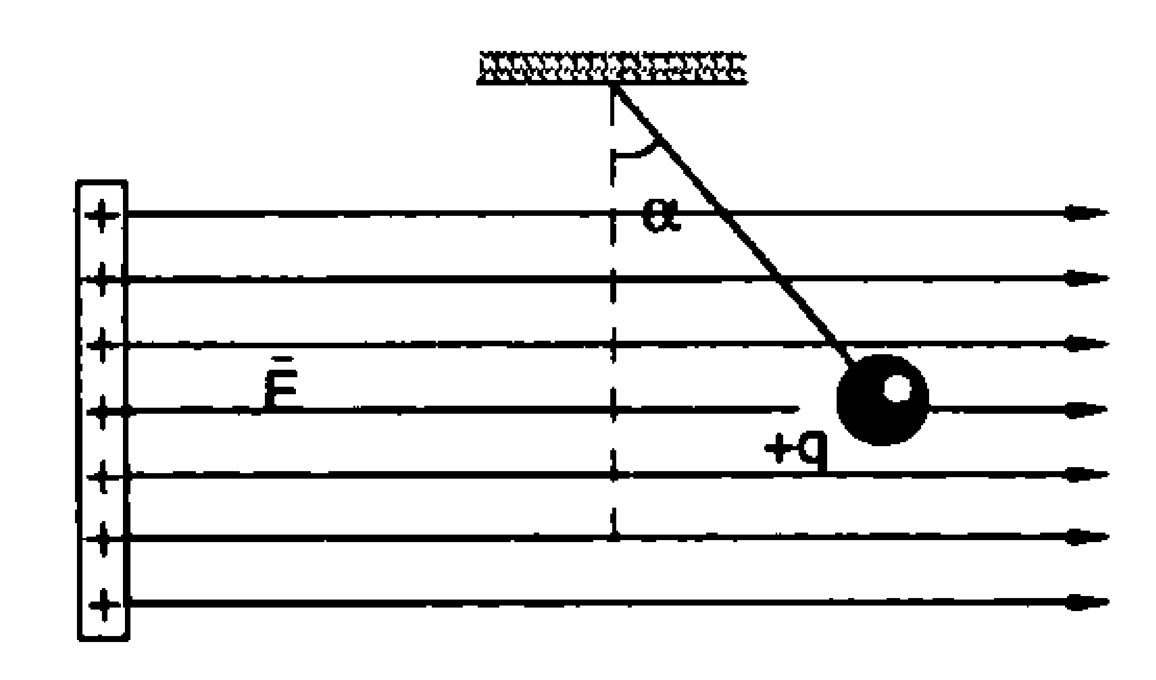
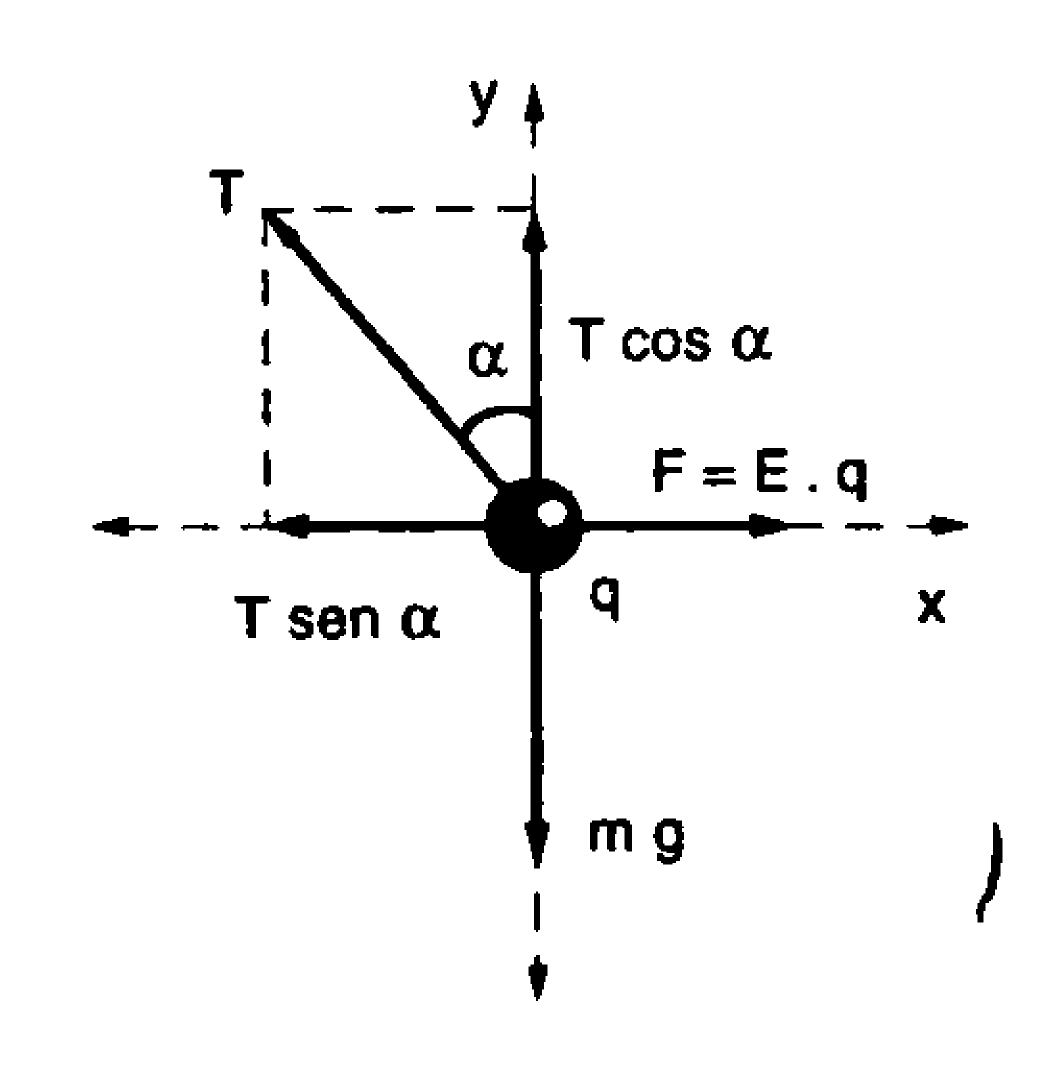


Diagrama de cuerpo libre de +q:



$$\Sigma F_x = 0 \quad ; \quad T.\text{sen}\,\alpha = E.q \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0 \quad ; \quad T.\cos\alpha = m.g \qquad (2)$$

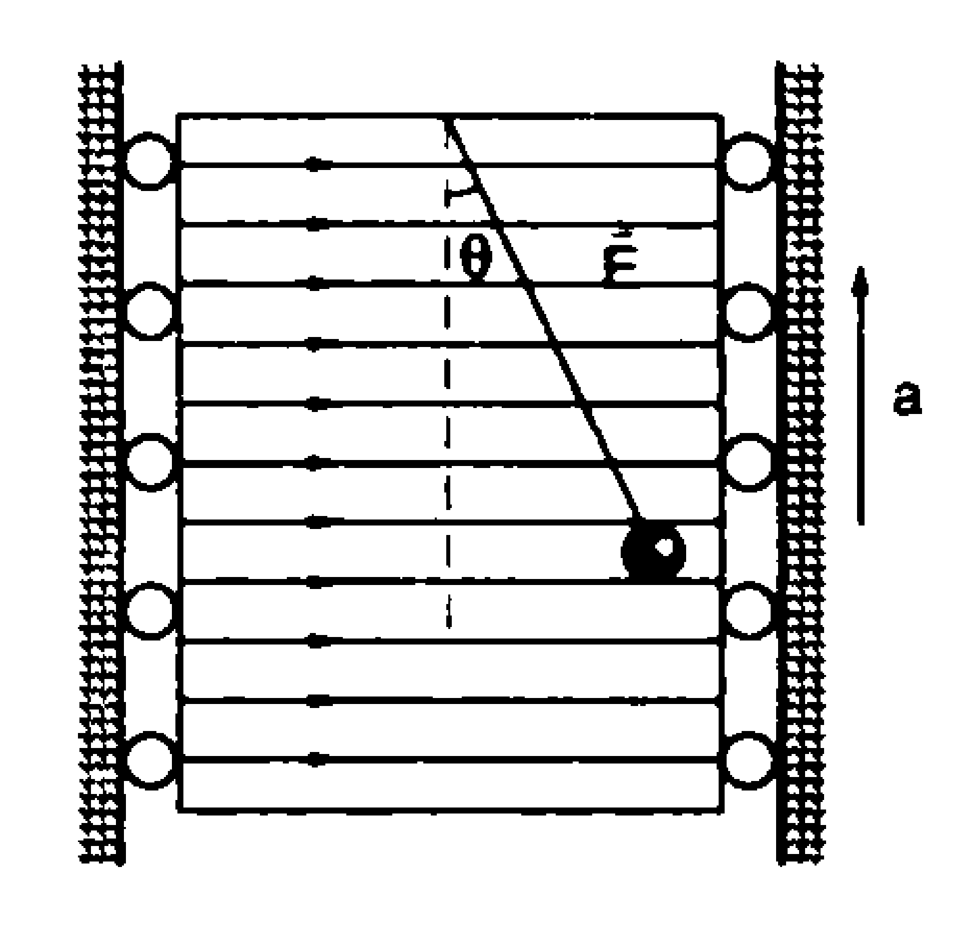
$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \text{tg}\,\alpha = \frac{E.q}{m.g}$$

http://librosysolucionarios.net

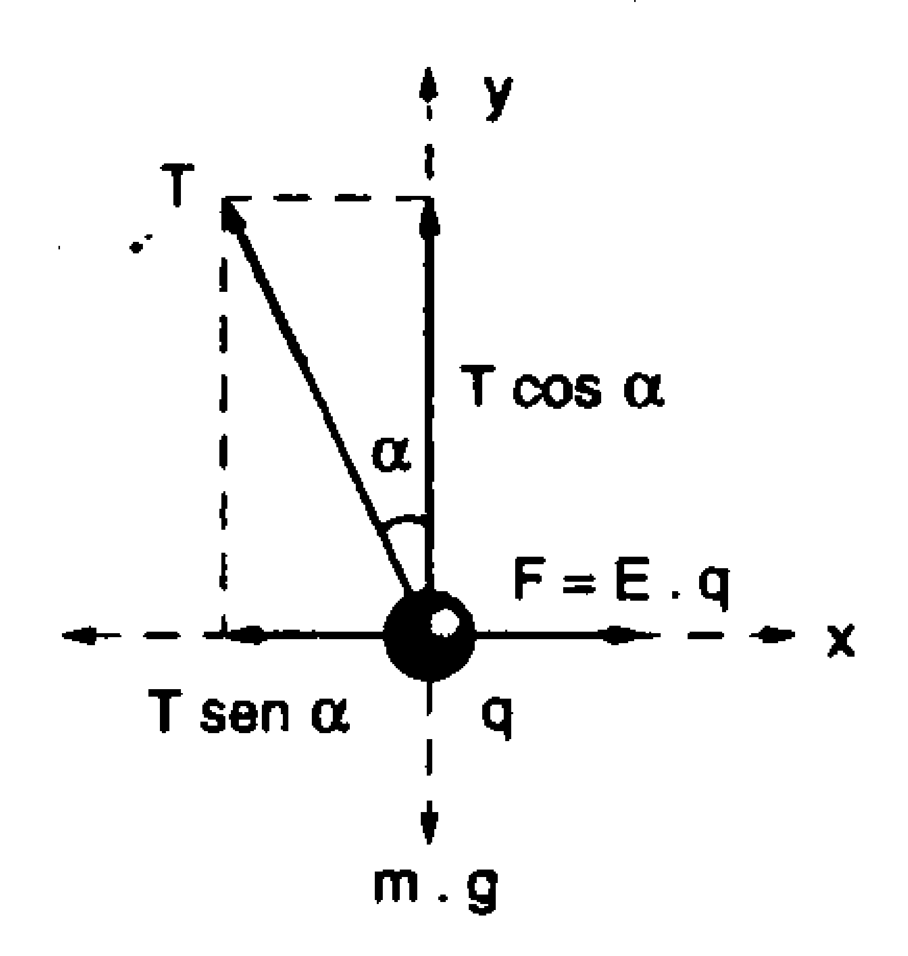
$$tg\,\alpha = \frac{4{,}9 \times 4}{2 \times 9{,}8} = 1$$

Rpta.: $\alpha = 45°$

PROBLEMA 11. En la figura, un ascensor sube con una aceleración "a". Dentro del elevador hay un campo eléctrico uniforme "E" que hace que la cuerda forme un ángulo "θ" con la vertical. Hallar el valor de "E".



RESOLUCIÓN : D.C.L. de q



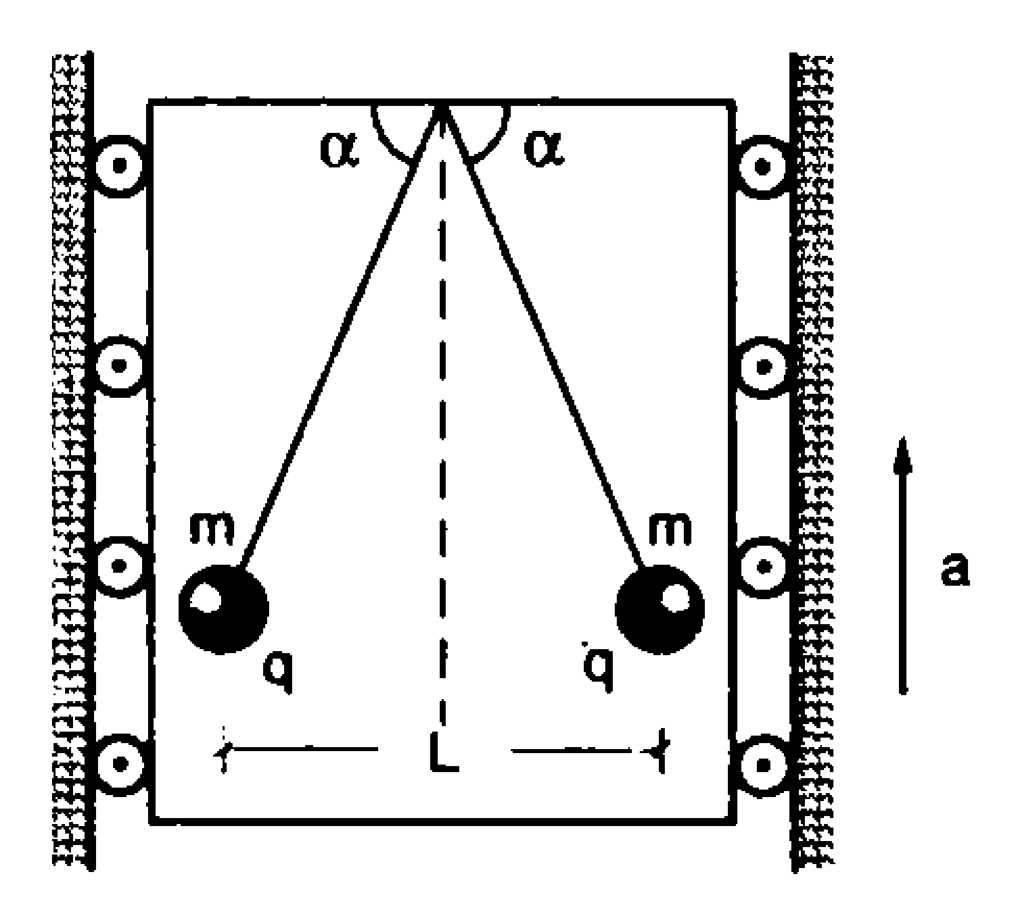
$\Sigma F_x = 0$; $T.\,sen\,\theta = E.q$ (1)

$\Sigma F_y = m.g$; $T.\cos\theta = m(g+a)$ (2)

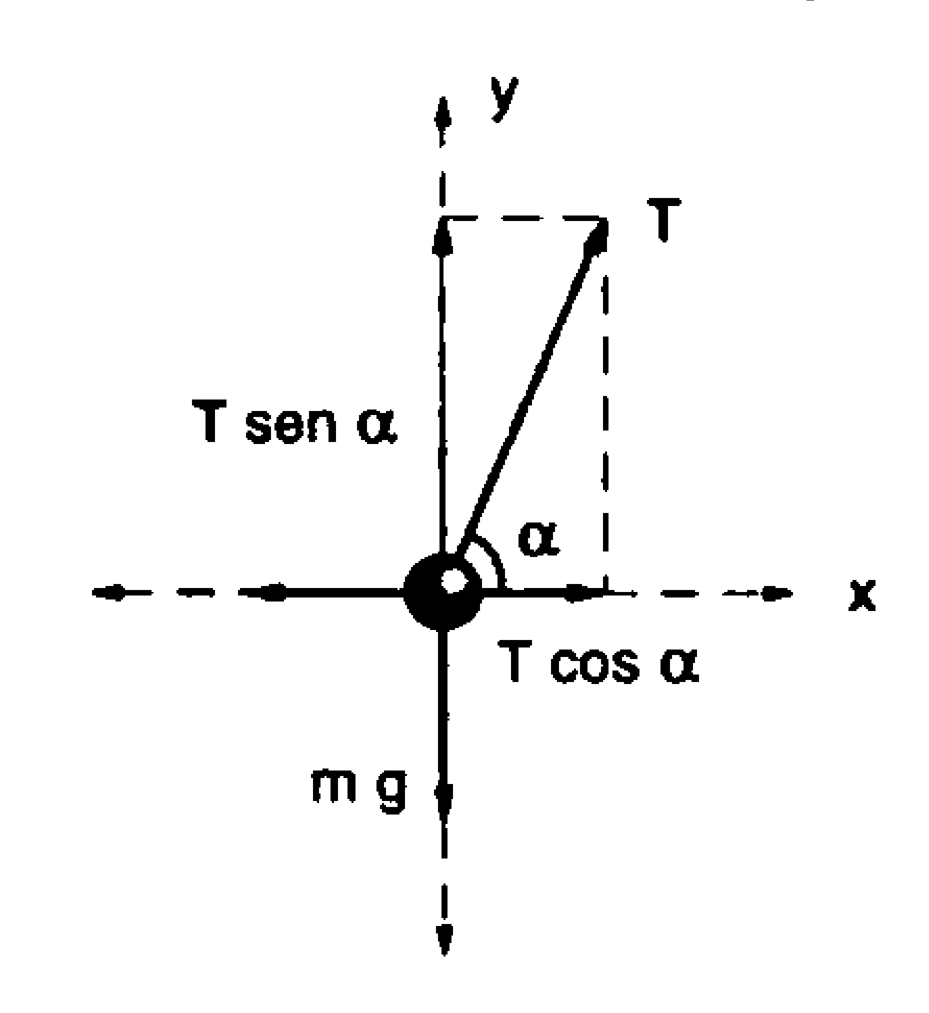
$\frac{(1)}{(2)}$: $tg\,\theta = \frac{E\,q}{m\,(g+a)}$

Rpta.: $E = \frac{m\,(g+a)\,.\,tg\,\theta}{q}$

PROBLEMA 12. Un elevador sube con una aceleración constante "a". Si dentro de él hay dos esferas atadas al techo mediante dos hilos, y que poseen una masa "m". ¿Cuál será la carga "q" que deben tener dichas esferas para que estén en la posición mostrada?



RESOLUCIÓN : D.C.L. de +q



a) $\Sigma F_y = m\,.\,a$

$$T\,sen\,\alpha - m\,.\,g = m\,.\,a$$
$$T\,sen\,\alpha = m\,(g+a) \qquad (1)$$

b) $\Sigma F_x = 0$

$$T\cos\alpha = \frac{K.q}{L^2} \qquad (2)$$

$$tg\,\alpha = \frac{m\,(g+a)}{\frac{K\,q^2}{L^2}}$$

$$q^2 = \frac{m\,(g+a)^2}{K\,.\,tg\,\alpha}$$

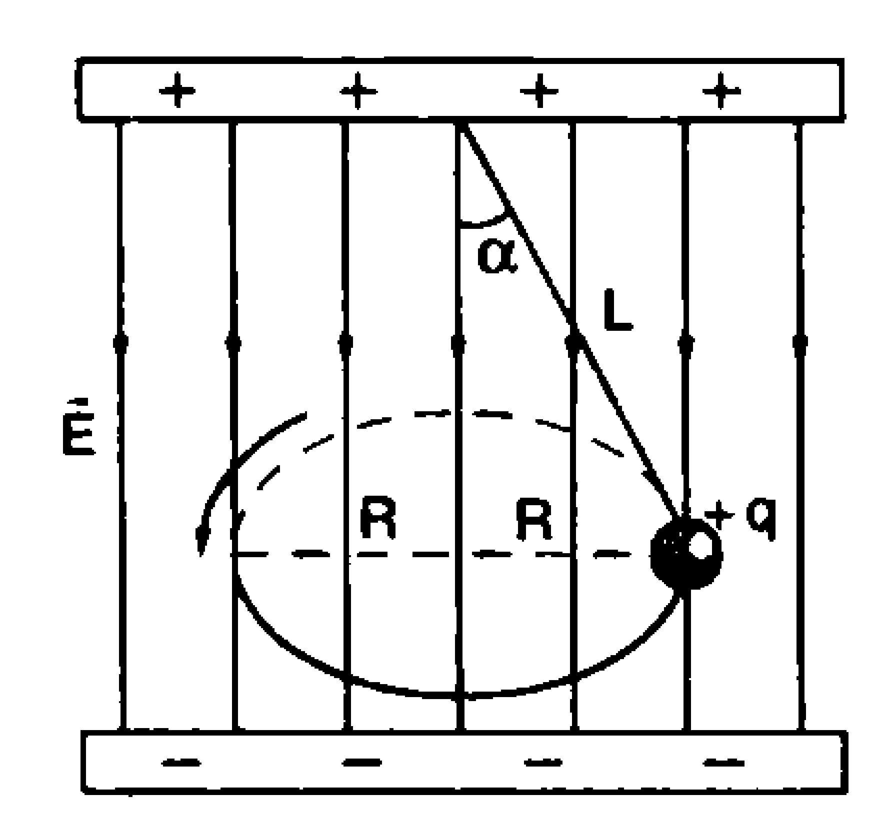
Rpta.: $q = L\sqrt{\frac{m\,(g+a)}{K\,.\,tg\,\alpha}}$

http://librosysolucionarios.net

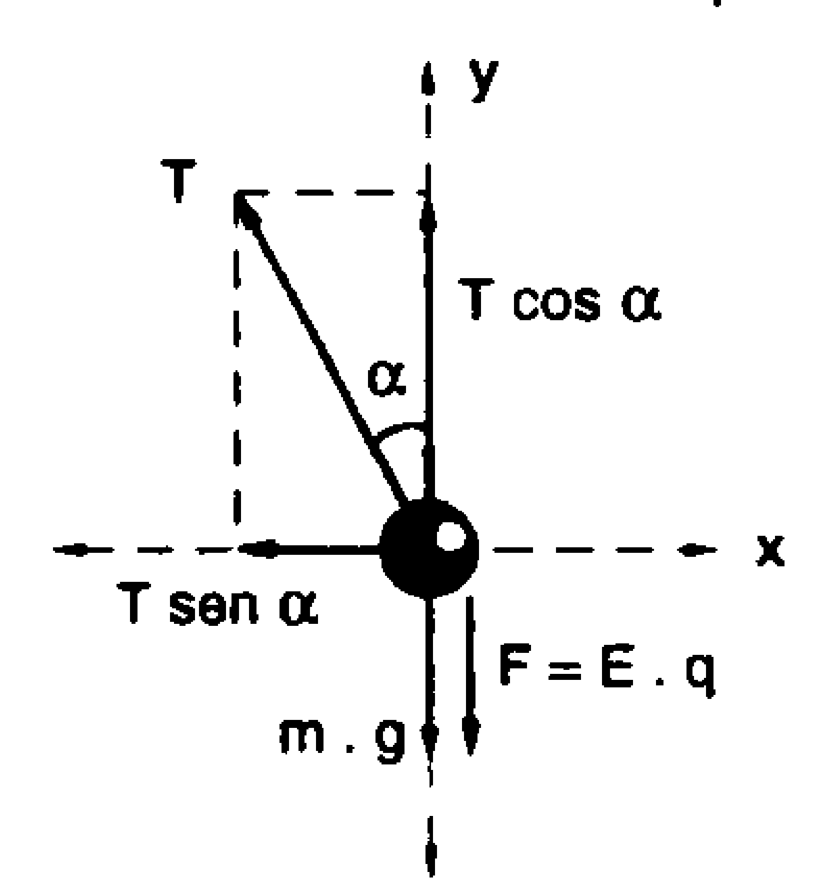
PROBLEMA 13. Dentro de dos placas cargadas positiva y negativamente, cuyo campo tiene una intensidad "$\bar{E}$", gira uniformemente una esferita de masa "m" y carga "+q", suspendida de un hilo de longitud "L", como indica la figura. Calcular:

a) La tensión del hilo.

b) La energía cinética de la esferita.



RESOLUCIÓN : D.C.L. de +q:



a) $\Sigma F_x = m.a_x$ (1)

Obsérvese que: $a_x = a_C$

y: $a_C = \dfrac{V^2}{R}$

Además en la figura propuesta:

$$R = L \, . \, \text{sen}\,\alpha$$

luego: $a_C = \dfrac{V^2}{L \, . \, \text{sen}\,\alpha}$

Sustituyendo valores en (1) :

$$T \, . \, \text{sen}\,\alpha = \frac{m.V^2}{L \, . \, \text{sen}\,\alpha}$$

Rpta.: $T = \dfrac{m.V^2}{L \, . \, \text{sen}^2\alpha}$ (a)

b) $\Sigma F_y = 0$

$$T \, . \cos\alpha = E \, . \, q + m \, . \, g \qquad (2)$$

Sustituyendo (a) en (2) :

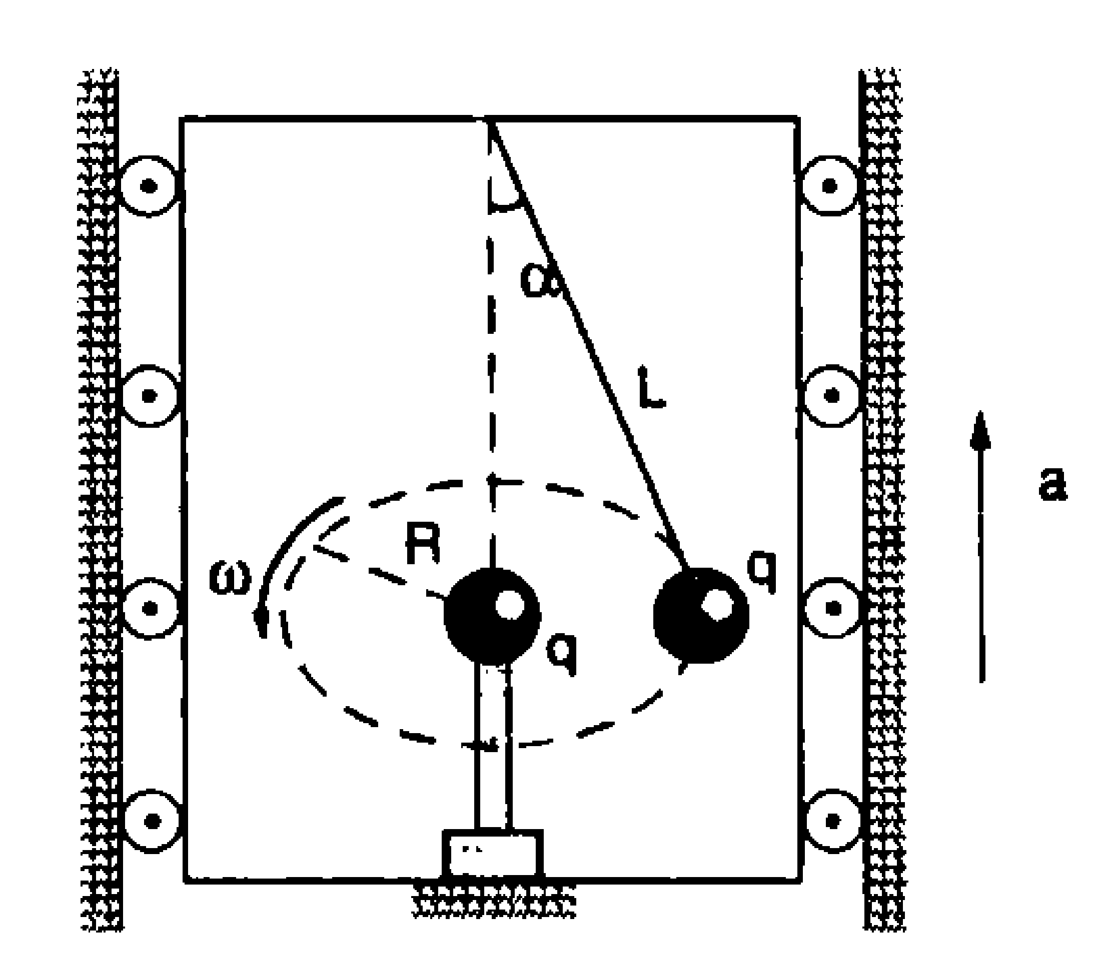
$$\frac{m\,V^2}{L \, . \, \text{sen}^2\alpha} \cdot \cos\alpha = E\,q + m\,g$$

$$m\,V^2 = \frac{L \, . \, \text{sen}^2\alpha}{\cos\alpha}(E\,q + m\,g)$$

$$m\,V^2 = L \, . \, \text{sen}\,\alpha \, . \, \text{tg}\,\alpha\,(E\,q + m\,g)$$

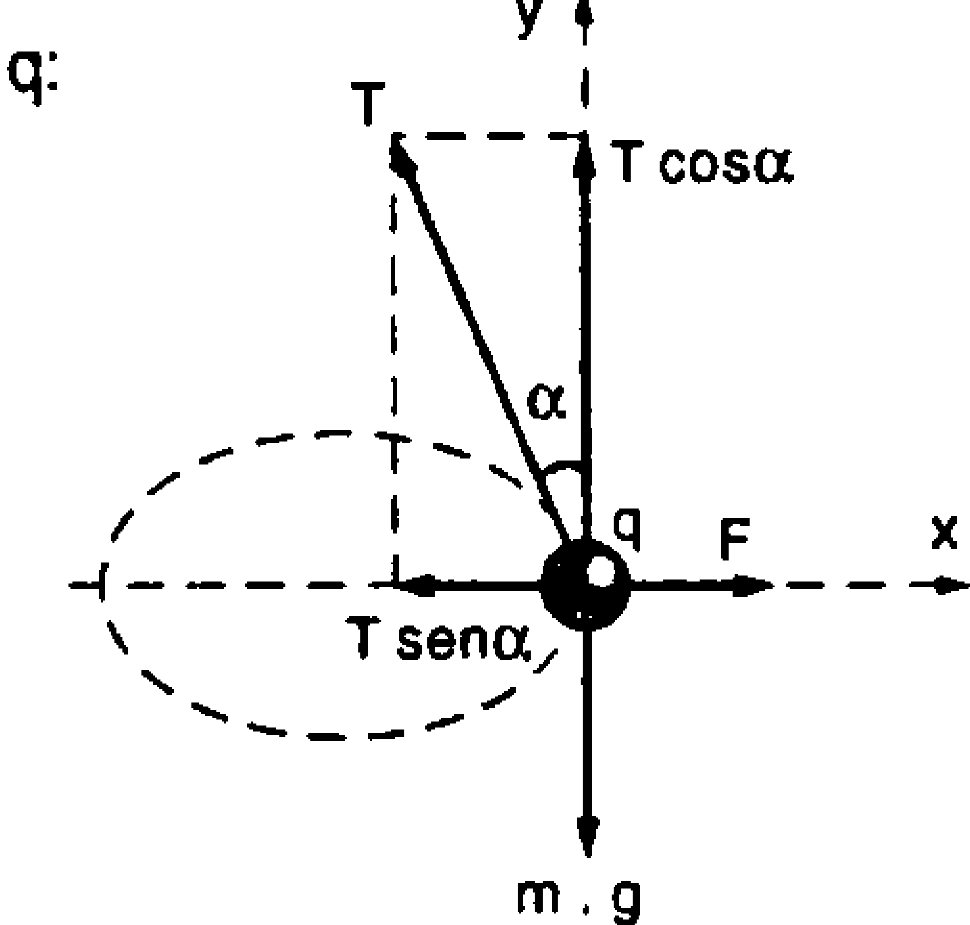
Rpta.: $E_C = \dfrac{L.\text{sen}\,\alpha.\text{tg}\,\alpha\,(E\,q+m\,g)}{2}$

PROBLEMA 14. Dentro de un ascensor que sube con una aceleración "a" se encuentra una esferita de masa "m" y carga "q", suspendida en el techo de un hilo de longitud "L"; gira alrededor de una carga "q" inmóvil. Determinar la velocidad angular "ω" constante, con que gira para que el ángulo que forme el hilo con la vertical sea igual a "α".



RESOLUCIÓN :

D. C. L. de q:



a) $\Sigma F_x = m.a_C$

pero: $a_C = \omega^2.R$

$\therefore \quad T\,sen\alpha - F = m.\omega^2.R \qquad (1)$

donde: $F = K\dfrac{q^2}{R^2}$ y: $R = L\,sen\alpha$

Reemplazando en (1):

$$T\,sen\,\alpha - \frac{Kq^2}{L^2\,sen^2\alpha} = m\,\omega^2\,L\,sen\alpha$$

dividiendo entre $sen\,\alpha$ y despejando T:

$$T = \frac{Kq^2}{L^2\,sen^3\alpha} + m\,\omega^2\,L \qquad (2)$$

b) $\Sigma F_y = m.a_y$

$$T\cos\alpha - m.g = m.a$$

$$T = \frac{m\,(g + a)}{\cos\alpha} \qquad (3)$$

igualando (2) y (3):

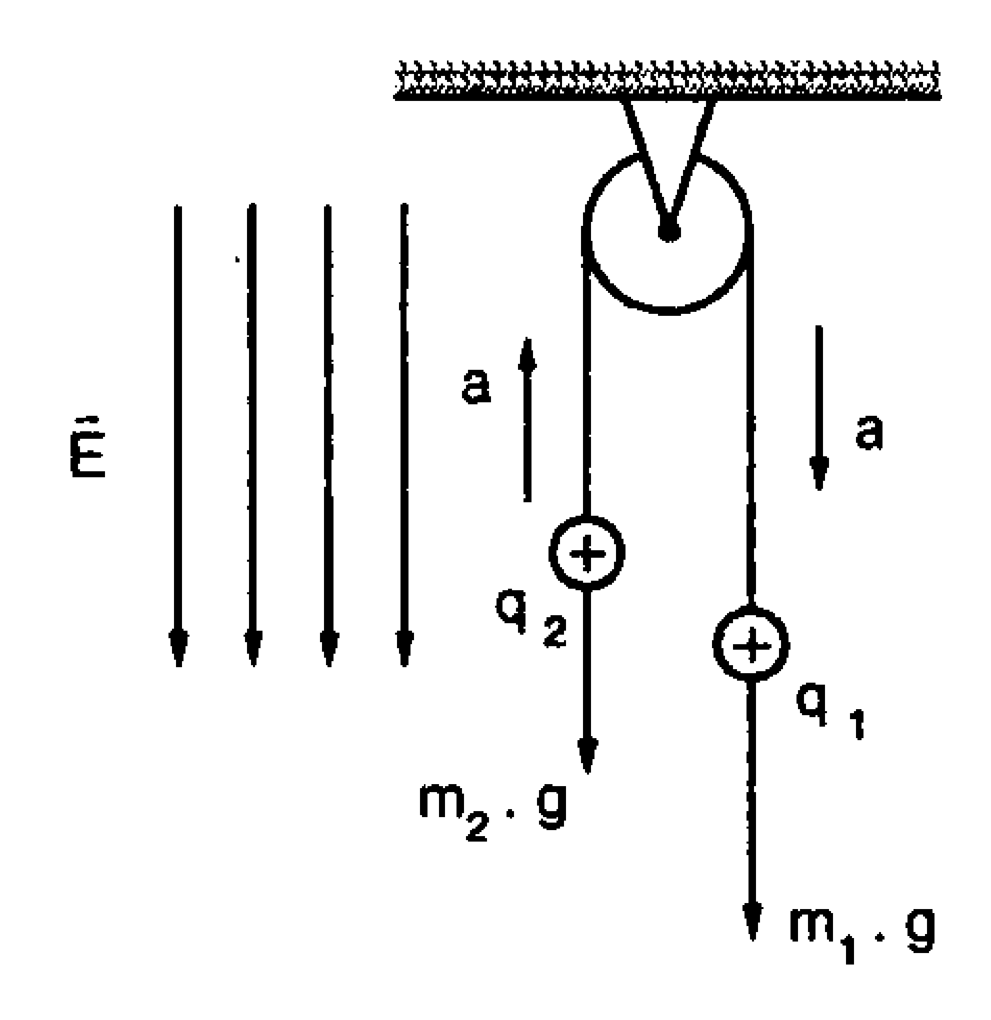
$$m\,\omega^2\,L + \frac{Kq^2}{L^2\,sen^3\alpha} = \frac{m\,(g + a)}{\cos\alpha}$$

$$m\,\omega^2\,L = \frac{m\,(g + a)}{\cos\alpha} - \frac{Kq^2}{L^2\,sen^3\alpha}$$

$$\omega^2 = \frac{(g + a)}{L\cos\alpha} - \frac{Kq^2}{m\,L^3\,sen^3\alpha}$$

Rpta.: $\omega = \left[\dfrac{(g + a)}{L\cos\alpha} - \dfrac{Kq^2}{m\,L^3\,sen^3\alpha}\right]^{\frac{1}{2}}$

PROBLEMA 15. Dos esferitas de masas m_1 y m_2 con cargas $+q_1$ y $+q_2$ respectivamente, están unidas por un hilo que pasa a través de una polea fija. Calcular la aceleración de las esferitas y la tensión del hilo, si todo el sistema es introducido en un campo electrostático homogéneo "$\vec{E}$", cuyas líneas de fuerzas están dirigidas verticalmente hacia abajo. Despreciar la interacción entre las esferitas cargadas.



RESOLUCIÓN : Para el conjunto:

a) $\Sigma F_y = m.a$

$$m_1.g + F_1 - m_2.g - F_2 = (m_1 - m_2)\,a$$

Como: $F_1 = E.q_1$

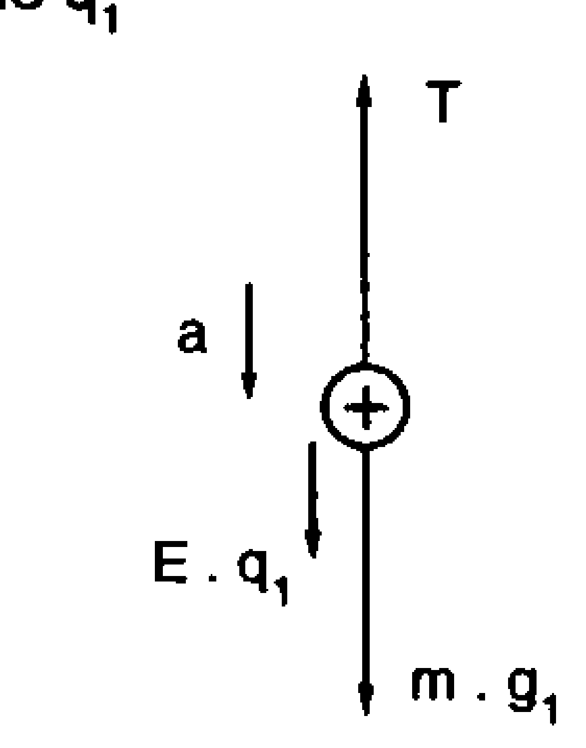
y: $F_2 = E.q_2$

Luego:

$$(m_1 - m_2)\,g + E\,(q_1 - q_2) = (m_1 - m_2)\,a$$

Rpta.: $a = \dfrac{(m_1 - m_2)\,g + E(q_1 - q_2)}{m_1 + m_2} \qquad (1)$

b) D.C.L. de q_1



$$\Sigma F_y = m.a$$

$$m_1.g + E.q_1 - T = m_1.a$$

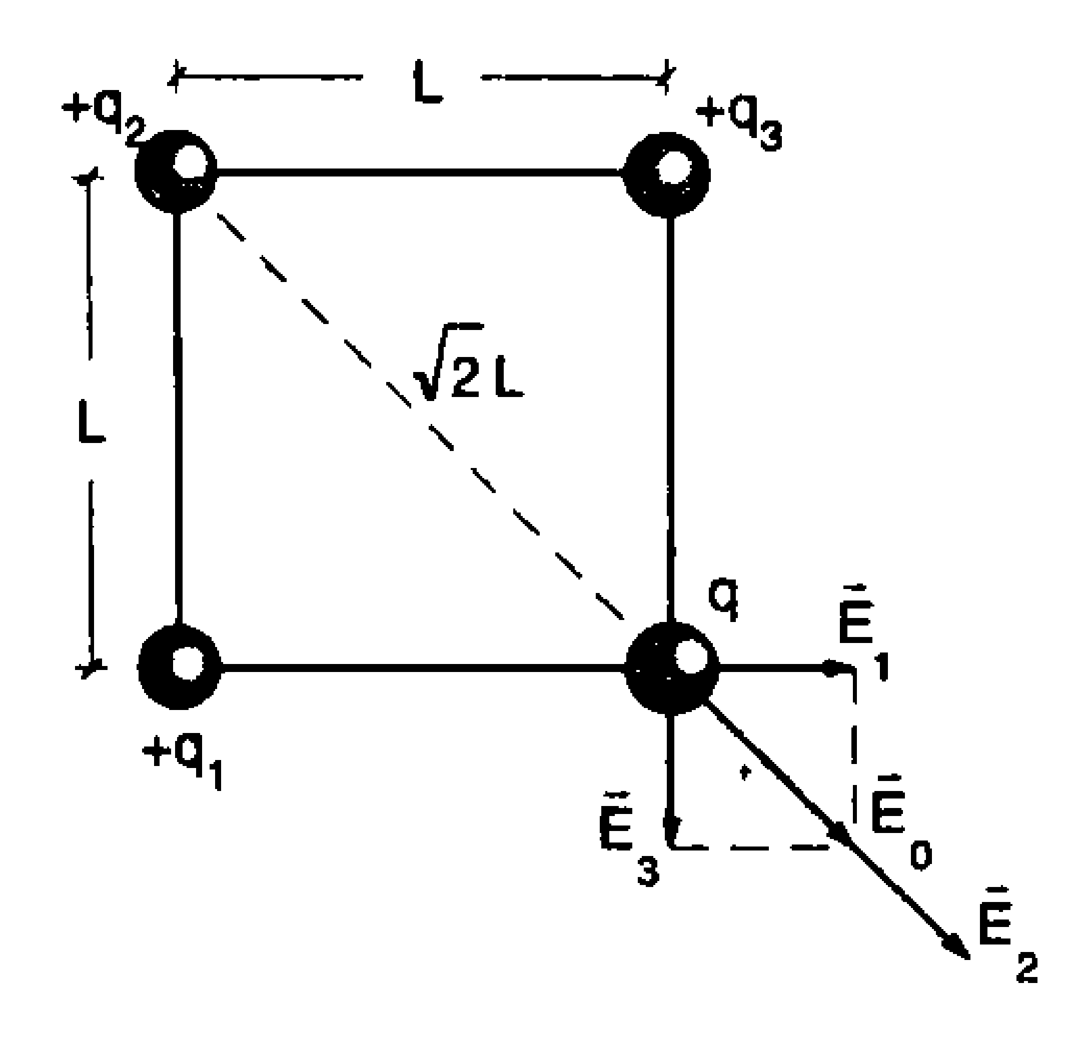
$$T = m_1.g + E.q_1 - m_1.a \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

Rpta.: $T = \dfrac{2\,m_1 m_1\,g + E(m_2\,q_1 + m_1\,q_2)}{m_1 + m_2}$

PROBLEMA 16. Si en cada uno de 3 vértices de un cuadrado de lado "L" se coloca una carga puntual, todas iguales; demostrar que la intensidad de campo en el cuarto vértice tiene por magnitud:

$$E = \sqrt{2}\left[\frac{K.q}{4\,L^2}\,(4 + \sqrt{2})\right]$$



RESOLUCIÓN:

Por dato: $q_1 = q_2 = q_3 = q$

E_0 (Resultante de E_1 y E_2):

$$E_{TOTAL} = E_0 + E_2 \qquad (a)$$

Cálculo de E_0:

$$E_0 = \sqrt{E_1^2 + E_3^2} \qquad (I)$$

Cálculo de E_1 y E_3:

$$E_1 = K\,\frac{q}{L^2} \qquad (2)$$

$$E_3 = K\,\frac{q}{L^2} \qquad (3)$$

Sustituyendo (2) y (3) en (I):

$$E_0 = \frac{Kq}{L^2}\sqrt{2} \qquad (B)$$

Cálculo de E_2:

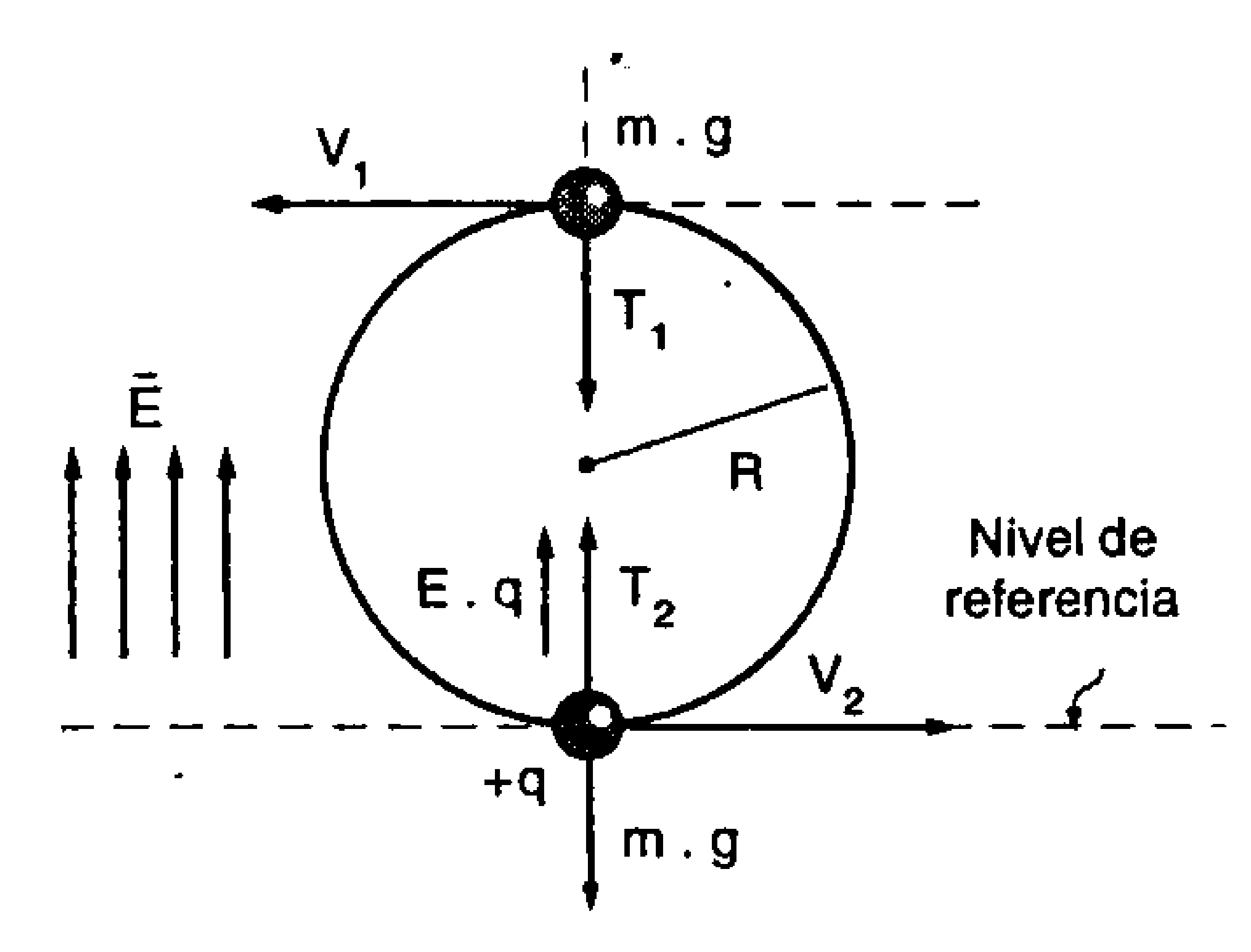
$$E_2 = K\,\frac{q}{(L\sqrt{2})^2} = \frac{Kq}{2\,L^2} \qquad (\theta)$$

Reemplazando (θ) y (B) en (a):

$$E_{TOTAL} = \frac{Kq\sqrt{2}}{L^2} + \frac{Kq}{2\,L^2}$$

$$\therefore\ E_{TOTAL} = \sqrt{2}\left[\frac{Kq}{4\,L^2}(4 + \sqrt{2})\right] \quad \text{l.q.q.d.}$$

PROBLEMA 17. En un campo elec-trostático uniforme de intensidad " $\vec{E}$ " y cuyas líneas de fuerza están dirigidas verticalmente hacia arriba, puede girar, en el plano vertical, atada a un hilo de longitud "L", una esferita de masa "m" y carga "+q".



¿Cuál es la velocidad horizontal que hay que comunicarle a la esferita, en el punto más elevado de su trayectoria, para que la tensión del hilo en el punto más bajo sea 10 veces el peso de la esferita?

RESOLUCIÓN :

I. De la figura, para la posición (2):

$$F_R = \frac{m.V_2^2}{R} = \frac{m.V_2^2}{L}$$

$$T_2 + E.q - m.g = \frac{m.V_2^2}{L}$$

Por dato: $T_2 = 10\,m\,.\,g$

De tal manera que:

$$E.q + 9\,m.g = \frac{m.V_2^2}{L}$$

ó: $\frac{(E.q + 9\,m.g)\,L}{2} = \frac{m.V_2^2}{2}$ (α)

II. Por conservación de la energía:

$W_{F(EXTERIOR)} = \Delta E_K + \Delta E_P +$

$+ W_{(REALIZADO\ CONTRA\ EL\ CAMPO\ EXTERIOR)}$

Reemplazando:

$$0 = \frac{1}{2}m.V_2^2 - \frac{1}{2}m.V_1^2 + m.g\,(0) -$$

$$- m.g.2L + E.q.2L$$

$$\frac{m.V_2^2}{2} = \frac{m.V_1^2}{2} + m.g.2L - E.q.2L \quad (\beta)$$

Reemplazando (α) en (β):

Rpta.: $V_1 = \sqrt{\frac{5\,L\,(m.g + E.q)}{m}}$

PROBLEMA 18. Un electrón que se mueve a una velocidad de 10^7 m/s en la dirección +X pasa por el punto X = Y = 0 en t = 0. Si existe un campo eléctrico de 10^4 N/C en la dirección +Y. ¿Cuál será la coordenada "Y" del electrón cuando pase por el punto X = 20 cm?

RESOLUCIÓN :

- Para el movimiento vertical:

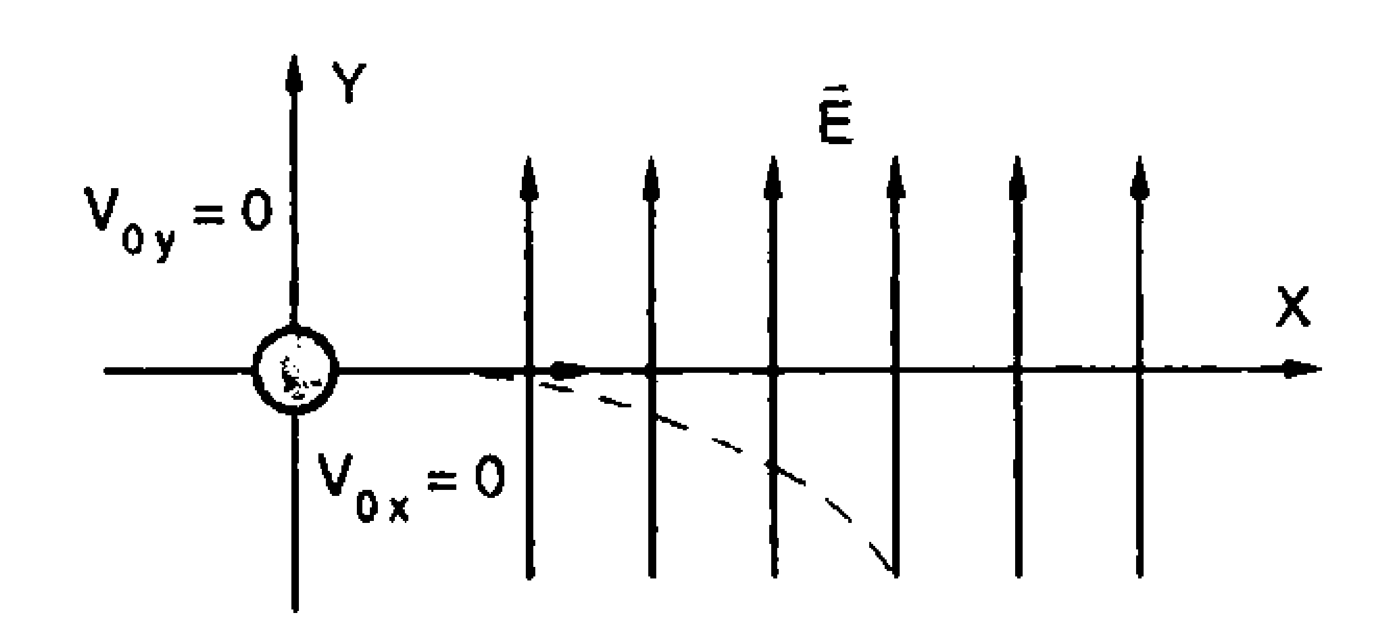
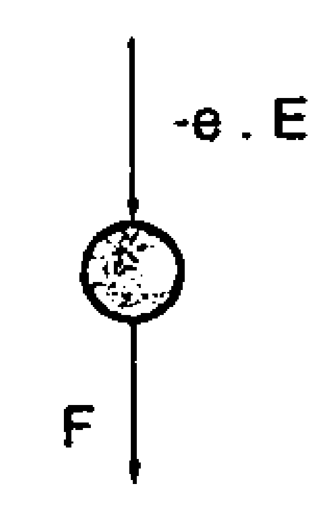


Diagrama de cuerpo libre del electrón:



$$m.g << e.E$$

$$F = m.a \quad (a)$$

$$F = -e.E \quad (b)$$

$$\therefore \quad -e.E = m.a$$

de donde: $a = \frac{-e.E}{m}$ (1)

Sabiendo que: $Y = V_{0y}\,t + \frac{1}{2}\,a\,t^2$

Pero V = 0 ; además sustituyendo "a" por su valor dado en (1) :

$$Y = \frac{1}{2}\left(\frac{-e.E}{m}\right)t^2 \quad (2)$$

- Para el movimiento horizontal:

$$X = V_{0x}$$

$$t = \frac{X}{V_{0x}} \quad (3)$$

Reemplazando (2) en (3) :

$$Y = -\frac{1}{2}\cdot\frac{e.E}{m}\cdot\frac{X^2}{V_0^2}$$

El signo (-) indica que su posición vertical es por debajo de Y = 0.

Reemplazando datos numéricos:

$$Y = -\frac{1}{2} \times \frac{1,6 \times 10^{-19} \times 10^4}{9,11 \times 10^{-31}} \times \frac{(0,2)^2}{(10^7)^2}$$

Efectuando:

Rpta.: Y = -35 cm

$$\frac{e}{m} = \frac{1,6\,.10^{-19}C}{9,11\,.10^{-31}kg} = 1,756 \times 10^{11} kg^{-1} C$$

A escala atómica las fuerzas gravi-tacionales son completamente despreciables por eso se hace:

$$m.g << e.E$$

<< : Mucho menor

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la intensidad de campo en el centro de un triángulo equilátero de lado $L = \sqrt{3}$ m. Las cargas están en los vértices en A = 2 C, en B = 2 C, en C = 4 C.

Rpta.: 18×10^9 N/C

2. Calcular la intensidad del campo en un punto situado a 3 m de una carga de -30 C

Rpta.: -30×10^9 N/C

3. En el vértice de un triángulo equilá-tero se pone una carga de 1 C. ¿Cuál es la intensidad del campo en el punto medio del lado BC? El lado del triángulo mide 30 cm.

Rpta.: $133,3 \times 10^9$ N/C

4. A una carga de +100 μ C se le aplica una carga de 10 dinas. Calcular la intensidad en el punto donde está ubicada la carga.

Rpta.: 1 N/C

5. ¿Cuál e la intensidad del campo de una carga de 3 C a una distancia de 8 pies? 1 pie = 0,304 8 m

Rpta.: $4,54 \times 10^9$ N/C

6. Una esferilla de masa "m" y de carga "q" está suspendida de un hilo delgado de longitud "L", dentro de un condensador plano de láminas horizontales. La intensidad del campo del condensador es igual a E, las líneas de fuerza están dirigidas hacia abajo. Se pide hallar la frecuencia de las oscilaciones de este péndulo.

Rpta.: $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{g + \frac{Eq}{m}}{L}}$$

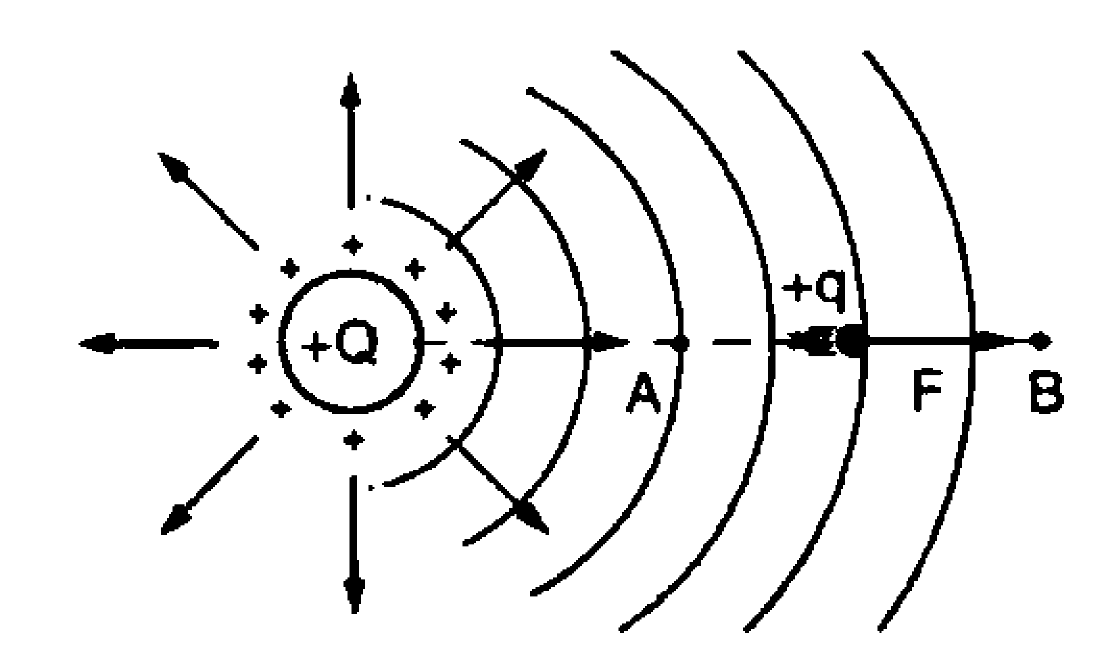
7. Demostrar que cuando un dipolo se encuentra bajo la acción de un campo eléctrico uniforme actúa sobre él un par de fuerzas, cuyo momento es: $M = E\, q\, r \operatorname{sen}\theta$, en la que θ es el ángulo formado entre las direcciones del flujo electrostático y el eje del dipolo. La separación de las cargas es "r"

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA "U_E^P"

Es una magnitud física escalar que está vinculada al campo eléctrico

UNIDAD : En el SI. es el joule "J"

Consideremos una carga positiva +Q fija y su respectivo campo eléctrico asociado, tal como se muestra (se desprecia los efectos gravitatorios).



¿Qué sucede cuando una carga de prueba +q se suelta en el punto "A", dentro del campo?

Sobre dicha carga de prueba +q actúa la fuerza eléctrica del campo F, la cual le transmite movimiento.

¿Qué actividad realiza la fuerza eléctrica del campo sobre la carga de prueba +q?

La fuerza del campo realiza un trabajo mecánico: $W_{A \to B}^{F}$.

¿La fuerza del campo hasta qué momento actúa?

La fuerza del campo actúa hasta que su valor se hace cero.

¿En qué lugar la intensidad del campo eléctrico es nula $\vec{E} = \vec{0}$?

En un lugar donde no llega el efecto del campo eléctrico. A ese lugar le llamaremos infinito "∞".

El **infinito** es una **posición relativa** y depende del valor de la carga generadora Q,

http://librosysolucionarios.net

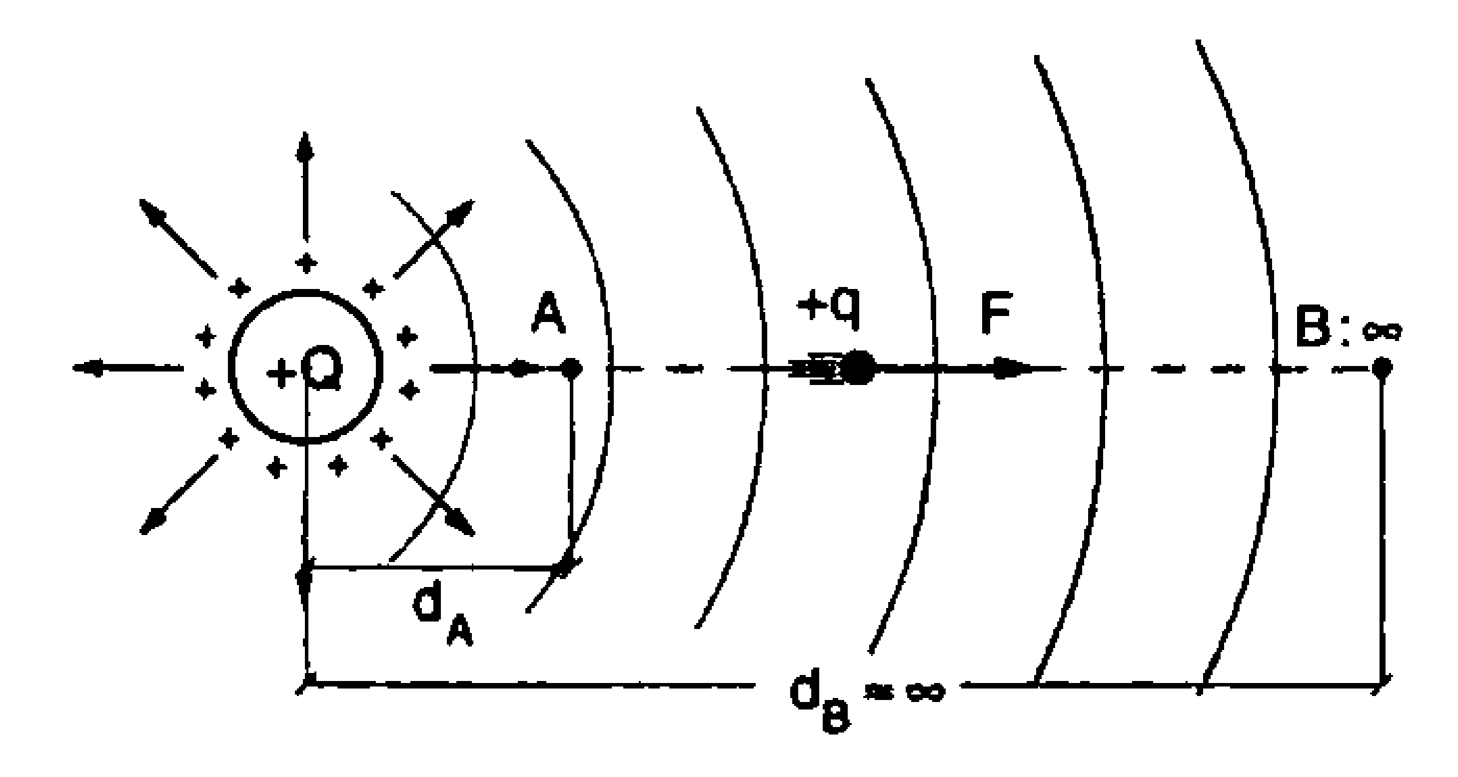
si la carga Q es pequeña su "infinito" está en un punto relativamente cercano, mientras que si la carga Q es grande su "infinito" está en un punto relativamente lejano.

Finalmente: si el campo eléctrico tiene capacidad para realizar trabajo mecánico, entonces ¿posee o no energía?

¡El campo eléctrico sí posee energía!

CONCLUSIÓN:

Si el campo eléctrico es capaz de realizar trabajo mecánico es por que posee energía llamada "energía potencial eléctrica: U".



En el punto A del campo, la intensidad de campo eléctrico $\bar{E}_A$ es mayor que cero, asimismo la energía potencial eléctrica U_A del sistema de cargas Q y q es también mayor que cero.

$$\bar{E}_A > 0 \quad y \quad U_A > 0$$

En el punto B del campo (infinito), la intensidad del campo eléctrico es cero (por estar muy lejos de Q) y la energía potencial eléctrica también es cero.

$$\bar{E}_B = 0 \quad y \quad U_B = 0$$

Entonces la conclusión es que:

$$U_A > U_B$$

De la Ley de conservación y transformación de la energía se puede decir que:
Energía potencial eléctrica en "A" = Trabajo mecánico de la fuerza eléctrica aplicada sobre la carga de prueba, para desplazarla desde "A" hasta "B" (o de B hasta A).

$$U_A = W^F_{A \to B}$$

La energía potencial eléctrica para un sistema de 2 cargas fijas (Q y q) y separadas una distancia "d" se define así:

$$U_A = T^F_{A \to B} = K\frac{|Q|.|q|}{d}$$

Donde:

U_A : Energía potencial eléctrica del sistema medido en joule "J".

|Q| y |q| : Valores de las cargas puntuales medidas en coulomb "C".

d : Distancia entre Q y q, en "m"

$$K = 9 \cdot 10^9 \ \frac{N \cdot m^2}{C^2}$$

NOTA : El trabajo que se realiza para trasladar la carga "q" de A hasta B es equivalente al trabajo para trasladar de B hasta A, solo que cuando se traslada de B hasta A, el trabajo es realizado por un agente externo al campo eléctrico para vencer la fuerza repulsiva que el campo ejerce sobre la carga "q". Cuando "q" pasa de A a B PIERDE energía, cuando pasa de B a A, ACUMULA energía.

POTENCIAL ELÉCTRICO "V_A"

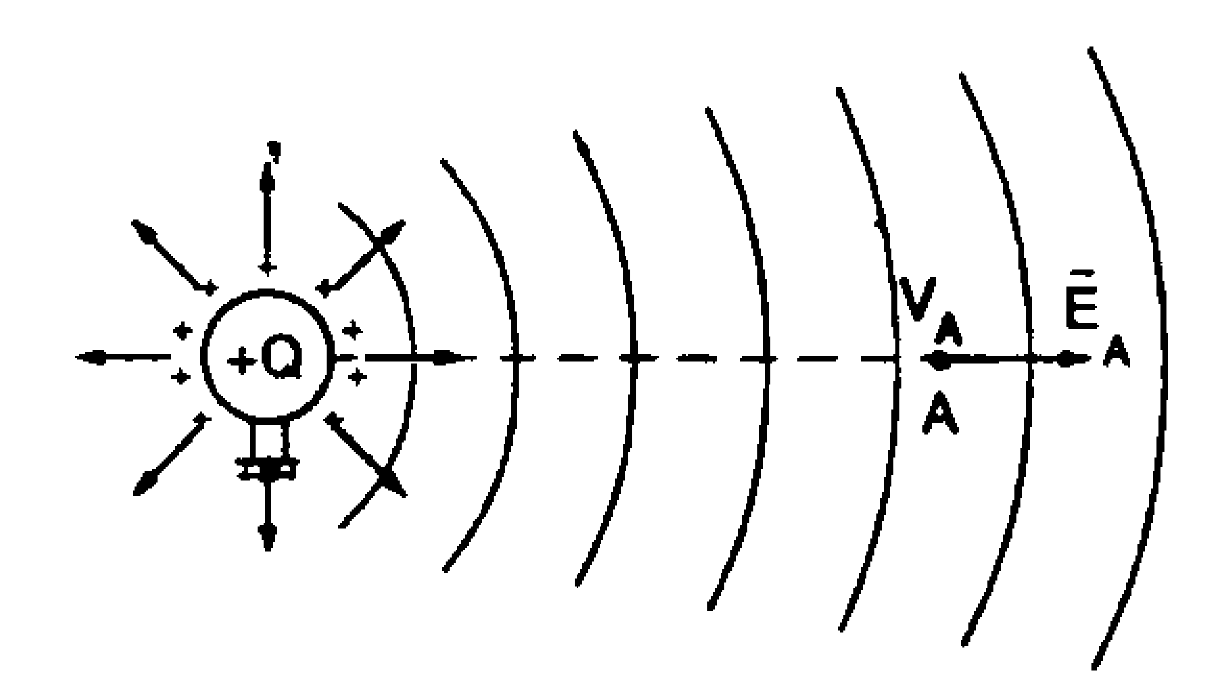
Recordemos, primero, que todo punto del campo está caracterizado por una magnitud vectorial llamada intensidad de campo eléctrico "$\bar{E}$". Del mismo modo todo punto del campo también se caracteriza por una magnitud escalar llamada potencial eléctrico "V".

El potencial eléctrico, pues, mide la energía que posee el campo por unidad de carga pero en forma escalar.

En forma matemática se le define como el cociente de la energía potencial eléctrica y el valor de la carga de prueba ubicada en el

http://librosysolucionarios.net

punto donde se desea conocer el potencial.



$$V_A = \frac{U_A}{q}$$

¿Cómo hallar el potencial eléctrico "V_A" en el punto A?

Ubicando una carga de prueba "+q" en el punto A, se define:

$$V_P = \frac{U_A}{q} = \frac{K\frac{Q \cdot q}{d}}{q} = K\frac{Q}{d}$$

¿El potencial "V_P" en el punto A depende necesariamente de la carga de prueba "q"? ¡No!

Depende directamente de la carga Q creadora del campo, e inversamente de la distancia "d" de A a Q.

$$V_P = K\frac{Q}{d}$$

Donde:

V_P : Potencial eléctrico en el punto A, en voltios "V" (V = J/C).

d : Distancia de Q a A, en metros "m".

Q : Carga generadora del campo, en coulomb "C".

$$K = 9 \times 10^9 \ \frac{N \times m^2}{C^2}$$

NOTA : En la fórmula se considera el signo de la carga, como se verá posteriormente:

La ecuación de "V_P" nos indica que el valor del potencial es directamente proporcional al valor de la carga Q generadora del campo. Asimismo el valor del potencial varía en forma inversa-mente proporcional a la distancia.

Unidades: $1 \text{ Voltio} = \frac{1 \text{ joule}}{1 \text{ coulomb}}$

OBSERVACIÓN:

El potencial V puede ser positivo, negativo o nulo

V (+) : Si la carga Q es positiva

V (-) : Si la carga Q es negativa

V (0) : Si la carga Q es nula. Cuando la distancia d tiende al infinito.

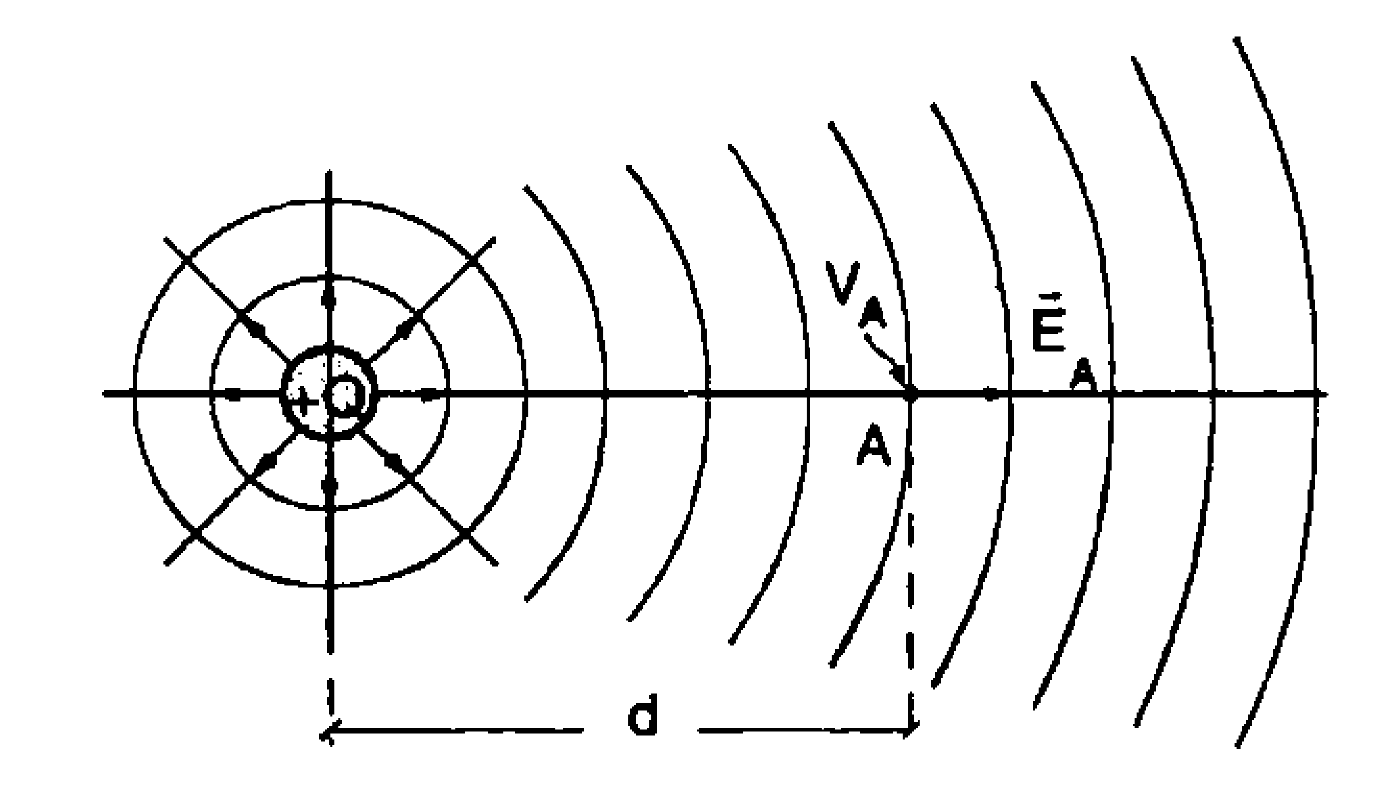
CONCLUSIONES :

1. Todo campo eléctrico se manifiesta por su fuerza eléctrica $\bar{F}$ y su energía potencial U, como se dijo anteriormente.
2. Todo campo eléctrico posee dos características:

VECTORIAL	ESCALAR
$\bar{E} = \frac{\bar{F}}{q}$	$V = \frac{U}{q}$

RELACIÓN ENTRE CAMPO "$\bar{E}$" Y POTENCIAL ELÉCTRICO "V"

Se sabe que todo punto perteneciente a un campo eléctrico se caracteriza por la intensidad de campo $\bar{E}_A$ y el potencial eléctrico V_A en dicho punto.



Sea E_A la intensidad del campo eléctrico en el punto A:

$$E_A = K\frac{Q}{d^2}$$

o: $$E_A = \left(K\frac{Q}{d}\right)\frac{1}{d} \qquad (1)$$

Pero: $V_A = K\dfrac{Q}{d}$ (2)

Reemplazando (2) en (1):

$$E_A = \frac{V_A}{d}$$

$$\boxed{V_A = E_A \cdot d}$$

Donde:

V_A : Potencial eléctrico en el punto A, en voltios "V"

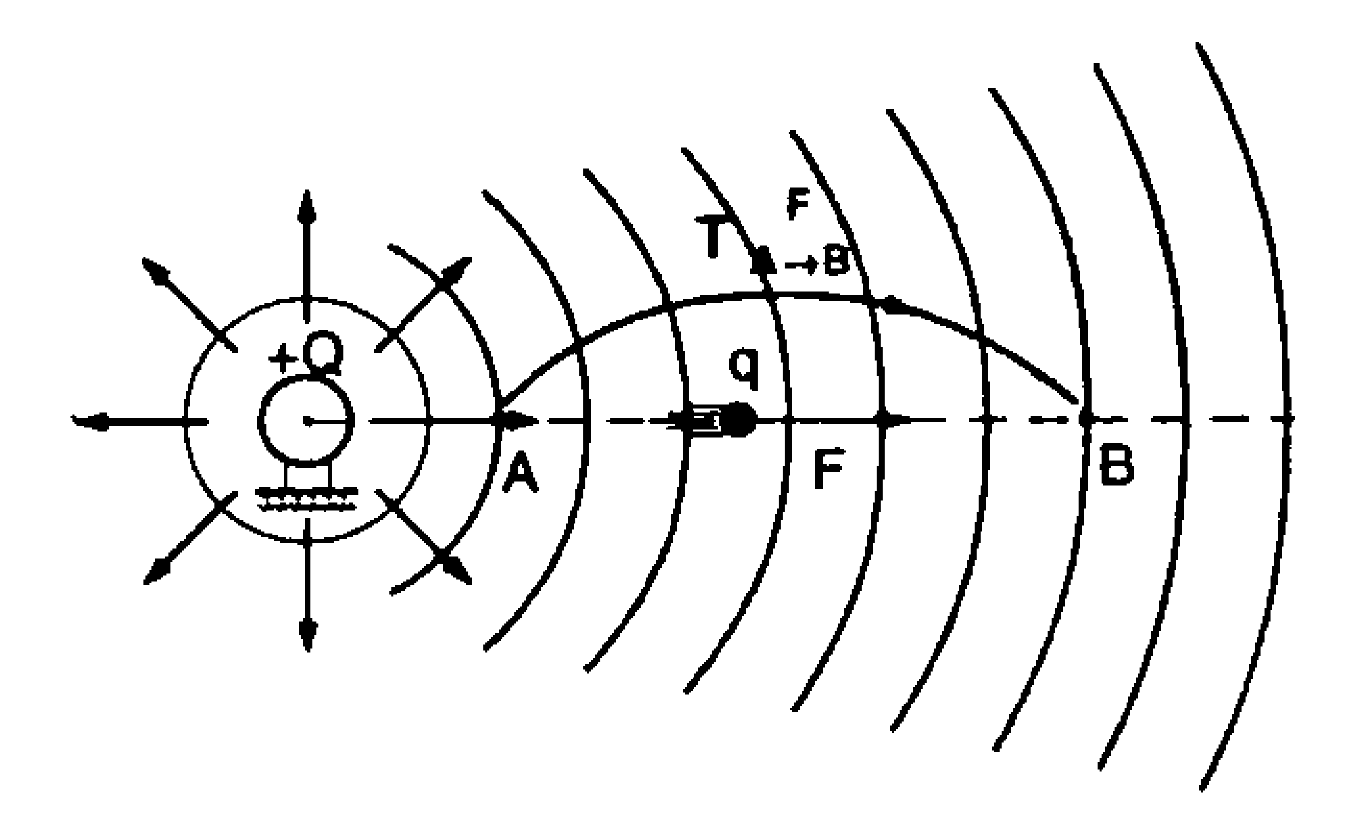
E_A : Intensidad de campo eléctrico en el punto A, en "N/C o "V/m".

d : Distancia de Q a A, medida en metros "m".

DIFERENCIA DE POTENCIAL V_{AB}

Se llama Diferencia de Potencial al trabajo eléctrico "T ^{F}" que debe realizarse para mover, a velocidad constante, una carga de prueba positiva "q" desde un punto A hasta un punto B situados en el mismo campo.

Sea una carga Q^+ y su campo dentro del cual soltamos una carga de prueba q^+ situado en A.



Sabemos: $\bar{E}_A > \bar{E}_B$

$U_A > U_B$

$V_A > V_B$

¿Qué existe entre dos puntos pertenecientes a un campo eléctrico?

Entre dos puntos A y B de un mismo campo eléctrico existe una "diferencia de potencial" ($V_A > V_B$).

¿Cómo se determina la diferencia de potencial?

La diferencia de potencial:

(d.d.p.: $V_A - V_B = V_{AB}$), se determina aplicando la ley de conservación y transformación de la energía: "La energía potencial en el punto A es igual a la energía potencial eléctrica en el punto B más el trabajo realizado por la fuerza eléctrica sobre la carga de prueba q para trasladarla desde A hasta B". Es decir:

ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA EN A = ENERGÍA POTENCIAL ELÉCTRICA EN B + TRABAJO REALIZADO POR LA FUERZA ELÉCTRICA DESDE A HASTA B

$$U_A = U_B + W^F_{A\to B}$$

$$V_A \cdot q = V_B \cdot q + W^F_{A\to B}$$

$$(V_A - V_B)\,q = W^F_{A\to B}$$

$$\boxed{V_A - V_B = \frac{W^F_{A\to B}}{q}}$$

Donde:

q : Es la carga de prueba positiva que se traslada por acción de la fuerza del campo, se mide en coulomb "C".

$V_A - V_B$: Es la diferencia de potencial, se mide en voltios "V".

$W^F_{A\to B}$: Es el trabajo mecánico realizado por la fuerza del campo, se mide en joule "J".

Unidades C.G.S. que aún se usan :

Q : u.e.q. ; d : cm

$$K = 1\,\frac{\text{dina . cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2} \quad \text{(aire o vacío)}$$

$$V = 1\,\frac{\text{erg}}{\text{u.e.q.}} = 1 \text{ u.e.v.}$$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

PROBLEMA 1. Un cuerpo tiene una carga de 50×10^{-10} C. ¿Cuál es el potencial a una distancia de 25 mm?

RESOLUCIÓN: $Q = 50 \times 10^{-10}$ C

$d = 25 \times 10^{-3}$ m

Se sabe: $V = K\dfrac{Q}{d}$

$$V = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{50 \times 10^{10}\ C}{25 \times 10^{-3}\ m}$$

$$V = 1\,800\ \frac{N \times m}{C} = 1\,800\ \frac{J}{C}$$

Rpta.: V = 1 800 voltios

PROBLEMA 2. Una esfera está cargada con 200 u.e.q. ¿Cuál será su potencial a 2 mm de distancia?

RESOLUCIÓN: $Q = 200$ u.e.q.

$d = 2 \times 10^{-1}$ cm

Recordando que: $V = K\dfrac{Q}{d}$

$$V = 1\ \frac{din \times cm^2}{(u.e.q.)^2} \times \frac{200\ u.e.q.}{2 \times 10^{-1}\ cm}$$

$$V = 1\,000\ \frac{din \times cm}{u.e.q.} = 1\,000\ \frac{erg}{u.e.q.}$$

Rpta.: V = 1 000 u.e.v.

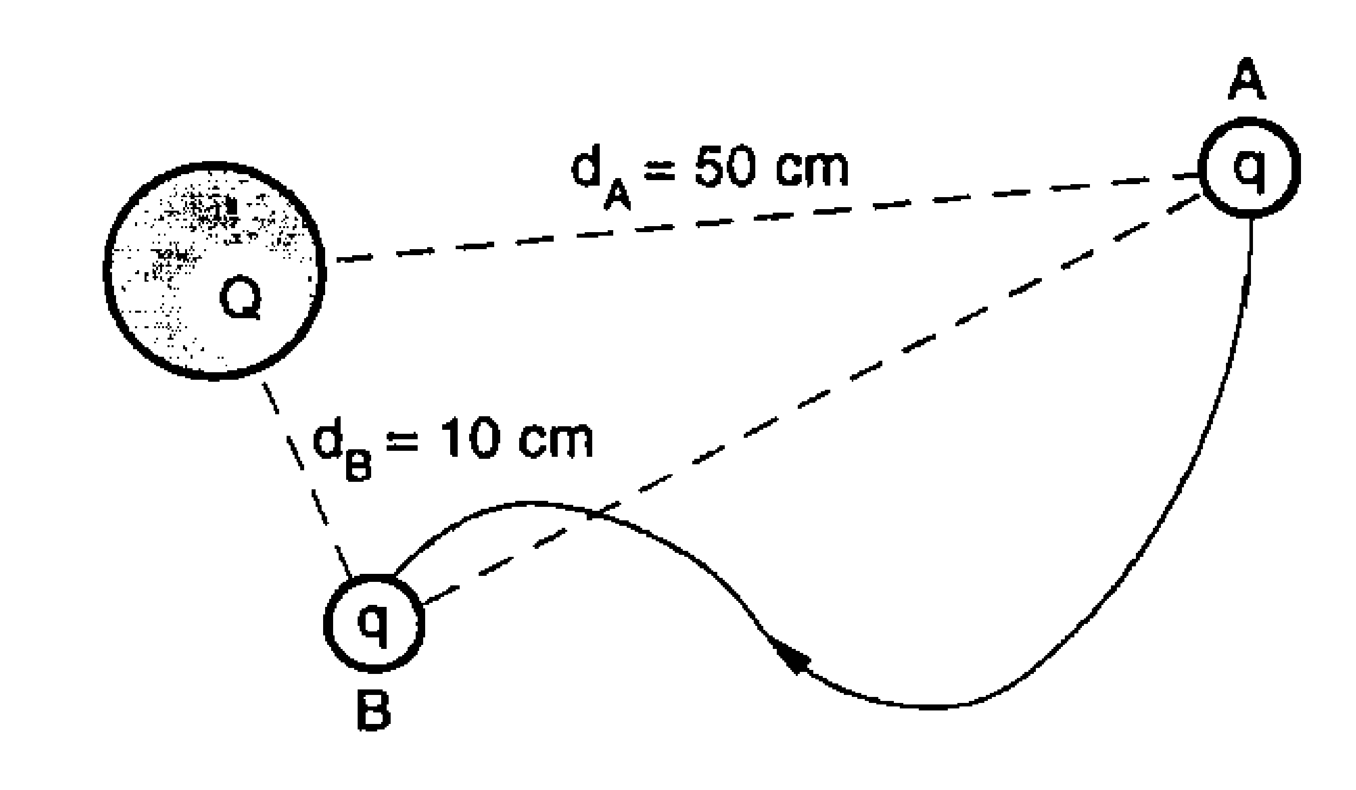
PROBLEMA 3. Calcular el trabajo necesario para trasladar la carga "q" = 5×10^{-8} C, desde un punto "A" en el aire, a 50 cm de la carga $Q = 2 \times 10^{-6}$ C, hasta otro punto "B" a 10 cm de ésta última.

RESOLUCIÓN: $q = 5 \times 10^{-8}$ C

W = ? $Q = 2 \times 10^{-6}$ C

$d_A = 50$ cm

$d_B = 10$ cm



$$W_{AB} = q(V_B - V_A)$$

pero: $V_A = K\dfrac{Q}{r_A}$; $V_B = K\dfrac{Q}{r_B}$

$$\therefore \quad W_{AB} = q\left(K\frac{Q}{r_B} - K\frac{Q}{r_A}\right)$$

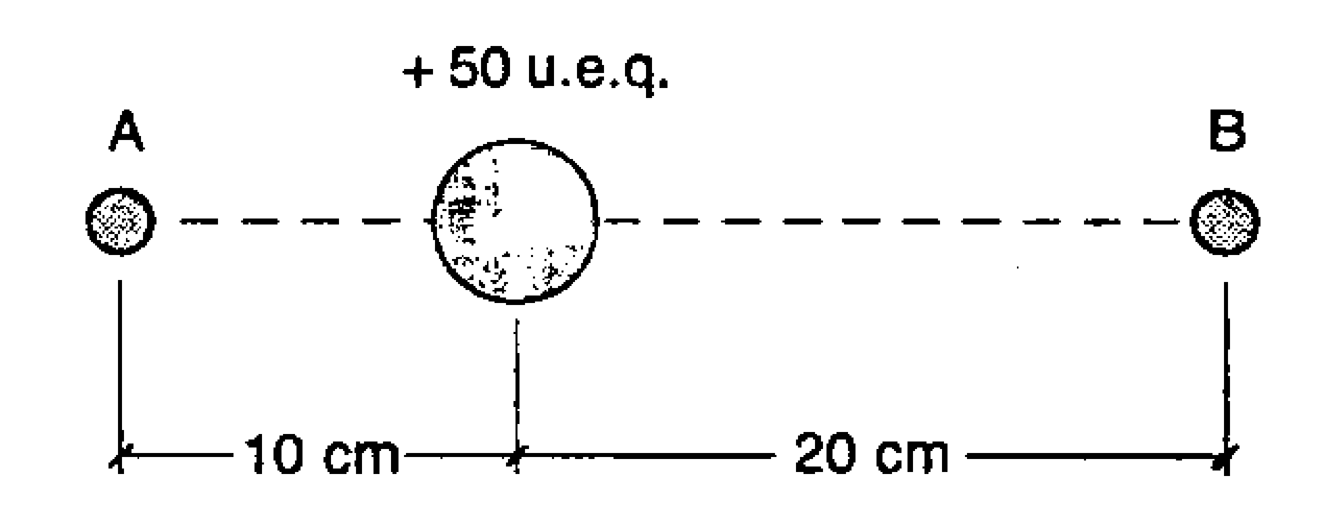
$$W_{AB} = KqQ\left(\frac{1}{r_B} - \frac{1}{r_A}\right)$$

$$W_{AB} = 9 \times 10^9 \times 5 \times 10^{-8}\ C \times 2 \times$$

$$\times 10^{-6}\ C\left(\frac{1}{0{,}10\ m} - \frac{1}{0{,}50\ m}\right)$$

Rpta.: $W_{AB} = 7{,}2 \times 10^{-3}$ J

PROBLEMA 4. Determinar, según la figura, los potenciales en "A" y "B" debido a la carga Q, y calcular el trabajo que se realiza para transportar una carga de +150 u.e.q. desde "B" hasta "A".



RESOLUCIÓN: $q = +150$ u.e.q.

$W_{AB} = ?$

a) Potencial en A: $V_A = K\dfrac{Q}{r}$

$$V_A = 1\,\frac{\text{din}\times\text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2}\times\frac{+50\text{ u.e.q.}}{10\text{ cm}}$$

$$V_A = 5\,\frac{\text{din}\times\text{cm}}{\text{u.e.q.}}$$

$$V_A = 5\,\frac{\text{erg}}{\text{u.e.q.}} \qquad \text{(a)}$$

b) Potencial en B: $V_B = K\dfrac{Q}{r}$

$$V_B = 1\,\frac{\text{din}\times\text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2}\times\frac{+50\text{ u.e.q.}}{20\text{ cm}}$$

$$V_A = 2{,}5\,\frac{\text{din}\times\text{cm}}{\text{u.e.q.}}$$

$$V_B = 2{,}5\,\frac{\text{erg}}{\text{u.e.q.}} \qquad \text{(b)}$$

c) Obsérvese que se quiere calcular el trabajo para trasladar la carga de "B" hasta "A" y no de "A" hasta "B", luego:

Recordando: $V_A - V_B = \dfrac{W_{BA}}{q}$

$\therefore \quad W_{BA} = q\,(V_A - V_B)$

Sustituyendo datos:

$$W_{BA} = 150\text{ u.e.q.}\left(5\frac{\text{erg}}{\text{u.e.q.}} - 2{,}5\frac{\text{erg}}{\text{u.e.q.}}\right)$$

Rpta.: $W_{AB} = 375$ erg

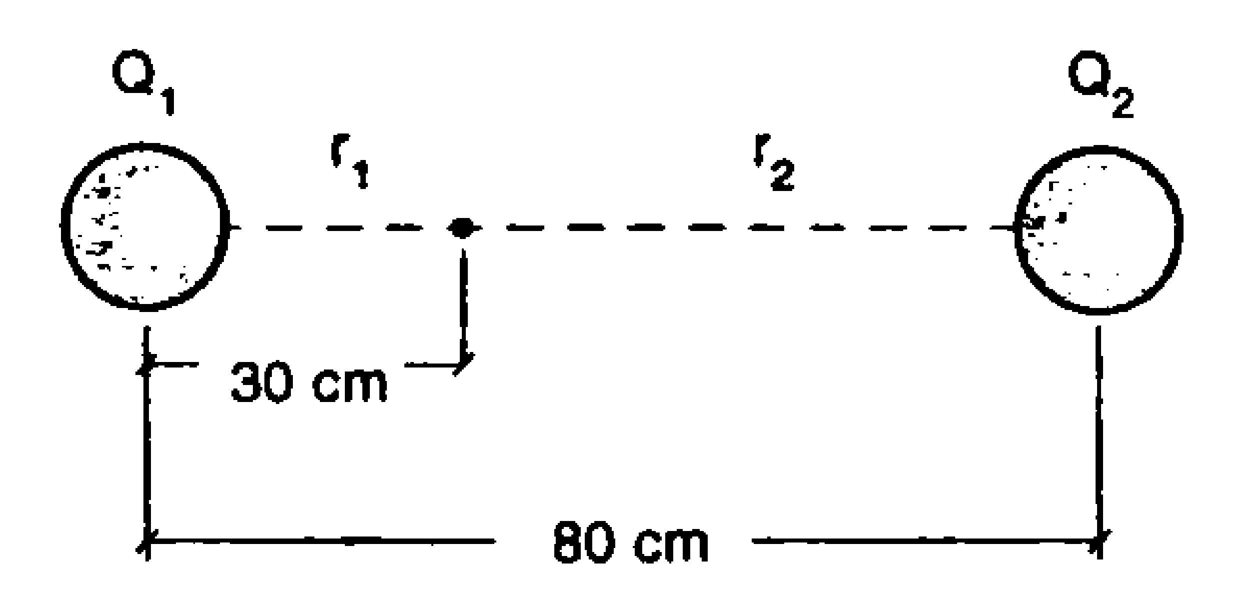
PROBLEMA 5. Se tiene una carga Q_1 de 6×10^{-8} C y una y una carga Q_2 de 8×10^{-6} C las cuales están separadas una distancia de 80 cm. A 30 cm de Q_1 hay un punto en la recta que une las cargas Q_1 y Q_2, ¿Cuál es el potencial en el punto P?

RESOLUCIÓN: $Q_1 = 6\times10^{-8}$ C

$V_P = ?$ $\qquad Q_2 = 8\times10^{-6}$ C

$d_1 = 0{,}30$ m

$d_2 = 0{,}80\text{ m} - 0{,}3\text{ m} = 0{,}50$ m



Los potenciales creados para ambas cargas positivas son positivos, luego:

$$V_P = K\frac{Q_1}{r_1} + K\frac{Q_2}{r_2} = K\left(\frac{Q_1}{r_1}+\frac{Q_2}{r_2}\right)$$

$$V_P = 9\times10^9\,\frac{\text{N}\times\text{m}^2}{\text{C}^2}\times$$

$$\times\left(\frac{6\times10^{-8}\text{ C}}{0{,}30\text{ m}} + \frac{8\times10^{-6}\text{ C}}{0{,}50\text{ m}}\right)$$

$$V_P = 145{,}8\times10^3\,\frac{\text{N}\times\text{m}}{\text{C}}$$

$$V_P = 145{,}8\times10^3\,\frac{\text{J}}{\text{C}}$$

Rpta.: $V_P = 145{,}8\times10^3$ V

PROBLEMA 6. En una recta hay un punto "P", a 30 cm de este punto una carga $Q_1 = +3$ C y a 80 cm de esta carga $Q_2 = -4$ C. Calcular el potencial del punto "P".

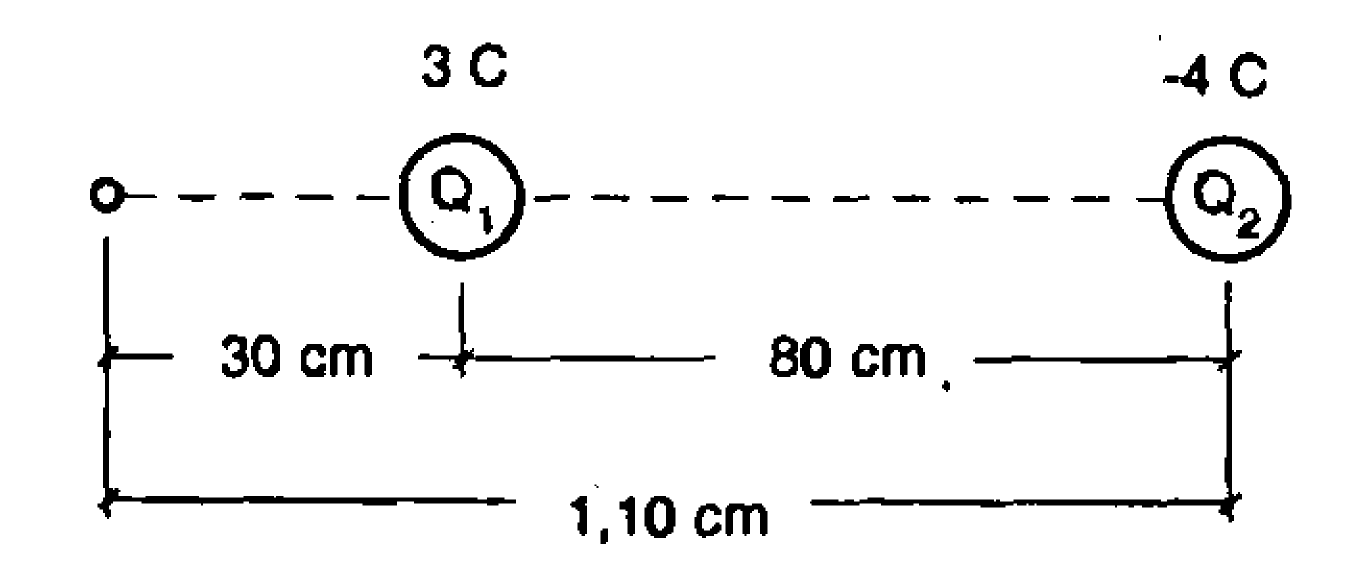
RESOLUCIÓN: $Q_1 = +3$ C

$d_1 = 0{,}30$ m $\qquad Q_2 = -4$ C

$d_2 = 0{,}30\text{ m} + 0{,}80\text{ m}$ $\qquad V_P = ?$

$d_2 = 1{,}10$ m

http://librosysolucionarios.net



$$V_P = K\frac{+Q_1}{r_1} + K\frac{+Q_2}{r_2}$$

$$V_P = K\left(\frac{+Q_1}{r_1} + \frac{+Q_2}{r_2}\right)$$

$$V_P = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times$$

$$\times \left(\frac{3\,C}{0{,}30\,m} - \frac{4\,C}{0{,}50\,m}\right)$$

$$V_P = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{2{,}10\,C}{0{,}33\,m}$$

$$V_P = 57{,}27 \times 10^9 \frac{N \times m}{C}$$

Rpta.: $V_P = 57{,}27 \times 10^9\ V$

PROBLEMA 7. En la figura se muestra una carga Q_1 de $+8 \times 10^{-5}$ C y otra carga Q_2 de -4×10^{-5} C a 50 cm de la anterior. Calcular:

a) Potencial del punto "A", que está entre las cargas y a 30 cm de Q_1.
b) Potencial de "B" que está a la derecha de Q_2 y a 20 cm de ésta.
c) ¿Cuál es el trabajo que se requiere para trasladar de A a B una carga de 2×10^{-6} C?

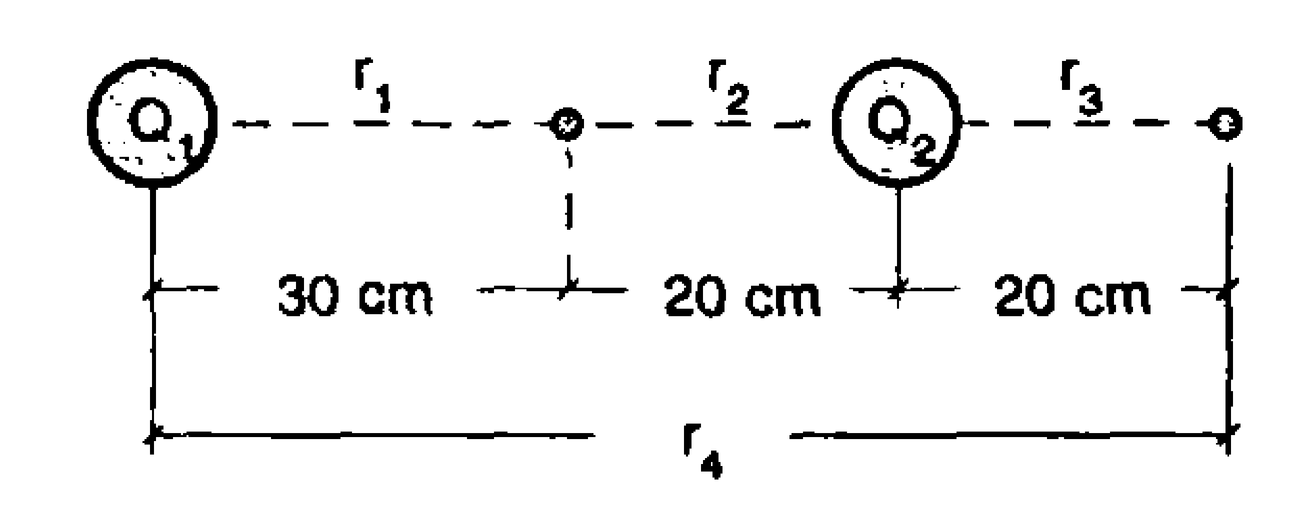
RESOLUCIÓN: $Q_1 = +8 \times 10^{-5} C$

$d_1 = 0{,}30$ m $\quad Q_2 = -4 \times 10^{-5}$ C

$d_2 = 0{,}20$ m

$d_3 = 0{,}20$ m

$d_4 = 0{,}70$ m



a) Cálculo de potencial en A:

$$V_A = K\frac{Q_1}{d_1} + K\frac{Q_2}{d_2}$$

$$V_A = K\left(\frac{Q_1}{d_1} + \frac{Q_2}{d_2}\right)$$

$$V_A = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times$$

$$\times \left(\frac{8 \times 10^{-5}\,C}{0{,}30\,m} - \frac{-4 \times 10^{-5}\,C}{0{,}50\,m}\right)$$

Rpta.: $V_A = 6 \times 10^5\,V$ (1)

b) Cálculo de potencial en B:

$$V_B = K\frac{Q_1}{d_4} + K\frac{+Q_2}{d_3}$$

$$V_B = K\left(\frac{Q_1}{d_4} + \frac{+Q_2}{d_3}\right)$$

Sustituyendo los datos:

$$V_B = 9 \times 10^9 \frac{N \times m^2}{C^2} \times$$

$$\times \left(\frac{8 \times 10^{-5}\,C}{0{,}70\,m} - \frac{-4 \times 10^{-5}\,C}{0{,}20\,m}\right)$$

Rpta.: $V_B = -7{,}7 \times 10^5\,V$ (2)

c) Cálculo del trabajo para trasladar 2×10^{-6} coulomb de A hasta B:

$$W_{AB} = q\,(V_A - V_B)$$

Sustituyendo los datos:

$$W_{AB} = 2 \times 10^{-6} C\left[-6 \times 10^5\,V - (-7{,}7 \times 10^5 V)\right]$$

$$W_{AB} = -0{,}34\ C \times V = -0{,}34\ C\ \frac{J}{C}$$

Rpta.: $W_{AB} = -0{,}34\ J$

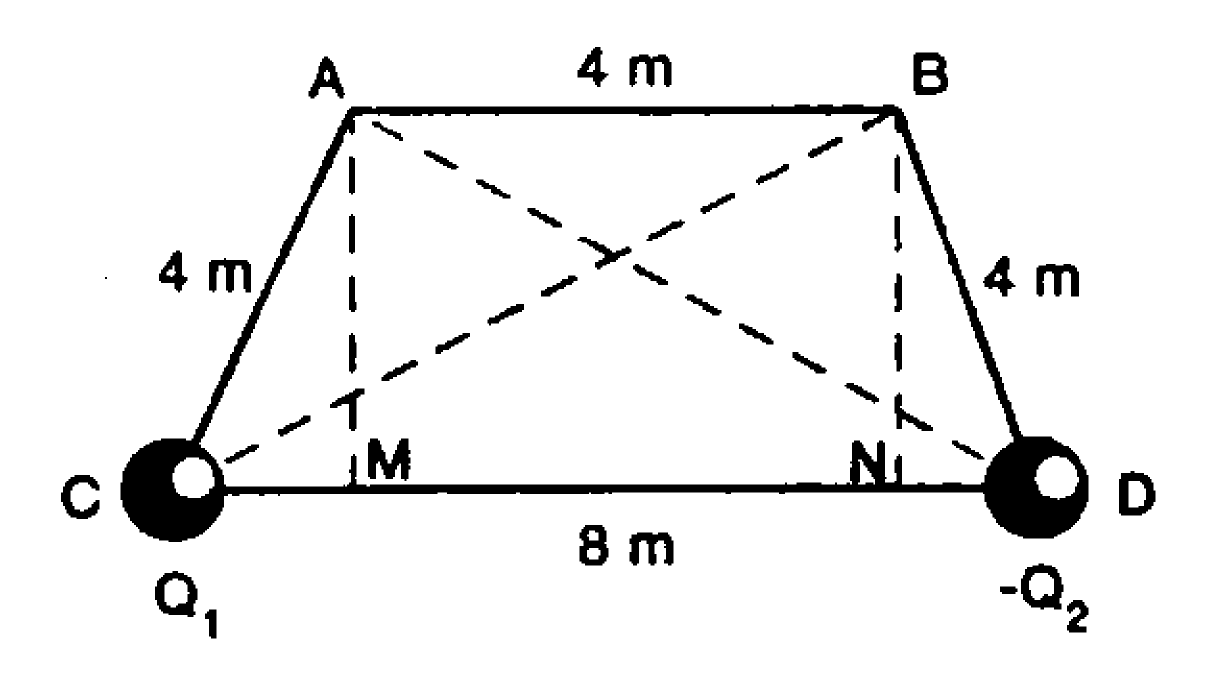
PROBLEMA 8. En los extremos de la base mayor de un trapecio de 8 m de longitud hay dos cargas $Q_1 = +10\ C$ y $Q_2 = -15\ C$. La base menor del trapecio mide 4 m. Calcular la diferencia de potencial en los extremos de la base menor

RESOLUCIÓN: $Q_1 = +10\ C$

$Q_2 = -15\ C$

$CD = 8\ m$

$AB = 4\ m$



Se calcula el potencial presente en "A" y en "B" por la influencia de las cargas $+Q_1$ y $-Q_2$, para ello, por Geometría se calcula las distancias de "A" y "B", a cada una de las cargas.

- Cálculo de la diagonal AD:

$$CM = \frac{CD - AB}{2} = 2\ m$$

$$AM = \sqrt{(4\ m)^2 - (2\ m)^2} = 2\sqrt{3}\ m$$

En el triángulo rectángulo AMD:

$$AD = \sqrt{AM^2 + MD^2}$$

$$AD = \sqrt{(2\sqrt{3}\ m)^2 - (6\ m)^2}$$

$$AD = 4\sqrt{3}\ m$$

Pero: $AD = CB = 4\sqrt{3}\ m$

- Cálculo del potencial de A:

Se sabe que:

$$V_A = K\frac{Q_1}{AC} + K\frac{Q_2}{AD}$$

$$V_A = K\left(\frac{Q_1}{AC} + \frac{Q_2}{AD}\right)$$

$$V_A = 9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times$$

$$\times \left(\frac{10\ C}{4\ m} + \frac{-15\ C}{4\sqrt{3}\ m}\right)$$

Rpta.: $V_A = 3 \times 10^9\ V$

- Cálculo de potencial en B:

$$V_B = K\frac{Q_1}{BC} + K\frac{Q_2}{BD}$$

$$V_B = K\left(\frac{Q_1}{BC} + \frac{Q_2}{BD}\right)$$

$$V_B = 9 \times 10^9\ \frac{N \times m^2}{C^2} \times$$

$$\times \left(\frac{10\ C}{4\sqrt{3}\ m} + \frac{-15\ C}{4\ m}\right)$$

Rpta.: $V_B = -20{,}7 \times 10^9\ V$

- Cálculo de la diferencia de potencial entre A y B:

$$V_A - V_B = 3 \times 10^9\ V - (-20{,}7 \times 10^9\ V)$$

Rpta.: $V_A - V_B = 23{,}7 \times 10^9\ V$

PROBLEMA 9. El potencial de una carga puntual a una cierta distancia es 600V y el campo eléctrico es 200 N/C. Calcular:

a) ¿Cuál es la distancia a la carga puntual?
b) ¿Cuál es la magnitud de la carga?

RESOLUCIÓN:

a) Se sabe que: $V = E \cdot d$

http://librosysolucionarios.net

$$\therefore \quad d = \frac{V}{E} = \frac{600}{200} = 3m \qquad (1)$$

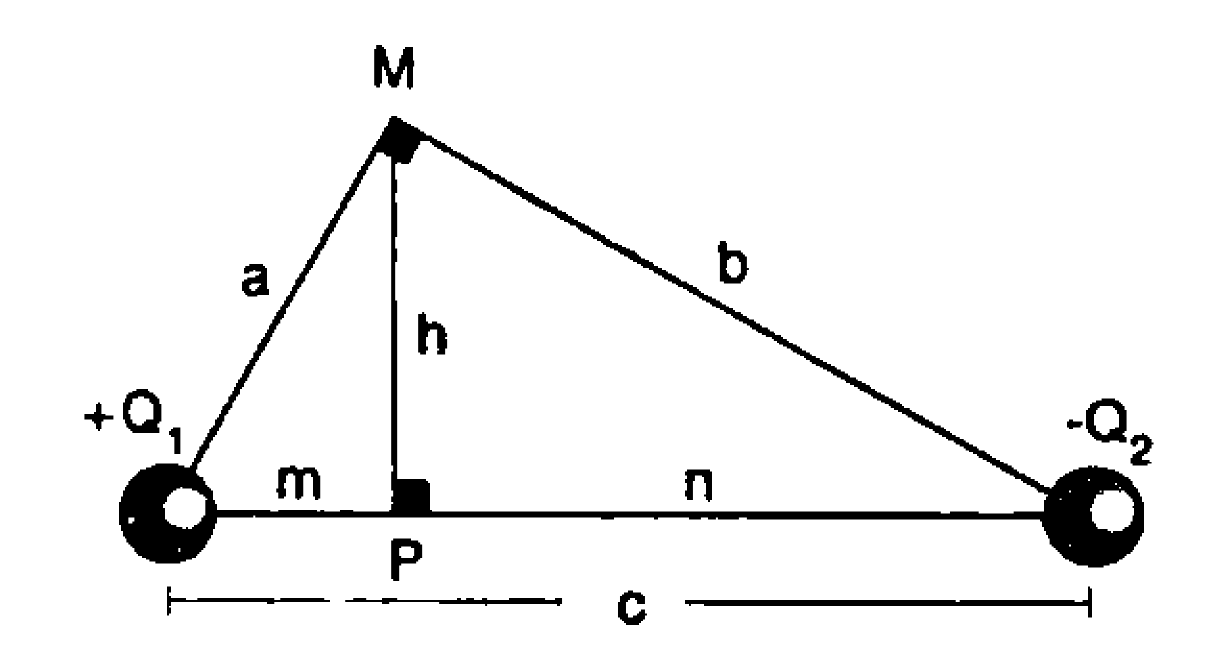
b) Por otra parte: $V = K\dfrac{Q}{d}$

$$\therefore \quad Q = \frac{V\,d}{K} \qquad (2)$$

$$Q = \frac{600 \times 3}{9 \times 10^9}\,C$$

Rpta.: $Q = 2 \times 10^{-7}\,C$

PROBLEMA 10. En el triángulo rectángulo mostrado en la figura, donde: $a = 5$ cm, $b = 12$ cm, $Q_1 = 50 \times 10^{-6}$ C y $Q_2 = 144 \times 10^{-6}$ C, determinar el trabajo que se realiza para transportar a la carga $q = 4 \times 10^{-6}$ C desde el punto "P" hasta el punto "M".



RESOLUCIÓN :

a) La carga se transporta de P a M, se puede escribir:

$$V_{PM} = \frac{W_{PM}}{q} \qquad (a)$$

$$V_{PM} = V_M - V_P \qquad (b)$$

de (a) y (b) :

$$V_{PM} = (V_M - V_P)\,q \qquad (1)$$

b) Cálculo del potencial en M:

Sabiendo: $V = K\dfrac{Q}{d}$

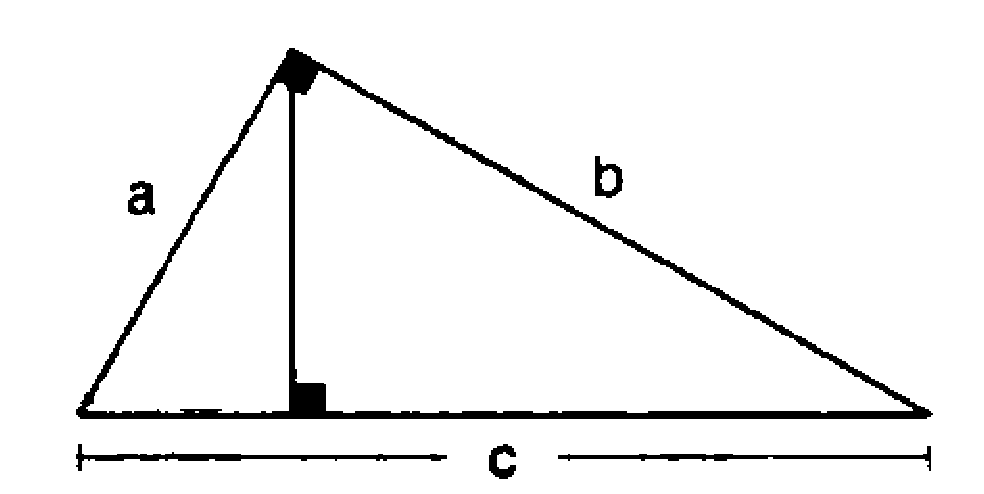
Para M: $V_M = \dfrac{K\,Q_1}{a} + \dfrac{K\,Q_2}{b}$

$$V_M = K\left(\frac{Q_1}{a} + \frac{Q_2}{b}\right) \qquad (2)$$

$$V_M = 9 \times 10^9 \left(\frac{50 \times 10^{-6}}{5 \times 10^{-2}} - \frac{144 \times 10^{-6}}{12 \times 10^{-2}}\right)$$

$$V_M = -18 \times 10^5\,V \qquad (3)$$

c) Cálculo del potencial en P:



Por Pitágoras:

$$c = \sqrt{a^2 + b^2}$$

$$c = 13\,cm$$

Por áreas: $a^2 = c\,.\,m$

De donde: $m = \dfrac{a^2}{c}$

$$m = \frac{5^2}{13} = \frac{25}{13}$$

Ahora: $n = c - m = 13 - \dfrac{25}{13}$

$$\therefore \quad n = \frac{144}{13}$$

Para P : $V_P = K\left(\dfrac{q_1}{m} + \dfrac{-q_2}{n}\right)$

Sustituyendo datos :

$$V_P = 9 \times 10^9 \left(\frac{50 \times 10^{-6}}{\frac{25}{13} \times 10^{-2}} - \frac{144 \times 10^{-6}}{\frac{144}{13} \times 10^{-2}}\right)$$

$$V_P = 9 \times 10^9 (26 \times 10^{-4} - 13 \times 10^{-4})$$

De donde se tiene:

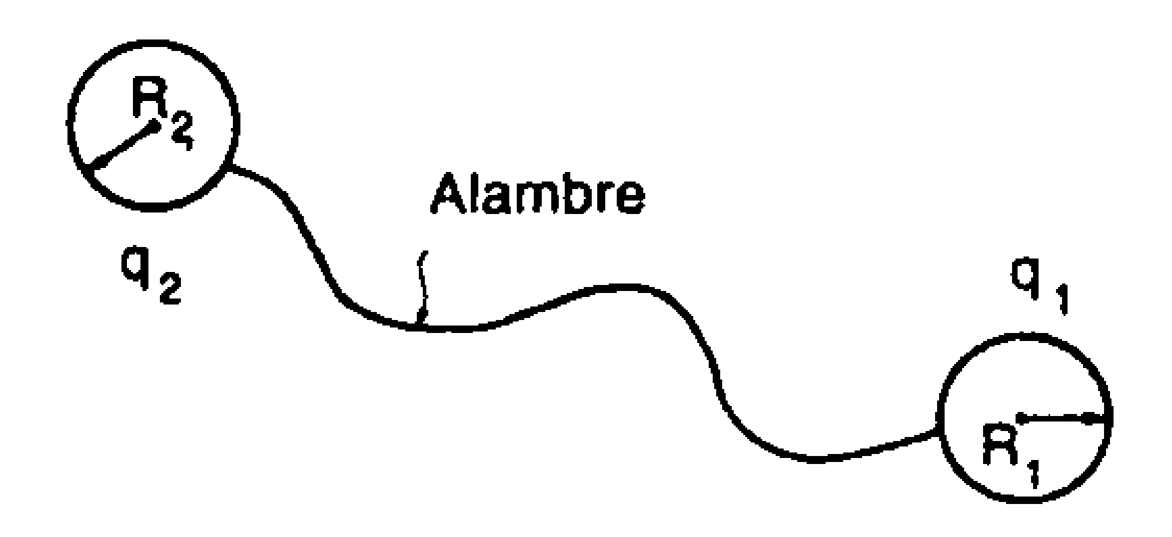
$$V_p = 117 \times 10^5 V \qquad (4)$$

Reemplazando (4) y (3) en (1):

$$W_{PM} = (-18 \times 10^5 - 117 \times 10^5) \times 4 \times 10^{-6}$$

Rpta.: $W_{PM} = -54 J$

PROBLEMA 11. En una de las esferas de la figura, calcular la relación de las intensidades del campo eléctrico.



RESOLUCIÓN: Al ponerse en contacto ambas esferas mediante el conductor (alambre) se cumple que:

$$V_1 = V_2 \qquad (1)$$

Además: $V_1 = E_1 r_1$

y: $V_2 = E_2 r_2$

Reemplazando en (1):

$$E_1 r_1 = E_2 r_2$$

$$\therefore \quad \frac{E_1}{E_2} = \frac{d_1}{d_2} \qquad (2)$$

Considerando que:

$$r_2 = R_2 \quad y \quad r_1 = R_1$$

se tiene finalmente:

Rpta.: $\frac{E_1}{E_2} = \frac{R_1}{R_2}$

PROBLEMA 12. Una pequeña esfera de 0,2 g, cuelga por medio de una cuerda entre dos placas paralelas separadas 5 cm. La carga de la esfera es de 6×10^{-9} C. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas si el hilo forma un ángulo de 10° con la vertical?

RESOLUCIÓN:

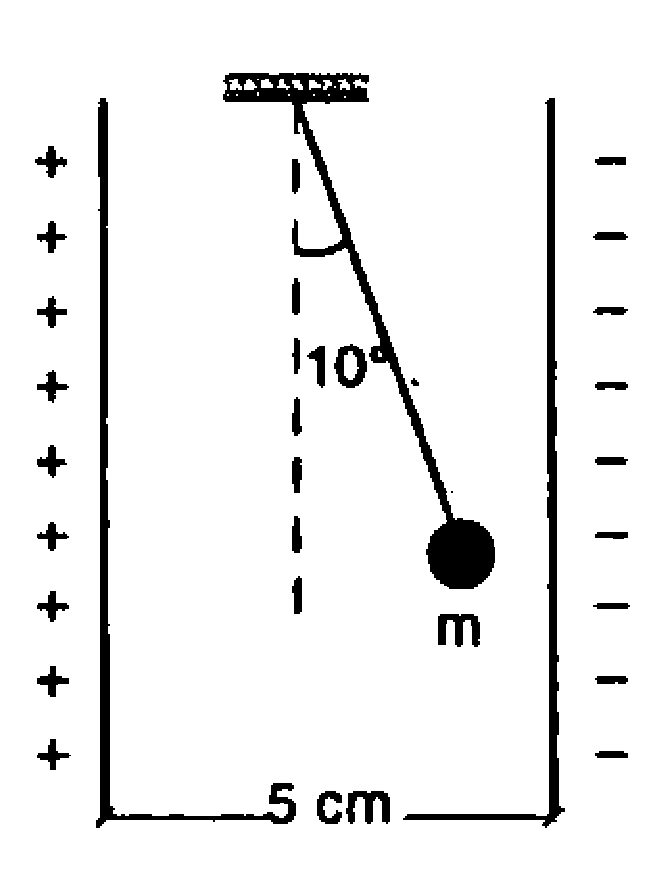
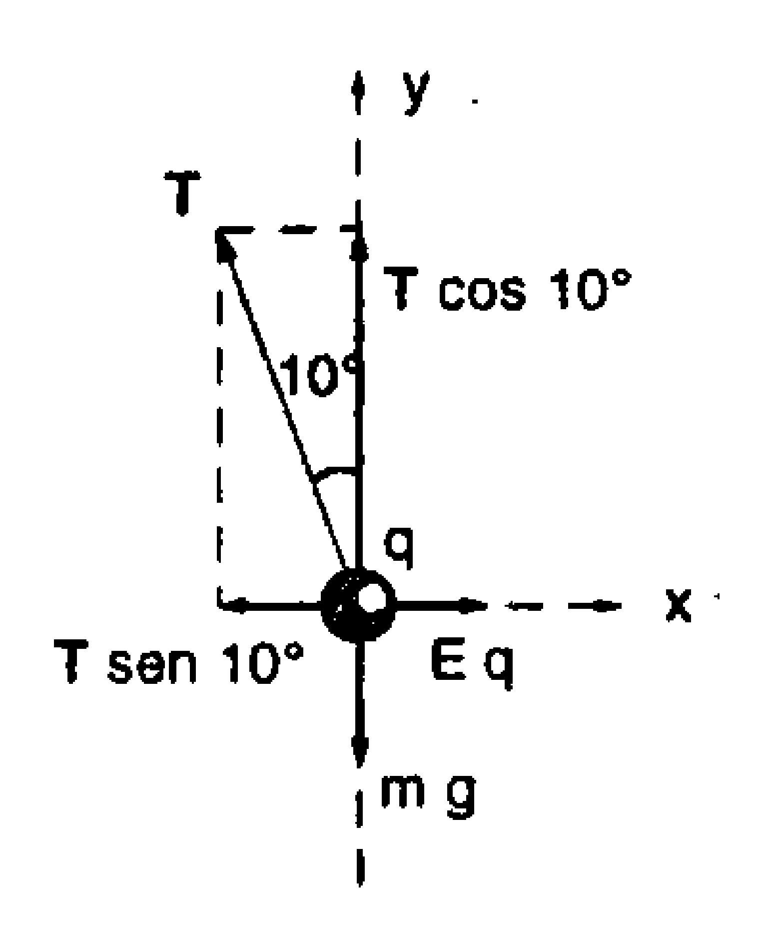


Diagrama de cuerpo libre de "m"



$$\Sigma F_x = 0$$

$$E q - T \text{ sen } 10° = 0$$

$$T \text{ sen } 10° = E q \qquad (1)$$

$$\Sigma F_y = 0$$

$$m g - T \cos 10° = 0$$

$$T \cos 10° = 0 \qquad (2)$$

$$\frac{(1)}{(2)}: \quad \text{tg } 10° = \frac{E q}{m g}$$

$$E = \frac{m g}{q} \text{tg } 10° \qquad (3)$$

Por otra parte: $V = \mathbf{E} . d$ (4)

V : diferencia de potenciales entre las placas.

Reemplazando (3) en (4):

$$V = \frac{m g d}{q} \text{tg } 10° \qquad (5)$$

$$\text{tg } 10° = 0{,}176$$

http://librosysolucionarios.net

$$d = 5 \times 10^{-2} \text{ m}$$

$$q = 6 \times 10^{-9} \text{ C}$$

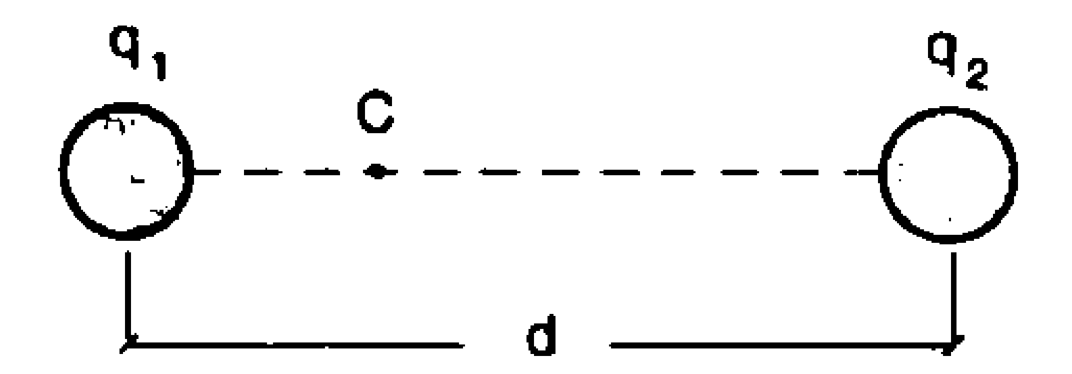
$$m = 2 \times 10^{-4} \text{ kg}$$

Sustituyendo los datos en (5):

$$V = \frac{2 \times 10^{-4} \times 9{,}8 \times 5 \times 10^{-2}}{6 \times 10^{9}} \times 0{,}176$$

Rpta.: $V = 2{,}88 \times 10^{-3}$ V

PROBLEMA 13. Dos esferas metálicas poseen una carga de 10^{-8} C y -3×10^{-8} C, respectivamente, uniformemente distribuídas en sus superficies. Si sus centros están separados 200 cm, el potencial a la mitad de sus centros vale:



RESOLUCIÓN : Las esferas metálicas se consideran como cargas puntuales tal que:

$$q_1 = 10^{-8} \text{ C}$$

$$q_2 = -3 \times 10^{-8} \text{ C}$$

$$d = 200 \text{ cm} = 2 \text{ m}$$

C (punto medio)

Por fórmula: $V = K\dfrac{Q}{d}$

$$V_{TOTAL} = V_1 + V_2$$

$$V_{TOTAL} = K\frac{q_1}{d_1} + K\frac{q_2}{d_2}$$

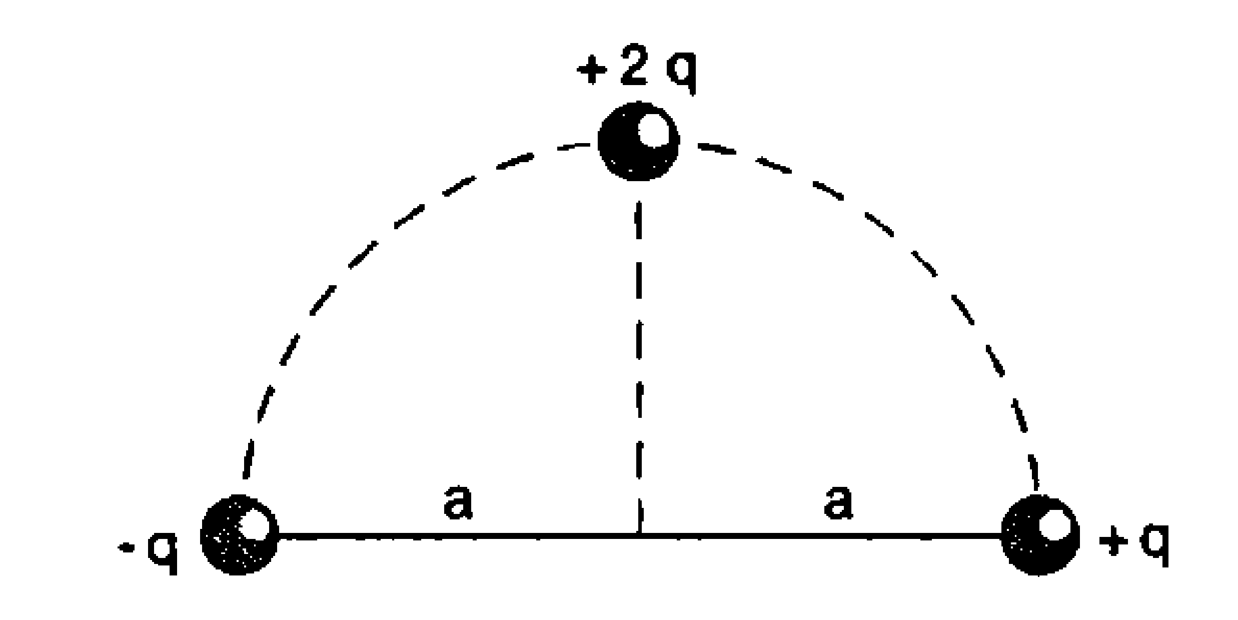
$$V_{TOTAL} = K\left(\frac{q_1}{d_1} + \frac{q_2}{d_2}\right)$$

$$V_{TOTAL} = 9 \times 10^{9}\left(\frac{10^{-8}}{1} + \frac{-3 \times 10^{-8}}{1}\right)$$

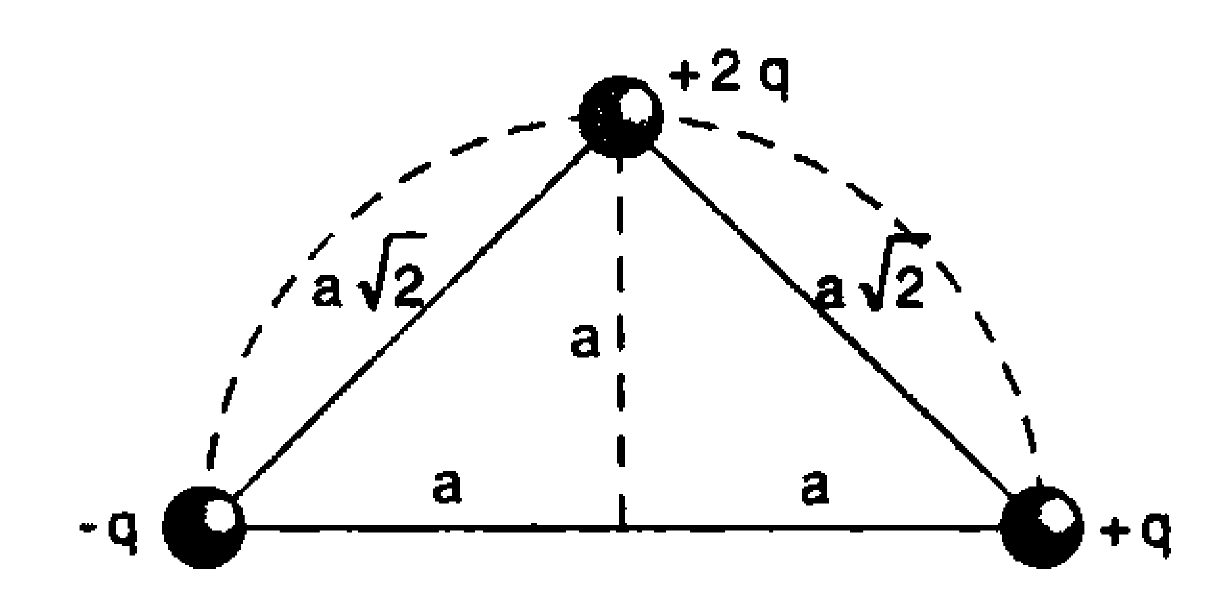
Rpta.: $V_{TOTAL} = -180$ V

PROBLEMA 14. Demostrar que la expresión que representa el trabajo requerido para colocar las tres cargas tal como se muestra en la figura es:

$$\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}(1 - 4\sqrt{2})$$



RESOLUCIÓN :



Por fórmula se sabe: $W_{A \to B} = K\dfrac{q_1 q_2}{d}$

Por otro lado:

$$W_{TOTAL} = W_{1\text{-}2} + W_{2\text{-}3} + W_{1\text{-}3} \quad (\alpha)$$

$$W_{1\text{-}2} = K\frac{(2q)(-q)}{a\sqrt{2}} = -\frac{2Kq^2}{a\sqrt{2}}$$

$$W_{1\text{-}2} = -\frac{Kq^2\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad (1)$$

$$W_{2\text{-}3} = K\frac{(2q)(-q)}{a\sqrt{2}} = -\frac{2Kq^2}{a\sqrt{2}}$$

$$W_{2\text{-}3} = -\frac{Kq^2\sqrt{2}}{a\sqrt{2}} \quad (2)$$

$$W_{1\text{-}3} = K\frac{(-q)(-q)}{2a} = -\frac{Kq^2}{2a} \quad (3)$$

Reemplazando (1), (2) y (3) en (α):

$$W_{TOTAL} = \frac{-2Kq^2\sqrt{2}}{a} + \frac{Kq^2}{2a}$$

$$W_{TOTAL} = \frac{-2Kq^2\sqrt{2}}{a} + \frac{Kq^2}{2a}$$

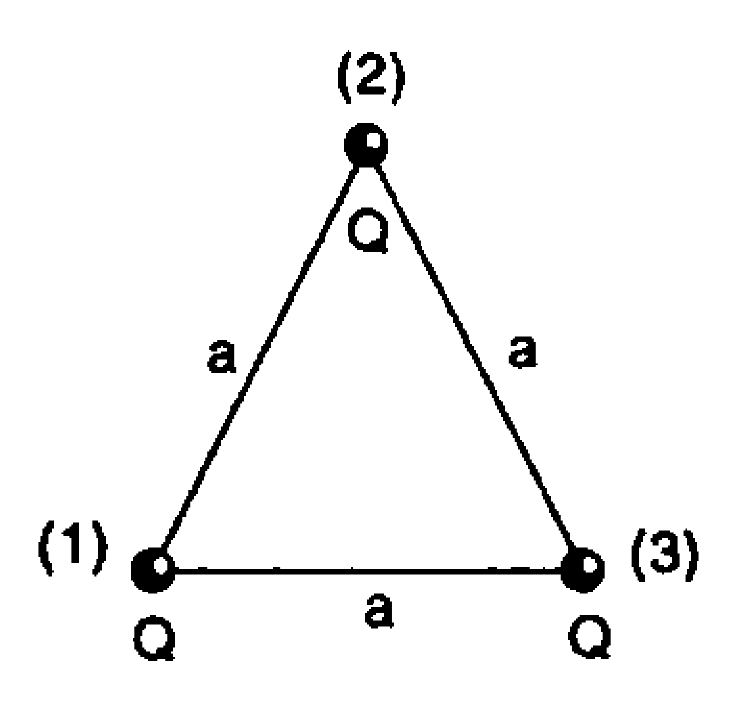
Sustituyendo K por su valor: $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0}$

Rpta.: $W_{TOTAL} = \dfrac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 a}(1-4\sqrt{2})$

PROBLEMA 15. Dadas 3 cargas "Q" iguales, situadas en los vértices de un triángulo equilátero de lado "a", demostrar que la energía potencial eléctrica de este sistema es igual a:

$$\frac{3WQ^2}{a} \quad ó \quad \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

RESOLUCIÓN:



Por fórmula: $W = K\dfrac{q_1 q_2}{d}$

Entre 1 y 2 : $W_{1-2} = \dfrac{KQ^2}{a}$

Entre 2 y 3 : $W_{2-3} = \dfrac{KQ^2}{a}$

Entre 1 y 3 : $W_{1-3} = \dfrac{KQ^2}{a}$

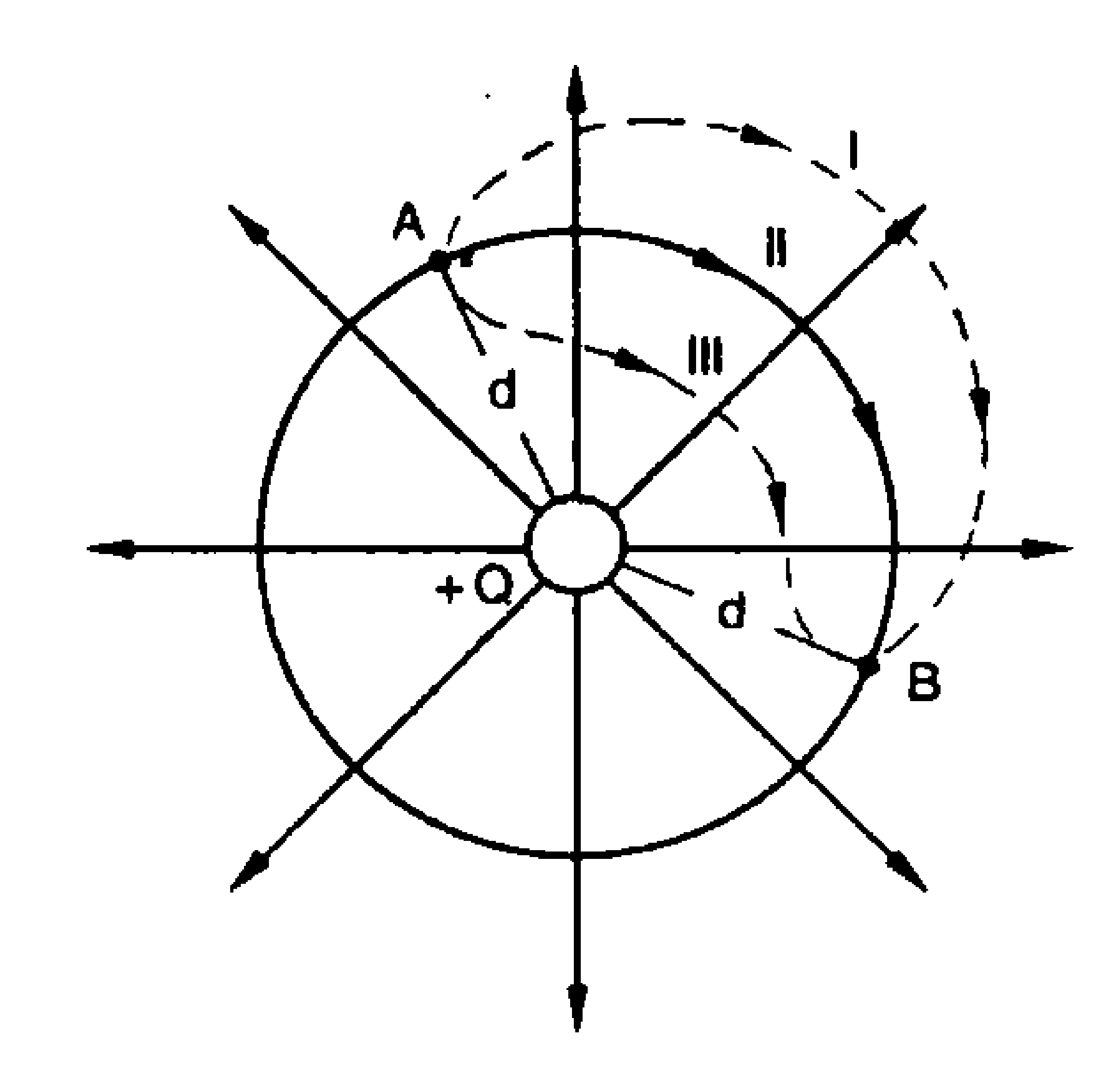
$$W_{TOTAL} = W_{1-2} + W_{2-3} + W_{1-3}$$

$$W_{TOTAL} = \frac{3KQ^2}{a} = \frac{3Q^2}{4\pi\varepsilon_0 a}$$

SUPERFICIES EQUIPOTENCIALES

Se denomina superficie equipotencial al lugar espacial que equidista del centro donde está ubicado la carga gravitatoria del campo.

Consideremos el caso de una carga positiva +Q



Se sabe que los puntos A y **B** del campo, poseen el mismo potencial:

$$V_A = V_B = K\frac{Q}{d}$$

Luego: la diferencia de potencial entre dos puntos pertenecientes a una superficie equipotencial es cero:

$$V_{AB} = V_A - V_B = 0$$

También se observa que el trabajo que se debe realizar para llevar una carga de prueba "q" entre dos puntos de una superficie equipotencial es independiente de la trayectoria que se siga y es igual a cero.

Se sabe que: $W_{A\to B} = V_{AB} \cdot q$

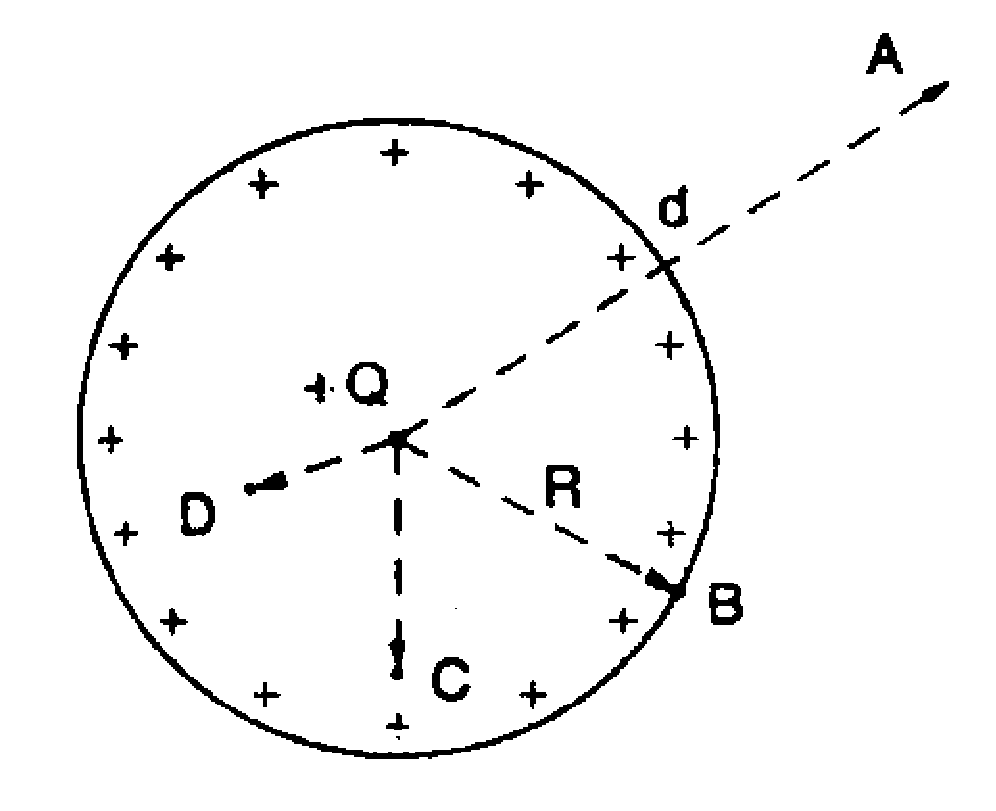
pero: $V_{AB} = 0$

$\Rightarrow \quad W^F_{A\to B} = 0$

Esto se cumple para cualquiera de las trayectorias I , II o III.

POTENCIAL ESTABLECIDO POR UNA ESFERA ELECTRIZADA

El potencial establecido por una esfera electrizada puede ubicarse fuera de la esfera, en la superficie o en el interior de la esfera.



Potencial en un punto externo "A":

$$V_A = K\frac{Q}{d_A}$$

Potencial en un punto de la superficie:

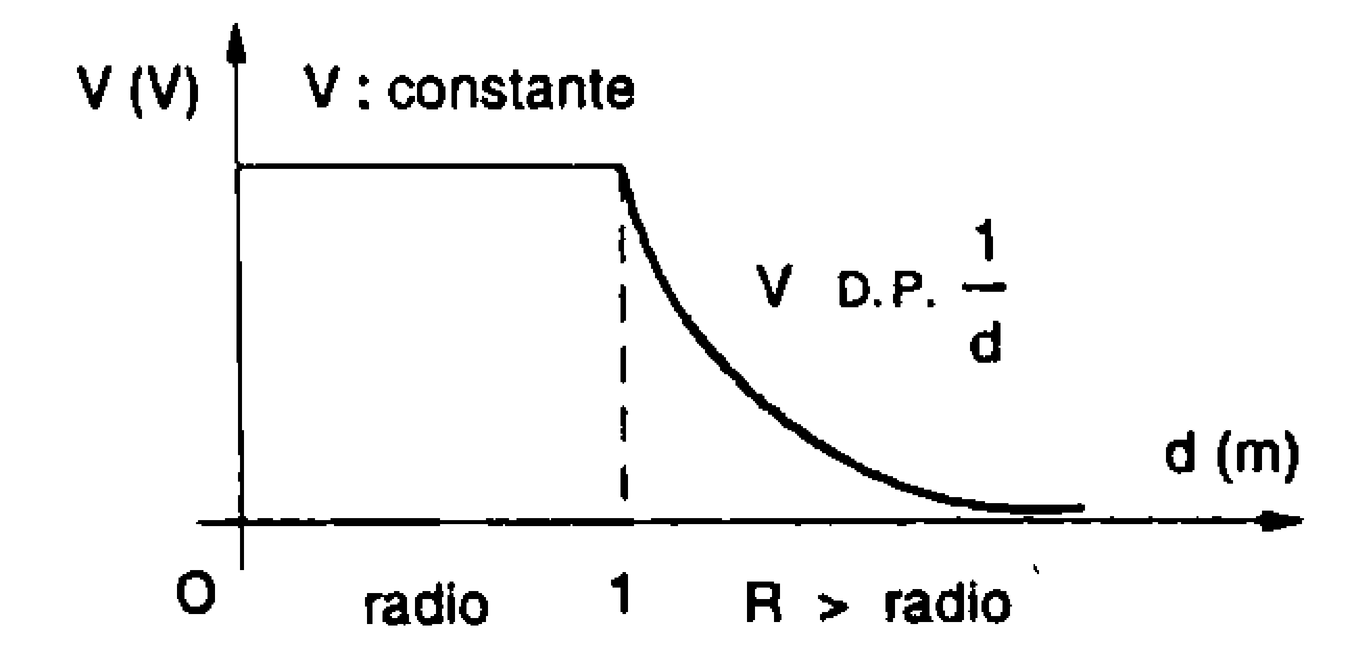
$$V_B = K\frac{Q}{R}$$

Potencial en cualquier punto exterior:

$$V_D = V_C = K\frac{Q}{R}$$

OBSERVACIÓN : Se observa que en todos los puntos situados en el interior y en la superficie de la esfera conductora electrizada el potencial es el mismo (constante), mientras que para puntos exteriores el potencial varía en forma inversamente proporcional con la distancia.

GRÁFICO : POTENCIAL VS. DISTANCIA de Q



Ejemplo : Se tienen dos esferas conductoras de radios 0,2 m y 0,3 m, respectivamente, y de cargas 70 μ C y 60 μ C. Las esferas están muy alejadas entre sí. Hallar la carga que almacena cada esfera en el estado de equilibrio cuando son conectadas mediante un hilo conductor.

RESOLUCIÓN :

Se tiene un "sistema cerrado" formado por dos esferas cargadas positivamente.

(1)

$$q_1 = 70\,\mu C$$

$$R_1 = 2 \times 10^{-1}\ m$$

(2)

$$q_2 = 60\,\mu C$$

$$R_2 = 3 \times 10^{-1}\ m$$

Al inicio: La carga neta es:

$$q_{NETA} = q_1 + q_2 = 130\,\mu C$$

Calculamos los potenciales de las esferas.

Para (1) : $V_1 = K\frac{q_1}{R_1}$

$$V_1 = 9 \times 10^9\ \frac{70 \times 10^{-6}}{2 \times 10^{-1}}$$

$$V_1 = 31{,}5\ V$$

Para (2) : $V_2 = K\frac{q_2}{R_2}$

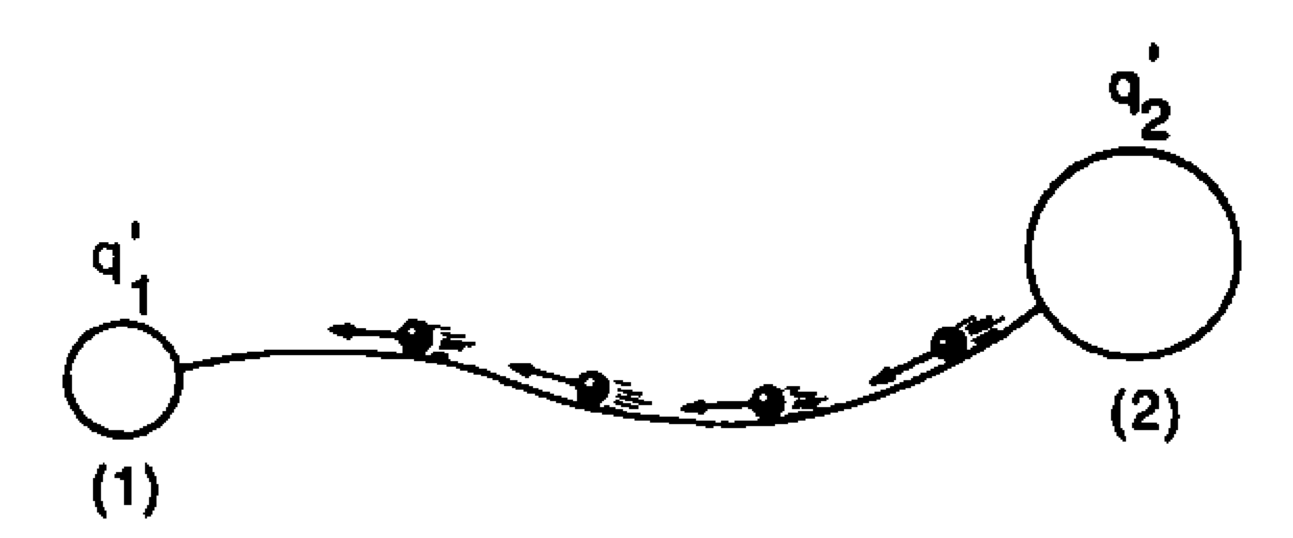
$$V_2 = 9 \,.\, 10^9 \,.\, \frac{60 \,.\, 10^{-6}}{3 \,.\, 10^{-1}}$$

$$V_2 = 18 \cdot 10^5\ V$$

Comparando los potenciales se observa que: $V_1 > V_2$, luego entre las esferas existe una diferencia de potencial.

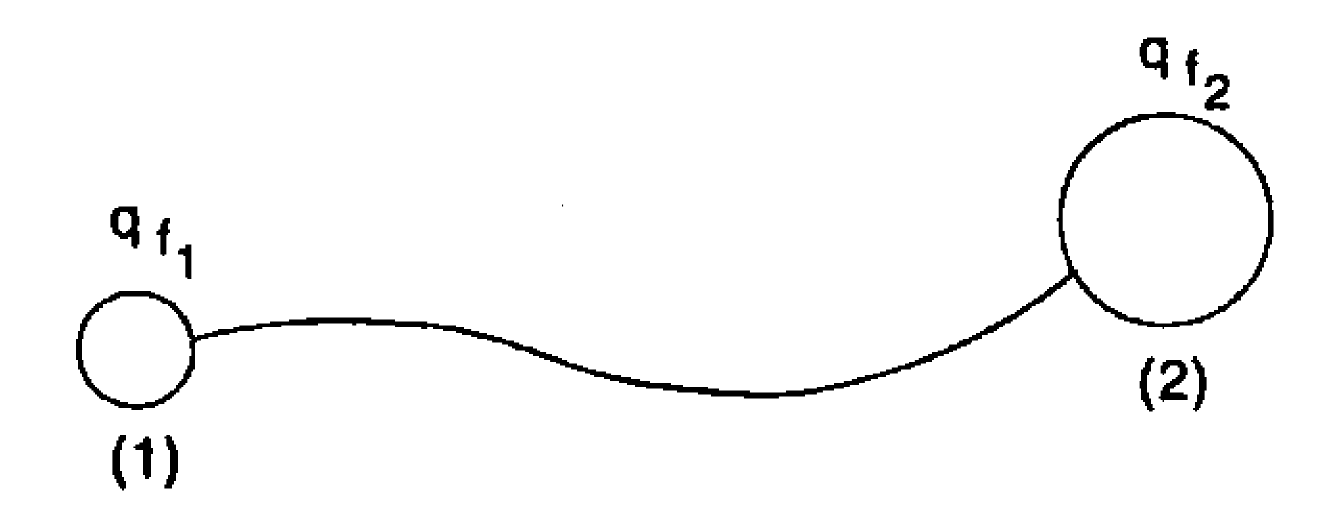
Se sabe que en los cuerpos conductores son los electrones libres los que pueden desplazarse. Las cargas negativas, como los electrones, tienden a **desplazarse** en un hilo conductor **de las zonas de menor potencial hacia las zonas de mayor potencial.**

De ahí que cuando se establece contacto mediante un hilo conductor entre las esferas los electrones se desplazan de la esfera (2) de menor potencial hacia la esfera (1).



Debido a esta transferencia de electrones, las cargas q_1 y q_2 así como los potenciales V_1 y V_2 se modifican y habrá un instante en que los potenciales en ambas esferas sean iguales: $V_{f_1} = V_{f_2}$; en ese instante cesará la transferencia de electrones.

Al final:



Luego de producirse la transferencia de carga de una esfera a otra, se igualan los potenciales. Para el sistema cerrado:

$$q_{neta} = q_{f_1} + q_{f_2} = 130\ \mu C \qquad (1)$$

Por equilibrio electrostático:

- $$V_{f_1} = V_{f_2}$$

$$\not{k}\frac{q_{f_1}}{R_1} = \not{k}\frac{q_{f_2}}{R_2}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{q_{f_1}}{2 \times 10^{-1}} = \frac{q_{f_2}}{3 \times 10^{-1}}$$

$$\Rightarrow \qquad q_{f_2} = \frac{3}{2} q_{f_1} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

$$q_{f_1} + \frac{3}{2} q_{f_1} = 130\ \mu C$$

$$\frac{5}{2} q_{f_1} = 130\ \mu C$$

$$q_{f_1} = 52\ \mu C$$

En (2): $$q_{f_2} = 78\ \mu C$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál será el potencial de un punto situado a 20 cm de una carga de 5 C, sobre una recta en la cual a 1 m de la última carga y a 1,20 m del punto existe otra carga de -2 C?

Rpta.: 210×10^{-9} V

2. Dos puntos de un campo eléctrico tienen una diferencia de potencial de 5V. ¿Cuál es el trabajo necesario para mover una carga de 10 C entre estos dos puntos?

Rpta.: 50 J

3. Un ciclotrón produce una diferencia de potencial de 100 megavoltios "MV" ¿Cuál es la energía de un electrón que se acelera con esta máquina?

http://librosysolucionarios.net

Carga de 1 e = 210×10^{-9} V

Rpta.: 16×10^{-11} J

4. Dos placas metálicas paralelas distan 3 cm. Entre ambas existe un campo eléctrico uniforme de intensidad 9×10^{-9} N/C. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre las placas?

Rpta.: 27×10^{3} V

5. Sobre una recta ABC hay una carga de 0,03 μ C en el punto B que dista 8,0 cm de A, y una carga de 0,06μ C en el punto C que dista 22,0 cm de B. ¿Cuál es el potencial de A?

Rpta.: 5 175 V

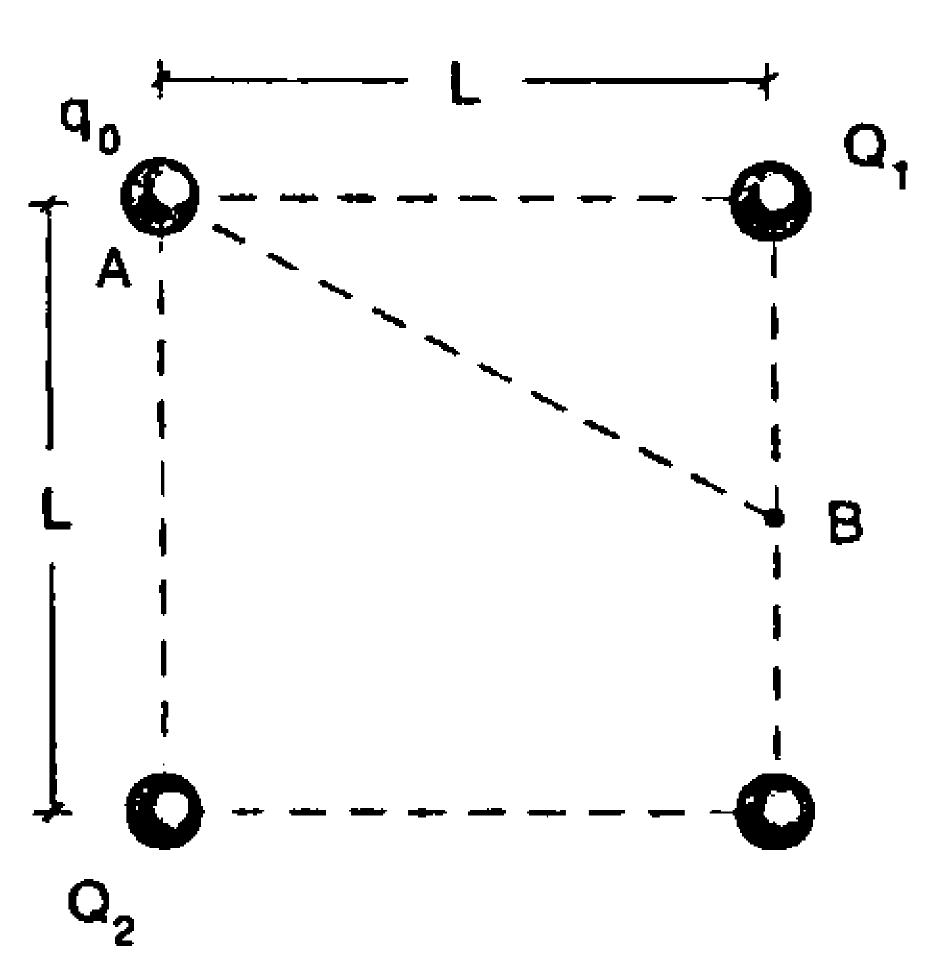
6. Dos láminas paralelas están situadas a 2 cm una de la otra y con una diferencia de potencial de 120V, creando un campo eléctrico. ¿Qué velocidad adquiere el electrón, bajo la acción del campo, al recorrer según una línea de fuerza de 3 mm?

Rpta.: $2,51 \times 10^{6}$ m/s

7. Una esfera de 2 cm de radio se carga negativamente hasta el potencial de 2 000 V. Hallar la masa de todos los electrones que componen la carga comunicada a la esfera al cargarla.

Rpta.: $m = 2,53 \times 10^{-6}$ kg

8. Hallar el trabajo necesario para desplazar la carga $q_0 = 5 \times 10^{-8}$ C, desde "A" hasta el punto medio "B" si el lado "L" del cuadrilátero mide 50 cm y $Q_1 = Q_2 = 7,2 \times 10^{-3}$ C.



Rpta.: W = 5,9 J

9. Se tiene una esfera cuyo radio de 3 m. Determinar su carga, sabiendo que su potencial es de 60 u.e.v.

Rpta.: 6×10^{-6} C

10. Calcular el potencial resultante en el punto de intersección de dos diagonales del octaedro regular de arista "a", si se sabe que en cada vértice se colocan cargas iguales de "Q" coulomb.

Rpta.: $V_R = \dfrac{3.Q}{\sqrt{2}.\pi.\varepsilon_0.a}$

NOTA : Las cargas están dispuestas en un medio correspondiente al aire

11. Una esfera conductora de 100 cm de radio tiene una carga "q". ¿A qué distancia del centro, el potencial que produce esta carga es la tercera parte del que existe en el interior de la esfera?

Rpta.: R = 57,73 cm

12. El potencial que una carga de $1,5 \times 10^{-7}$ C, produce en un punto de su campo, en el aire, es de 4 500 V. Si en ese mismo punto se coloca otra carga y la energía del sistema de las dos cargas es 45×10^{-4} J. ¿Cuál es la magnitud de la segunda carga?

Rpta.: 1 μ C

13. El potencial eléctrico a una cierta distancia de una carga puntual es 1 600 V y el valor de la intensidad de campo eléctrico es 800 N/C. ¿Cuál es la distancia a la carga puntual?

Rpta.: 2 m

14. Calcular el trabajo desarrollado para formar un triángulo equilátero de 1 m de lado con 3 cargas idénticas cada una de 2 mC ubicadas en sus vértices.

Rpta.: 108 kJ

http://librosysolucionarios.net

15. Dos cargas idénticas +Q, están separadas una distancia "d". Determine en cuánto varió la energía potencial eléctrica, si se les acercó entre sí hasta una separación d/4.

Rpta.: $3K\dfrac{Q^2}{d}$

CAPACIDAD ELÉCTRICA

CAPACIDAD DE LOS CONDUCTORES

Es la cantidad de carga eléctrica que es capaz de "guardar" un conductor, por unidad de diferencia de potencial.

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (1)$$

UNIDADES SI:

$$\text{faradio} = \frac{\text{coulombio}}{\text{voltio}}$$

En el c.g.s.

$$\text{u.e.c.} = \frac{\text{u.e.q.}}{\text{u.e.v.}}$$

$$\text{u.e.c.} = \frac{\text{franklin}}{\text{u.e.v.}} \quad \text{ó} \quad \text{u.e.c.} = \frac{\text{Fk}}{\text{u.e.v.}}$$

Como la unidad de capacidad, faradio, "F" es una unidad muy grande, se usa submúltiplos. Por ejemplo m F (micro faradio) cuyo valor es 10^{-6} F.

EQUIVALENCIA :

$$1\ \text{faradio} = \frac{1\ \text{coulombio}}{1\ \text{voltio}} \qquad (1)$$

sabiendo que:

$$1\ \text{coulomb} = 3 \times 10^9\ \text{u.e.q.} \qquad (a)$$

$$1\ \text{voltio} = \frac{1\ \text{joule}}{1\ \text{coulomb}}$$

$$1\ \text{voltio} = \frac{10^7\ \text{ergio}}{3 \times 10^9\ \text{u.e.q.}}$$

$$1\ \text{voltio} = \frac{1}{300}\ \text{u.e.v.} \qquad (b)$$

Sustituyendo (a) y (b) en (1):

$$1\ \text{faradio} = \frac{3 \times 10^9\ \text{u.e.q.}}{\frac{1}{300}\ \text{u.e.v.}}$$

Luego:

$$1\ \text{F} = 9 \times 10^{11}\ \text{u.e.c.} \qquad (A)$$

$$1\ \mu\text{F} = 9 \times 10^{5}\ \text{u.e.c.}$$

Otra unidad más pequeña aún, es el picofaradio que es la millonésima de un microfaradio ($10^{-6}\mu\text{F} = 10^{-12}$ F)

$$1\ \text{pF} = 0{,}9\ \text{u.e.c.}$$

CAPACIDAD DE UNA ESFERA

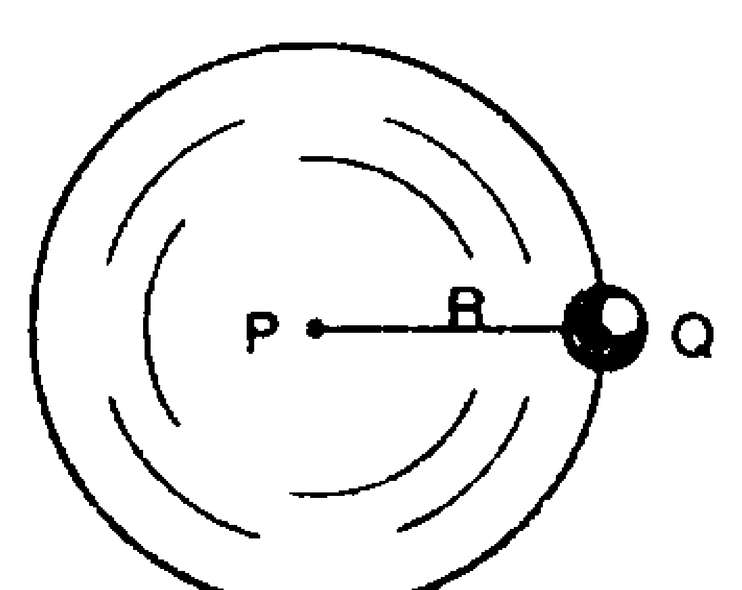
Si se considera el potencial en la superficie esférica, y recordando que la capacidad de cualquier conductor es:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad (1)$$

Sea Q la carga de la esfera.

El potencial de un punto (centro de la esfera) en un campo con respecto a la carga Q es:

$$C = K\frac{Q}{V} \qquad (2)$$



Sustituyendo (2) en (1):

$$C = \frac{Q}{K\frac{Q}{R}}$$

$$C = \frac{R}{K}$$

Pero K en el vacío o en el aire y en el sistema c.g.s. es: 1

$$\left(1\ \frac{\text{dina} \times \text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2}\right)$$

$$\therefore \quad \boxed{C = R}$$

cuando R en cm

Donde: u.e.c. = C

cm = R

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. ¿Cuál es la capacidad de un conductor que con una carga de 800 franklin eleva su potencial en 2 000 voltios?

RESOLUCIÓN : $C = \frac{Q}{V}$

$$C = \frac{800\ \text{Fk}}{2\,000\ \text{V}} = \frac{8}{20} \times \frac{\text{Fk}}{\frac{1}{300}\ \text{u.e.v.}}$$

Rpta.: C = 120 u.e.c.

PROBLEMA 2. ¿Qué potencial adquiere un conductor que tiene una capacidad de 3 u.e.c., cuando se le suministra 10^{-5} C?

RESOLUCIÓN : $C = \frac{Q}{V}$

$$\Rightarrow \quad V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-5}\ \text{C}}{3\ \text{u.e.c.}}$$

$$V = \frac{10^{-5} \times 3 \times 10^{9}\ \text{Fk}}{3\ \text{u.e.c.}}$$

Rpta.: $V = 10^4$ u.e.v.

PROBLEMA 3. ¿Cuál es el potencial de una esfera de 10 cm de diámetro cuando se le inyecta una carga de 10^{-6} C?

RESOLUCIÓN : Como la capacidad de una esfera es igual numéricamente al radio.

C = 5 u.e.c.

Además: $C = \frac{Q}{V}$

de donde:

$$V = \frac{Q}{C} = \frac{10^{-6}\ \text{C}}{5\ \text{u.e.c.}}$$

$$V = \frac{10^{-6} \times 3 \times 10^{9}\ \text{Fk}}{5\ \text{u.e.c.}}$$

Rpta.: $V = 6 \times 10^2$ u.e.v.

PROBLEMA 4. Dos esferas conductoras de 5 y 10 μ F de capacidad están cargadas con 12×10^{-6} C y 8×10^{-6} C, respectivamente; se les pone en contacto. Calcular:

a) ¿Qué carga poseerá cada esfera?
b) El potencial final de cada una.

RESOLUCIÓN: $C_1 = 5\ \mu$ F

$Q_1 = 12 \times 10^{-6}$ C $\quad C_2 = 20\ \mu$ F

$Q_2 = 8 \times 10^{-6}$ C

a) La carga que posee cada esfera será proporcional a su capacidad, ya que al ponerlas en contacto la diferencial de potencial será cero, es decir, los potencia-

http://librosysolucionarios.net

les serán iguales.

$$V_1' = V_2'$$

Pero: $V_1' = \dfrac{Q_1'}{C_1}$; y: $V_2' = \dfrac{Q_2'}{C_2}$

Luego: $\dfrac{Q_1'}{C_1} = \dfrac{Q_2'}{C_2}$

Sustituyendo valores de las capacidades C_1 y C_2

$$\frac{Q_1'}{5 \times 10^{-6}\ F} = \frac{Q_2'}{20 \times 10^{-6}\ F}$$

De donde: $Q_2' = 4\,Q_1'$ (1)

Por otro lado, la carga total será la suma de las cargas:

$$Q_1' + Q_2' = 12 \times 10^{-6}\ C + 8 \times 10^{-6}\ C$$

$$Q_1' + Q_2' = 20 \times 10^{-6}\ C \quad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2):

(1) en (2): $Q_1' + 4\,Q_1' = 20 \times 10^{-6}\ C$

$\therefore$ $Q_1' = 4 \times 10^{-6}\ C$

y: $Q_2' = 16 \times 10^{-6}\ C$

b) Ya se dijo que el potencial será igual para cada una de la esferas:

$$V_1' = \frac{Q_1'}{C_1} = \frac{4 \times 10^{-6}\ C}{5 \times 10^{-6}\ F}$$

$$V_1' = 0{,}8\ V$$

$$V_2' = \frac{Q_2'}{C_2} = \frac{16 \times 10^{-6}\ C}{20 \times 10^{-6}\ F}$$

$$V_2' = 0{,}8\ V$$

PROBLEMA 5. Dos esferas conductoras, de radios 0,10 cm y 0, 15 cm tienen cargas de 10^{-7} C y 2×10^{-7} C respectivamente. Se pone en contacto y luego se separan. Calcular la carga de cada esfera.

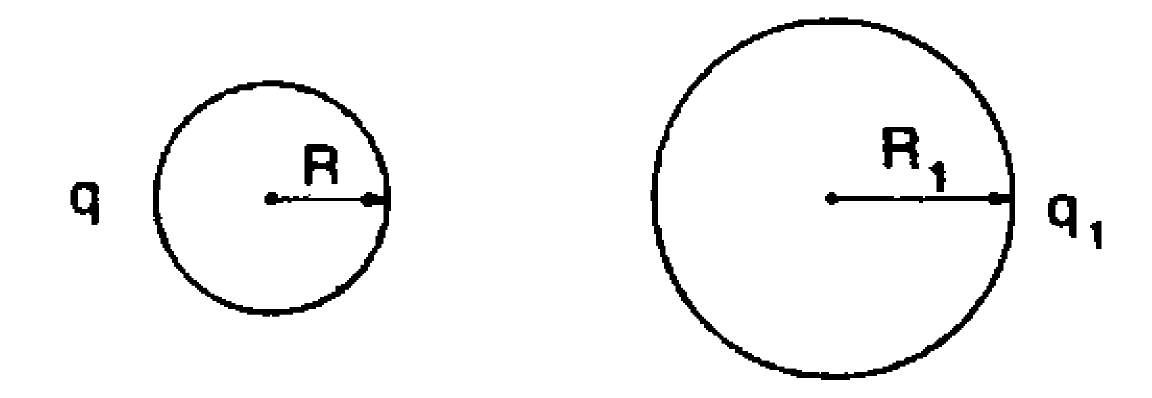
RESOLUCIÓN :

Condiciones iniciales:

$R = 0{,}10$ cm

$R_1 = 0{,}15$ cm

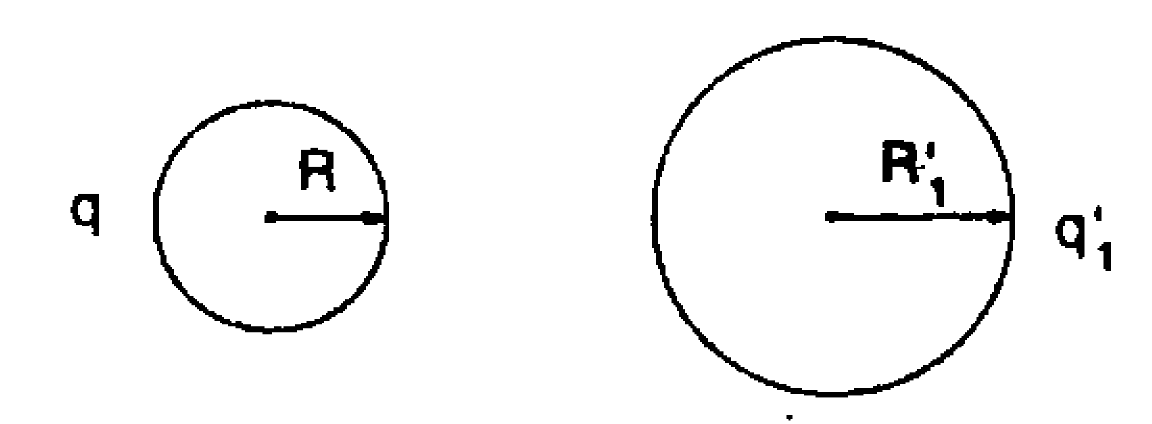
$q = 10^{-7}$ C



$$q_1 = 2 \times 10^{-7}\ C$$

Condiciones finales:

$$q' + q_1' = 3 \times 10^{-7}\ C \quad (1)$$



Además: $V' = V_1'$

o sea: $\dfrac{q'}{C'} = \dfrac{q_1'}{C_1'}$; pero: $C = \dfrac{R}{K}$

$$\therefore \quad \frac{q'}{q_1'} = \frac{\frac{R}{K}}{\frac{R_1}{K}}$$

$$\frac{q'}{q_1'} = \frac{R}{R_1}$$

$$\frac{q' + q_1'}{q_1'} = \frac{R + R_1}{R_1}$$

$$q_1' = 1{,}8 \times 10^{-7} \quad (1)$$

Rpta.: $q_1' = 1{,}8 \times 10^{-7}$ C

http://librosysolucionarios.net

Reemplazando (2) en (1):

Rpta.: $q' = 1,2 \times 10^{-7}$ C

PROBLEMA 6. Se sabe que la capacidad de una esfera es de 1 faradio. Hallar la relación entre el radio de dicha esfera y el radio del planeta, de diámetro $0,9 \times 10^6$ km

RESOLUCIÓN: Sabiendo que 1 faradio equivale a $0,9 \times 10^{11}$ stF, y que la capacidad de una esfera conductora es numéricamente igual a su radio, expresado en cm, y en un medio aire o vacío, de tal manera que:

$$C = R$$

$$9 \times 10^{11} \text{ stF} <> 9 \times 10^{11} \text{ cm} =$$

$$= 9 \times 10^6 \text{ km}$$

El radio de la esfera conductora:

$$R = 0,9 \times 10^6 \text{ km}$$

El radio del planeta:

$$R_P = 0,45 \times 10^6 \text{ km}$$

$$\frac{R}{R_P} = \frac{9 \times 10^6 \text{ km}}{0,45 \times 10^6 \text{ km}}$$

$$\frac{R}{R_P} = 20$$

PROBLEMA 7. Una esfera conductora de 36 cm de diámetro que se encuentra al potencial de 600 voltios, se pone en contacto con otra esfera metálica de 4 cm de diámetro completamente descargada y aislada. ¿Qué carga retiene cada esfera al separarlas?

RESOLUCIÓN:

a) Por fórmula se tiene:

$$Q = C\,V \qquad (1)$$

Además: 300 voltios = 1 stV

$$\therefore \quad V = 600 \text{ volttios} = 2 \text{ stV} \qquad (2)$$

Se sabe que: $C = \frac{R}{K}$

Para c.g.s., K = 1, luego:

$$C = R \text{ (medio aire o vacío)}$$

Como R = 18 cm:

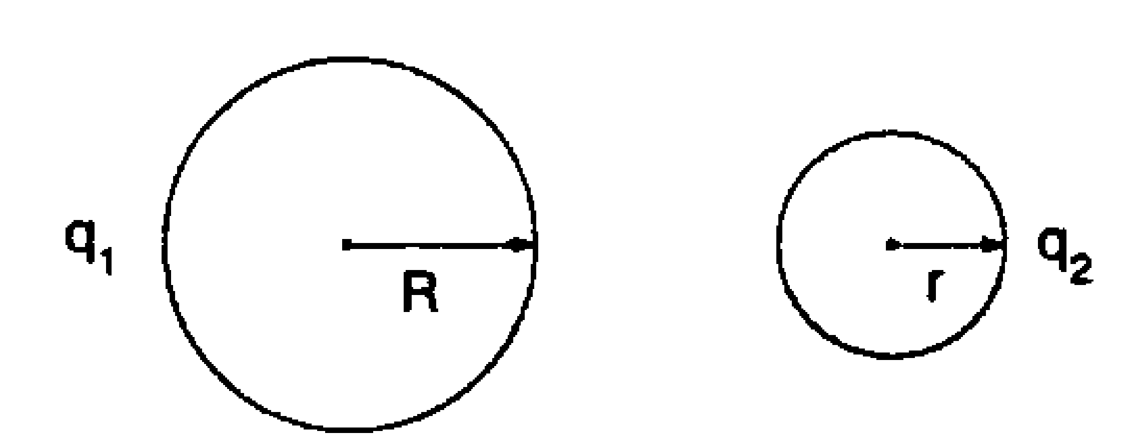
$$C = 18 \text{ stF} \qquad (3)$$

Sustituyendo (3) y (2) en (1):

Rpta.: Q = 36 stC

Esta carga posee la primera esfera antes de tocar con la segunda. (La segunda esfera está descargada inicialmente.)

b) Al ponerse en contacto y luego separar ambas esferas, se tiene:



$$V_1 = V_2$$

$$\frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{R}{K}}{\frac{r}{K}} = \frac{R}{r}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R}{r} \qquad (1)'$$

Se tiene por otra parte que:

$$q_1 + q_2 = Q = 36 \text{ stC} \qquad (2)$$

Aplicando proporciones en (1)':

$$\frac{q_1 + q_2}{q_2} = \frac{r + R}{r}$$

$$\frac{36}{q_2} = \frac{20}{2}$$

Rpta.: $q_2 = 3,6$ stC,

http://librosysolucionarios.net

Reemplazando en (2) :

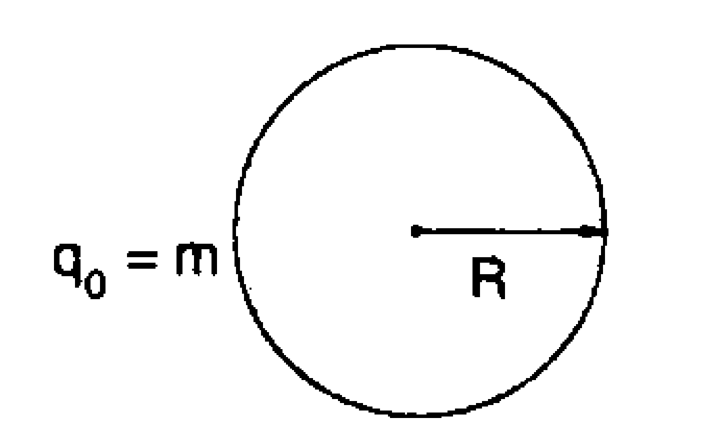
Rpta.: $q_1 = 32,4\ \text{stC}$

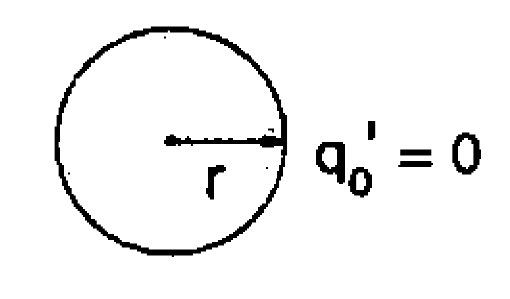
PROBLEMA 8. Se tiene una esfera cargada con "m" unidades de carga en cuyo contacto se pone otra esfera cuyo radio es "n" veces menor. Hallar el valor de sus cargas cuando se las separa.

RESOLUCIÓN :

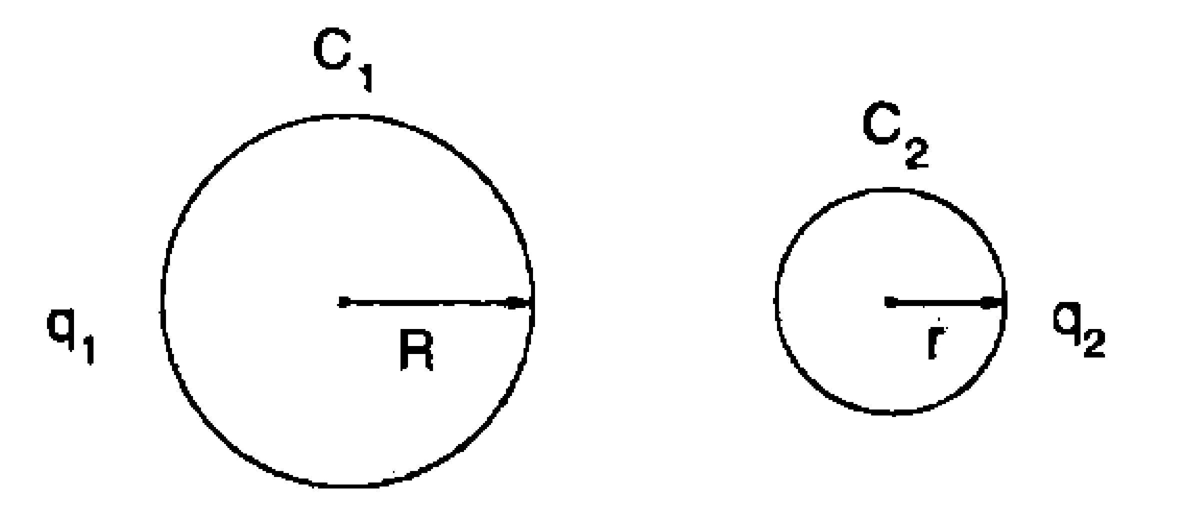
a) Condiciones iniciales

$$\frac{R}{r} = n \quad y \quad q_0 = m$$





b) Condiciones finales:



$$q_1 + q_2 = q_0 = m$$

$$C_1 = \frac{R}{K} \quad y \quad C_2 = \frac{r}{K}$$

$$V_1 = V_2 \quad \therefore \quad \frac{q_1}{C_1} = \frac{q_2}{C_2}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{\frac{R}{K}}{\frac{r}{K}}$$

$$\frac{q_1}{q_2} = \frac{R}{r} = n$$

$$\frac{q_1 + q_2}{q_2} = \frac{n+1}{1}$$

$$\frac{m}{q_2} = n + 1 \quad \Rightarrow$$

Rpta.: $q_2 = \dfrac{m}{n+1}$

$$q_1 = \frac{m\,n}{n+1}$$

PROBLEMA 9. Se tienen dos gotas de agua esféricas e idénticas que tienen en su superficie los potenciales V_1 y V_2 respectivamente. Si las dos gotas se unen para formar una sola, hallar el potencial en la superficie de esta gota.

RESOLUCIÓN :

Sea el "R" el radio de la gota resultante, "r" el radio de la primera y segunda gotas y v_t el volumen total

$$v_t = v_1 + v_2$$

Como: $v_1 = v_2$

$$\frac{4}{3}\pi R^3 = 2\left(\frac{4}{3}\pi r^3\right)$$

De donde: $\dfrac{r}{R} = \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}$ (1)

Por otra parte, el potencial V de la gota resultante:

$$V = K\frac{Q}{R}$$

$$V = \frac{K}{R}(Q_1 + Q_2)$$

$$V = \frac{K\,C}{R}(V_1 + V_2)$$

Donde C es la capacidad igual de cada gota.

$$V = \frac{K}{R}\cdot\frac{r}{K}(V_1 + V_2)$$

$$V = \frac{r}{R}(V_1 + V_2) \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

Rpta.: $V = \dfrac{V_1 + V_2}{\sqrt[3]{2}}$

CONDENSADORES

Son aparatos o dispositivos que sirven para almacenar cargas eléctricas por poco tiempo.

Un condensador lo forman dos conductores, y entre ellos existe "un campo eléctrico" y "una diferencia de potencial"

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR

Como en cualquier conductor, la capacidad de un condensador está dada por la cantidad de carga eléctrica "Q" que puede guardar por unidad de diferencia de potencial "V"

$$C = \frac{Q}{V}$$

UNIDADES QUE SE EMPLEAN:
En el sistema c.g.s.

$$\text{u.e.c.} = \frac{\text{u.e.q.}}{\text{u.e.v.}}$$

En el SI.

$$1 \text{ faradio} = \frac{\text{coulomb}}{\text{voltio}}$$

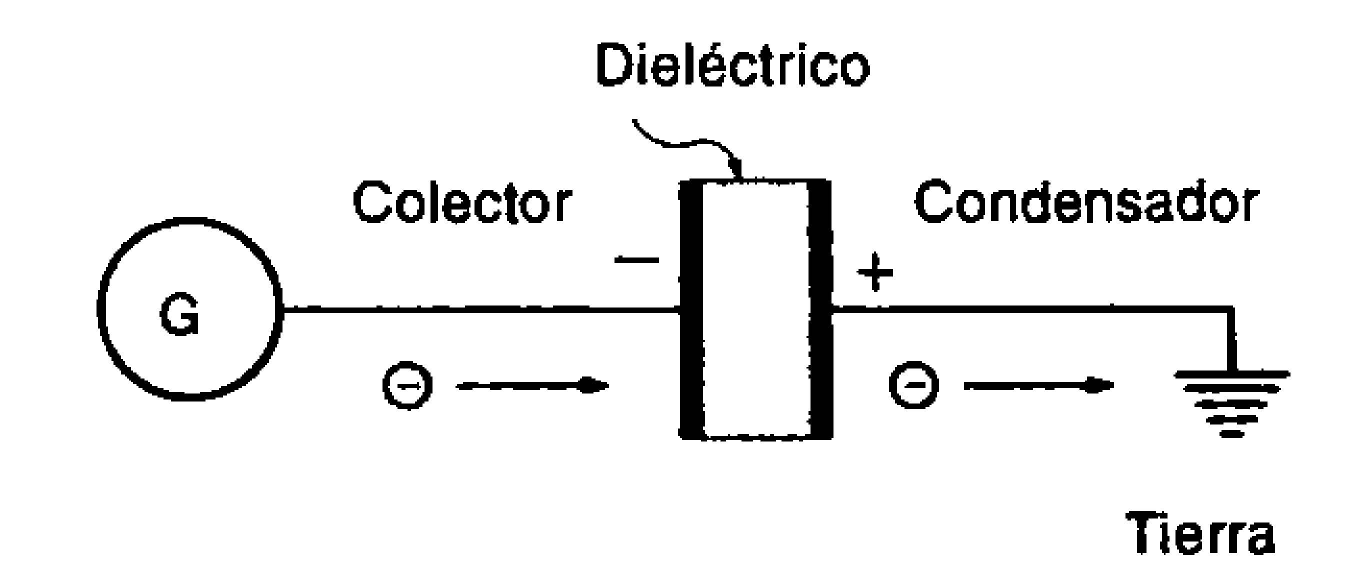
$$F = \frac{C}{V}$$

$$1 \text{ micro faradio } (\mu F) = 10^{-6} F$$

$$1 \text{ pico faradio } (p F) = 10^{-12} F$$

Los condensadores son 2 placas cargadas con igual cantidad de electricidad, pero de signo contrario y que entre ellos siempre hay un aislante que impide el flujo inmediato de electricidad, de lo contrario se anularía la diferencia de potencial que debe existir entre las placas. Esta sustancia aislante entre las placas paralelas se llama "dieléctrico".

Sustancialmente, como se dijo, un condensador consta de 2 placas, una se llama placa colectora o colector y la otra placa condensadora o condensador.



El principio de todo condensador es el siguiente: el "colector" recibe electrones del generador G, al cual está conectado y se carga negativamente; el "condensador" sufre una "inducción" o rechazo a sus electrones por acción del campo eléctrico creado por el colector, y como está conectado a tierra fugan sus electrones a tierra, como consecuencia queda cargado positivamente.

INDUCCIÓN :

Del latín "inducere", significa que un campo eléctrico produce fenómenos eléctricos en otro, situado a cierta distancia de él.

Ejemplo : ¿Qué carga adquiere un condensador de 0,15 F, si se le conecta a una diferencia de potencial de 100V?

RESOLUCIÓN: $C = 0{,}15\ F$

$Q = ?$ $V = 100\ V$

Sabiendo: $C = \frac{Q}{V}$

de donde:

$$Q = C \times V = 0{,}15\ F \times 100\ V$$

$$Q = 15\,(F \times V) = 15\ C$$

Ejemplo : ¿Qué capacidad tiene un condensador si una carga de 10^{-3} C origina, en el condensador una diferencia de potencial de 10^{6} V?

RESOLUCIÓN: $Q = 10^{-3}\ C$

$C = ?$ $V = 10^{6}\ V$

$$C = \frac{Q}{V}$$

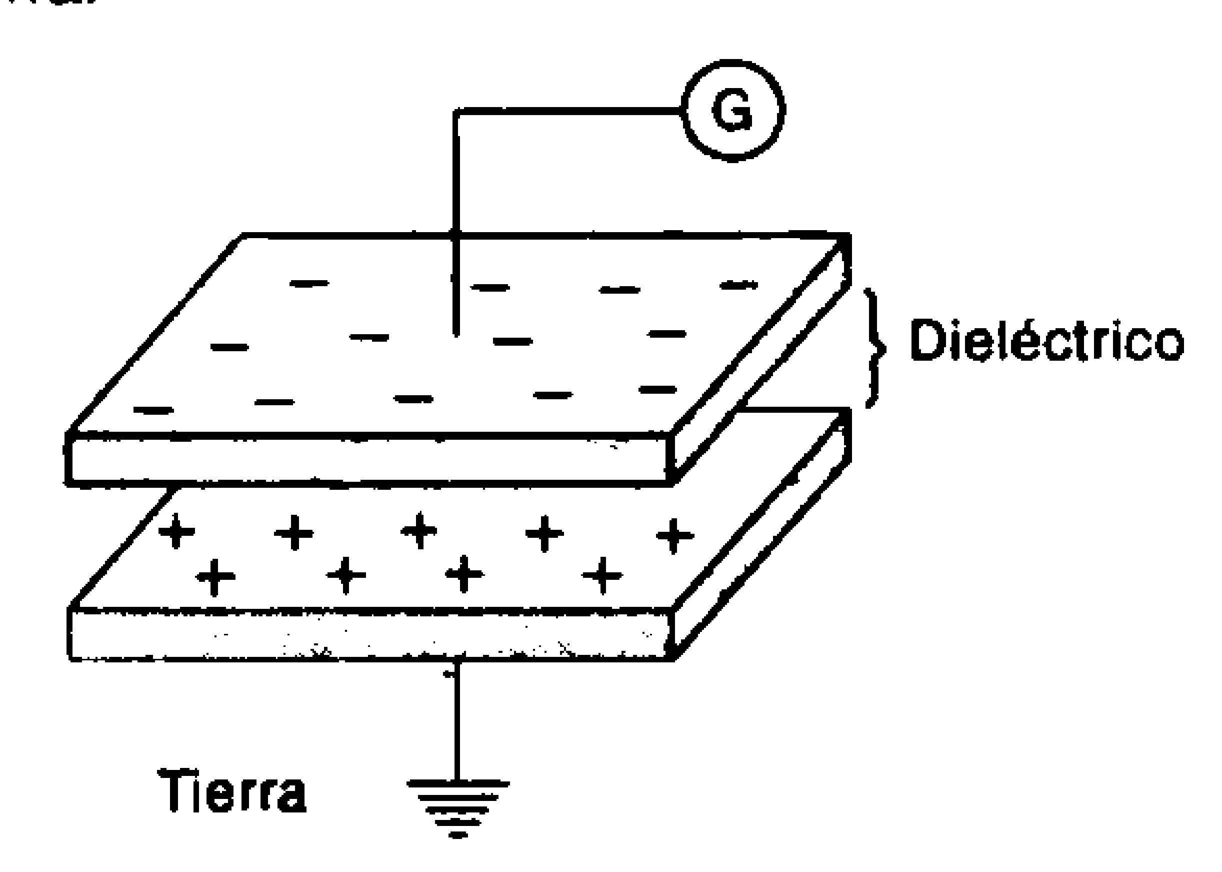
$$C = \frac{10^{-3}\,C}{10^{6}\,V} = 10^{-9}\,\frac{C}{V}$$

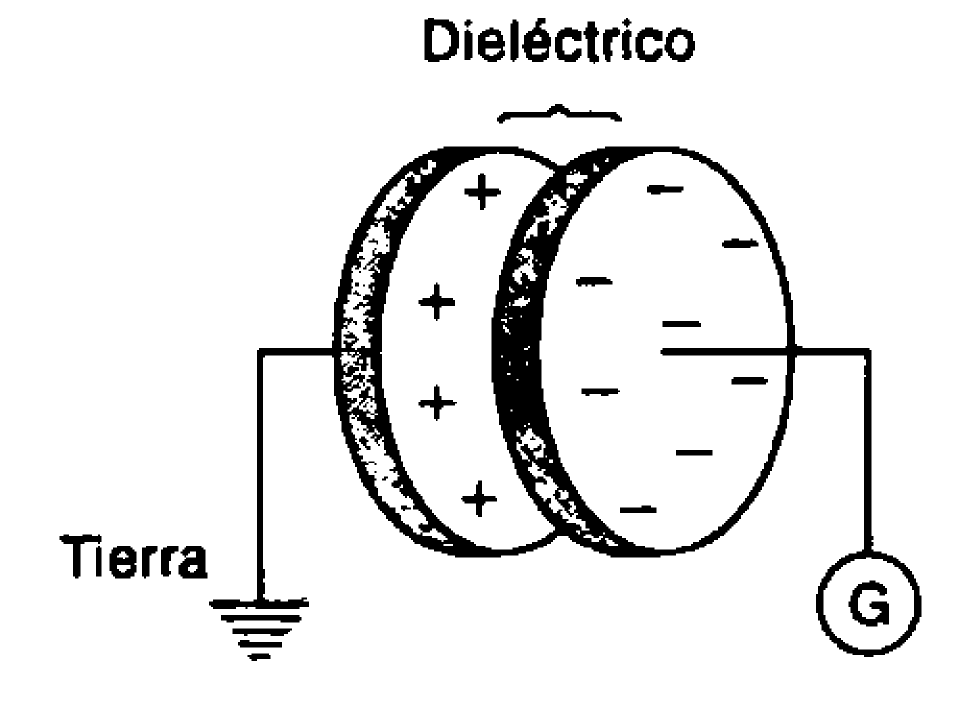
$$C = 10^{-9}\,F$$

$$C = 10^{-3}\,\mu F$$

CAPACIDAD DE UN CONDUCTOR PLANO

Un condensador plano consta de dos láminas metálicas paralelas separadas entre sí por un aislante o dieléc-trico que puede ser el aire u otra sustancia dieléctrica. Como en todo condensador, una placa, el colector, está conectada a un generador y el condensador a tierra.





La capacidad de un condensador plano es directamente proporcional a la superficie de sus placas e inversamente proporcional a la distancia que los separa.

$$C = \frac{A}{d}$$

C : Capacidad de un condensador, en metros "m"

A : Área de la placa, en "m^2"

d : Distancia entre las placas, en metros "m"

Si se calcula la capacidad de un condensador con esta fórmula, se encontraría la capacidad en metros; esta unidad no se usa para medir la capacidad de un condensador, lo que se usa son faradios.

Se ha encontrado experimentalmente que la capacidad de 1 m^2 es igual a la capacidad de $8{,}85 \times 10^{-12}$ faradios que se llama "ε_0".

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\frac{F}{m}$$

Luego, la capacidad de un condensador plano se calcula así:

$$C = \tau\,\varepsilon_0\,\frac{A}{d}$$

C : Capacidad del condensador, en faradios "F"

τ : Constante dieléctrica del material que separa las placas del condensador; para el aire y el vacío $\tau = 1$

ε_0 : Factor de conversión.

¿CÓMO SE CALCULA "τ"?

La constante dieléctrica "τ", de un aislante, es la relación entre la capacidad C' de un condensador con ese aislante, y la capacidad C del mismo condensador con aislante de aire o vacío.

$$\tau = \frac{C'}{C}$$

Ejemplo : Calcular la capacidad de un condensador formado por dos planos de 160 cm^2 cada uno, separados por un espacio de 3 cm. Dieléctrico aire.

RESOLUCIÓN: $A = 160\,cm^2$

$C = ?$ $d = 3\,cm$

$\tau = 1$

Sabiendo: $C = \tau\,\varepsilon_0\,\frac{A}{d}$

http://librosysolucionarios.net

$$C = 1 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{0{,}016\ m^2}{0{,}03\ m}$$

$$C = 4{,}71 \times 10^{-12}\ F$$

$$C = 4{,}71\ pF$$

CONSTANTES DIELÉCTRICAS	
Vacío	1
Aire	1
Agua	81
Alcohol	27
Bakelita	5,0
Azufre	3,6
Vidrio	4,5
Ebonita	2,5
Gutapercha	4,5
Mármol	8,0
Mica	5,0
Resina	2,5
Madera seca	4,5

Ejemplo : Calcular la capacidad de un condensador plano formado por dos placas de 600 cm², separados por un espacio de 2 mm, utilizando como aislante entre planos la bakelita ($\tau = 5$).

RESOLUCIÓN : $A = 0{,}06\ m^2$

$\tau = 5$ $\quad d = 0{,}002\ m$

$C = ?$

Sabiendo: $C = \tau\, \varepsilon_0\ \dfrac{A}{d}$

Sustituyendo los datos:

$$C = 5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{0{,}06\ m^2}{0{,}002\ m}$$

$$C = 1\,327{,}5 \times 10^{-12}\ F$$

Ejemplo : Un condensador está formado por dos láminas circulares de 12 cm de radio, separadas por 3 mm de aire. Calcular su capacidad en microfaradios ($\tau = 1$).

RESOLUCIÓN : $r = 0{,}12\ m$

$C = ?$ $\quad d = 0{,}003\ m$

$\tau = 1$

Sabiendo: $C = \tau\, \varepsilon_0\ \dfrac{A}{d}$

$$C = 1 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{\pi r^2}{d}$$

$$C = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{3{,}14 \times (0{,}12\ m)^2}{0{,}003\ m}$$

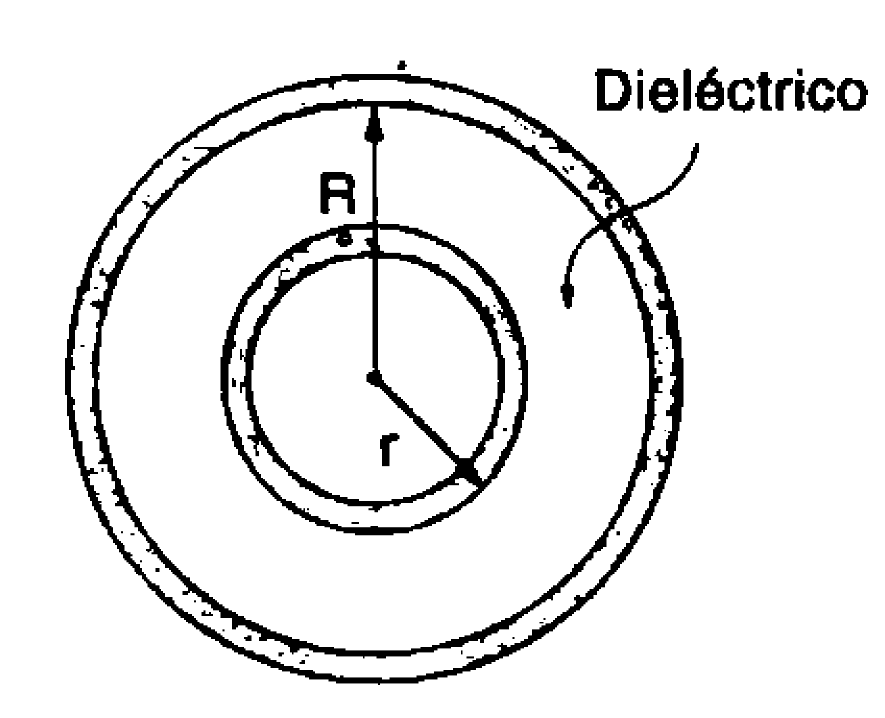
$$C = 133{,}38 \times 10^{-12}\ F$$

Pero: $10^{-12}\ F = 1\ pF$

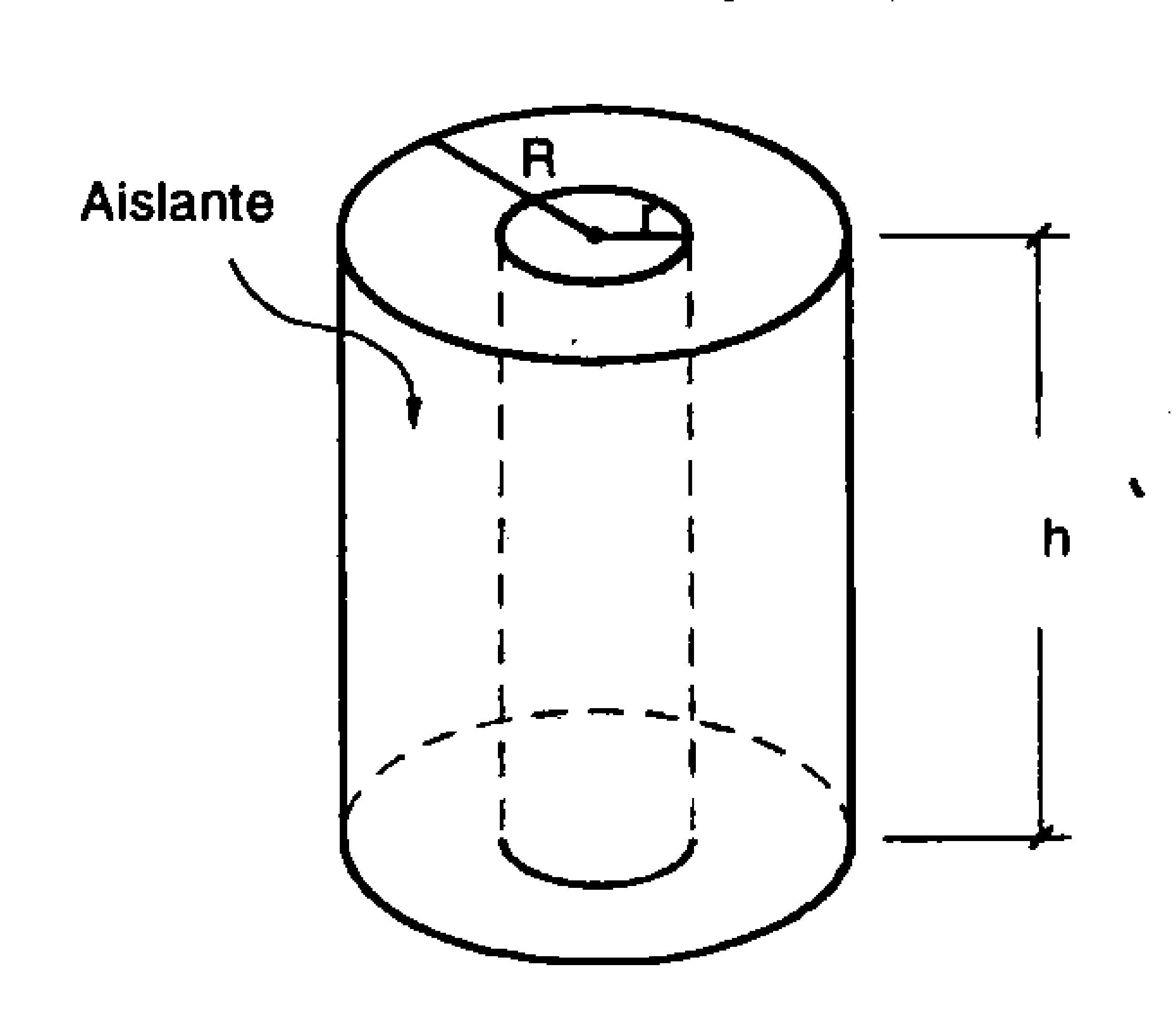
$\therefore \quad C = 133{,}38\ pF$

CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR ESFÉRICO

$$\boxed{C = \tau\, \varepsilon_0\ \frac{R\,r}{R - r}}$$



CAPACIDAD DE UN CONDENSADOR CILÍNDRICO

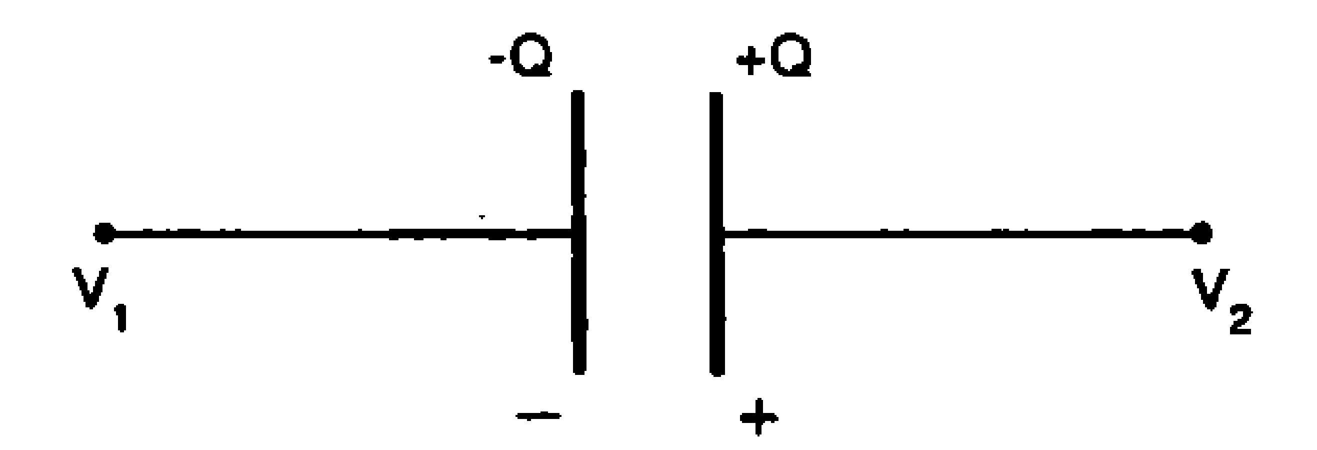


http://librosysolucionarios.net

$$C = \tau \varepsilon_0 \frac{h}{2 \ln \frac{R}{r}}$$

$$C = \tau \varepsilon_0 \frac{h}{4{,}6 \log \frac{R}{r}}$$

NOTA : La representación convencional de cualquier tipo de condensador es:



* La placa "colectora" es la placa negativa.
* La placa "condensadora" es la placa positiva.

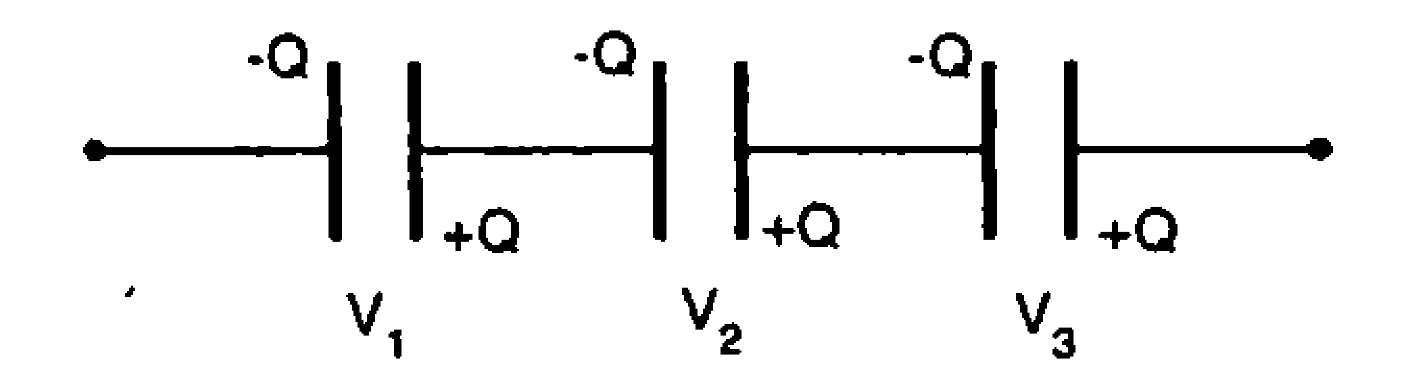
ASOCIACIÓN DE CONDENSADORES

Se puede asociar o enlazar conductores de tres maneras:

a) En serie o cascada
b) En paralelo
c) Mixto o batería

a) Enlace en Serie o Cascada:

Se enlazan varios condensadores, de modo que la placa condensadora de la primera se conecte con la placa colectora de la segunda y la condensadora de ésta con la colectora de la tercera y así sucesivamente.



Sus características:

1) $V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\ldots$

2) $Q = Q_1 = Q_2 = Q_3 = \ldots\ldots$

3) $\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots$

b) Enlace en Paralelo:

Se enlazan varios condensadores, todos los colectores entre sí y todos los condensadores entre sí.

Sus características:

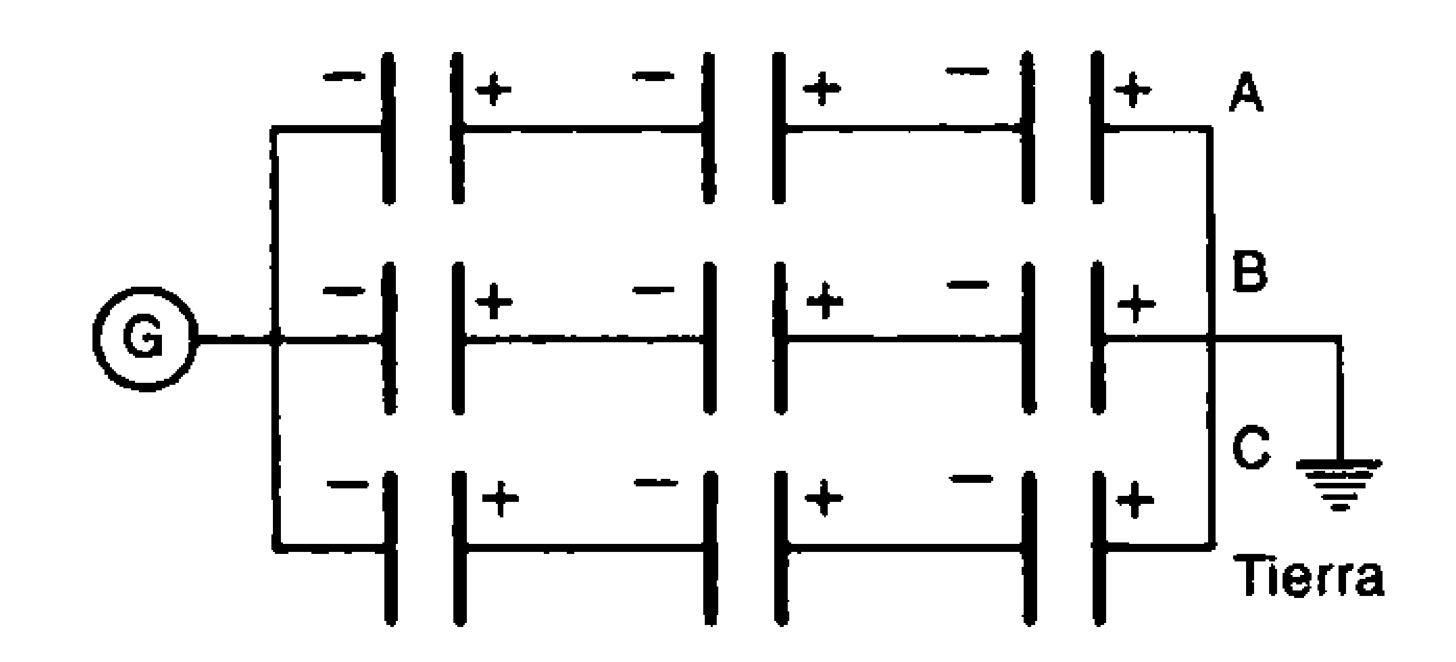
1) $V = V_1 = V_2 = V_3 = \ldots\ldots$

2) $Q = Q_1 + Q_2 + Q_3 + \ldots\ldots$

3) $C = C_1 + C_2 + C_3 + \ldots\ldots$

c) Enlace en Batería o Mixto:

Dos o más grupos de condensadores enlazados en serie se conectan o enlazan a su vez en paralelo.



La capacidad de los condensadores que están en serie será:

$$\frac{1}{C_A} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} + \ldots\ldots$$

En esta obra se trata sólo el caso en que la capacidad de todos los condensadores son iguales, luego:

$$\frac{1}{C_A} = n\frac{1}{C_1}$$

Es decir: $$C_A = \frac{C_1}{n} \quad (1)$$

Del mismo modo:

$$C_B = \frac{C_1}{n} \qquad (2)$$

$$C_C = \frac{C_1}{n} \qquad (3)$$

Como estos grupos (1) , (2) y (3) están conectados en paralelo:

$$C = C_A + C_B + C_C + \ldots\ldots$$

Sustituyendo sus valores:

$$C = \frac{C_1}{n} + \frac{C_1}{n} + \frac{C_1}{n} + \ldots\ldots$$

$$\boxed{C = N\frac{C_1}{n}}$$

Donde:

C : Capacidad total.
C_1: Capacidad de cada condensador.
N : Número de conexiones en serie.
n : Número de condensadores en cada serie.

ENERGÍA DE UN CONDENSADOR

Cuando un condensador se carga, evidentemente que al principio el condensador empieza descargado, Q = 0, por consiguiente la diferencia de potencial también es cero, es decir V = 0. A medida que se carga, la diferencia de potencial va subiendo de 0 a V y el valor medio de esta diferencia entre el estado inicial y final es V/2.

El trabajo necesario para trasladar un carga "Q" a través de una diferencia de potencial media V/2 es pues:

$$\boxed{W = \frac{1}{2}VQ} \qquad (I)$$

que es la energía almacenada en un condensador con la carga "Q" y una diferencia de potencial "V".

Sustituyendo en (I) Q = C V :

$$\boxed{W = \frac{1}{2}CV^2} \qquad (II)$$

o también: $V = \dfrac{Q}{C}$

$$\boxed{W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C}} \qquad (III)$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Dos condensadores de capacidades 3 p F y 6 p F están en serie y conectados a una tensión de 1 000 V. Calcular:

a) La capacidad del sistema.
b) La carga total y la carga de cada condensador.
c) La diferencia de potencial en los bornes de cada condensador
d) La energía almacenada en el sistema.

RESOLUCIÓN : $C_1 = 3\,pF$

$V = 1\,000\,V \qquad C_2 = 6\,pF$

a) Sabiendo:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} = \frac{1}{3\,pF} + \frac{1}{6\,pF}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{6\,pF} = \frac{1}{2\,pF}$$

$$C = 2\,pF$$

b) Sabiendo: $Q = Q_1 = Q_2$

Luego, cálculo de Q:

$$Q = CV = 2\,pF \times 1\,000\,V$$

http://librosysolucionarios.net

$$Q = 2 \times 10^{-12}\ F \times 10^{3}\ V$$

$$Q = 2 \times 10^{-9}\ F \times V$$

$$Q = 2 \times 10^{-9}\ C$$

Se sabe en general que:

$$V = \frac{Q}{C}$$

c) $$V_1 = \frac{2 \times 10^{-9}\ C}{3 \times 10^{-12}\ F}$$

$$V_1 = 667\ V$$

d) $$V_2 = \frac{2 \times 10^{-9}\ C}{6 \times 10^{-12}\ F}$$

$$V_2 = 333{,}3\ V$$

e) La energía:

$$W = \frac{1}{2} V Q$$

$$W = \frac{1}{2} \times 10^{3}\ V \times 2 \times 10^{-9}\ C$$

$$W = 10^{-6}\ V \times C$$

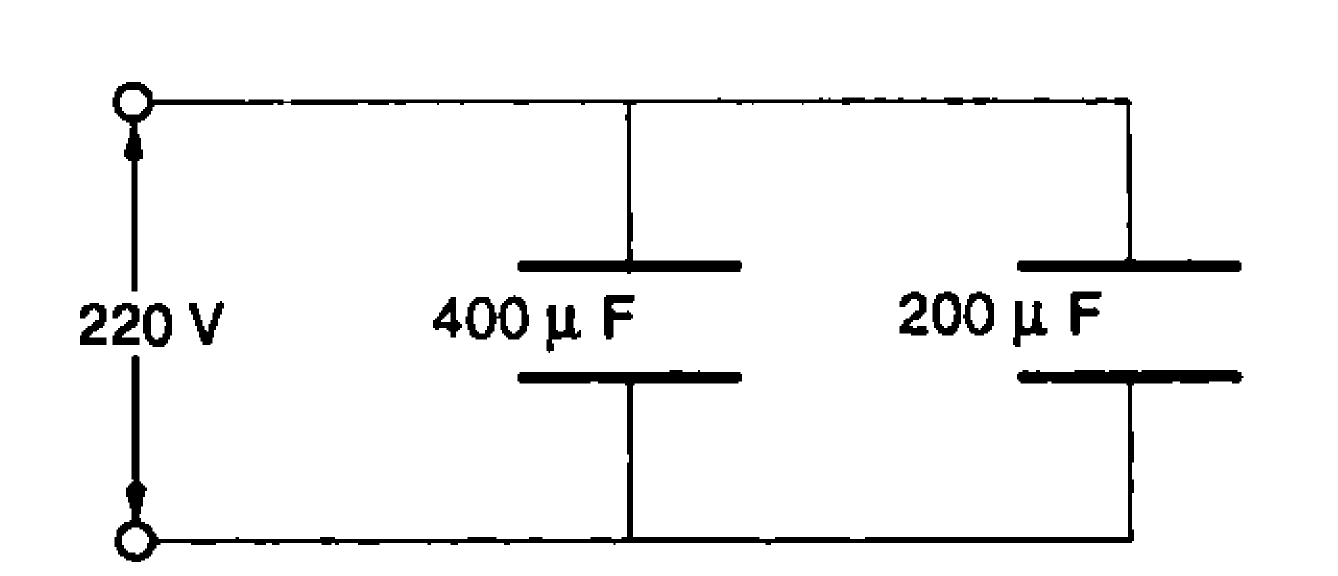
$$W = 10^{-6}\ J$$

PROBLEMA 2. Dos condensadores están conectados en paralelo, son de 200 μ F y 400 μ F de capacidad cada uno; se cargan con una diferencia de potencial de 220 voltios. Calcular:

a) La carga de cada uno
b) La carga total del sistema
c) La capacidad del sistema

RESOLUCIÓN: $C_1 = 200\ \mu F$

$V = 220\ V$ $\quad C_2 = 400\ \mu F$



a) Como están en paralelo las cargas de cada condensador son diferentes:

De: $C = \frac{Q}{V} \quad \therefore \quad Q = C\,V$

Con esta fórmula:

$$Q_1 = 200\ \mu F \times 220\ V$$

Rpta.: $Q_1 = 44 \times 10^{-3}\ C$

$$Q_2 = 400\ \mu F \times 220\ V$$

Rpta.: $Q_2 = 88 \times 10^{-3}\ C$

b) La carga total del sistema en paralelo es igual a la suma de las cargas:

$$Q = Q_1 + Q_2$$

$$Q = 44 \times 10^{-3}\ C + 88 \times 10^{-3}\ C$$

Rpta.: $132 \times 10^{-3}\ C$

c) La capacidad del sistema cuando están en paralelo es la suma de las capacidades de cada uno de los condensadores:

$$C = C_1 + C_2 = 200\ \mu F + 400\ \mu F$$

Rpta.: $600\ \mu F$

PROBLEMA 3. Se tiene un condensador de dos placas paralelas de 200 cm² cada una, separadas en 0,4 cm con aire. Calcular:

a) Su capacidad, en farads
b) Si se conecta al condensador una fuente de tensión, de 200 V; hallar "Q", la energía "W" y la intensidad "E", del campo eléctrico.
c) Si se intercala entre las placas una lámina de mica, de 0,4 cm cuya $\tau = 5$, hallar la energía total almacenada.

RESOLUCIÓN: $A = 200\ cm^2$

$d_{aire} = 0{,}4\ cm \qquad V = 220\ V$

$d_{mica} = 0{,}4\ cm \qquad \tau = 5$

a) Cálculo de la capacidad:

$$C = \tau\, \varepsilon_0 \frac{A}{d}$$

http://librosysolucionarios.net

$$C = 1 \times 8{,}25 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{200 \times 10^{-4}\ m^2}{0{,}4 \times 10^{-2}\ m}$$

$$C = 44{,}25 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{N \times m}$$

$$C = 44{,}25 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{J}$$

$$C = 44{,}25 \times 10^{-12}\ \frac{C^2}{C \times V}$$

$$C = 44{,}25 \times 10^{-12}\ \frac{C}{V}$$

$$C = 44{,}25 \times 10^{-12}\ F$$

b_1) Cálculo de Q:

$$C = \frac{Q}{V} \qquad Q = C\,V$$

$$Q = 44{,}25 \times 10^{-12}\ F \times 220\ V$$

$$Q = 9\,735 \times 10^{-12}\ F \times V$$

Rpta.: $Q = 97{,}35 \times 10^{-10}\ C$

b_2) Cálculo de la energía inicial:

$$W = \frac{1}{2} V Q = \frac{1}{2} \times 220\,V \times 97{,}35 \times 10^{-10}\ C$$

$$W = 10\,708{,}5 \times 10^{-10}\ C \times V$$

Rpta.: $W = 107{,}085 \times 10^{-8}\ J$

b_3) Cálculo de la intensidad del campo eléctrico del conductor:

$$E = k\,\frac{Q}{r^2}$$

$$E = 9 \times 10^9\,\frac{N \times m^2}{C^2} \times \frac{97{,}35 \times 10^{-10}\ C}{(0{,}4 \times 10^{-2}\ m)^2}$$

$$E = \frac{9 \times 97{,}35 \times 10^{-1} \times N \times m^2 \times C}{0{,}16 \times 10^4\ C^2 \times m^2}$$

Rpta.: $E = 5\,476 \times 10^3\ \frac{N}{C}$

c)
$$C' = \tau\,C \qquad (1)$$

$$\frac{q}{V'} = \tau\,\frac{q}{C} \quad y \quad V' = \frac{V}{\tau} \qquad (2)$$

Además:
$$W_T = \frac{1}{2}\,C\,V^2 \qquad (3)$$

$$W'_T = \frac{1}{2}\,C'\,(V')^2 = \frac{1}{2}\,(\tau\,C)\left(\frac{V}{\tau}\right)^2$$

$$\therefore \quad W'_T = \frac{1}{\tau}\cdot\frac{1}{2}\,C\,V^2 \qquad (4)$$

Sustituyendo (3) en (4):

$$W'_T = \frac{1}{\tau}\cdot W_T$$

Reemplazando:

$$W'_T = \frac{107{,}085 \times 10^{-8}}{5}$$

Rpta.: $W'_T = 21{,}417 \times 10^{-8}\ J$

PROBLEMA 4. Calcular la capacidad de un conductor cilíndrico construido con dos láminas cilíndricas de 4 y 2 cm de diámetro, de 5 cm de alto y utilizando como aislante lana de vidrio $\tau = 5{,}5$.

RESOLUCIÓN: $R = 2\ cm$

$\tau = 5{,}5$ $\quad h = 5\ cm$

$C = ?$ $\quad r = 1\ cm$

$$\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m}$$

Recordando que:

$$C = \tau\,\varepsilon_0\,\frac{h}{4{,}6 \log \frac{R}{r}}$$

$$C = 5{,}5 \times 8{,}85 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{5\ cm}{4{,}6 \log \frac{2\ cm}{1\ cm}}$$

http://librosysolucionarios.net

$$C = 48{,}675 \times 10^{-12}\ \frac{F}{m} \times \frac{5\ cm}{4{,}6 \log 2}$$

$$C = 48{,}675 \times 10^{-12}\ \frac{F}{100\ cm} \times$$

$$\times \frac{5\ cm}{4{,}6 \log 0{,}30103}$$

$$C = 1{,}76 \times 10^{-12}\ F$$

Rpta.: $C = 1{,}76\ p\,F$

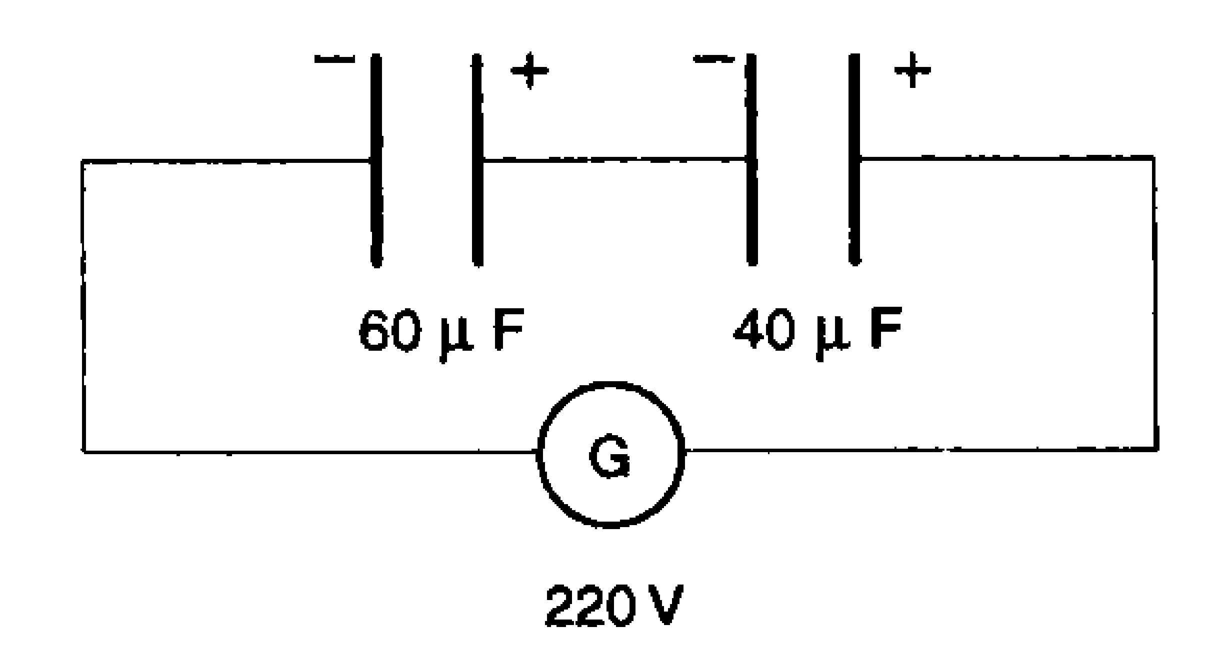
PROBLEMA 5. Un generador de 220 V está conectado a dos condensadores en serie de 60 μ F y 40 μ F de capacidad. Calcular:

a) La carga de cada condensador.
b) La energía total almacenada.

RESOLUCIÓN : $C_1 = 60\ \mu\ F$

$C_2 = 40\ \mu\ F$

$V = 220\ V$



a) Recordando que:

$$Q = C\,V \qquad (I)$$

Cálculo de la capacidad total:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{60\ \mu\ F} + \frac{1}{40\ \mu\ F}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{100}{2\,400\ \mu\ F}$$

De donde: $C = 24\ \mu\ F$

Sustituyendo valores en (I) :

$$Q = 24\ \mu\ F \times 220\ V$$

$$Q = 5\,280\ \mu\ C$$

Como los condensadores están conectados en serie, las cargas son iguales, luego:

Rpta.: $Q_1 = Q_2 = 5\,280 \times 10^{-6}\ C$

b) Sabiendo: $W = \frac{1}{2}\,C\,V^2$

$$W = \frac{1}{2} \times 24\ \mu\ F \times (220\ V)^2$$

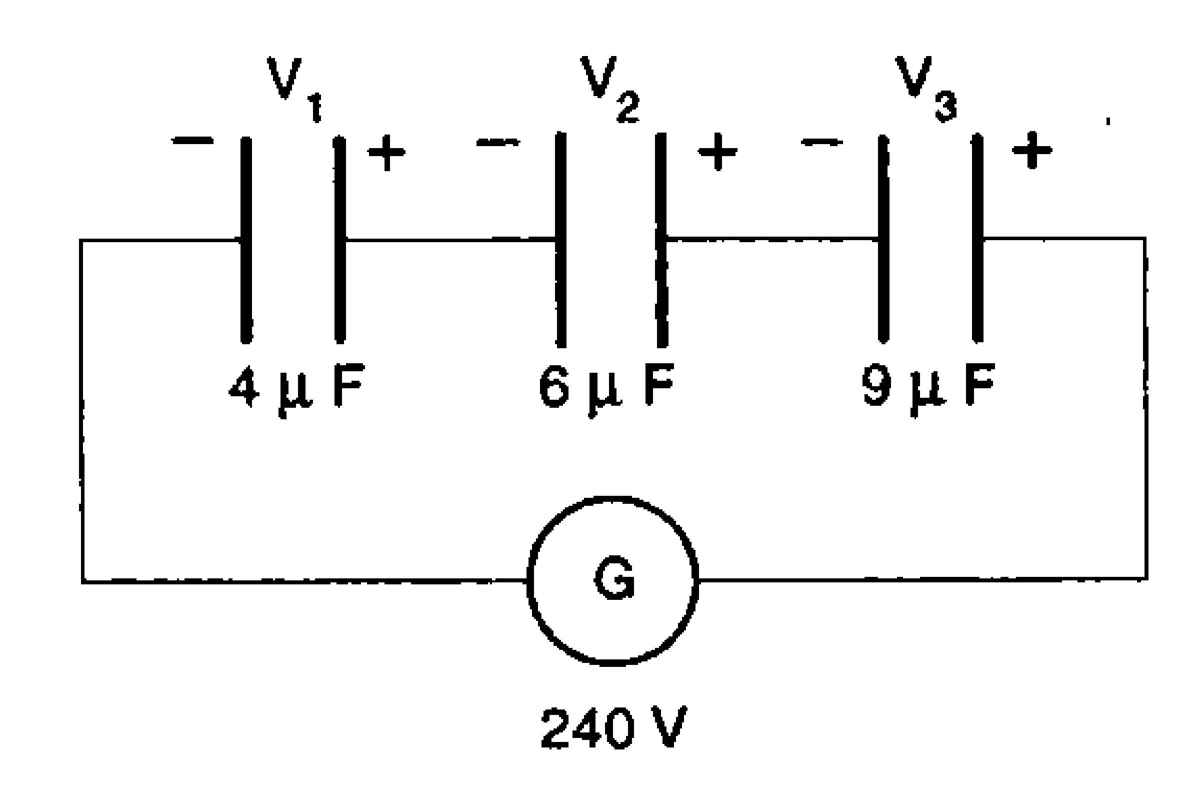
$$W = 580\,800\ \mu\ F \times V^2$$

$$W = 580\,800 \times 10^{-6}\ F \times \frac{C}{F} \times V$$

$$W = 580\,800 \times 10^{-6}\ C \times V$$

Rpta.: $W = 0{,}580\,8\ J$

PROBLEMA 6. Las capacidades de tres condensadores conectados en serie son: 4 μ F, 6 μ F y 9 μ F y están conectados a un generador de 240V. Calcular la caída de potencial producida en cada condensador.



RESOLUCIÓN : Cuando los condensadores están conectados en serie:

$$Q_1 = Q_2 = Q_3 = Q$$

Pero también se puede escribir:

$$C_1\,V_1 = C_2\,V_2 = C_3\,V_3 = C\,V \quad (1)$$

Cálculo de la capacidad total C:

En serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{4\,\mu F} + \frac{1}{6\,\mu F} + \frac{1}{9\,\mu F}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{19}{36\,\mu F}$$

$$C = 1{,}89\,\mu F$$

De (I): $C_1 V_1 = C V$

$$V_1 = \frac{C V}{V_1} = \frac{1{,}89\,\mu F \times 240\,V}{4\,\mu F}$$

$$V_1 = 133{,}4\,V$$

De (I): $C_2 V_2 = C V$

$$V_2 = \frac{C V}{V_2} = \frac{1{,}89\,\mu F \times 240\,V}{6\,\mu F}$$

$$V_2 = 75{,}6\,V$$

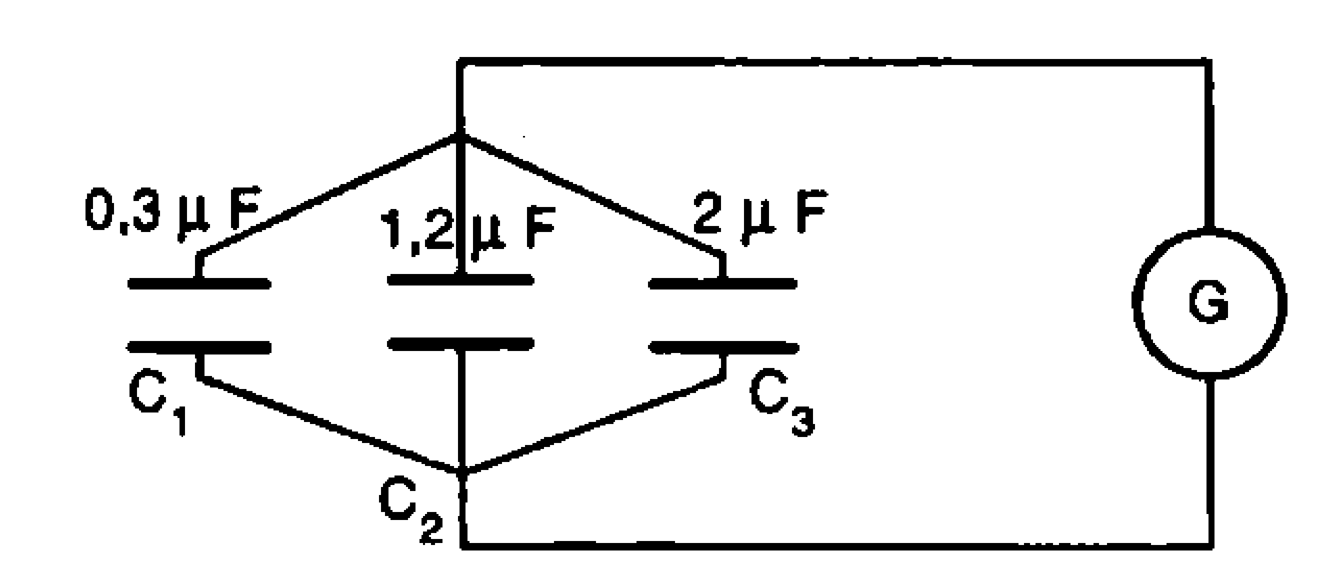
De (I): $C_3 V_3 = C V$

$$V_3 = \frac{C V}{V_3} = \frac{1{,}89\,\mu F \times 240\,V}{8\,\mu F}$$

$$V_3 = 56{,}7\,V$$

PROBLEMA 7. Se conectan 3 con-densadores en paralelo de 0,3 μ F, 1,2 μ F y 2 μ F. Conectados a un generador de 110 V. Calcular:

a) La capacidad total.
b) La carga de cada uno.
c) La caída de potencial de cada uno.
d) La energía total almacenada.



RESOLUCIÓN:

a) $C = C_1 + C_2 + C_3$

$$C = 0{,}3\,\mu F + 1{,}2\,\mu F + 2\,\mu F$$

$$C = 3{,}5\,\mu F$$

b) Carga total:

$$Q = C V = 3{,}5 \times 10^{-6}\,F \times 110\,V$$

$$Q = 385 \times 10^{-6}\,C$$

Pero:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C} \qquad (I)$$

Carga de cada uno:

De (I): $\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q}{C}$

$$Q_1 = C_1 \frac{Q}{C} = 0{,}3\,\mu F\,\frac{385 \times 10^{-6}\,C}{3{,}5\,\mu F}$$

$$Q_1 = 33 \times 10^{-6}\,C$$

De (I): $\frac{Q_2}{C_2} = \frac{Q}{C}$

$$Q_2 = C_2 \frac{Q}{C} = 1{,}2\,\mu F\,\frac{385 \times 10^{-6}\,C}{3{,}5\,\mu F}$$

$$Q_2 = 132 \times 10^{-6}\,C$$

De (I): $\frac{Q_3}{C_3} = \frac{Q}{C}$

$$Q_3 = C_3 \frac{Q}{C} = 2\,\mu F\,\frac{385 \times 10^{-6}\,C}{3{,}5\,\mu F}$$

$$Q_3 = 220 \times 10^{-6}\,C$$

c) $V_1 = V_2 = V_3 = V = \frac{Q}{C}$

$$V = \frac{385 \times 10^{-6}\,C}{3{,}5 \times 10^{-6}\,F} = 110\,V$$

d) Cálculo de la energía total almacenada.

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

$$W = \frac{1}{2} \times 3{,}5 \times 10^{-6}\,F \times (110\,V)^2$$

http://librosysolucionarios.net

$$W = 21{,}175 \times 10^{-3} \times F \times V^2$$

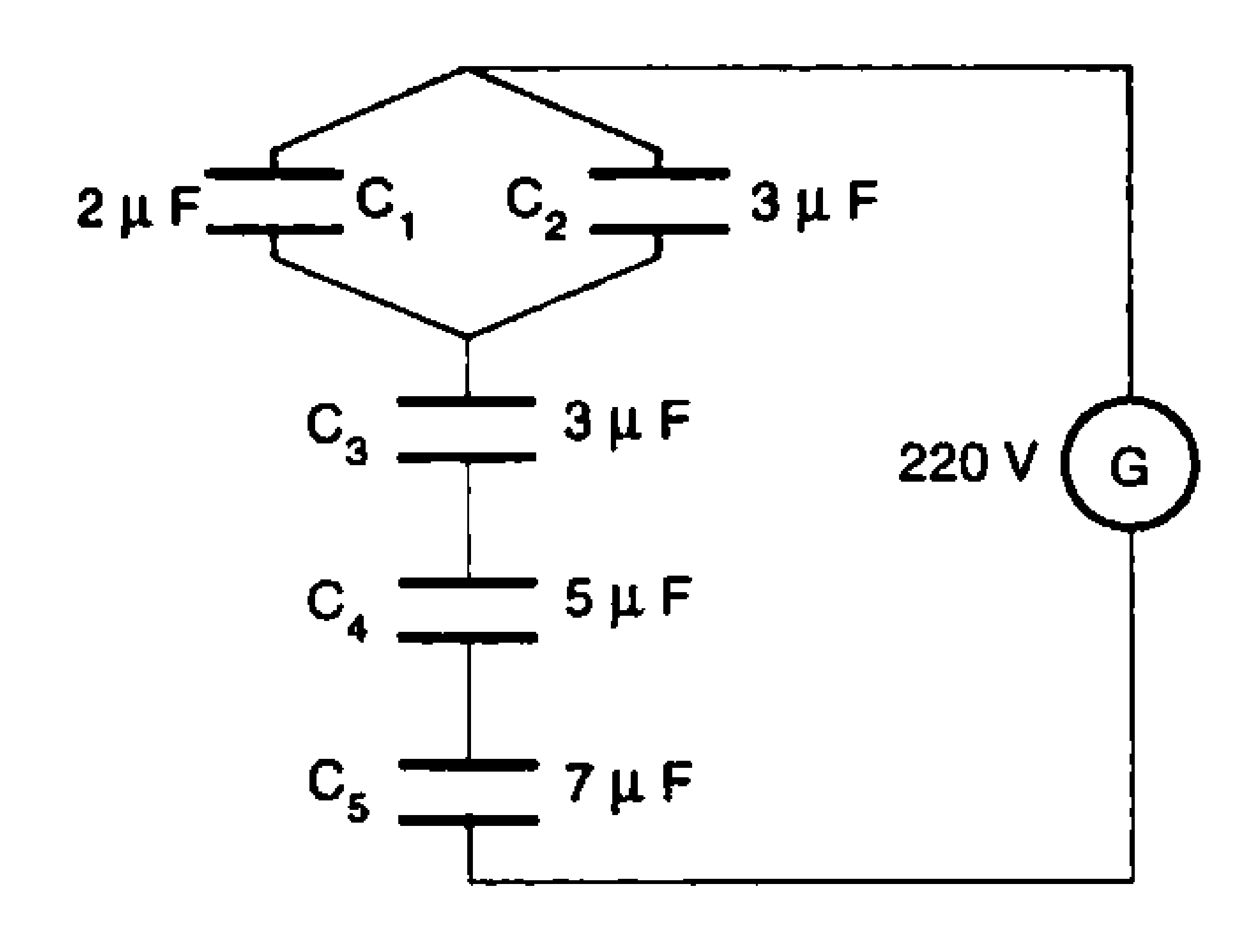
$$W = 21{,}175 \times 10^{-3} \times \frac{C}{V} \times V^2$$

$$W = 21{,}175 \times 10^{-3}\ C \times V$$

$$W = 21{,}175 \times 10^{-3}\ J$$

PROBLEMA 8. Dos condensadores de 2 μ F y 3 μ F están conectados en paralelo y este conjunto a su vez conectado a 3 condensadores de 3 μ F, 5 μ F y 7 μ F en serie. El conjunto está conectado a un generador de 220V. Calcular:

a) La capacidad resultante
b) La carga de cada uno
c) La caída de potencial de cada uno
d) La energía total almacenada en los 5 conductores.



a) En paralelo:

$$C_p = C_1 + C_2$$

$$C_p = 2\,\mu F + 3\,\mu F = 5\,\mu F$$

En serie:

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5}$$

$$\frac{1}{C_s} = \frac{1}{3\,\mu F} + \frac{1}{5\,\mu F} + \frac{1}{7\,\mu F}$$

$$\therefore \qquad C_s = 1{,}5\,\mu F$$

Como los conjuntos o asociaciones a su vez están conectados en serie:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_p} + \frac{1}{C_s}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{5\,\mu F} + \frac{1}{1{,}5\,\mu F}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{6{,}5}{7{,}5\,\mu F}$$

De donde: $C = 1{,}15\,\mu F$

b) Carga total:

$$Q = CV = 1{,}15\,\mu F \times 220\,V$$

$$Q = 253 \times 10^{-6}\ C$$

Como los conjuntos están en serie:

$$Q_p = Q_s = 253 \times 10^{-6}\ C$$

Como 3, 4 y 5 están en serie:

$$Q_s = Q_3 = Q_4 = Q_5 = 253 \times 10^{-6}\ C$$

Como 1 y 2 están en paralelo:

$$\frac{Q_1}{C_1} = \frac{Q_2}{C_2}$$

$$\frac{Q_1}{2\,\mu F} = \frac{Q_2}{3\,\mu F} \qquad \text{(a)}$$

Además

$$Q_p = Q_1 + Q_2 = 253 \times 10^{-6}\ C \quad \text{(b)}$$

Resolviendo las ecuaciones (a) y (b):

$$Q_1 = 101{,}2 \times 10^{-6}\ C$$

$$Q_2 = 151{,}8 \times 10^{-6}\ C$$

c) Cálculo de la caída del potencial en el conjunto en paralelo:

$$V_1 = V_2 = V_p = \frac{Q_p}{C_p}$$

$$V_p = \frac{253 \times 10^{-6}\ C}{5 \times 10^{-6}\ F} = 50{,}6\ V$$

Cálculo de la caída de potencial en el conjunto en serie

$$V_3 = \frac{Q_3}{C_3} = \frac{253 \times 10^{-6}\ C}{3 \times 10^{-6}\ F}$$

http://librosysolucionarios.net

$$V_3 = 84{,}3\ V$$

$$V_4 = \frac{Q_4}{C_4} = \frac{253 \times 10^{-6}\ C}{5 \times 10^{-6}\ F}$$

$$V_4 = 50{,}6\ V$$

$$V_5 = \frac{Q_5}{C_5} = \frac{253 \times 10^{-6}\ C}{7 \times 10^{-6}\ F}$$

$$V_5 = 36{,}1\ V$$

d) La energía total:

$$W = \frac{1}{2} C V^2$$

$$W = \frac{1}{2} \times 1{,}15 \times 10^{-6}\ F \times (220\ V)^2$$

$$W = 27{,}83 \times 10^{-3}\ F \times V^2$$

$$W = 27{,}83 \times 10^{-3} \times \frac{C}{V} \times V^2$$

$$W = 27{,}83 \times 10^{-3}\ C \times V$$

$$W = 27{,}83 \times 10^{-3}\ J$$

PROBLEMA 9. Dos esferas de 20 cm de diámetro se cargan con una tensión de 100 000V. ¿Cuál será la fuerza se repulsión a 50 cm de distancia entre ellas?

RESOLUCIÓN:

$D = 20$ cm $d = 50$ cm
$V = 100\,000$ $F = ?$

Sabiendo que: $F = K \dfrac{Q_1 Q_2}{d^2}$

Pero: $Q_1 = Q_2 = Q$

$$\Rightarrow \quad F = K \frac{Q^2}{d^2} \qquad (I)$$

La capacidad de una esfera es igual numéricamente al valor del radio en el sistema c.g.s.

$$C = \frac{D}{2} = 10\ \text{u.e.c.}$$

Por otro lado: $Q = CV$

Sustituyendo los datos:

$$Q = 10\ \text{u.e.c.} \times 100\,000\ V$$

Pero: $1\ V = \dfrac{1}{300}$ u.e.v. luego:

$$Q = 10\ \text{u.e.c.} \times 100\,000 \times \frac{1}{300}\ \text{u.e.v.}$$

$$Q = \frac{1}{3} \times 10^4\ \text{u.e.c.} \times \text{u.e.v.}$$

$$Q = \frac{1}{3} \times 10^4\ \text{u.e.q.}$$

Sustituyendo valores en (I):

$$F = 1\ \frac{\text{din} \times \text{cm}^2}{(\text{u.e.q.})^2} \times \frac{\left(\frac{1}{3} \times 10^4\ \text{u.e.q.}\right)^2}{(50\ \text{cm})^2}$$

Rpta.: $F = \dfrac{4}{9} \times 10^4$ din

PROBLEMA 10. Dos discos laminares y paralelos forman un conden sador, son de 20 cm de radio y están separados por 4 mm de aire. Calcular su capacidad.

RESOLUCIÓN:

Recordando que la capacidad para un condensador plano se calcula así:

$$C = \tau\, \varepsilon_0 \frac{A}{d} \qquad (I)$$

Donde:

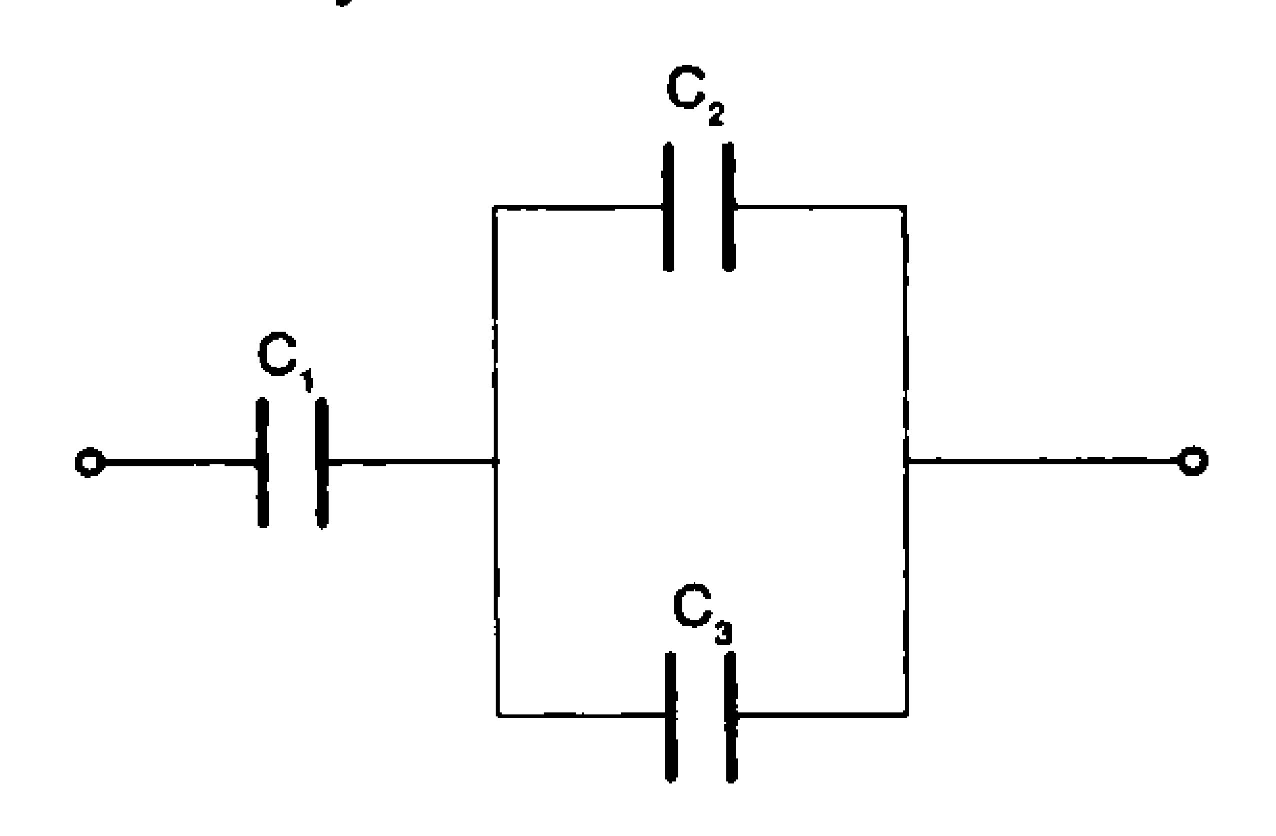
τ = 1 (constante dieléctrica del aire en un condensador)
ε_0 = 8,85 . 10^{12} F/m
$A = \pi^2 r$ = 3,14 . $(20\ \text{cm})^2$
A = 1 256 cm^2
d = 4 mm = 0,4 cm

Sustituyendo estos valores en (I):

$$C = 1 \,.\, 8{,}85 \,.\, 10^{-12}\ \frac{F}{m} \,.\, \frac{1\,256{,}6\ \text{cm}^2}{0{,}4\ \text{cm}}$$

Rpta.: $C = 287 \,.\, 10^{-12}$ F
$C = 287$ pF

PROBLEMA 11. Tres condensadores, cuyas capacidades en el vacío son $C_1 = 3\ \mu F$, $C_2 = 5\ \mu F$ y $C_3 = 7\ \mu F$, están conectados como indica la figura. Si a cada uno se le antepone un dieléctrico, de valores $\tau_1 = 2$, $\tau_2 = 5$ y $\tau_3 = 4{,}5$ respectivamente, calcular su capacidad equivalente.



RESOLUCIÓN :

Recordando que las capacidades son directamente proporcionales a los dieléctricos:

$$C_1' = \tau_1 C_1 = 2 \,.\, 3\,\mu F = 6\,\mu F$$

$$C_2' = \tau_2 C_2 = 5 \,.\, 5\,\mu F = 25\,\mu F$$

$$C_3' = \tau_3 C_3 = 4{,}5 \,.\, 7\,\mu F = 31{,}5\,\mu F$$

La capacidad de los dos últimos que están conectados en paralelo es:

$$C_p = C_1' + C_2' = 25\,\mu F + 31{,}5\,\mu F$$

$$C_p = 56{,}5\,\mu F$$

Este conjunto está asociado con el primero en serie, luego:

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_p}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{1}{6\,\mu F} + \frac{1}{56{,}5\,\mu F}$$

$$\frac{1}{C} = \frac{62{,}5}{339\,\mu F}$$

Rpta.: $C = 5{,}42\ \mu F$

PROBLEMA 12. ¿Que potencial en voltios adquiriría la Tierra, si se cargase con 1 coulomb?

$(R_{TIERRA} = 6\ 370\ km)$

RESOLUCIÓN :

$$R_T = 6\,370\ km = 637 \,.\, 10^4\ m$$

$Q_T = 1\ C$ Por formula:

$$C_T = \frac{Q_T}{V_T} \qquad V_T = \frac{Q_T}{C_T} \qquad (1)$$

También:

$$C_T = 4\pi\varepsilon_0 R_T \qquad (2)$$

(2) en (1) :

$$V_T = \frac{Q_T}{4\pi\varepsilon_0 R_T} \qquad (3)$$

Reemplazando datos en (3) :

Rpta.: $V_T = 1\,412{,}85\ V$

PROBLEMA 13. Una esfera conductora aislada de radio "R" tiene, una carga "Q". ¿Cuál es la energía total almacenada? ¿Cuál es el radio "r" de la esfera en la que está contenida la mitad de la energía almacenada?

RESOLUCIÓN

a) La energía almacenada se da:

$$W = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} \qquad (1)$$

Pero: $$C = 4\pi\varepsilon_0 R \qquad (2)$$

(2) en (1): $$W = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\frac{Q^2}{R}$$

b) $$\frac{W}{2} = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0 R}$$

De donde : $r = 2R$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál será la carga de un conductor esférico de 60 cm de radio conectado a un potencial de 500V?

Rpta.: 100 u.e.q. ó $\frac{1}{3} \cdot 10^{-7}$C

2. Se conectan a potenciales de 4 000 y 1 000 voltios, dos conductores de 10μ F y 20μ F respectivamente. Cuando ya están cargados se conectan entre sí. Calcular:

a) El potencial de cada uno al final.
b) La carga de cada uno.

Rpta.: a) 2 000 V

Rpta.: b) $20 \cdot 10^{-3}$ C y $40 \cdot 10^{-3}$ C

3. Tres condensadores de 3μ F, 6μ F y 9μ F están en serie. ¿Cuál es la carga de cada uno cuando se conectan a 1 000 voltios?.

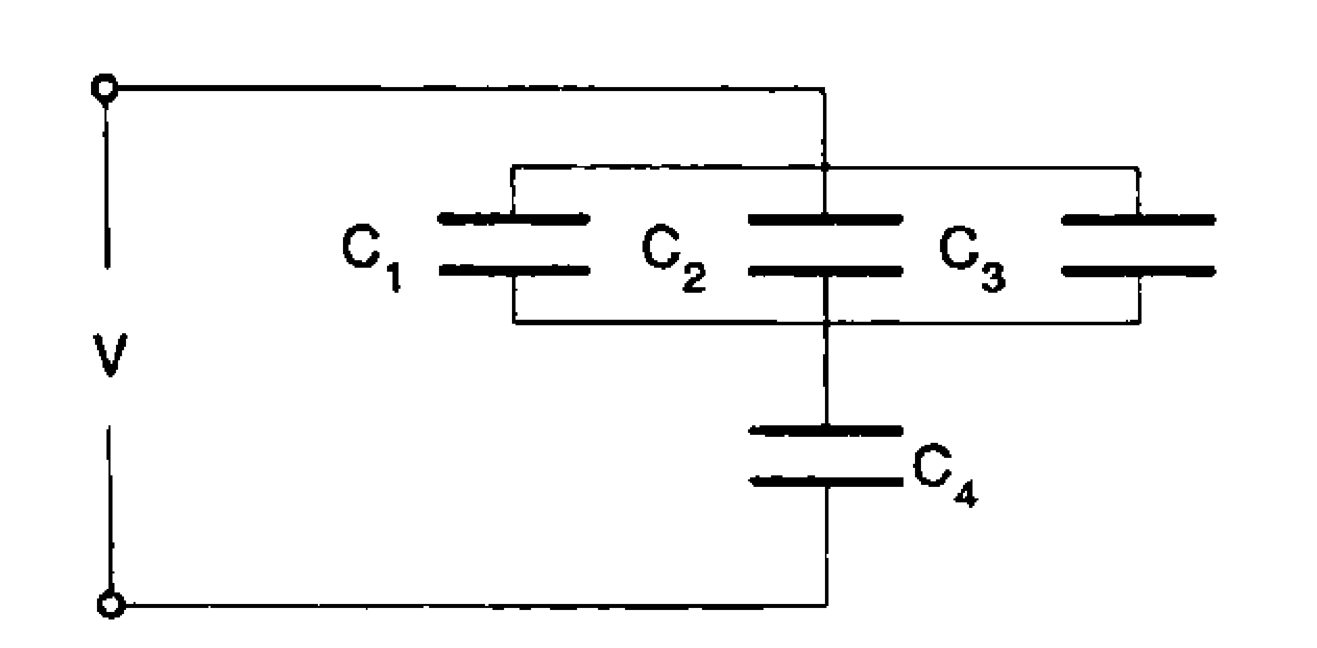
Rpta.: $1{,}64 \cdot 10^{-3}$ C

4. Tres condensadores de 6μ F, 12μ F y 18 μ F están en paralelo:

a) ¿Cuál será la carga en cada condensador?
b) ¿Cuál será la carga del condensador resultante cuando se conecta a un potencial de 2 000V?

Rpta.: a) $12 \cdot 10^{-3}$ C
$24 \cdot 10^{-3}$ C
$36 \cdot 10^{-3}$ C
b) $72 \cdot 10^{-3}$ C

5. Las capacidades de los condensadores de la figura son 6μ F, 8μ F, 10μ F y 12 μ F. El sistema está conectado a una carga de 120 V. Calcular la carga y la diferencia de potencial para cada uno.

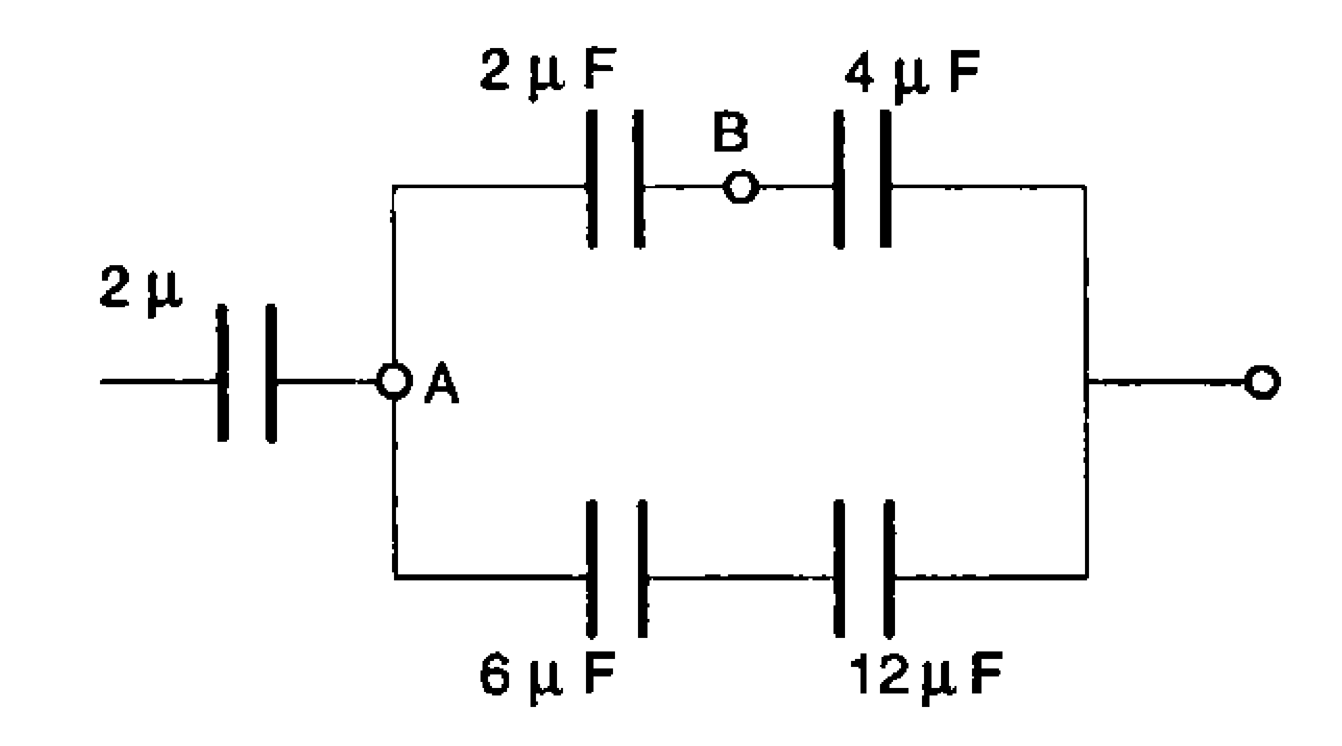


Rpta.: 1) 240 μ C ; 40 V
2) 320 μ C ; 40 V
3) 400 μ C ; 40 V
4) 960 μ C ; 80 V

6. Se carga un condensador plano de 4 π cm² y separados en 2 cm a 2 000V en el vacío. ¿Cuál será su nuevo potencial si se le introduce, una vez cargado, un dieléctrico de vidrio ε = 5,5?

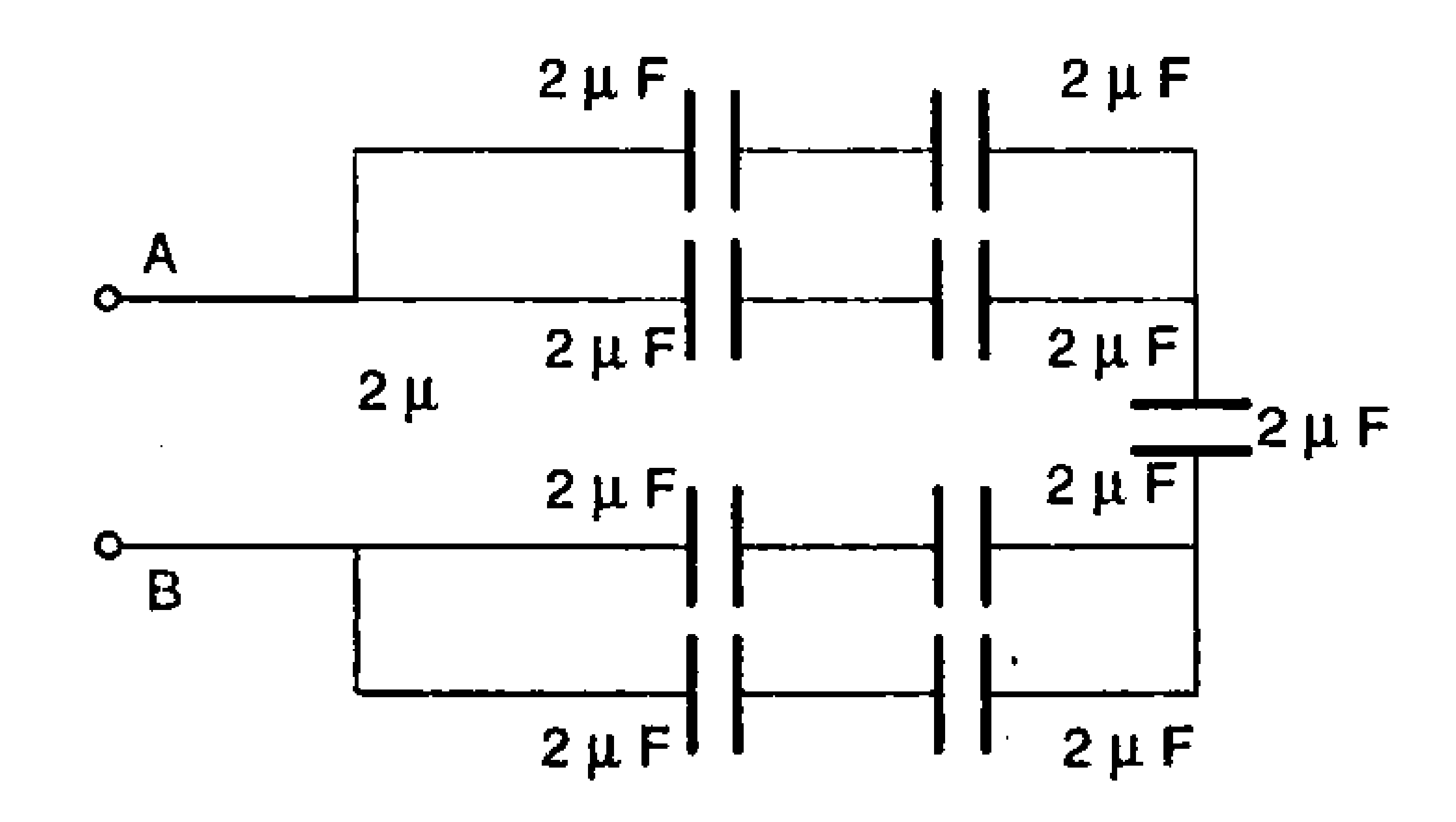
Rpta.: 363,6 V

7. ¿Cuál es la diferencia de potencial entre A y B de la figura, cuando se conecta el conjunto a 1 000V?



Rpta.: 181,6 V

8. En el siguiente sistema, determinar la capacidad equivalente entre A y B.



http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $C_\varepsilon = \frac{2}{3}\,\mu F$

9. ¿Qué carga máxima admite una esfera de 30 cm de radio, supuesta en el vacío? ¿Qué potencial le corresponde y cuál es su capacidad?

Rpta.: $Q_{max} = 30\,\mu C$

$V = 9 \,.\, 10^4\ V$

$C = 0,33 \,.\, 10^{-10}\ F$

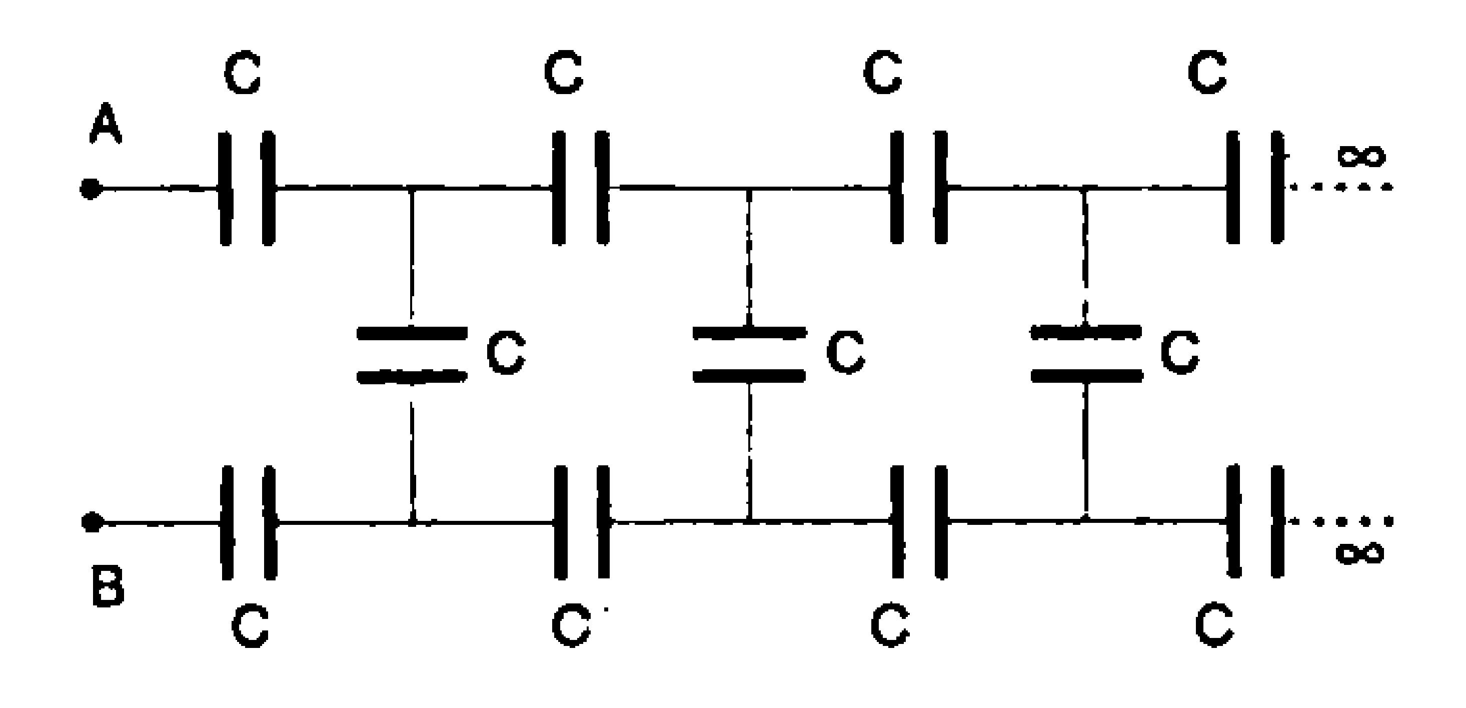
10. Se define 1 stat.voltio como el potencial que produce en la superficie de una esfe ra de 1 cm de radio, la carga 1 u.e.q. Demostrar que:

$$1\ stV = 300\,V$$

11. Ocho gotas de agua de 1 mm de radio con 10^{-10} C cada una se funden en una gota. Hallar el potencial de la gota grande.

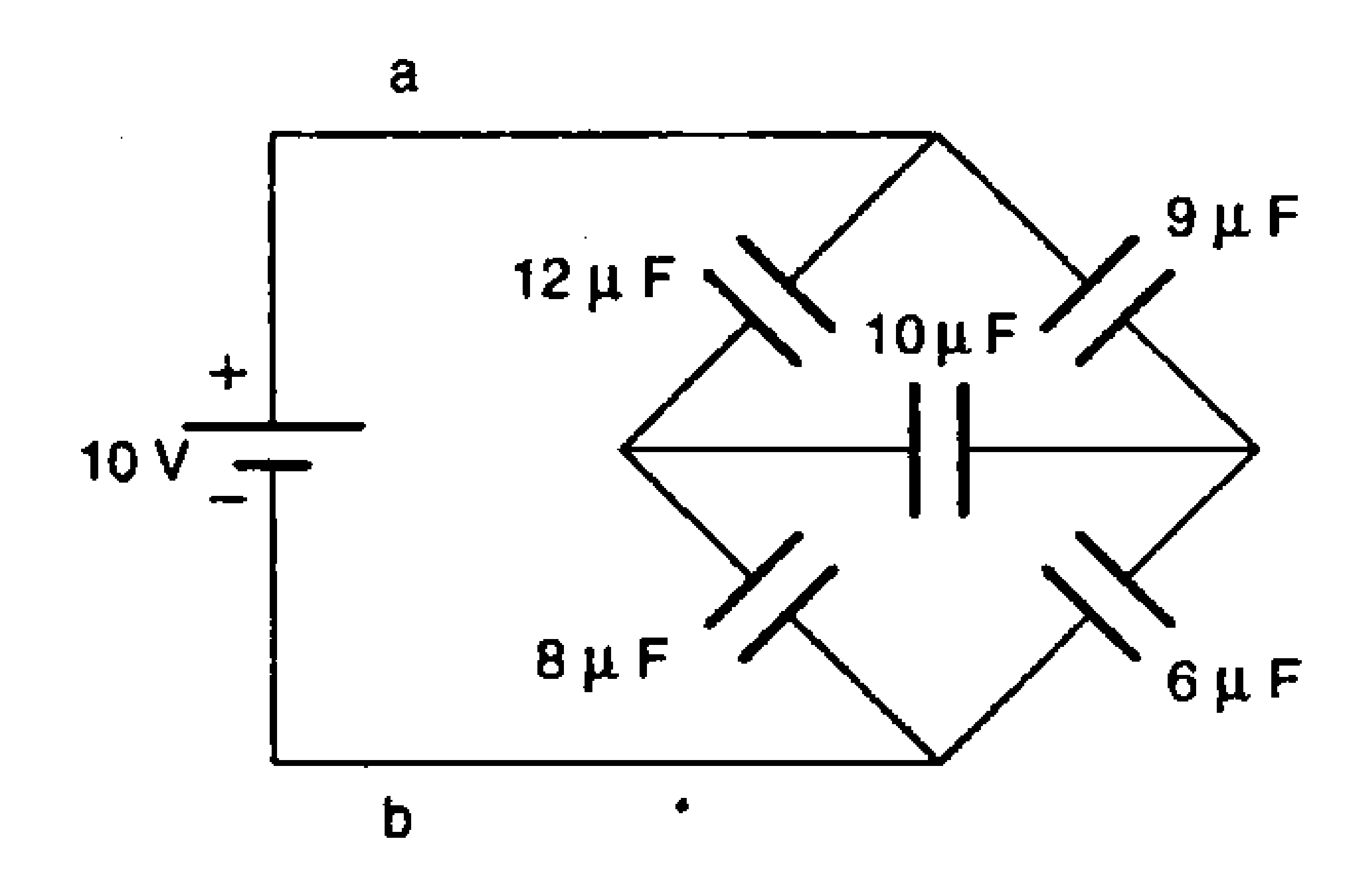
Rpta.: $V = 3\,600\,V$

12. Calcular la capacidad equivalente en el siguiente gráfico si $C = 1\,\mu F$.



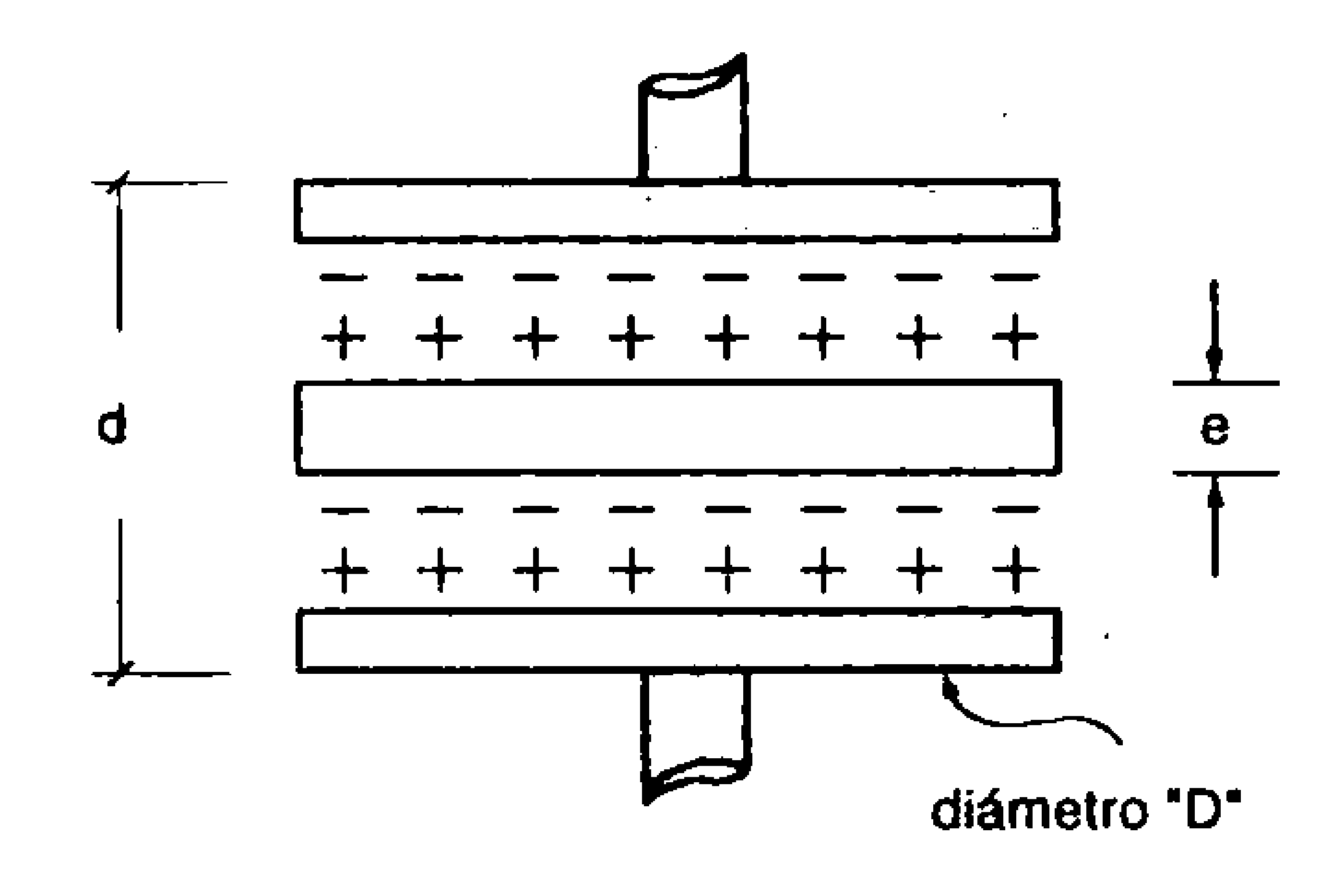
Rpta.: $C_\varepsilon = 1,27\,\mu F$

13. Calcular la carga total almacenada en el siguiente circuito:



Rpta.: $q_{TOTAL} = 84\,\mu F$

14. Dentro de un condensador de armaduras paralelas, de sección circular de diámetro "D" se coloca una placa metálica de espesor "e". ¿Cuál será la capacidad al introducir la placa?



Rpta.: $C = \frac{\pi\,\varepsilon_0\,D^2}{4\,e\,(d-e)}\left[K\,d-(K-1)\,e\right]$

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 16

ELECTRODINÁMICA

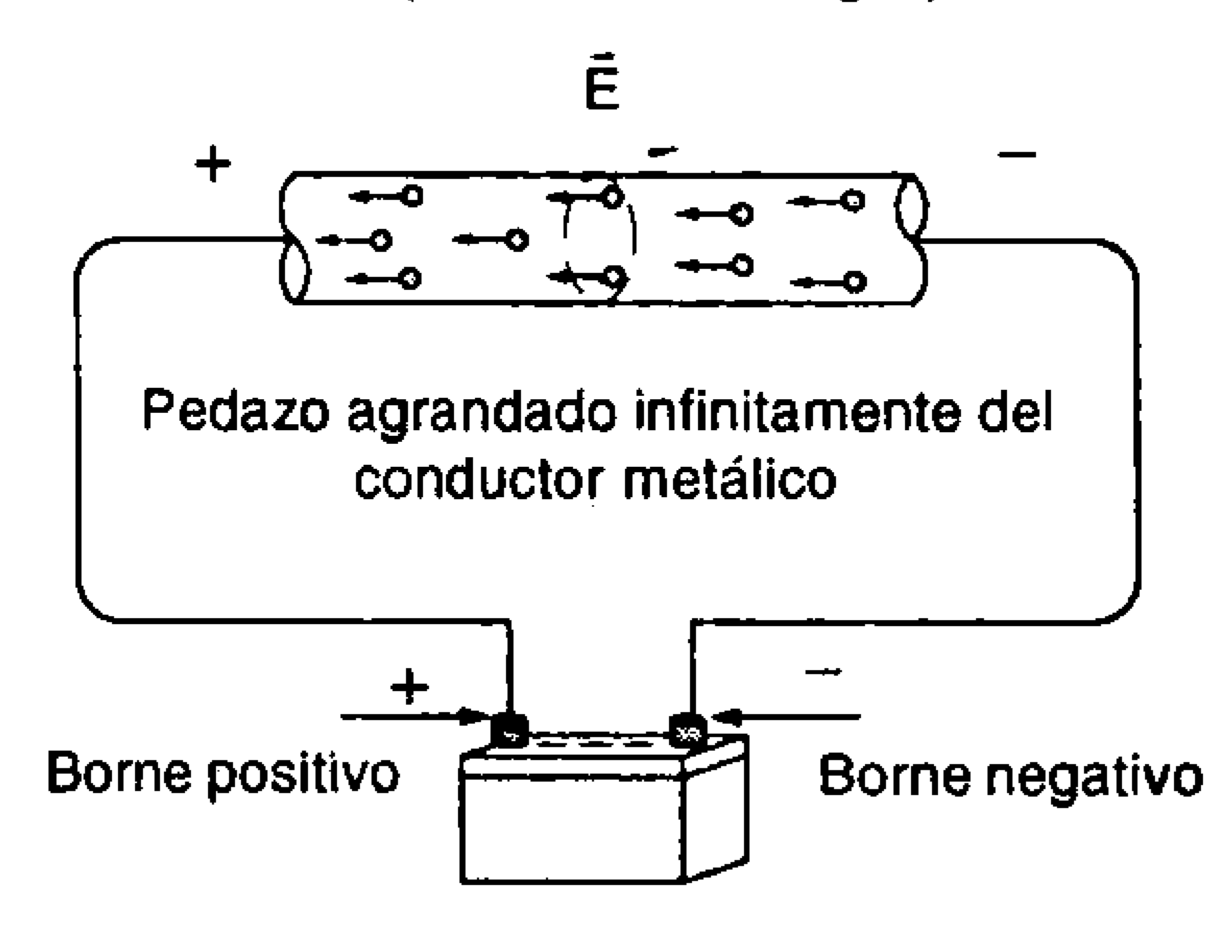
Es una parte de la electricidad donde se estudia el movimiento de las cargas y sus efectos en los circuitos.

¿Por qué se caracterizan los conductores metálicos?
Se caracterizan por permitir el desplazamiento de las cargas eléctricas.

¿Qué son cargas eléctricas?
Se sabe que los átomos de los metales presentan electrones libres, los cuales se mueven caóticamente debido a la agitación térmica y están muy débilmente ligados al núcleo atómico. Estos electrones libres son la "carga eléctrica", los cuales al ser "orientados y empujados" por un generador dan lugar a la "corriente eléctrica", a través de conductores.

SENTIDO DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Analicemos el caso de un alambre metálico conectado en sus extremos a los bornes de una batería (fuente de energía).



¿Qué ocurre al conectar los extremos del conductor a los terminales de la batería?

Debido a las reacciones químicas que se producen en el interior de la batería (fuente de energía eléctrica por reacción química), esta es capaz de mantener una **Diferencia de Potencial** entre sus bornes o terminales. La diferencia de potencial origina un campo eléctrico uniforme dentro y a lo largo del alambre, el cual se manifiesta con una fuerza eléctrica sobre los electrones libres del conductor metálico que ocasiona el desplazamiento inmediato de los electrones en una misma dirección.
¿En qué dirección se mueven los electrones libres?

Dado que los electrones tienen carga negativa, se mueven de las zonas de menor potencial hacia las zonas de mayor potencial, es decir de polo negativo al polo positivo, siguiendo una dirección contraria al campo eléctrico $\vec{E}$.

CORRIENTE ELÉCTRICA

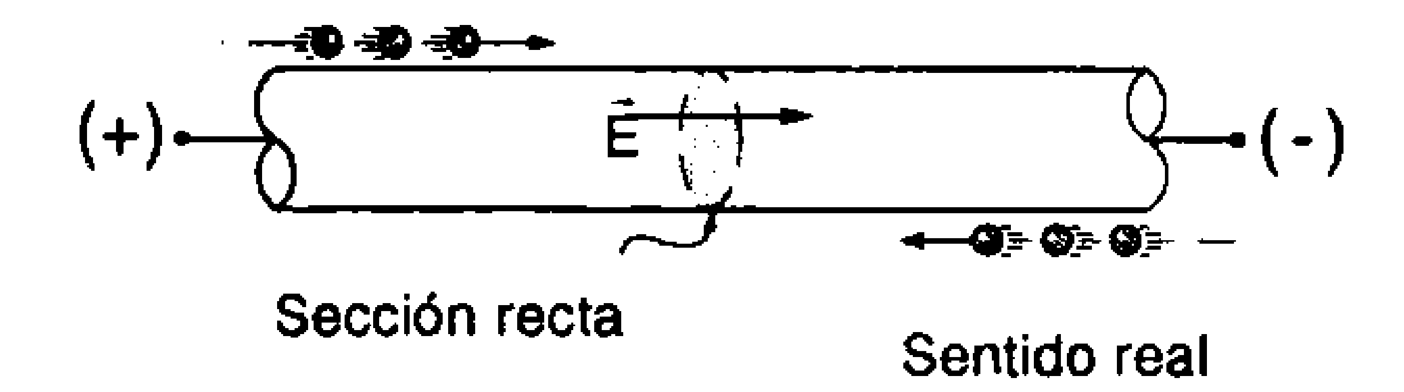
¿A qué se denomina corriente eléctrica?

Se denomina corriente eléctrica al flujo ordenado de los portadores de carga eléctrica (electrones) a lo largo de un medio llamado conductor, que está sometido a una diferencia de potencial.

Convencionalmente se considera la circulación de la corriente eléctrica del polo positivo al polo negativo, sin embargo como hemos visto, lo real es que la circulación de la corriente de electrones es del polo negativo al polo positivo como se ve en el gráfico.

http://librosysolucionarios.net

Sentido convencional



¿Qué "sentido" se asume para la corriente eléctrica?

En forma convencional se asume la dirección del campo, es decir que los portadores de carga (electrones) se dirigen de las zonas de mayor potencial hacia las zonas de menor potencial, o sea del polo positivo al polo negativo.

¿Cómo medir la corriente eléctrica?

Para ello veamos lo siguiente

INTENSIDAD DE CORRIENTE ELÉCTRICA "EL AMPERE"

Es una magnitud física escalar que mide la "cantidad de carga eléctrica" que pasa por la sección recta de un conductor en la unidad de tiempo (Lluvia de electrones que fluyen por el conductor).

Conductor
q
Área de sección recta
$\bar{E}$
$V_A(+)$ $V_B(-)$
A B

Por convención, la corriente eléctrica en los conductores se da de las zonas de mayor potencial a las zonasde menor potencial y su valor se cuantifica así:

$$\text{ampere} = \frac{\text{coulomb}}{\text{segundo}}$$

$$I = \frac{Q}{t}$$

q : Cantidad de carga que atraviesa por la sección recta del conductor, medida en coulomb "C".

$$1\ C <> 6{,}25 \cdot 10^{18}\ e$$

t : Tiempo que dura el flujo de la carga, medido en segundo "s"

I : Intensidad $I = \frac{Q}{t}$ de corriente eléctrica, medida en amperios "A"0

DIFERENCIA DE POTENCIAL "EL VOLTIO"

Para que haya circulación de electrones debe haber una **diferencia de carga de electrones o una diferencia en la cantidad de electrones en los extremos de un conductor**, esto es lo que origina una diferencia de fuerza eléctrica o una diferencia de potencial que provoca el flujo de electrones.

La unidad de diferencia de potenciales es el VOLTIO. Se define así:

VOLTIO: "La unidad de diferencia de potencial "E" es el voltio, y está dada por el trabajo "W" desplegado por un joule para trasladar la carga "Q" de un coulomb".

$$E = \frac{W}{Q}$$

E : Diferencia de potencial, en voltios "V"
W : energía desplazada, en joules "J"
Q : carga eléctrica desplazada, en coulombios "C"

$$1 \text{ voltio} = \frac{1 \text{ joulio}}{1 \text{ colulombio}}$$

$$V = \frac{J}{C}$$

RESISTENCIA ELÉCTRICA "EL OHMIO"

Resistencia eléctrica :

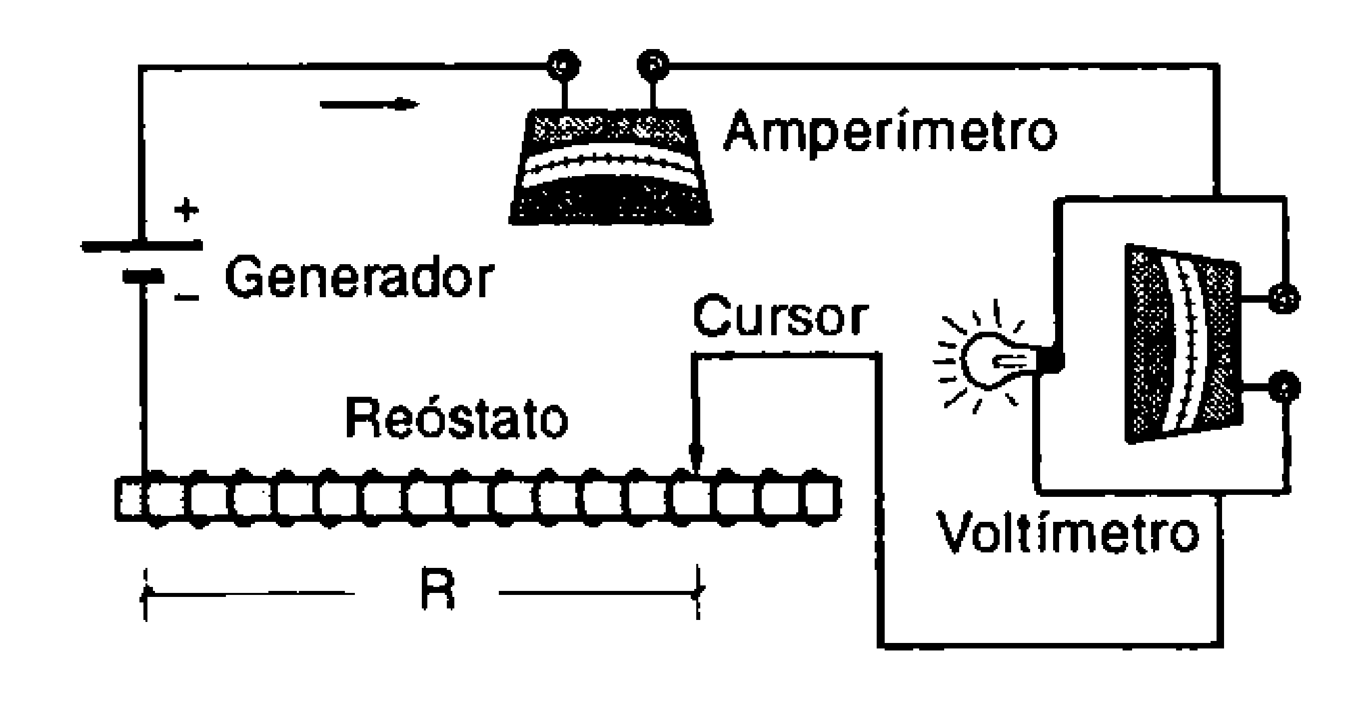
Es una característica que tienen los materiales de ofrecer dificultad al fluido de la corriente eléctrica a través de ese material. Cuando pasa la corriente por la resistencia

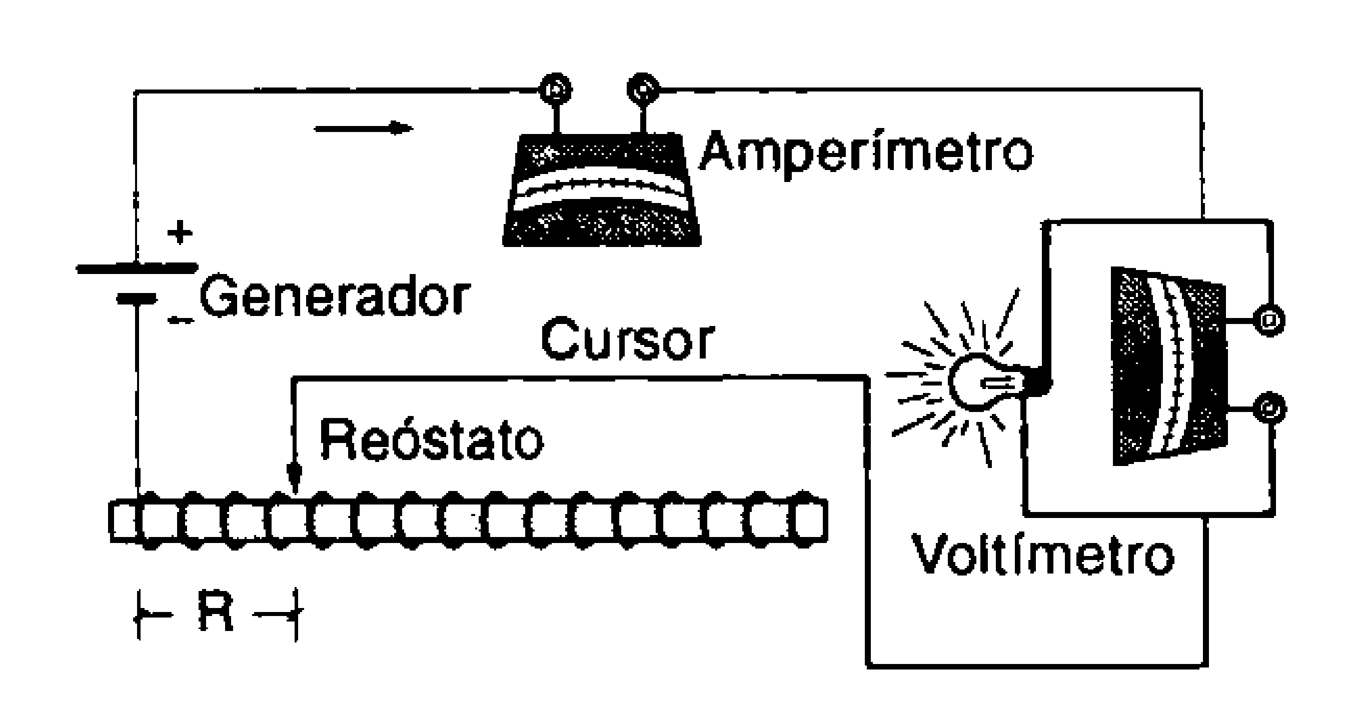
http://librosysolucionarios.net

ésta se calienta, cualquiera que sea la dirección de la corriente.

En honor al físico alemán Jorge Si-món Ohm, quien estudió la relación que existe entre la "fuerza electromotriz" o "voltaje" de una corriente y su intensidad, la unidad para medir la resistencia de un conductor eléctrico lleva su nombre: "ohm" cuyo símbolo es "Ω"

Reóstato :
Es un aparato construido con un material aislante al cual se le ha enrollado un alambre sigüiendo el curso de los hilos de un tornillo; un cursor conectado al circuito se hace deslizar sobre el reóstato y la intensidad de la corriente que pasa por la lámpara varía. **Es prácticamente una resistencia que gradúa la intensidad de la corriente.**





Las figuras anteriores muestran que, cuando se corre el cursor del reós-tato bajando la resistencia, la intensidad de corriente que llega a la lámpara y la caída de potencial de la lámpara aumentan. Lo que quiere decir que, aumentando la intensidad aumenta la caída de potencial. Haciendo varios experimentos se llega a la siguiente conclusión: "Las caídas de potencial son proporcionales a las intensidades".

$$\frac{E}{I} = \frac{E'}{I'} = \frac{E''}{I''} = \ldots\ldots R$$

ó sea: $\boxed{R = \frac{E}{I}}$

R : Resistencia del conductor, o del apa- rato eléctrico, en ohmios "W"
E : Diferencia de potencial, en voltios "V"
I : Intensidad de corriente, expresada en amperios "A".

$$\boxed{\text{ohmio} = \frac{\text{voltio}}{\text{amperio}}}$$

ó $\boxed{\Omega = \frac{V}{A}}$

NOTA :

1. Al voltaje o diferencia de potencial, también se le llama "caída de potencial".
2. El ohmio patrón es la resistencia que ofrece un alambre de mercurio (Hg) de 1,063 m de longitud, de 1 mm² de sección a 0° C, al paso de 1 amperio de corriente, cuando la diferencia de potencial es 1 voltio.

PROBLEMA 1. Un calentador está conectado a una corriente de 220 V y tiene una resistencia de 14,66 Ω. ¿Cuál es la intensidad de la corriente ?

RESOLUCIÓN: E = 220 V

I = 220 V R = 14,66 Ω

$$R = \frac{E}{I}; \quad \text{de donde:}$$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{220\ V}{14{,}66\ \Omega} = 15\ \frac{V}{\Omega}$$

Rpta.: I = 15 A

PROBLEMA 2. ¿Cuál es la resistencia de un conductor si con una corriente de 20 amperios, se produce una caída de potencial de 220 V?

RESOLUCIÓN: E = 220 V

R = ? I = 220 V

$$R = \frac{E}{I} = \frac{220\,V}{20\,A} = 11\,\frac{V}{A}$$

Rpta.: $R = 11\,\Omega$

LEY DE POUILLET O DE LA RESISTENCIA DE CONDUCTORES

Los conductores ofrecen resistencia al paso de la corriente eléctrica, según la calidad del material y según sus dimensiones. La ley que regula esta característica se enuncia así:

"La resistencia de un conductor es directamente proporcional a su longitud "L" e inversamente proporcional a su sección "A".

$$\boxed{R = \rho\,\frac{L}{A}}$$

R : Resistencia del conductor, en ohmios "Ω"
ρ : Resistividad o resistencia específica de cada material, en "ohmios x cm"
L : Longitud del conductor en "cm".
A : Área de la sección del conductor, en "cm2".

CONDUCTANCIA

Es la inversa de la resistencia:

$$\boxed{G = \frac{I}{R}}$$

G : Conductancia, en mhos o siemens "S"
R : Resistencia, en ohmios "Ω"

RESISTIVIDADES O RESISTENCIAS ESPECÍFICAS "ρ" DE ALGUNOS (en Ω x m)

CONDUCTORES	
Aluminio	$2{,}63 \times 10^{-8}$
Cinc	$6{,}00 \times 10^{-8}$
Cobre	$1{,}72 \times 10^{-8}$
Hierro	$10{,}0 \times 10^{-8}$
Níquel	$12{,}0 \times 10^{-8}$
Mercurio	$94{,}0 \times 10^{-8}$
Oro	$2{,}20 \times 10^{-8}$
Plomo	$22{,}0 \times 10^{-8}$

AISLADORES	
Ambar	5×10^{12}
Azufre	10^{13}
Baquelita	2×10^{13}
Cuarzo	7×10^{14}
Madera seca	10^{8}
Mica	10^{12}
Vidrio	10^{11}
Agua pura	5×10^{3}

PROBLEMA 1. Un conductor de alambre de cobre tiene una longitud de 10 km y una sección de 3 mm². Su resistividad es de $1{,}720 \times 10^{-8}\,\Omega$ m. Hallar suresistencia.

RESOLUCIÓN : $L = 10$ km

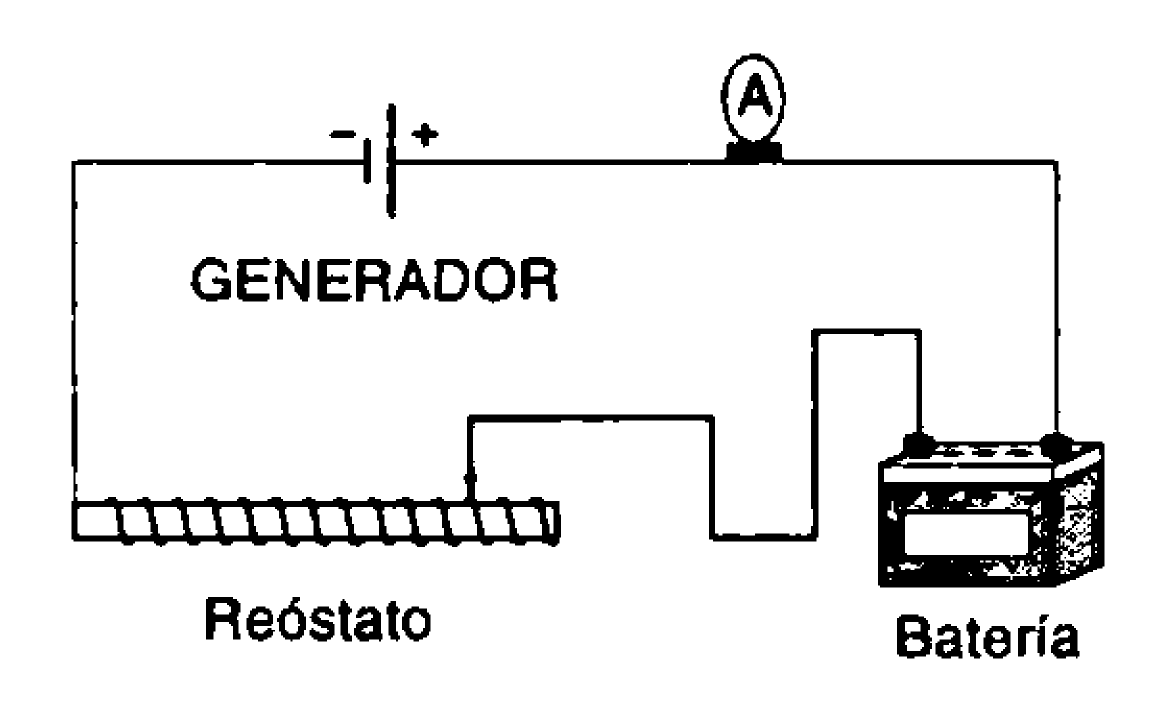
$A = 3\,mm^2$ $\rho = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\,m$

$$R = \rho\,\frac{L}{A} = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega\,m \times \frac{10 \times 10^{3}\,m}{3 \times 10^{-6}\,m^2}$$

Rpta.: $R = 57{,}33\,\Omega$

PROBLEMA 2. Para cargar una batería de 12 V se conecta a la corriente con un reóstato de 40 W. Calcular la cantidad de corriente que pasa en 15 minutos

RESOLUCIÓN :



$E = 12\,V$ $Q = ?$
$t = 15\,min = 900\,s$
$R = 40\,\Omega$

$$I = \frac{E}{R} = \frac{12\,V}{40\,\Omega} = 0{,}3\,A$$

Por otro lado:

$$Q = It = 0{,}3\,A \times 900\,s$$

Rpta.: $Q = 270\,C$

PROBLEMA 3. ¿Qué resistencia será necesaria graduar en un reóstato para cargar una batería de 6 V con 120 C en 10 min?

RESOLUCIÓN : Cálculo de la intensidad de corriente que requiere:

$$I = \frac{Q}{t} = \frac{120\,C}{600\,s} = 0{,}2\,A$$

Cálculo de la resistencia que debe graduarse en el reóstato:

$$R = \frac{E}{I} = \frac{6\,V}{0{,}2\,A} = 30\,\frac{V}{A}$$

Rpta.: $R = 30\,\Omega$

PROBLEMA 4. El enrollamiento de cobre de un motor tiene una resistencia de 50 Ω a 20° C cuando el motor está quieto. Después de operar durante varias horas la resistencia se eleva en 8 Ω. ¿Cuál es la temperatura del enrollamiento de este caso?

$$\alpha_{COBRE} = 3{,}9 \times 10^{-3}/°C$$

RESOLUCIÓN :

Sea: $R_i = \rho\,\frac{L_i}{A_i}$ (1)

y sea: $R_f = \rho\,\frac{L_f}{A_f}$ (2)

Dividiendo (2) ÷ (1) :

$\frac{(1)}{(2)}$: $\frac{R_f}{R_i} = \frac{L_f \cdot A_i}{L_i \cdot A_f}$ (3)

Puesto que el alambre es muy largo en comparación con su diámetro se puede decir que:

$$A_i = A_f$$

Luego: $\frac{R_f}{R_i} = \frac{L_f}{L_i}$ (4)

Pero por dilatación:

$$L_f = L_i(1 + \alpha.\Delta t)$$

$\frac{L_f}{L_i} = 1 + \alpha.\Delta t$ (5)

Igualando (4) y (5) :

$$\frac{R_f}{R_i} = 1 + \alpha.\Delta t$$

$$R_f = R_i + R_i.\alpha.\Delta t$$

$$R_f - R_i = R_i.\alpha.\Delta t$$

$$\boxed{\Delta R = R_i.\alpha.\Delta t}$$

(Forma general)

Reemplazando valores:

$$8\,\Omega = 50\,\Omega \times 3{,}9 \times 10^{-3}\,\Delta t/°C$$

De donde: $\Delta t = 41°\,C$

$$t_f = 20\,°C + 41\,°C$$

Rpta.: $t_f = 61\,°C$

PROBLEMA 5. Una barra cuadrada de aluminio tiene 1 m de largo y 5 mm de lado. Calcular:

a) La resistencia entre sus extremos.
b) El diámetro de una barra cilíndrica de cobre de 1 m de largo, para que tenga la misma resistencia que la de aluminio.

$$\rho_{Al} = 2{,}63 \times 10^{-8}\,\Omega \times m$$

$$\rho_{Cu} = 1{,}72 \times 10^{-8}\,\Omega \times m$$

RESOLUCIÓN :

a) Cálculo de la resistencia del aluminio:

$$R_{Al} = \rho_{Al}\,\frac{L}{A}$$

$$R_{Al} = 2{,}63 \times 10^{-8}\,\Omega \times m \times \frac{1\,m}{25 \times 10^{-6}\,m^2}$$

$$R_{Al} = 1{,}052 \times 10^{-3}\,\Omega$$

b) $R_{Al} = \rho_{Al}\,\frac{L}{A_{Al}}$ (1)

y: $R_{Cu} = \rho_{Cu}\,\frac{L}{A_{Cu}}$ (2)

Según el problema: $R_{Al} = R_{Cu}$

luego: $\rho_{Al}\dfrac{L}{A_{Al}} = \rho_{Cu}\dfrac{L}{A_{Cu}}$

de donde: $A_{Cu} = A_{Al}\dfrac{\rho_{Cu}}{\rho_{Al}}$

Sustituyendo valores:

$$\pi r^2 = 25\,mm^2\,\frac{1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \times m}{2{,}63 \times 10^{-8}\ \Omega \times m}$$

De donde: $r = 2{,}28$ mm Luego:

Rpta.: $D = 4{,}56\ mm = 4{,}56 \times 10^{-3}\,m$

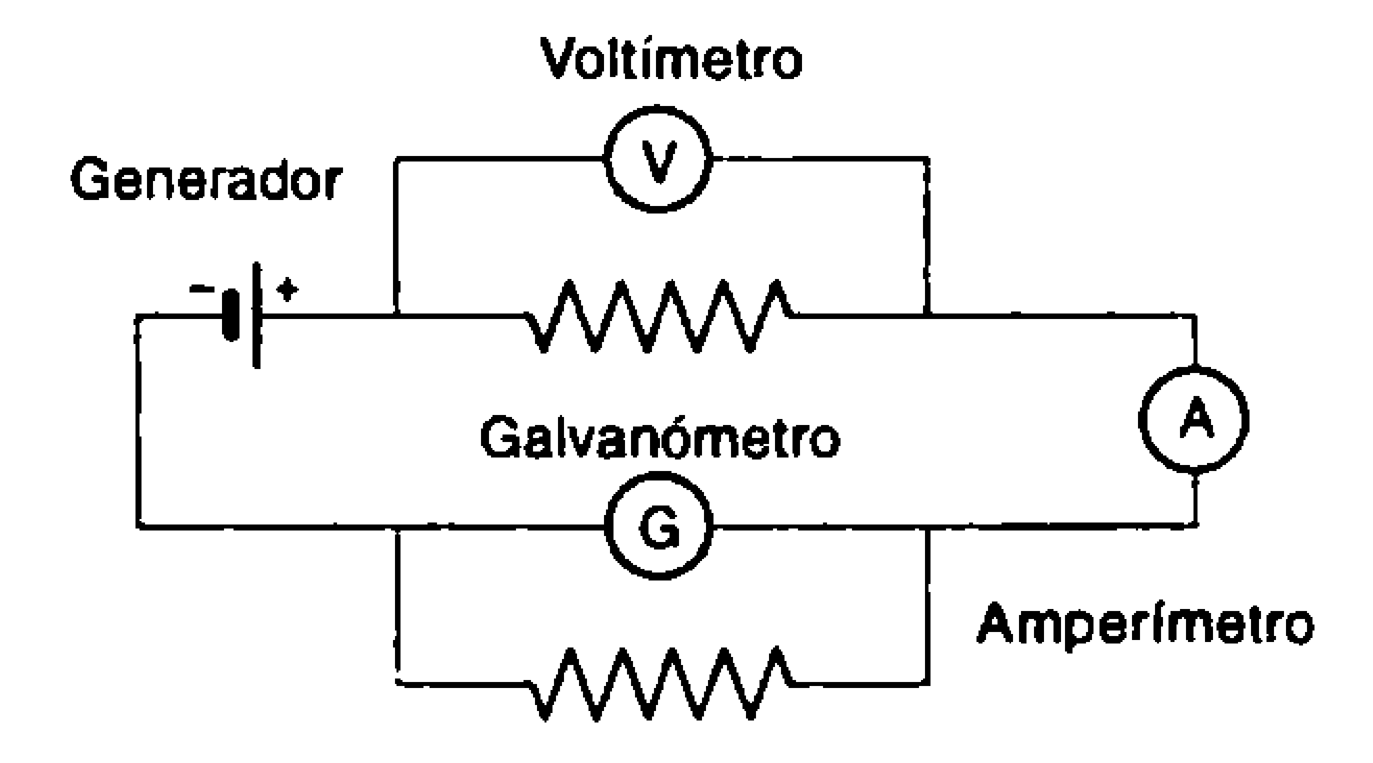
APARATOS DE MEDIDA DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Voltímetro :

Mide la diferencia de potencial (diferencia de cantidad de electrones) entre dos puntos, poniendo en paralelo entre ambos puntos. Se considera que el voltímetro tiene resistencia infinita, salvo que se diga lo contrario.

Amperímetro :

Mide la intensidad de la corriente (Lluvia de electrones) instalándolo en serie. Su resistencia se considera cero salvo que se diga lo contrario.



Galvanómetro :

Mide las intensidades muy bajas, se instala "shuntado", es decir en serie en el circuito, pero con una resistencia en paralelo entre sus bornes, de manera que por él pase sólo una parte de la corriente.

PROBLEMA 1. ¿Cuál será la intensidad de la corriente de 200 coulomb, que pasa por un conductor, en 15 minutos?

RESOLUCIÓN: $Q = 200\ C$

$I = ?$ $t = 15$ min

Sabemos que: $I = \dfrac{Q}{t}$

$$I = \frac{200\ C}{15 \times 60\ s}$$

Rpta.: $I = 0{,}22$ **A**

PROBLEMA 2. ¿Cuál será la carga eléctrica transportatada en 1,5 horas cuando la intensidad es de 20 amperios?

RESOLUCIÓN: $t = 1{,}5\ h$

$Q = ?$ $I = 20\ A$

Se sabe: $I = \dfrac{Q}{t}$ de donde $Q = I\,.\,t$

$$\therefore\ Q = 200\ A \times 1{,}5 \times 3\,600\ s$$

$$Q = 108 \times 10^4\ A \times s$$

$$Q = 108 \times 10^4\ C$$

PROBLEMA 3. A través de un conductor pasa $10^{16}\ e^-$ en 2 s. ¿Cuál es la intensidad?

RESOLUCIÓN: $Q = 10^{16}\ e^-$

$I = ?$ $t = 2\ s$

Se sabe que: $I = \dfrac{Q}{t}$

$$\therefore\ I = \frac{10^{16}\ e^-}{2\ s}$$

$$1 = 5 \times 10^{15}\ \frac{e^-}{s}$$

Esta unidad es muy incómoda para expresar la intensidad. Sin embargo clarifica la idea de lo que es la intensidad. El problema siguiente llevará a conclusiones sorprendentes.

PROBLEMA 4. ¿Qué tiempo tardarán todos lo electrones del pro blema anterior en recorrer 1 cm de un conductor de cobre de 0,05 cm de diámetros?. En 1 cm^3 de cobre hay aproximadamente 8,5 $\times 10^{22}\ e^-$ libres.

RESOLUCIÓN: $h = 1\ cm$

$Q = 8{,}5 \times 10^{22}\ e^-/cm^3$ $d = 0{,}05\ cm$

Cálculo del volumen del alambre de cobre de 1 cm de longitud y 0,05 cm de diámetro:

$$V = B \times h = \pi \frac{d^2}{4} h$$

$$V = 3{,}14 \frac{(0{,}05 \text{ cm})^2}{4} \times 1 \text{ cm}$$

$$V = 0{,}001\,96 \text{ cm}^3$$

$$V = 196 \times 10^{-5} \text{ cm}^3$$

Cálculo del número de electrones libres que hay en este volumen:

$$\# = 196 \times 10^{-5} \times 8{,}5 \times 10^{22}\ e^-/\text{cm}^3$$

$$\# = 1\,666 \times 10^{17}\ e^-$$

La intensidad de corriente del problema anterior dice que la velocidad del flujo de los electrones es de $5 \times 10^{15}\ e^-$ por segundo a través de una sección recta; con esta velocidad se calculará cuánto tiempo tardarán los $10^{17}\ e^-$ para recorrer 1 cm, que es la longitud del alambre en el cual están estos electrones.

$5 \times 10^{15}\ e^-$	pasan en	1 s
$1\,666 \times 10^{17}\ e^-$	pasarán en	t

$$t = 333{,}2 \times 10^2 \text{ s}$$

$$t = 9 \text{ h } 15 \text{ min } 20 \text{ s}$$

Lo que quiere decir que van a una velocidad de 1 cm por $333{,}2 \times 10^2$ s

$$v = \frac{1 \text{ cm}}{333{,}2 \times 10^2 \text{ s}}$$

$$v = \frac{1 \text{ cm}}{333{,}2 \times 10^2 \times \frac{\text{h}}{3\,600}}$$

$$v = 0{,}108 \frac{\text{cm}}{\text{h}}$$

Este resultado es sorprendente y debe ser estudiado con mucho cuidado por el estudiante, se dice que la energía eléctrica tiene aproximadamente la velocidad de la luz, es decir 300 000 km/s; pero el resultado obtenido en este problema, nos da una diferencia astronó-mica. Lo que ocurre es que una cosa es **velocidad de la energía eléctrica** y otra cosa es velocidad del flujo de los electrones que originan esa energía eléctrica.

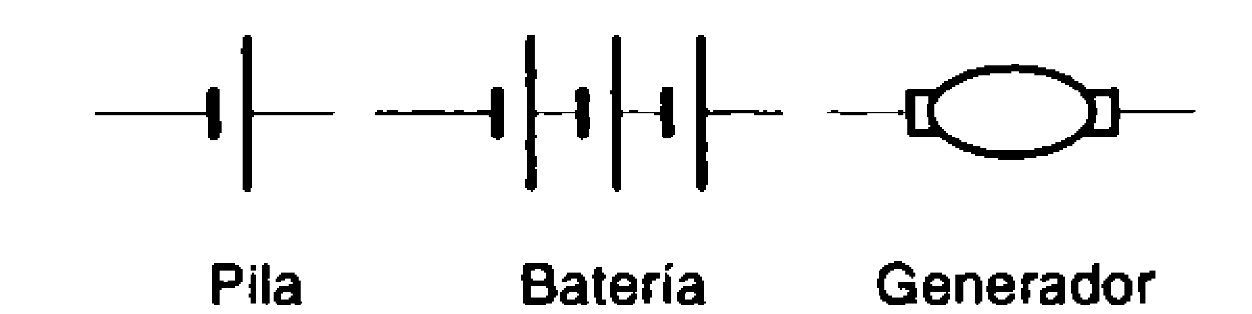
GENERADOR DE FUERZA ELECTRO MOTRIZ O FUENTE DE ENERGÍA

Son aparatos que convierten la energía eléctrica en otro tipo de energía. Así por ejemplo: un dínamo transforma la energía mecánica en energía eléctrica; pero si se hace circular corriente eléctrica en sentido contrario, ese dínamo funciona como motor eléctrico y produce energía mecánica, es decir, la energía eléctrica y la energía mecánica son reversibles. Lo mismo ocurre con los acumuladores o baterías, en el período de descarga la energía química se transforma en energía eléctrica. Lo que quiere decir, que la energía química y la energía eléctrica también son reversibles.

REPRESENTACIÓN DE UNA RESISTENCIA



Las pilas, baterías y motores ofrecen resistencias internas



FUERZA ELECTRO MOTRIZ

Los generadores de corriente eléctrica se caracterizan por su fuerza electromotríz (F.E.M.) y es la energía que suministra a la unidad de carga eléctrica para hacerla circular de un punto de menor potencial a un punto de mayor potencial.

La F.E.M. se mide por la diferencia de potencial entre los bornes de un generador. Convencionalmente si la unidad de carga atraviesa la fuente de -a +, cada unidad de carga

http://librosysolucionarios.net

ganará una cantidad de energía igual a la F.E.M. En caso contrario, perderá una cantidad de energía igual a la F.E.M.

NOTA: La "fuerza electromotríz" y la "diferencia de potencial" se miden en voltios.

PROBLEMA 1. ¿Cuál es el voltaje de una corriente que produce un trabajo de 8×10^6 joules con una intensidad de 20 amperios durante 30 minutos?

RESOLUCIÓN:

$W = 8 \times 10^6\ J$

$t = 30\ min \qquad I = 20\ A$

$E = \dfrac{W}{Q} \qquad$ Pero: $\quad Q = I\,.\,t$

Luego: $\quad E = \dfrac{W}{I.t}$

$$\therefore \quad E = \frac{8 \times 10^6\ J}{20\ A \times 30 \times 60\ s}$$

$$E = \frac{8 \times 10^6\ J}{36 \times 10^3\ A \times s}$$

$$E = 0{,}222 \times 10^3\ \frac{J}{C}$$

Rpta.: $E = 222\ V$

PROBLEMA 2. Un motor eléctrico está conectado a una corriente de 220 V y 10 amperios. Calcular el trabajo que realiza en 3 horas.

RESOLUCIÓN:

$E = 220\ V; \quad t = 3\ h; \quad I = 10\ A$

$$E = \frac{W}{Q} \quad \therefore \quad W = E.Q$$

Pero: $Q = I\,.\,t$, luego: $W = E\,.\,I\,.\,t$

$$W = 220\ V \times 10\ A \times 3 \times 3\,600\ s$$

$$W = 2\,376 \times 10^4\ V \times A \times s$$

$$W = 2\,376 \times 10^4\ V \times C$$

Rpta.: $W = 2\,376 \times 10^4\ J$

PROBLEMA 3. ¿Qué potencia tiene una plancha eléctrica que trabaja con 2 A a 220 V y cuánto costaría usar la plancha durante 3 horas si el k watt . hora cuesta S/.8,50?

RESOLUCIÓN:

$I = 2A \qquad P = ?$

$V = 220\ V \qquad costo = ?$

$t = 3\ h$

Precio = S/. 8,50 kW/h

a) Sabiendo que: $\quad P = \dfrac{W}{t} \qquad (I)$

Pero: $\quad W = E.Q \Rightarrow W = E.I.t$

En (I) $\quad P = \dfrac{E.I.t}{t} \Rightarrow P = E.I$

$$P = 220\ V \times 2\ A = 440\ V\ A$$

Rpta.: $P = 0{,}440\ kW$

b) Cálculo del costo:

$W = P\,.\,t = 0{,}440\ kW \times 3\ h$

$W = 1{,}32\ kW\,.\,h$

$$costo = 1{,}32\ kW\,.\,h \times 8{,}50\ \frac{S/.}{kW\,.\,h}$$

Rpta.: costo = S/. 11,22

CAÍDA DE TENSIÓN

En todo circuito con resistencias por las que circula la corriente, se produce una caída de tensión que viene a ser una disminución de la F.E.M. Esta caída de tensión puede ser externa o interna.

a) **Caída de tensión Externa :**
Es originada por la resistencia que ofrecen los aparatos instalados en un circuito, es decir la caída de tensión entre uno y otro borne del gegenerador. No incluye la resistencia interna de la fuente que produce la energía eléctrica.

$$\boxed{E_e' = I.R_e}$$

b) **Caída de tensión interna :**
Está dada por la resistencia interna que ofrece la fuente que produce la energía eléctrica.

$$\boxed{E_i = I.r_i}$$

http://librosysolucionarios.net

c) **Caída de tensión total :**
Incluye la resistencia o caída de tensión externa e interna.

$$E_T = E_e + E_i$$

PROBLEMA 1. Sea un circuito con tres resistencias de 2, 4 y 6 ohmios. Calcular la resistencia del conjunto:

a) Cuando están en serie.
b) Cuando están en paralelo.

RESOLUCIÓN :

$R_1 = 2\,\Omega \qquad R = ?$

$R_2 = 4\,\Omega$

$R_3 = 6\,\Omega$

a) $R = R_1 + R_2 + R_3$

$R = 2\,\Omega + 4\,\Omega + 6\,\Omega$

Rpta.: $R = 12\,\Omega$

b) $$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{2\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}$$

$$\frac{1}{R} = \frac{6+3+2}{12\,\Omega}$$

Rpta.: $R = \frac{12}{11}\,\Omega$

PROBLEMA 2. En la figura adjunta calcular la caída de potencial interna, externa y total.

$R_1 = 2\,\Omega \qquad R_2 = 4\,\Omega$

$I = 1{,}5$ A $\qquad r_1 = 1\,\Omega$

E

RESOLUCIÓN :

a) Caída de potencial interna:

$E_i = I.r_i = 1{,}5\text{ A} \times 1\,\Omega$

$E_i = 1{,}5\text{ V}$

b) Caída de potencial externa:

$E_e = E_1 + E_2 = I.R_1 + I.R_2$

$E_e = 1{,}5\text{ A} \times 2\,\Omega + 1{,}5\text{ A} \times 4\,\Omega$

$E_e = 3\text{ A}\Omega + 6\text{ A}\Omega$

$E_e = 9\text{ V}$

c) Caída de potencial total:

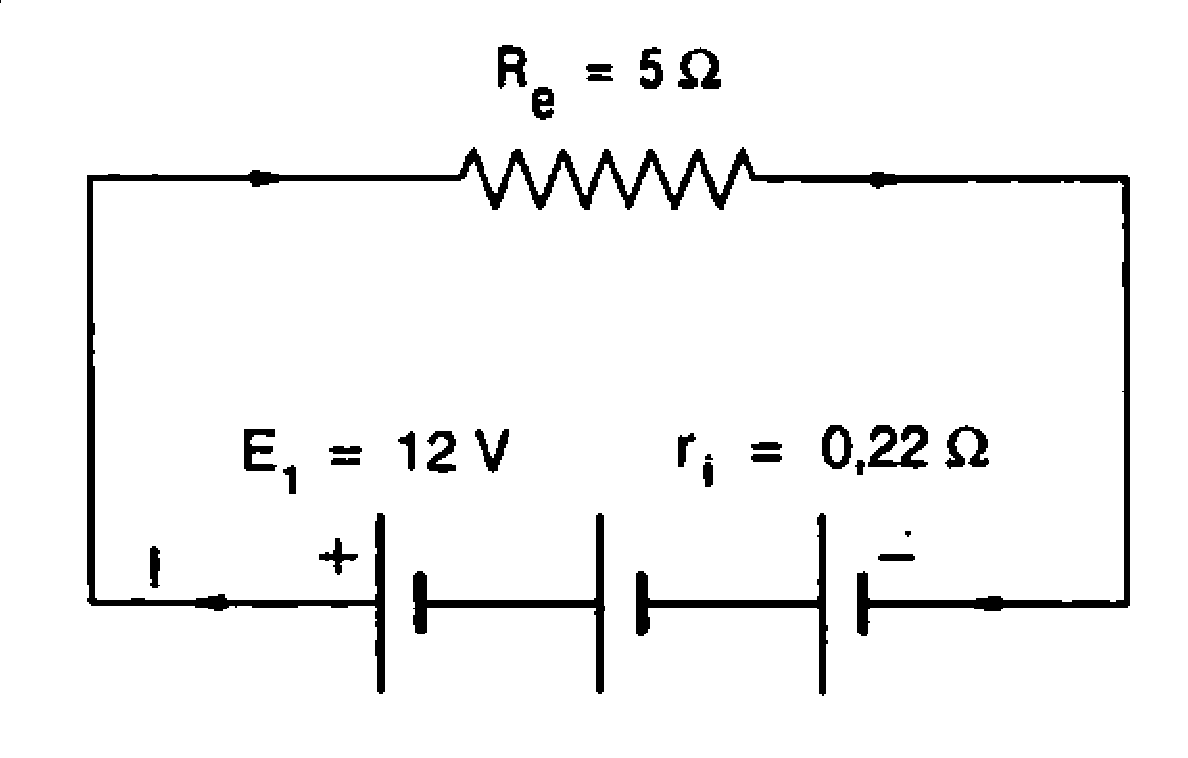
$E_T = E_i + E_e = 1{,}5\text{ V} + 9\text{ V}$

$E_T = 10{,}5\text{ V}$

PROBLEMA 3. Una batería de acumuladores tiene una F.E.M. de 12 voltios y su resistencia interna es de 0,22 Ω, sus bornes se conectan mediante un conductor que tiene una resistencia de 5 Ω. Calcular:

a) La intensidad de la corriente que circula.
b) La diferencia de potencial entre los bornes A y B del generador cuando el circuito está cerrado. Intensidad de cada acumulador 1,5 A.
c) La diferencia de potencial entre los bornes cuando el circuito está abierto.

RESOLUCIÓN :



$E = 12\text{ V} \qquad r_i = 0{,}22\,\Omega \qquad R_e = 5\,\Omega$

a) Cálculo de la intensidad:

$$I = \frac{E_T}{R_T} = \frac{E_T}{r_i + R_e}$$

$$I = \frac{12\text{ V}}{0{,}22\,\Omega + 5\,\Omega} = \frac{12\text{ V}}{5{,}22\,\Omega}$$

Rpta.: $I = 2{,}3$ A

b) Se trata de calcular la caída de potencial cuando hay circulación de corriente, luego:

$$E_T = E_e + E_i$$

de donde: $E_e = E_T - E_i$

Pero: $E_i = I.r_i$

$\therefore$ $E_e = E_T - I.r_i$

Sustituyendo datos:

$$E_e = 12\text{ V} - 1{,}5\text{ A} \times 0{,}22\,\Omega$$

Rpta.: $E_e = 11{,}67$ V

c) Cuando el circuito está abierto la resistencia del generador no actúa, es decir:

$$E_i = 0 \text{ , luego: } E_e = E_t$$

Rpta.: $E_e = 12$ V

CIRCUITO ELÉCTRICO

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

Circuito Eléctrico :
Es un sistema a través del cual circula la corriente eléctrica, consta de los siguientes elementos:
a) Resistencias.
b) Generador de F.E.M. o fuente de energía eléctrica.

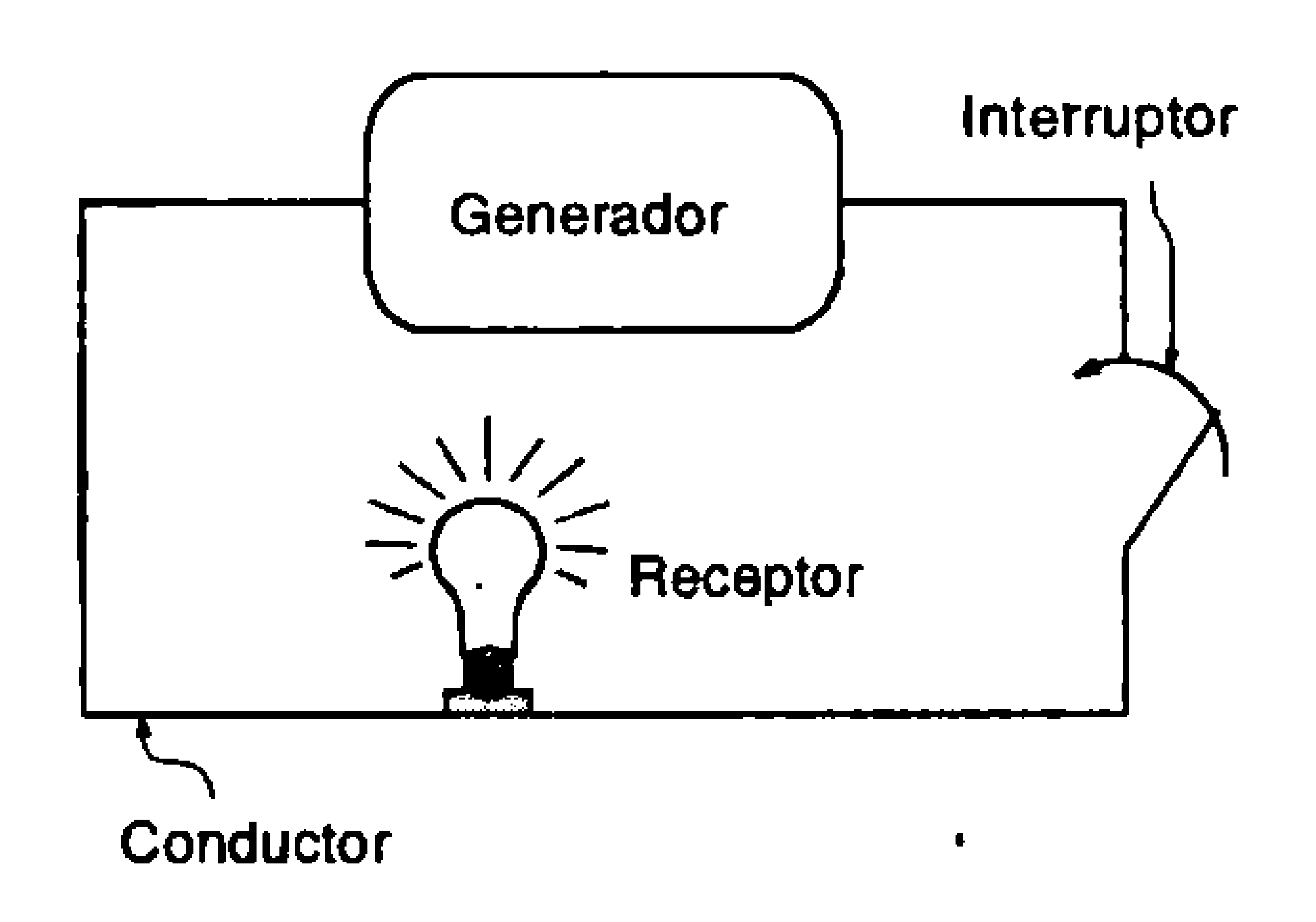
Resistencia :
Es parte de un circuito eléctrico que ofrece dificultad al paso de la corriente eléctrica y como consecuencia se calienta. Cualquiera que sea la dirección de la corriente eléctrica, la resistencia se calienta, parte de la energía eléctrica se transforma en energía calorífica y no es reversible

PARTES DE QUE CONSTA UN CIRCUITO ELÉCTRICO

a) Generador :
Desempeña una función similar al de una bomba de agua, el Generador no produce electrones, como tampoco la bomba de agua produce agua, sino que lo hace circular. Circulan los electrones libres que están a lo largo del conductor.

b) Receptor :
Recibe el flujo de electrones o corriente eléctrica y este flujo realiza un trabajo que se manifiesta bajo la forma de luz, calor, movimientos, etc.

c) Conductores :
Son los medios a lo largo de los cuales fluyen los electrones que el generador hace circular.



PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la resistencia eléctrica cuando a través de un conductor circula 60 miliamperios con una diferencia de potencial de 30V.

Rpta.: 500 Ω

2. Calcular la resistencia de un conductor de cobre cuya longitud es de 2 m y sección 1,55 mm².

$$\rho_{Cobre} = 1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \times \text{m}$$

Rpta.: $2{,}22 \times 10^{-5}$ Ω

3. Se tiene una línea de alta tensión con alambre de cobre de 3 cm de diámetro y 500 km de longitud. Calcular la resistencia del conductor si:

$$\rho_{Cobre} = 1{,}72 \times 10^{-8}\ \Omega \times \text{m}$$

http://librosysolucionarios.net

Además, calcular el diámetro de un alambre de aluminio que lo puede sustituir manteniendo la misma resistencia.

$\rho_{Aluminio} = 2,63 \times 10^{-8}\ \Omega \times m$

Rpta.: a) 12,17 Ω

b) D = 13,76 cm

4. El electrón de un átomo recorre una órbita de $6,2 \times 10^{-18}$ m de radio con una velocidad de 3×10^{7} m/s. Se pide calcular:
   a) La frecuencia en Hz
   b) La intensidad de la corriente de un electrón $1,6 \times 10^{-19}$ C.

NOTA : 1 hertz "Hz" = 1 s^{-1}

Rpta.: a) $7,7 \times 10^{23}$ Hz

b) $0,768 \times 10^{-2}$ A

5. A lo largo de un alambre de cobre de 0,05 cm^2 de sección recta, circula una corriente de 20 amperios. Calcular la velocidad media de los electrones que se desplazan por el hilo suponiendo que cada átomo de cobre contribuye con un electrón al proceso de la conducción. La densidad del cobre es 8,92 g/cm^3 ; la masa de un átomo de cobre 63,5.
   En el cobre: $8,5 \times 10^{22}$ e/cm^3

Rpta.: 0,0296 cm/s

6. Una estufa eléctrica absorbe 12 amperios cuando se conecta a una tensión de 220 V. Calcular la resistencia de la estufa.

Rpta.: 18,33 Ω

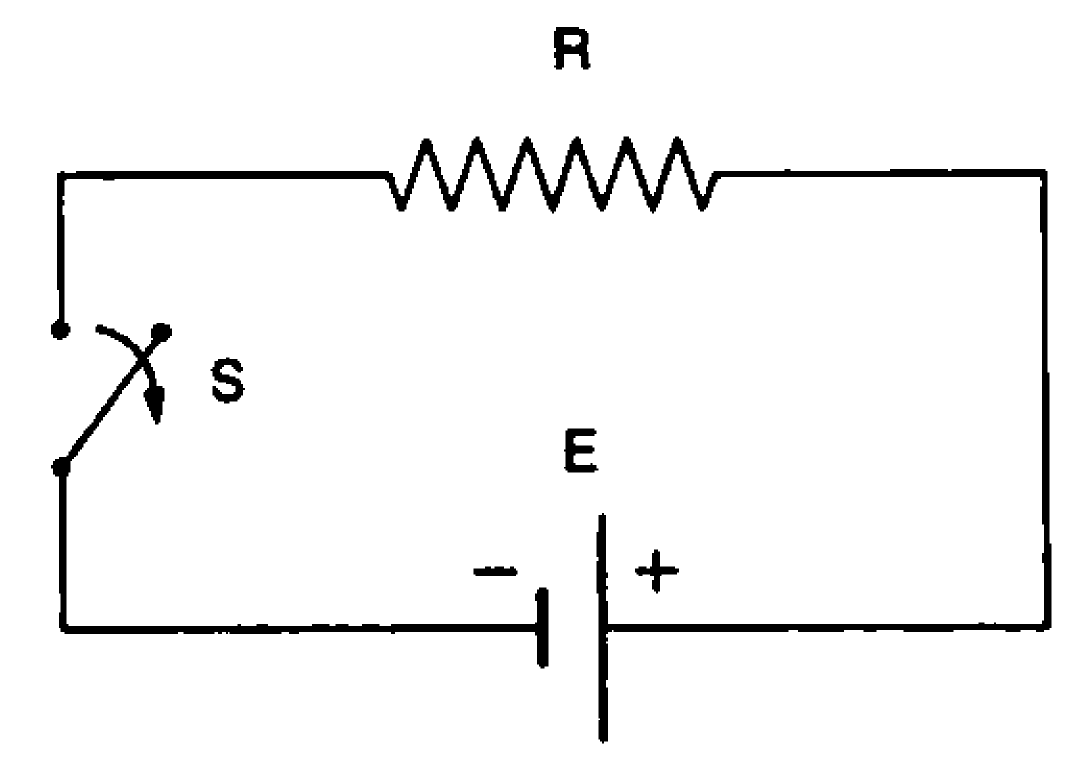
7. La f.e.m. de una pila seca es de 1,5 V. ¿Cuál es su resistencia interna si se hace circular una corriente de 20 amperios?

Rpta.: 0,075 Ω

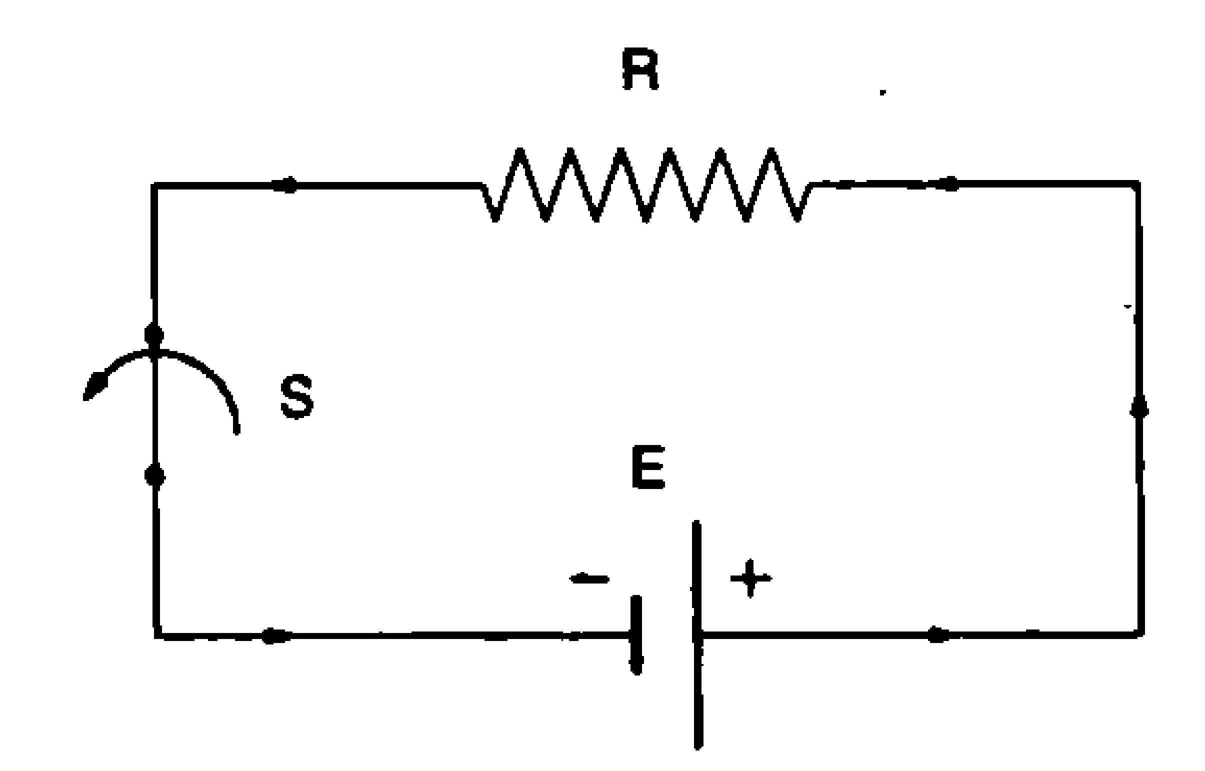
CIRCUITO ABIERTO Y CIRCUITO CERRADO

Se dice que un circuito está "abierto" cuando no hay circulación de corriente, es decir, se interrumpe el paso de corriente mediante un "interruptor", es como una especie de puente levadizo que impide la circulación de electrones.

Se dice que un circuito está "cerrado" cuando hay circulación de corriente eléctrica.



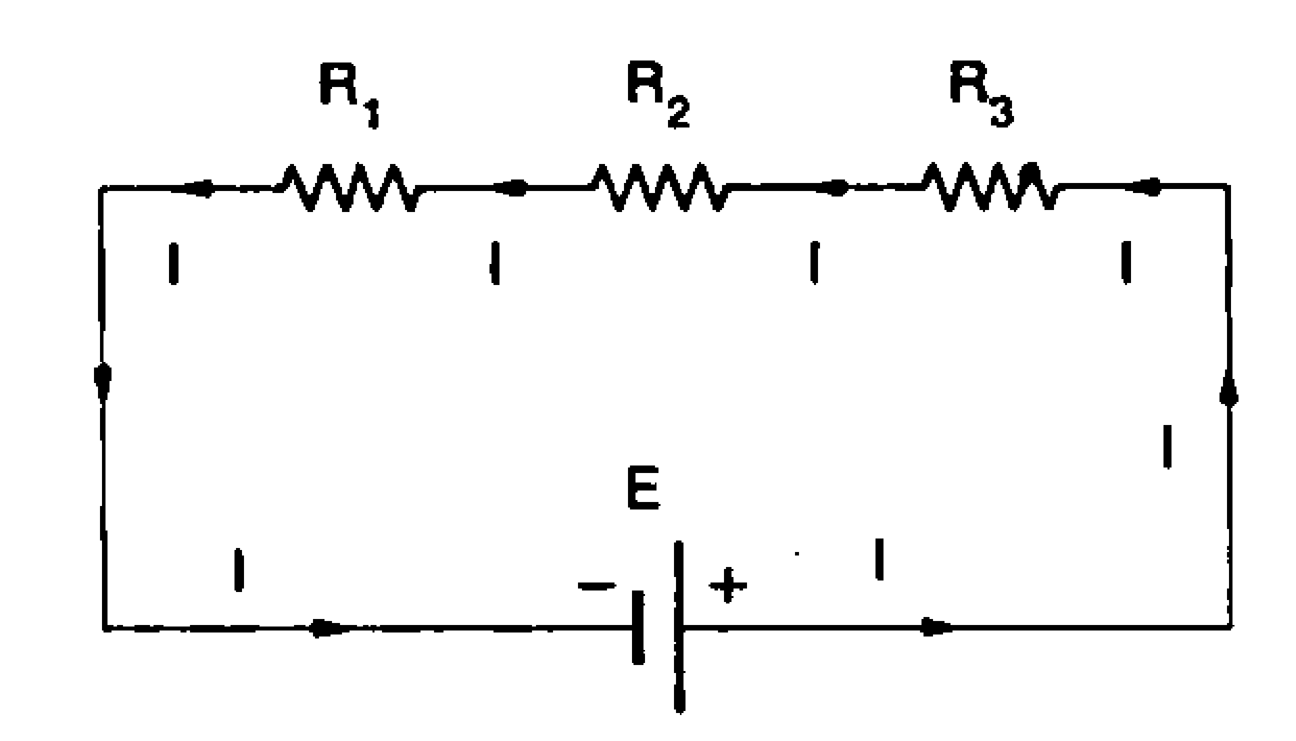
Circuito abierto ; s = interruptor



Circuito cerrado ; s = interruptor

ASOCIACIÓN DE RESISTENCIAS

a) Asociación en serie :
Se llama así a la asociación de resistencias colocadas unas a continuación de las otras a lo largo del circuito.



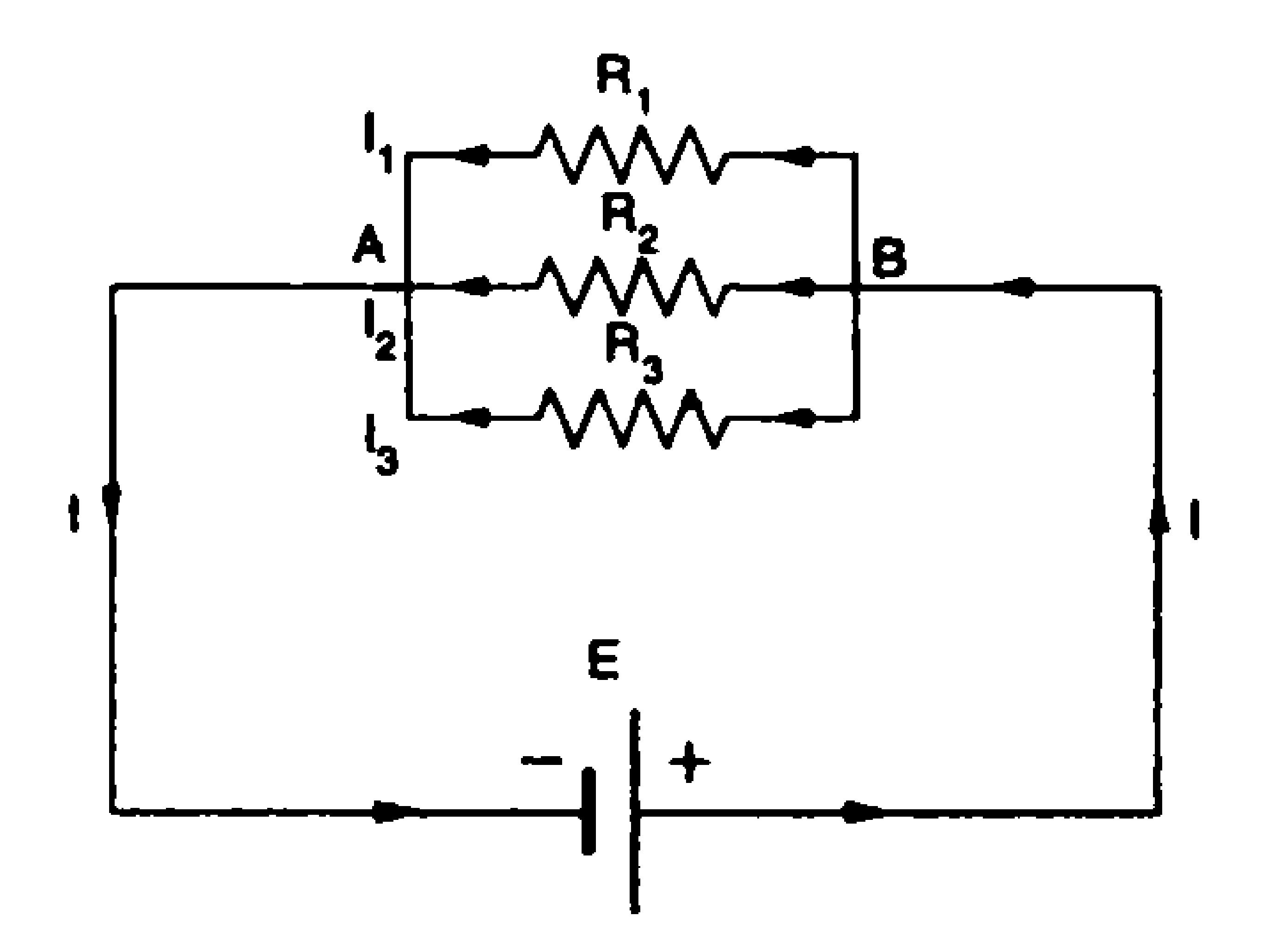
Sus características:

1) $I = I_1 = I_2 = I_3 = \ldots\ldots$

2) $R = R_1 + R_2 + R_3 + \ldots\ldots$

3) $E = E_1 + E_2 + E_3 + \ldots\ldots$

b) Asociación en paralelo :
Se llama así cuando todas las resistencias salen de un mismo punto y luego todas se vuelven a juntar en otro punto. Así por ejemplo en los puntos A y B.



Sus características:

1) $I = I_1 + I_2 + I_3 + \ldots\ldots$

2) $\dfrac{1}{R} = \dfrac{1}{R_1} + \dfrac{1}{R_2} + \dfrac{1}{R_3} + \ldots\ldots$

3) $E = E_1 = E_2 = E_3 = \ldots\ldots$

4) Las intensidades en cada ramal son inversamente proporcionales a sus resistencias.

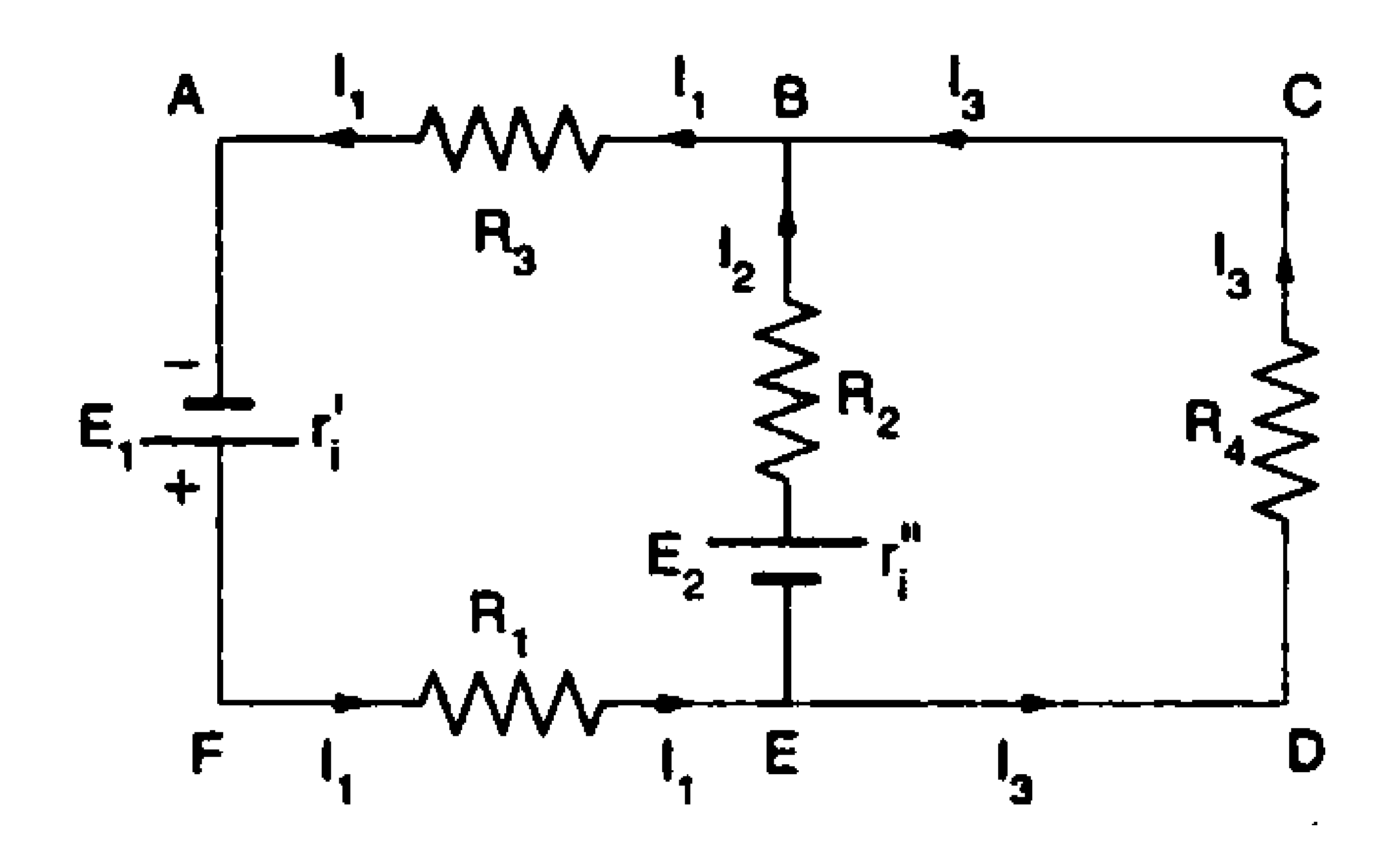
De (3): $E_1 = E_2$

ó: $R_1 . I_1 = R_2 . I_2$

$$\therefore \quad \boxed{\frac{I_1}{R_2} = \frac{I_2}{R_1}}$$

CORRIENTES DERIVADAS LEYES DE KIRCHOFF

Corrientes derivadas son las corrientes que circulan por las redes de un circuito **conectados en paralelo**.
El sentido que se le asigna a la corriente en cada nudo es arbitrario. Si la elección está mal hecha, el proceso matemático, para la solu-



ción del problema, indicará muy claramente que ésta elección está equivocada. Se cambiará de signo.

PRIMERA LEY DE KIRCHOFF O REGLA DE LOS NUDOS

"La suma algebraica de las intensidades de las corrientes que llegan a un nudo es igual a cero" o "La suma de las intensidades que llegan a un nudo es igual a la suma de las intensidades que salen del nudo". Así:

En el nudo B: $I_2 + I_3 = I_1$

En el nudo E: $I_1 = I_2 + I_3$

SEGUNDA LEY DE KIRCHOFF O DE LAS MALLAS

"La suma algebraica de las fuerzas electromotrices de una malla cualquiera, es igual a la suma algebraica de los productos de las intensidades por las respectivas resistencias". Así, para la malla ABEF:

$$E_1 + E_2 = I_1 \cdot R_1 + I_2 \cdot r_i'' + I_2 \cdot R_2 + I_1 \cdot R_3 + I_1 \cdot r_i' \qquad (1)$$

Para la malla ACDF:

$$E_1 = I_1 \cdot R_1 + I_3 \cdot R_4 + I_1 \cdot R_3 + I_1 \cdot r_i' \qquad (2)$$

Para la malla BCDE:

$$-E_2 = I_3 . R_4 - I_2 . R_2 - I_2 . r_i'' \qquad (3)$$

PROBLEMA 1. Calcular cada una de las intensidades de la red anterior con los siguientes datos:

http://librosysolucionarios.net

$E_1 = 4\,V \qquad E_2 = 6\,V$

$R_1 = 0{,}5\,\Omega \qquad R_2 = 1{,}5\,\Omega$

$R_3 = 0{,}5\,\Omega \qquad R_4 = 2\,\Omega$

$r_i' = 0{,}1\,\Omega \qquad r_i'' = 0{,}2\,\Omega$

RESOLUCIÓN: Reemplazando los datos en cada una de las 3 igualdades anteriores:
Malla ABEF:

$$4\,V + 6\,V = I_1\,0{,}5\,\Omega + I_2\,0{,}2\,\Omega + $$
$$+ I_2\,1{,}5\,\Omega + I_1\,0{,}5\,\Omega + I_1\,0{,}1\,\Omega$$

$$10\,V = 1{,}1\,I_1\,\Omega + 1{,}7\,I_2\,\Omega \qquad (a)$$

Malla ACDF:

$$4\,V = I_1\,0{,}5\,\Omega + I_3\,2\,\Omega + I_1\,0{,}5\,\Omega +$$
$$+ I_1\,0{,}1\,\Omega$$

$$4\,V = 1{,}1\,I_1\,\Omega + 2\,I_3\,\Omega \qquad (b)$$

Malla BCDE:

$$-6\,V = I_3\,2\,\Omega - I_2\,1{,}5\,\Omega - I_2\,0{,}2\,\Omega$$

$$-6\,V = 2\,I_3\,\Omega - 1{,}7\,I_2\,\Omega \qquad (c)$$

Prescindiendo de las unidades V y Ω para agilizar la solución algebraica:

$$10 = 1{,}1\,I_1 + 1{,}7\,I_2 \qquad (a)$$

$$4 = 1{,}1\,I_1 + 2\,I_3 \qquad (b)$$

$$-6 = 2\,I_3 - 1{,}7\,I_2 \qquad (c)$$

Aplicando la primera Ley de Kirchoff al nudo E:

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (d)$$

Por otro lado:

De (a): $$I_1 = \frac{10 - 1{,}7\,I_2}{1{,}1} \qquad (e)$$

De (c): $$I_3 = \frac{1{,}7\,I_2 - 6}{2} \qquad (f)$$

Sustituyendo (e) y (f) en (d):

$$\frac{10 - 1{,}7\,I_2}{1{,}1} = I_2 + \frac{1{,}7\,I_2 - 6}{2}$$

De donde: $I_2 = 3{,}56\,A$

Sustituyendo (e) y en (f):

$$I_1 = 3{,}589\,A\,; \quad I_3 = 0{,}026\,A$$

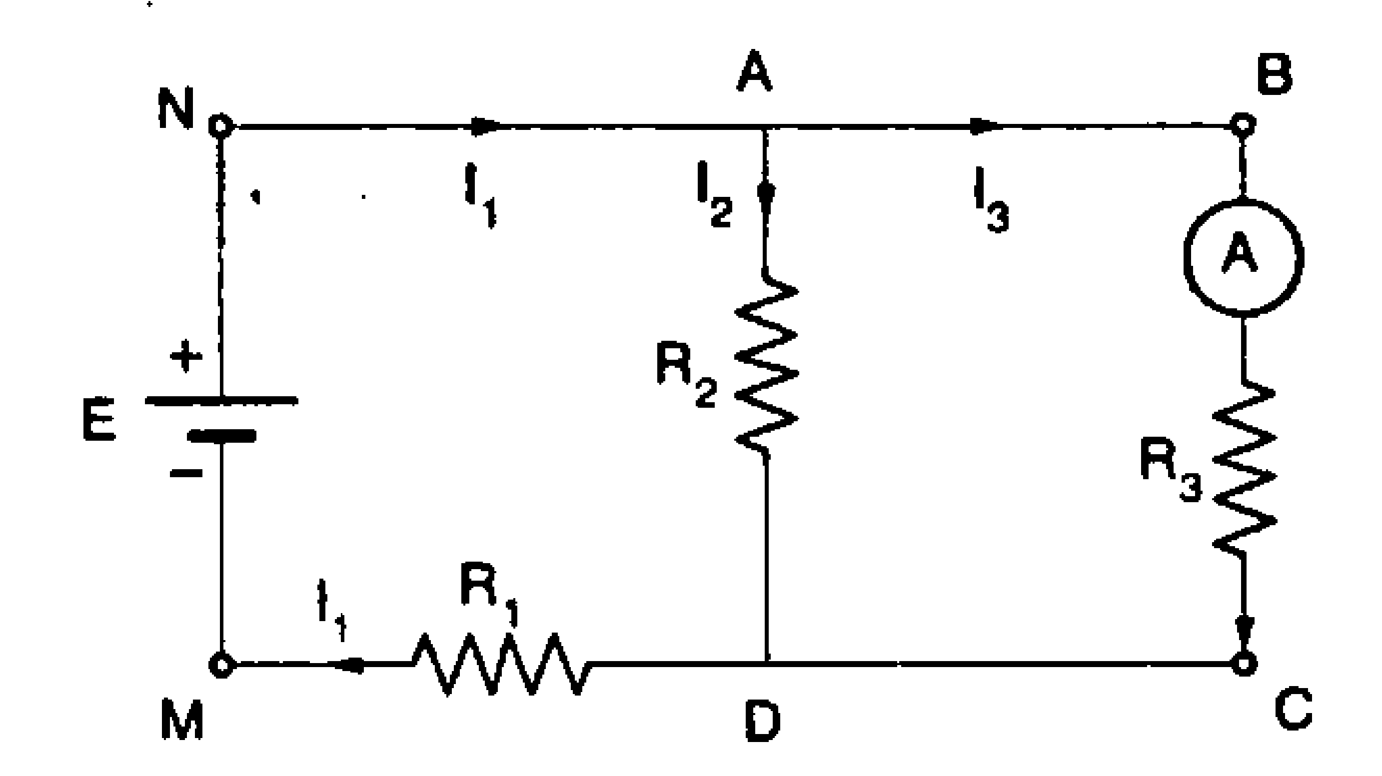
PROBLEMA 2. En la figura mostrada, se pide calcular:

a) ¿Cuánto marcará el amperímetro instalado, con los siguientes datos:

$E = 10\,V \qquad R_2 = 6\,\Omega$

$R_1 = 3\,\Omega \qquad R_3 = 9\,\Omega$

b) ¿Qué sucederá si se intercambia el amperímetro con la fuente de la energía?



RESOLUCIÓN:

Se elige una dirección arbitraria para la corriente, conforme se muestra en la figura. La fuente de energía tiene que vencer todas las resistencias que haya entre sus bornes, esto es lo que se llama resistencia externa, luego:
Para el generador:

$$I_1 = \frac{E}{R_e} \qquad (1)$$

Cálculo de R_e:

$$R_e = R_1 + R_{ABCD} \qquad (2)$$

En la malla ABCD:

$$\frac{1}{R_{ABCD}} = \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3} = \frac{R_2\,R_3}{R_2 + R_3}$$

$$\therefore \quad R_{ABCD} = \frac{R_2 + R_3}{R_2\,R_3}$$

Sustituyendo en (2):

$$R_e = R_1 + \frac{R_2 + R_3}{R_2\,R_3}$$

Con datos: $R_e = 6{,}6\,\Omega$

http://librosysolucionarios.net

sustituyendo datos en (1):

$$I_1 = \frac{10\ V}{6{,}6\ \Omega} = 1{,}51\ A$$

Aplicando la segunda ley de Kirchoff en la malla NBCM:

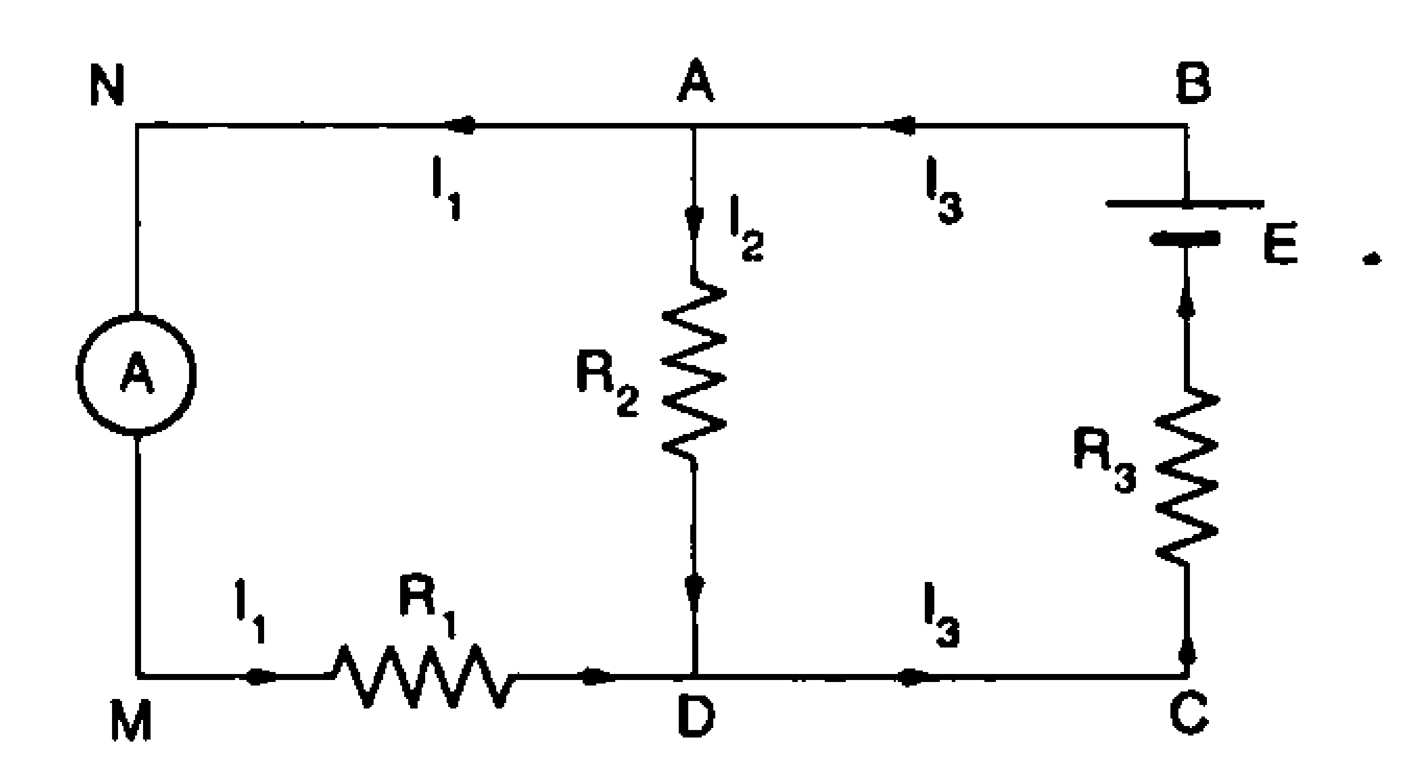
$$E = I_3 R_3 + I_1 R_1$$

De donde: $$I_3 = \frac{E + I_1 R_1}{R_3}$$

$$I_3 = \frac{10 + 1{,}51 \times 3}{9}$$

$$I_3 = 0{,}6\ A \qquad (\alpha)$$

b) Intercambio de la fuente de f.e.m. y el amperímetro:



Procediendo en forma totalmente similar al cálculo anterior; observando que R_1 y R_2 están en paralelo:

$$I_3 = \frac{E}{R_e} \qquad (1)$$

Cálculo de R_e:

$$R_e = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

$$R_e = 9\ \Omega + \frac{3\ \Omega \times 6\ \Omega}{3\ \Omega + 6\ \Omega} = 11\ \Omega$$

Sustituyendo en (1):

$$I_3 = \frac{10\ V}{11\ \Omega} = 0{,}91\ A$$

Aplicando la segunda Ley de Kirchoff en la malla NBCM:

$$E = I_1 R_1 + I_3 R_3$$

de donde:

$$I_1 = \frac{E - I_3 R_3}{R_1} = \frac{10 - 0{,}91 \times 9}{3}$$

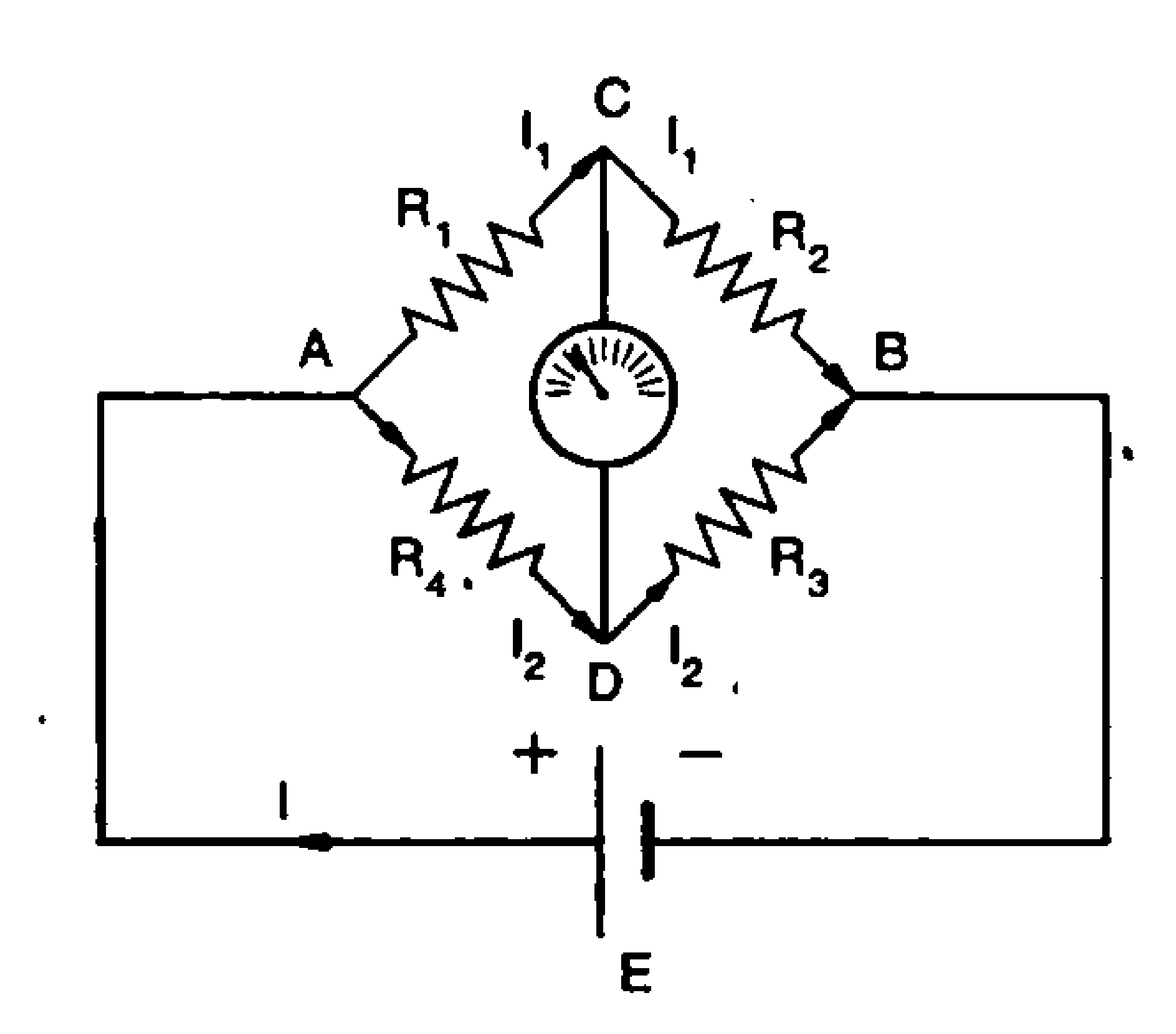
$$I_1 = 0{,}6\ A \qquad (\beta)$$

Luego: $$I_1 = I_3$$

Cuando se intercambian no se altera la intensidad del sistema.

PUENTE DE WHEATSTONE

Es un circuito que se usa para medir resistencias, como se muestra en la figura. Consta de 4 resistencias R_1, R_2, R_3 y R_4 conectadas a un generador de f.e.m. En el ramal CD se instala un galvanómetro, aparato que detecta, mide la intensidad y determina el sentido de la corriente eléctrica por medio de la desviación que sufre una aguja imantada situada en el interior de un carrete rodeado de cobre envuelto en seda, cuando pasa la corriente por dicho alambre.



Para ciertos valores adecuados, de resistencia, el galvanómetro no marca paso de corriente eléctrica lo que quiere decir que el puente de Wheatstone está en equilibrio; es decir los potenciales en C y D son iguales ($E_C = E_D$) por tanto, sus caídas de potencial son iguales, así:

$$E_A - E_C = E_A - E_D \qquad (a)$$

y: $$E_C - E_B = E_D - E_B \qquad (b)$$

y por la Ley de Ohm:

a) $$I_1 . R_1 = I_2 . R_4 \qquad (1)$$

NOTA : Al pasar corriente por CD, las intensidades I_1 e I_2 son iguales.

También por la Ley de Ohm:

b) $I_1 . R_2 = I_2 . R_3$ (2)

Dividiendo (1) ÷ (2) :

$$\frac{R_1}{R_2} = \frac{R_4}{R_3}$$

de donde: $R_1 . R_3 = R_2 . R_4$

Lo que quiere decir que: "Si el puente de Wheatstone se halla en equilibrio, los productos de las resistencias opuestas son iguales

Ejemplo: ¿Calcular cuál es el valor de la resistencia R_4, sabiendo que $R_1 = 2\,\Omega$, $R_2 = 3\,\Omega$ y $R_3 = 4\,\Omega$?

$$R_4 = \frac{R_1 R_3}{R_2} = \frac{2\,\Omega \times 4\,\Omega}{3\,\Omega}$$

$$R_4 = 2{,}67\,\Omega$$

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Si se combinan 3 resistencias de 3 ; 4 y 5 ohmios de resistencia, ¿entre qué límites está la resistencia total?

RESOLUCIÓN :

Las tres resistencias se pueden combinar en serie, o en paralelo.

En serie:

$$R_s = R_1 + R_2 + R_3$$

$$R_s = 3\,\Omega + 4\,\Omega + 5\,\Omega$$

$$R_5 = 12\,\Omega \qquad (1)$$

En paralelo:

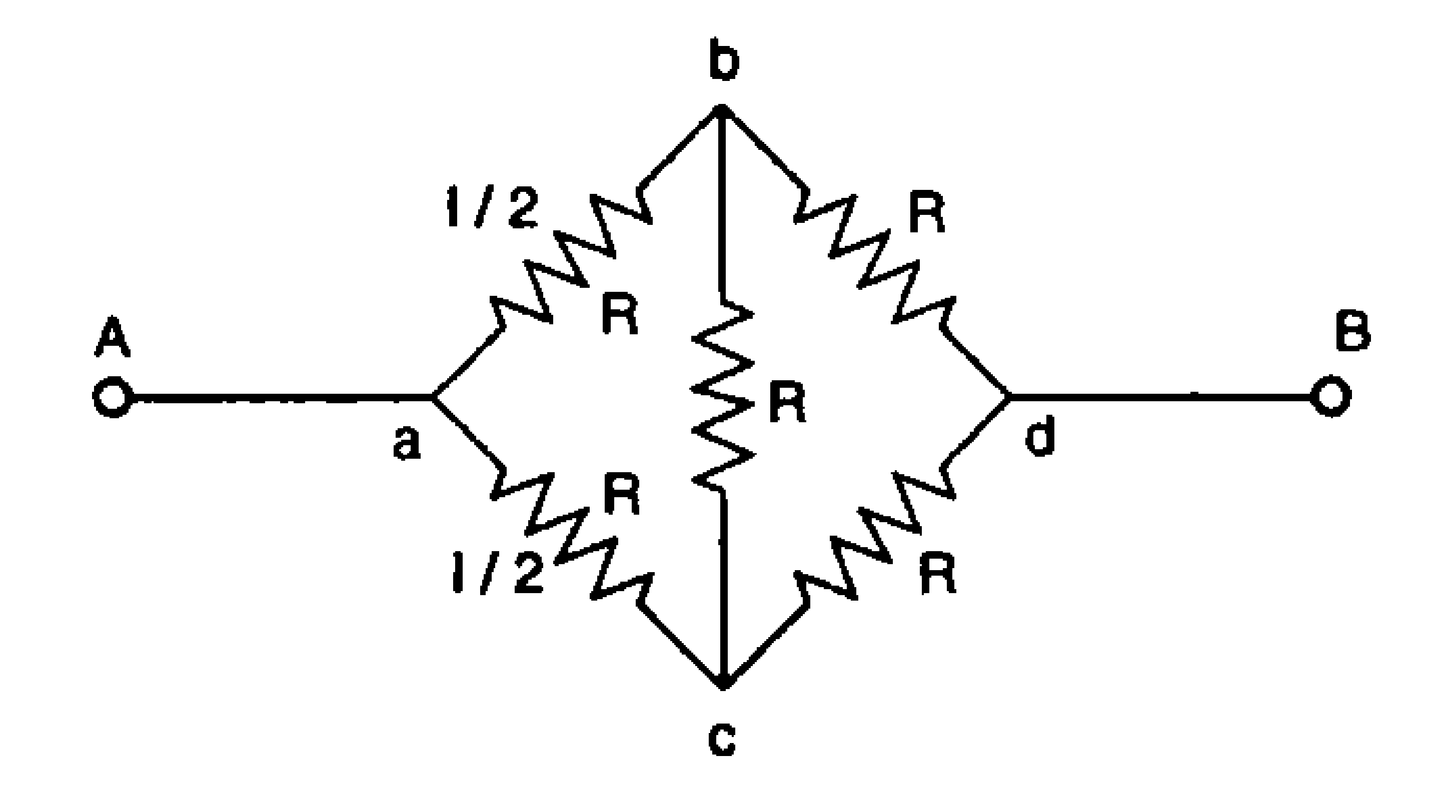
$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}$$

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega} + \frac{1}{5\,\Omega}$$

$$R_p = 1{,}28\,\Omega \qquad (2)$$

Lo que quiere decir que cuando se conecta en serie ofrecen la resistencia máxima, 12 Ω ; y cuando se conectan en paralelo, ofrecen la resistencia mínima, 1,28 Ω, que son los límites.

PROBLEMA 2. ¿Cuál es la resistencia equivalente entrelos terminales A y B del circuito de la figura, suponiendo que todas las resistencias son iguales a 8 ohmios?



RESOLUCIÓN :

Sea "I" la intensidad que circula; como las resistencias están en paralelo a partir de "a", las intensidades serán iguales a I/2, quiere decir que la caída de potencial entre ab y ac son iguales (iguales a R x I/2), por consiguiente la diferencia de potencial entre b y c será cero ($V_{bc} = 0$) lo que quiere decir que por el ramal bc no circula corriente, entonces se calcula sólo la caída de potencial que sufre la corriente que circula por abd y acd.

$$R_{abd} = R + R = 2R$$

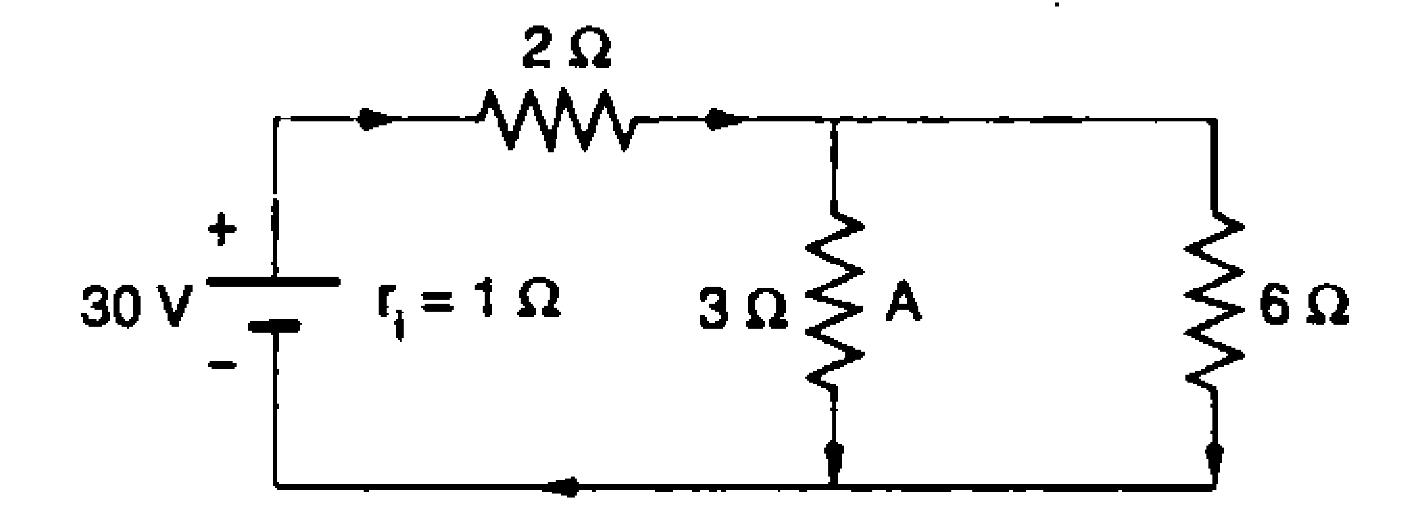
$$R_{acd} = R + R = 2R$$

$$\frac{1}{R_{AB}} = \frac{1}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{1}{R}$$

Donde: $R_{AB} = R = 8\,\Omega$

PROBLEMA 3. Calcular la corriente eléctrica que circula por la resistencia A.

http://librosysolucionarios.net



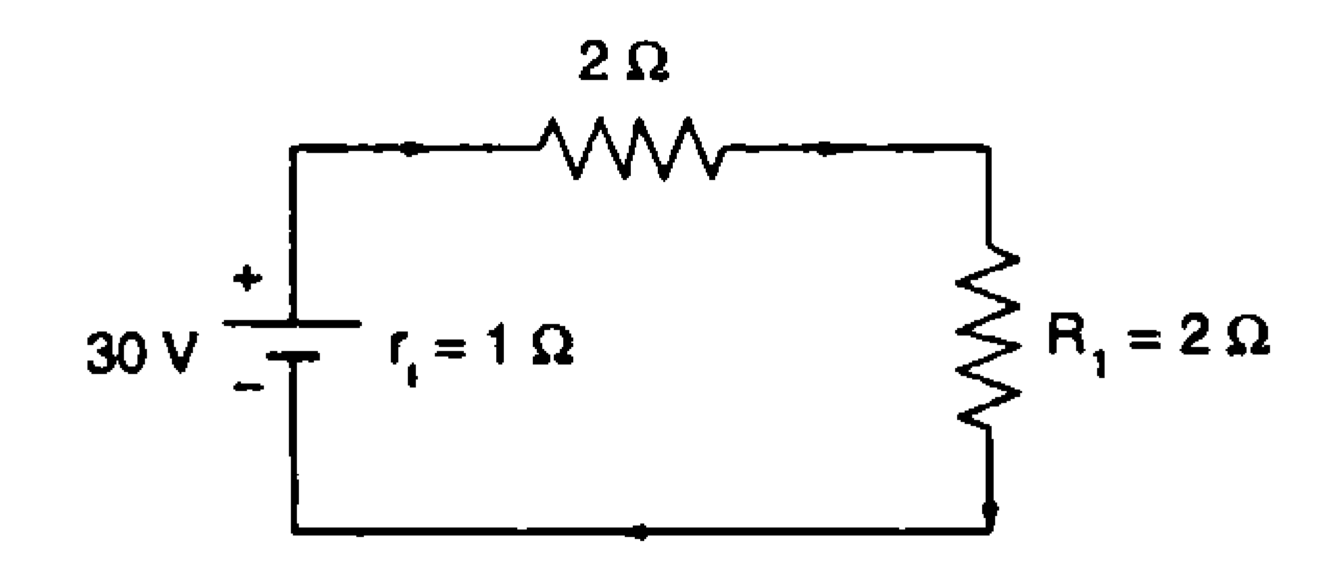
RESOLUCIÓN :

Se señala una dirección arbitraria de la intensidad de la corriente, conforme se muestra en la figura. Las resistencias de 3 Ω y 6 Ω están en paralelo, luego la resistencia equivalente es:

$$\frac{1}{R_1} = \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega} = \frac{1}{2\,\Omega}$$

de donde: $R_1 = 2\,\Omega$

Ahora el circuito equivalente será:



y la resistencia total será:

$$R = 2\,\Omega + 2\,\Omega + 1\,\Omega = 5\,\Omega$$

Luego: $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{30\ V}{5\,\Omega} = 6\ A$

La caída de potencial en las resistencias asociadas en paralelo, es:

$$E_1 = I R_1 = 6\ A \times 2\,\Omega = 12\ V$$

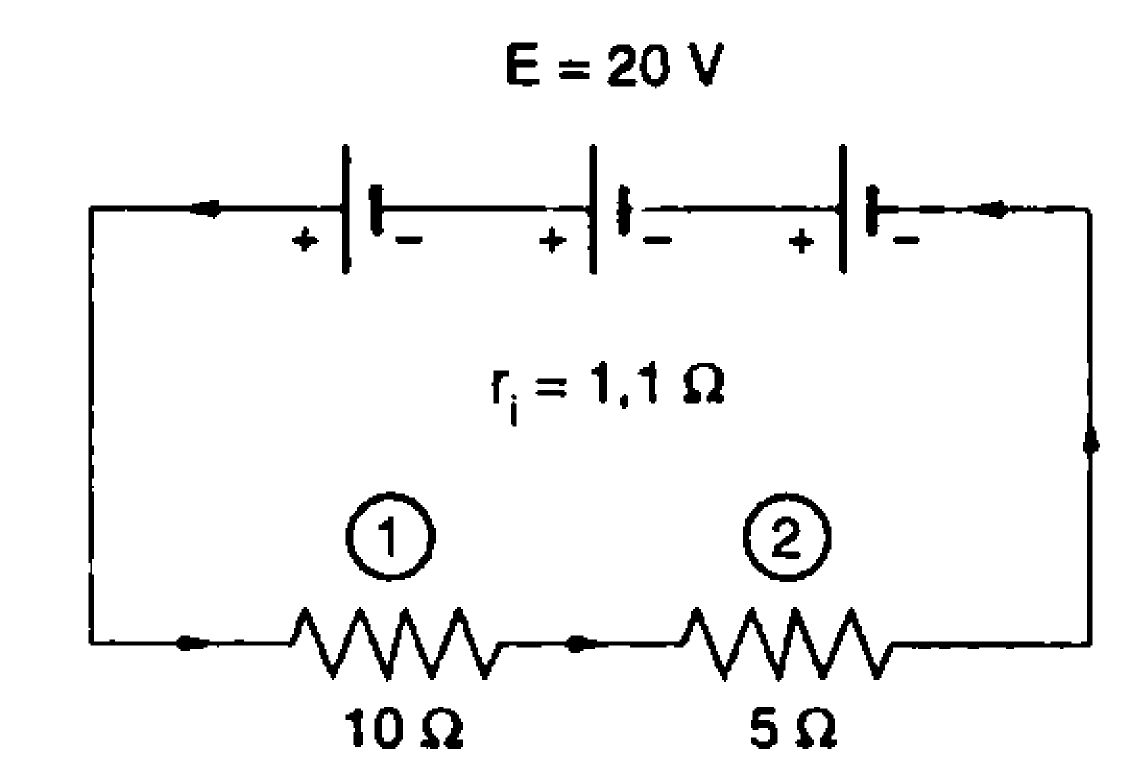
Como en una asociación de resistencias en paralelo las caídas de potencial en todas son iguales, la caída en la resistencia "A" será 12 V. Luego, la intensidad en "A" será:

$$I_A = \frac{E}{R_A} = \frac{12\ V}{3\,\Omega} = 4\,\frac{V}{\Omega}$$

$$I_A = 4\ A$$

PROBLEMA 4. En la figura que se muestra, calcular:

a) La intensidad de la corriente.
b) La caída de tensión en cada una de las resistencias.
c) La caída de potencial en los bornes de la batería cuando circula corriente.



RESOLUCIÓN :

En primer lugar, como todas las resistencias están en serie, la resistencia total será:

$$R = 10\,\Omega + 5\,\Omega + 1{,}1\,\Omega = 16{,}1\,\Omega$$

a) $I = \dfrac{E}{R} = \dfrac{20\ V}{16{,}1\,\Omega} = 1{,}24\,\dfrac{V}{\Omega}$

Rpta.: $I = 1{,}24\ A$

b) Caída de potencial en (1) :

$$E_1 = I R_1 = 1{,}24\ A \times 10\,\Omega$$

$$E_1 = 12{,}4\ A \times \Omega = 12{,}4\ V$$

Caída de potencial en (2) :

$$E_2 = I R_2 = 1{,}24\ A \times 5\,\Omega$$

$$E_2 = 6{,}20\ A \times \Omega = 6{,}20\ V$$

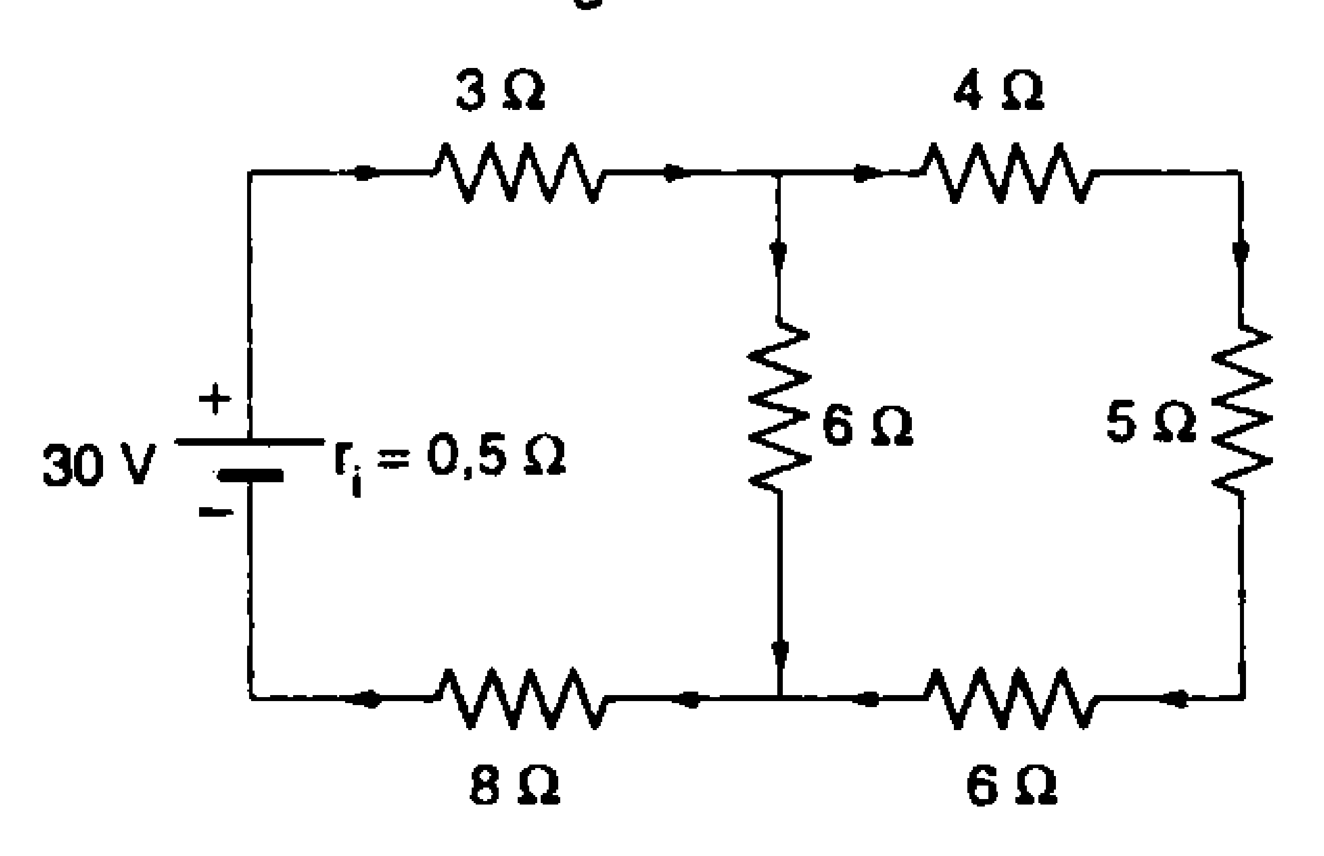
c) La caída de potencial en los bornes de la batería:

$$E_e = E_T - I r$$

$$E_e = 20\ V - 1{,}24\ A \times 1{,}1\,\Omega$$

de donde: Rpta.: $E_e = 18{,}636\ V$

PROBLEMA 5. Hallar la intensidad de la corriente en el circuito que se muestra en la figura.



RESOLUCIÓN : La intensidad se calcula así:

$$I = \frac{E}{R_T} \qquad (I)$$

Donde R_T es la resistencia total del circuito, la cual se calcula así:

- Las resistencias de 4 ; 5 y 6 ohmios están en serie, luego su resistencia equivalente es:

$$R_e = 4\,\Omega + 5\,\Omega + 6\,\Omega = 15\,\Omega$$

- Esta resistencia de 15 Ω, las resistencias de 3 Ω, 8 Ω y 0,5 Ω del generador están en serie, luego la resistencia total es:

$$R_T = 4{,}77\,\Omega + 3\,\Omega + 8\,\Omega + 0{,}5\,\Omega$$

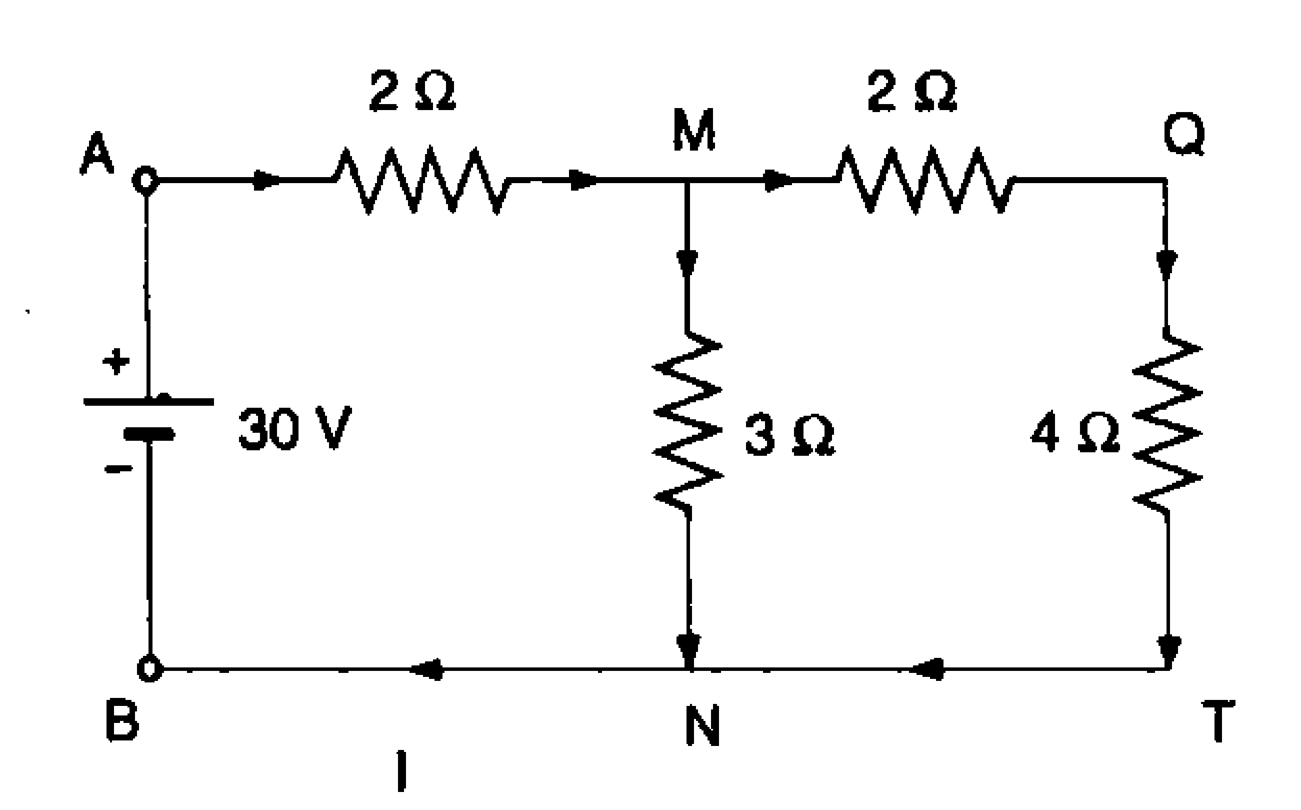
$$R_T = 16{,}27\,\Omega$$

Sustituyendo valores en (I) : $I = \frac{30\text{ V}}{16{,}27\,\Omega}$

Rpta.: 1,84 A

PROBLEMA 6. En la figura adjunta determinar:

a) La resistencia equivalente entre A y B, si se conectan a través de un generador de 30V.
b) La corriente que circula por la resistencia de 4 Ω.
c) La diferencia de potenciales entre los extremos de la resistencia de 3 Ω.



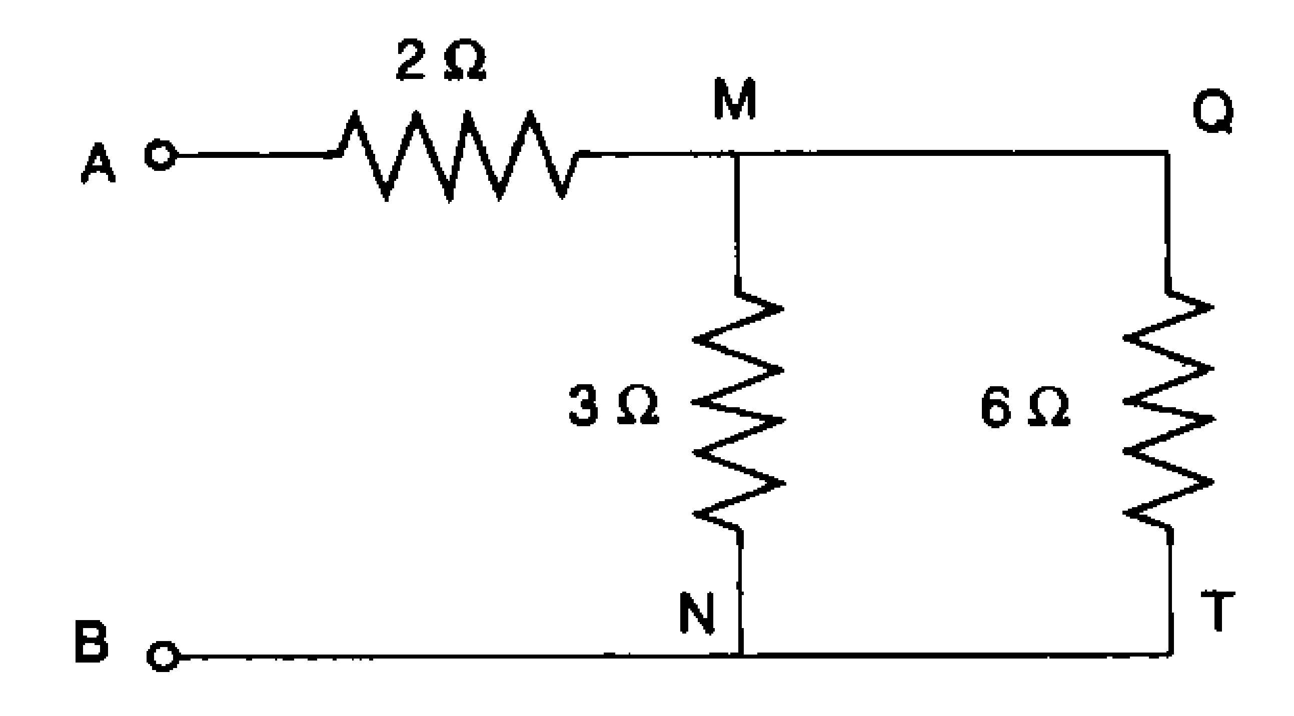
RESOLUCIÓN :

a) Cálculo de la resistencia equivalente entre A y B.

En el tramo MQT las resistencias están en serie, luego su equivalente es la suma de las resistencias:

$$R = 2\,\Omega + 4\,\Omega = 6\,\Omega$$

y se puede expresar gráficamente así:

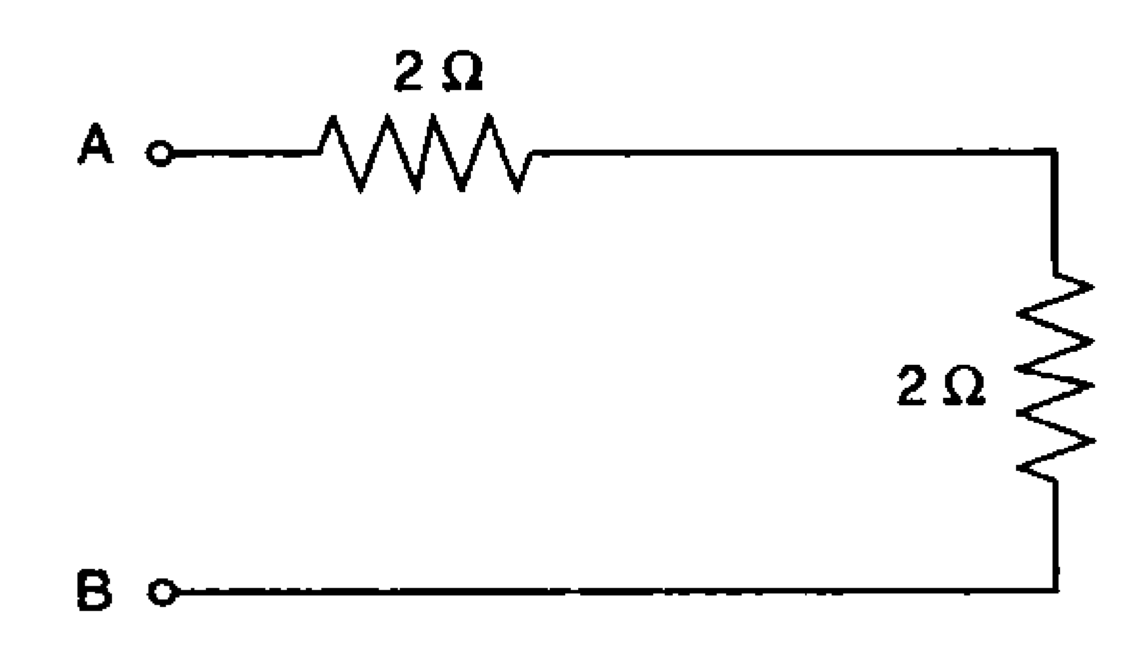


Ahora, en el tramo MQTN, las resistencias de 6 Ω y 2 Ω están en paralelo, luego su equivalente es:

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{6\,\Omega}$$

de donde: $R = 2\,\Omega$

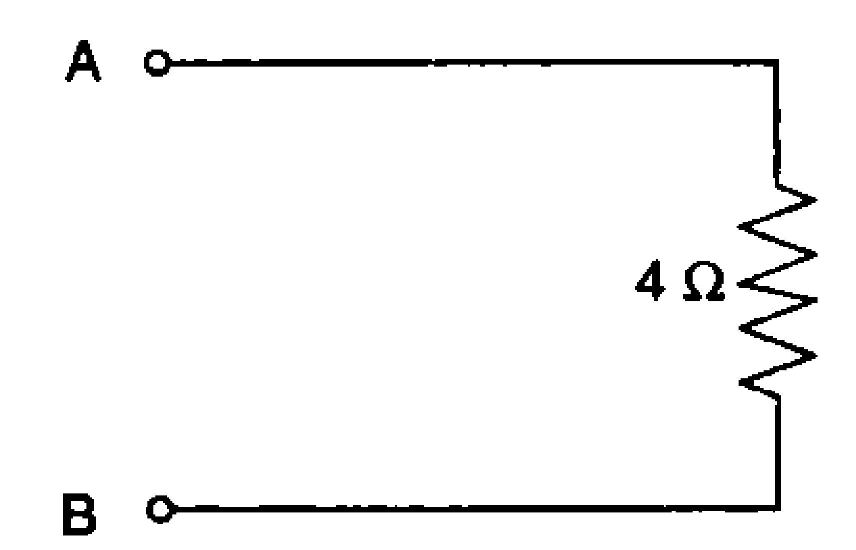
y se puede expresar gráficamente así:



Finalmente estas resistencias están en serie y el valor de su equivalente es:

$$R = 2\,\Omega + 2\,\Omega = 4\,\Omega$$

Que es la resistencia equivalente y se puede expresar gráficamente así:



b) La intensidad equivalente en el circuito es:

$$I = \frac{E}{R} = \frac{30\text{ V}}{4\,\Omega} = 7{,}5\text{ A}$$

De aquí el voltaje o caída en la primera resistencia es:

$$E_1 = I R_1 = 7{,}5\text{ A} \times 2\,\Omega$$

$$E_1 = 15\text{ V}$$

Por consiguiente el voltaje que llega al punto M es de 15V.

En el tramo MQT las intensidades que pasan por la resistencias de 2 Ω y 4 Ω son iguales, ya que están en serie:

$$I = I_1 = I_2$$

Su valor es:

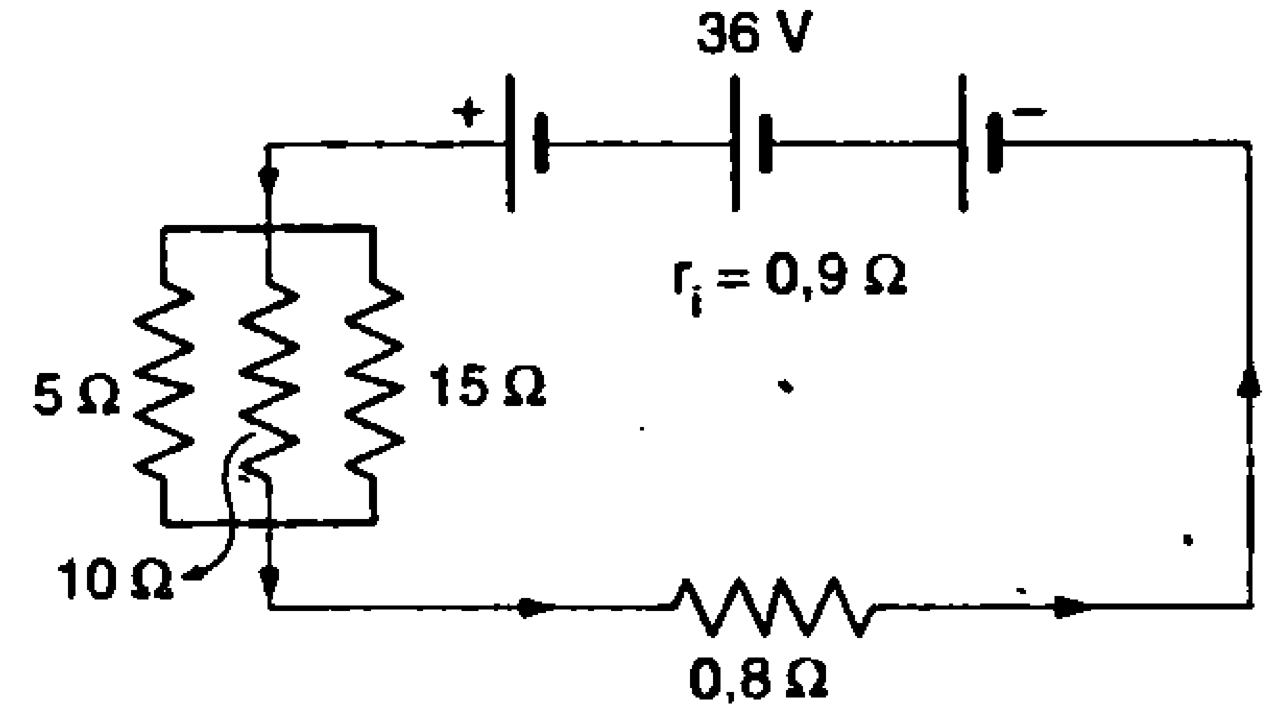
$$I = \frac{E_1}{R_s} = \frac{15\,V}{2\,\Omega + 4\,\Omega} = \frac{15\,V}{6\,\Omega}$$

$$I = 2{,}5\,A$$

c) Por la resistencia de 3 Ω hay un potencial igual al de 2 Ω y 4 Ω juntos, del circuito MQT, por estar en paralelo y la resistencia en paralelo tienen igual caída de potencial, ese potencial es de 15 V.

PROBLEMA 7. Un generador de 36 V y 0,9 Ω de resistencia interna suministra corriente a un sistema como se muestra en la figura. Calcular:

a) La intensidad de la corriente en el circuito.
b) La caída que sufre la tensión en la asociación en paralelo
c) La caída de potencial en el borne de 0,8 Ω.
d) Caída de tensión de los bornes del generador.



RESOLUCIÓN:

a) $$I = \frac{E}{R} \qquad (1)$$

Cálculo de la resistencia R:
Resistencia de la asociación en paralelo:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{5\,\Omega} + \frac{1}{10\,\Omega} + \frac{1}{15\,\Omega} = \frac{11}{30\,\Omega}$$

de donde: $R_p = 2{,}72\,\Omega$

Esta resistencia, la de 0,8 Ω y la del generador están en serie; luego, resistencia total:

$$R = 2{,}72\,\Omega + 0{,}8\,\Omega + 0{,}9\,\Omega = 4{,}42\,\Omega$$

Sustituyendo los datos de (1):

$$I = \frac{36\,V}{4{,}42\,\Omega} = 8{,}15\,A$$

b) $E_p = I\,R_p = 8{,}15\,A \times 2{,}72\,\Omega$

$$E_p = 22{,}168\,A \times \Omega$$

$$E_p = 22{,}168\,V$$

c) $E_1 = I\,R_1 = 8{,}15\,A \times 0{,}8\,\Omega$

$$E_1 = 6{,}52\,A \times \Omega$$

$$E_1 = 6{,}52\,V$$

d) Se puede calcular de dos maneras:
1) E = Caída de potencial en el grupo exterior:

$$E = 22{,}168\,V + 6{,}52\,V$$

$$E = 28{,}668\,V$$

2) E = Voltaje del generador-caída interior:

$$E = 36\,V - I\,r$$

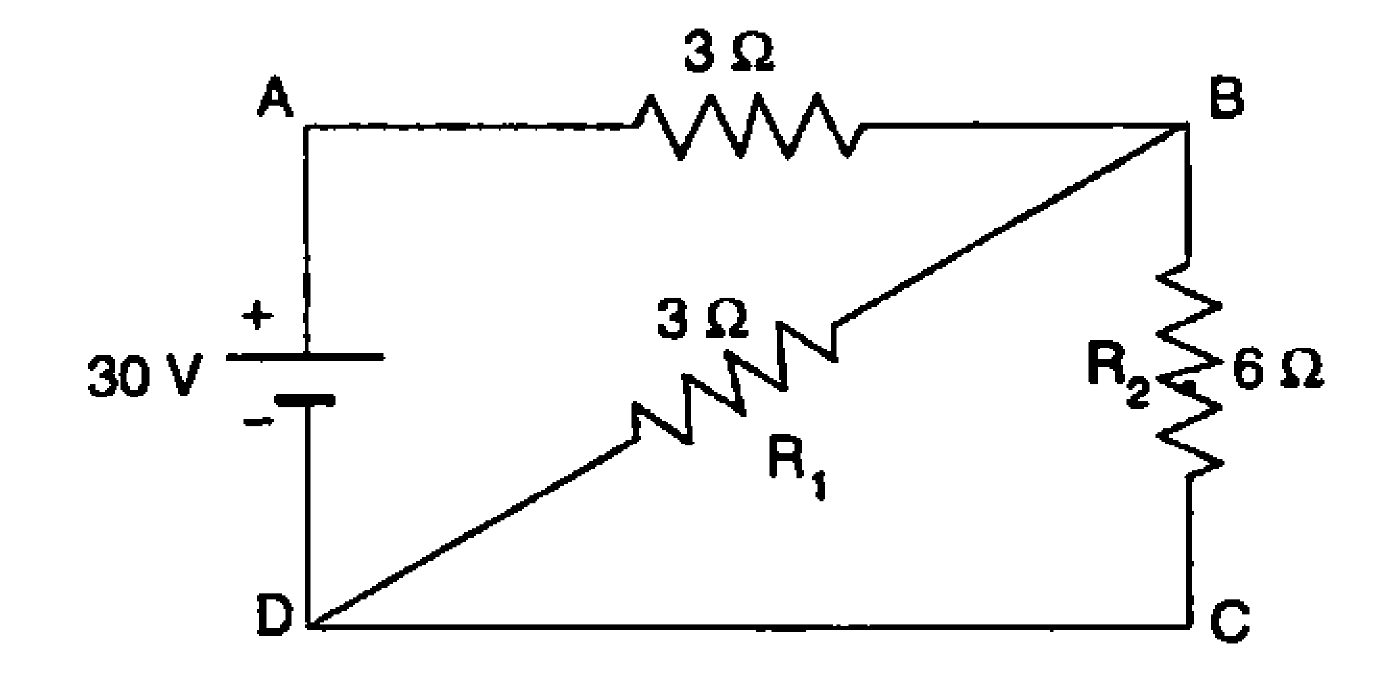
$$E = 36\,V - 8{,}15\,A \times 0{,}9\,\Omega$$

$$E = 36\,V - 7{,}335\,V$$

$$E = 28{,}665\,V$$

PROBLEMA 8. En el circuito de la figura calcular:

a) La corriente que circula por la resistencia de 6 ohmios.
b) La diferencia de potencial entre los extremos de la misma resistencia.



RESOLUCIÓN:

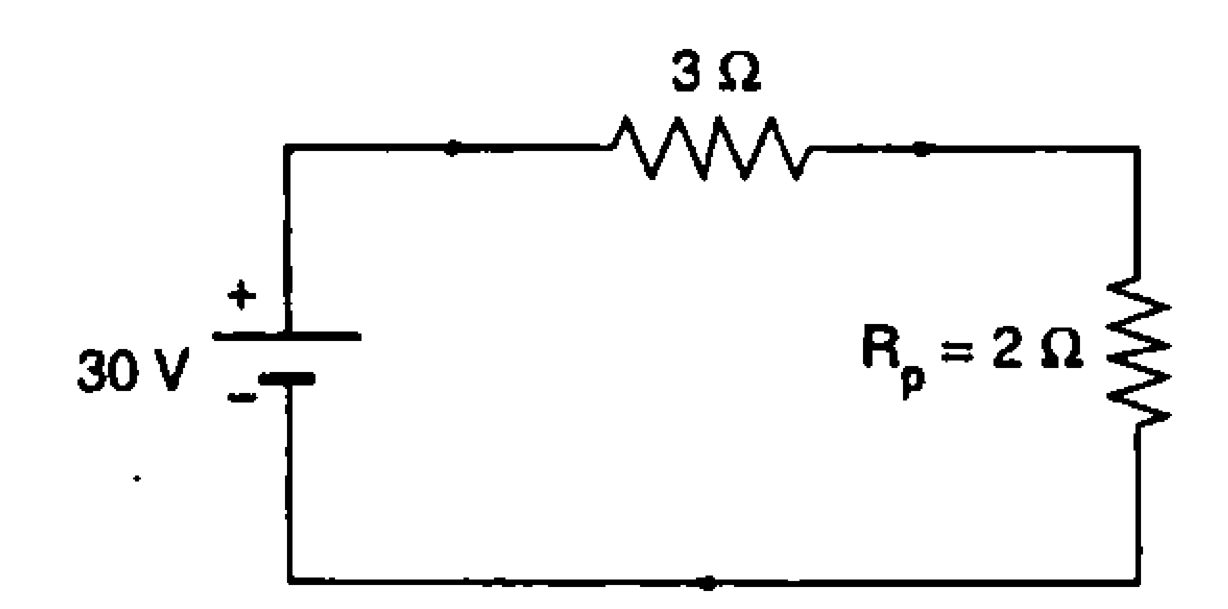
En el circuito BCD, las resistencias están en paralelo, luego su equivalente es:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{3\,\Omega} = \frac{1}{2\,\Omega}$$

de donde: $R_p = 2\,\Omega$

Que es la resistencia equivalente y gráficamente se indica así:

http://librosysolucionarios.net



Este equivalente, y la resistencia de 3 Ω están en serie, luego la resistencia total es:

$$R_s = 3\,\Omega + 2\,\Omega = 5\,\Omega$$

Cálculo de la intensidad de la corriente:

$$I = \frac{E}{R_s} = \frac{30\text{ V}}{5\,\Omega} = 6\text{ A}$$

a) Como la corriente que circula es de 6 A, a partir del nudo B el circuito es paralelo y las intensidades son inversamente proporcionales a sus resistencias:

$$\frac{I_1}{R_2} = \frac{I_2}{R_1}$$

de donde, por propiedad de proporciones:
Suponiendo que la $R_1 = 3\,\Omega$ y $R_2 = 6\,\Omega$:

$$\frac{I_1}{R_2} = \frac{I_2}{R_1} = \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2}$$

de donde:

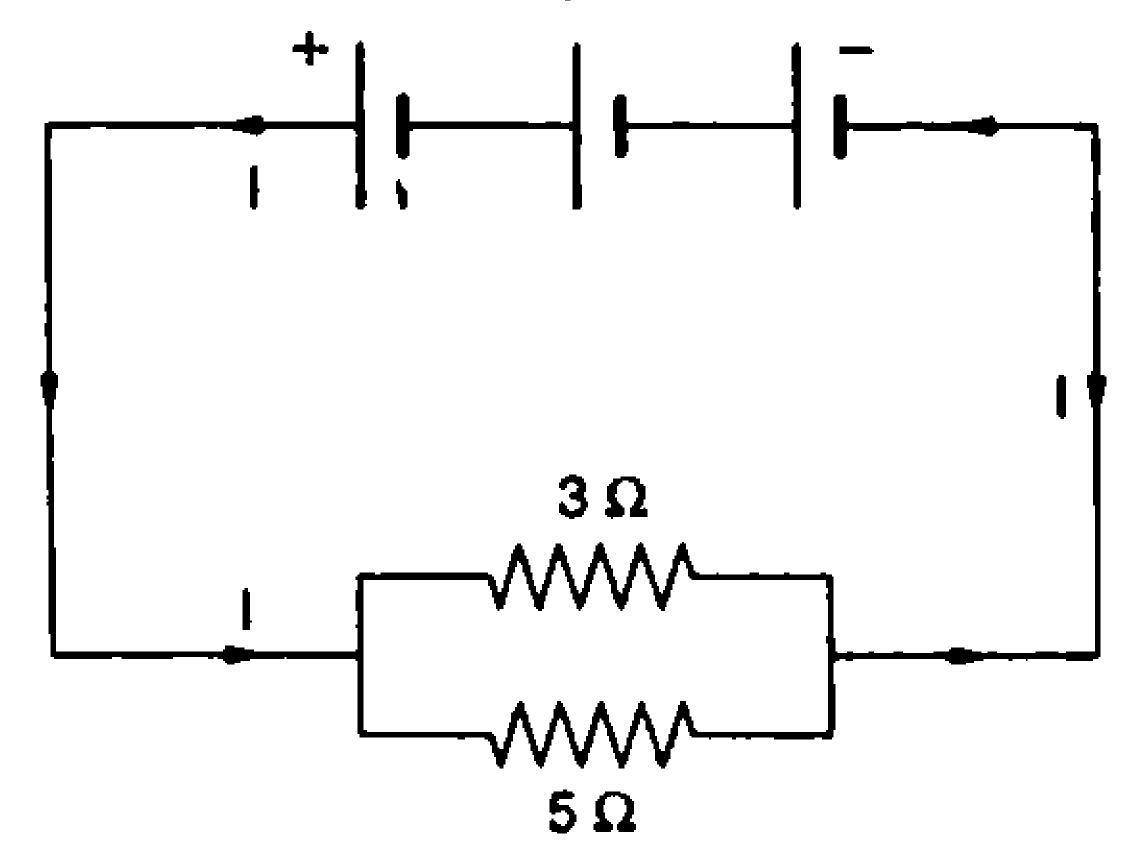
$$I_2 = R_1 \frac{I_1 + I_2}{R_1 + R_2} = 3\,\Omega \frac{6\text{ A}}{9\,\Omega} = 2\text{ A}$$

Ahora:

b) $E_2 = I_2 R_2 = 2\text{ A} \times 6\,\Omega$

$E_2 = 12\text{ V}$

PROBLEMA 9. Calcular la intensidad en el circuito de la figura. Cada pila tiene una F.E.M. de 6 V y una resistencia interna de 0,2 Ω.



RESOLUCIÓN : Recordando que:

$$I = \frac{E}{R} \qquad (1)$$

Cálculo de la fuerza electromotriz o voltaje total en las pilas:

$$E = 6\text{V} + 6\text{V} + 6\text{V}$$
$$E = 18\text{ V} \qquad \text{(a)}$$

Resistencia de las pilas:

$$R_p = 0{,}2\,\Omega + 0{,}2\,\Omega + 0{,}2\,\Omega = 0{,}6\,\Omega$$

Resistencia en la asociación de resistencias en paralelo:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{3\,\Omega} + \frac{1}{5\,\Omega} = \frac{8}{15\,\Omega}$$

de donde: $R_p = 1{,}9\,\Omega$

Resistencia total del circuito:
Las pilas y la resistencia equivalente de la asociación en paralelo están en serie, luego:

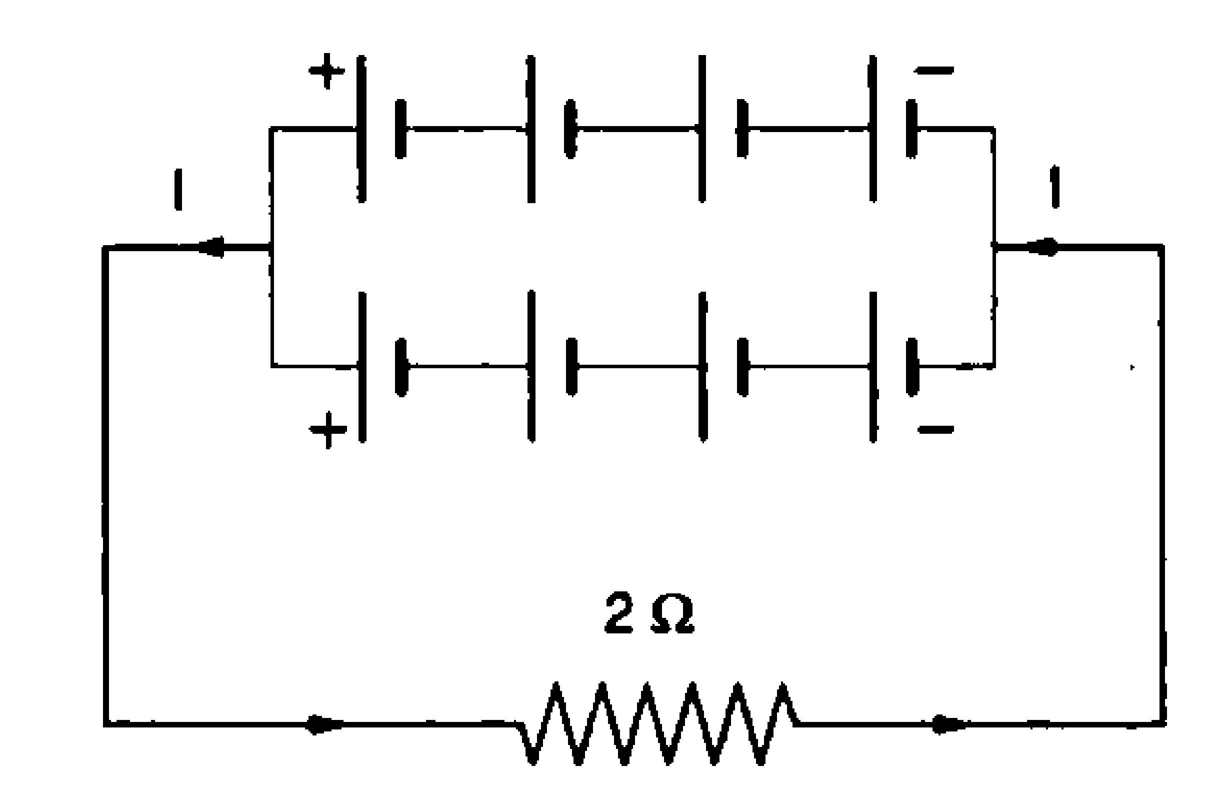
$$R = 0{,}6\,\Omega + 1{,}9\,\Omega = 2{,}5\,\Omega \qquad \text{(b)}$$

Sustituyendo (a) y (b) en (1):

$$I = \frac{18\text{ V}}{2{,}5\,\Omega} = 7{,}2\,\frac{\text{V}}{\Omega}$$

Rpta.: $I = 7{,}2\text{ A}$

PROBLEMA 10. Calcular la intensidad de corriente que circula por el circuito de la figura. Cada pila tiene un voltaje de 1,5 V y una resistencia de 0,2 Ω.



RESOLUCIÓN: $I = \frac{E}{R} \qquad (1)$

Voltaje de las 4 pilas en serie:

$$E = 4 \times 5\text{ V} = 6{,}0\text{ V}$$

El voltaje del circuito será también 6,0 V porque el voltaje es igual en el circuito total y en cada uno de los que estén en paralelo, es decir:

$$E = E_1 = E_2 = 6\text{ V} \qquad \text{(a)}$$

http://librosysolucionarios.net

Resistencia de las pilas en serie:

$$4 \times 0{,}2\,\Omega = 0{,}8\,\Omega$$

Resistencia total de pilas:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0{,}8\,\Omega} + \frac{1}{0{,}8\,\Omega}$$

de donde: $R_p = 0{,}4\,\Omega$

Resistencia total:

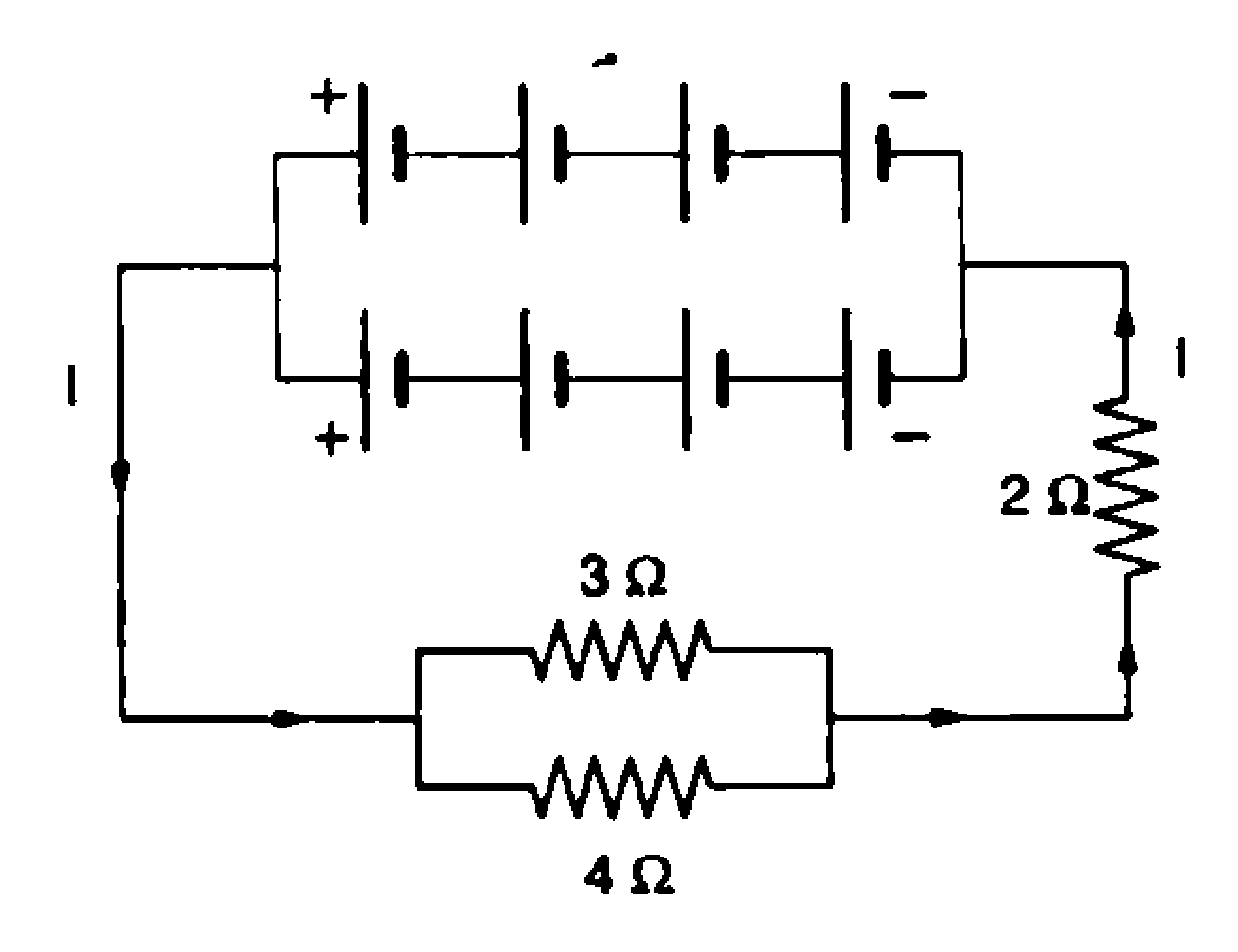
$$R = 0{,}4\,\Omega + 2\,\Omega = 2{,}4\,\Omega \quad \text{(b)}$$

Sustituyendo (a) y (b) en (1):

$$I = \frac{6\,V}{2{,}4\,\Omega}$$

Rpta.: $I = 2{,}5\,A$

PROBLEMA 11. Hallar la intensidad de la corriente que circula por el circuito de la figura. Cada pila tiene un voltaje de 1,5 V y una resistencia de 0,05 Ω.



RESOLUCIÓN : $I = \frac{E_T}{T}$ (1)

Cálculo de E : el potencial de la pila en serie:

$$E = 4 \times 1{,}5\,V = 6\,V$$

Como las dos asociaciones en serie están a su vez unidas en paralelo, quiere decir que la fuerza electromotriz en cada uno es igual al total, esto es:

$$E_T = 6\,V \quad \text{(a)}$$

Cálculo de R.

Resistencia de las pilas en serie:

$$R_1 = 0{,}05\,\Omega \times 4 = 0{,}2\,\Omega$$

Resistencia de las dos asociaciones de las pilas en serie, conectadas en paralelo ($R_1 = R_2$):

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = \frac{1}{0{,}2\,\Omega} + \frac{1}{0{,}2\,\Omega}$$

de donde: $R_p = 0{,}1\,\Omega$

Resistencia total en el circuito:

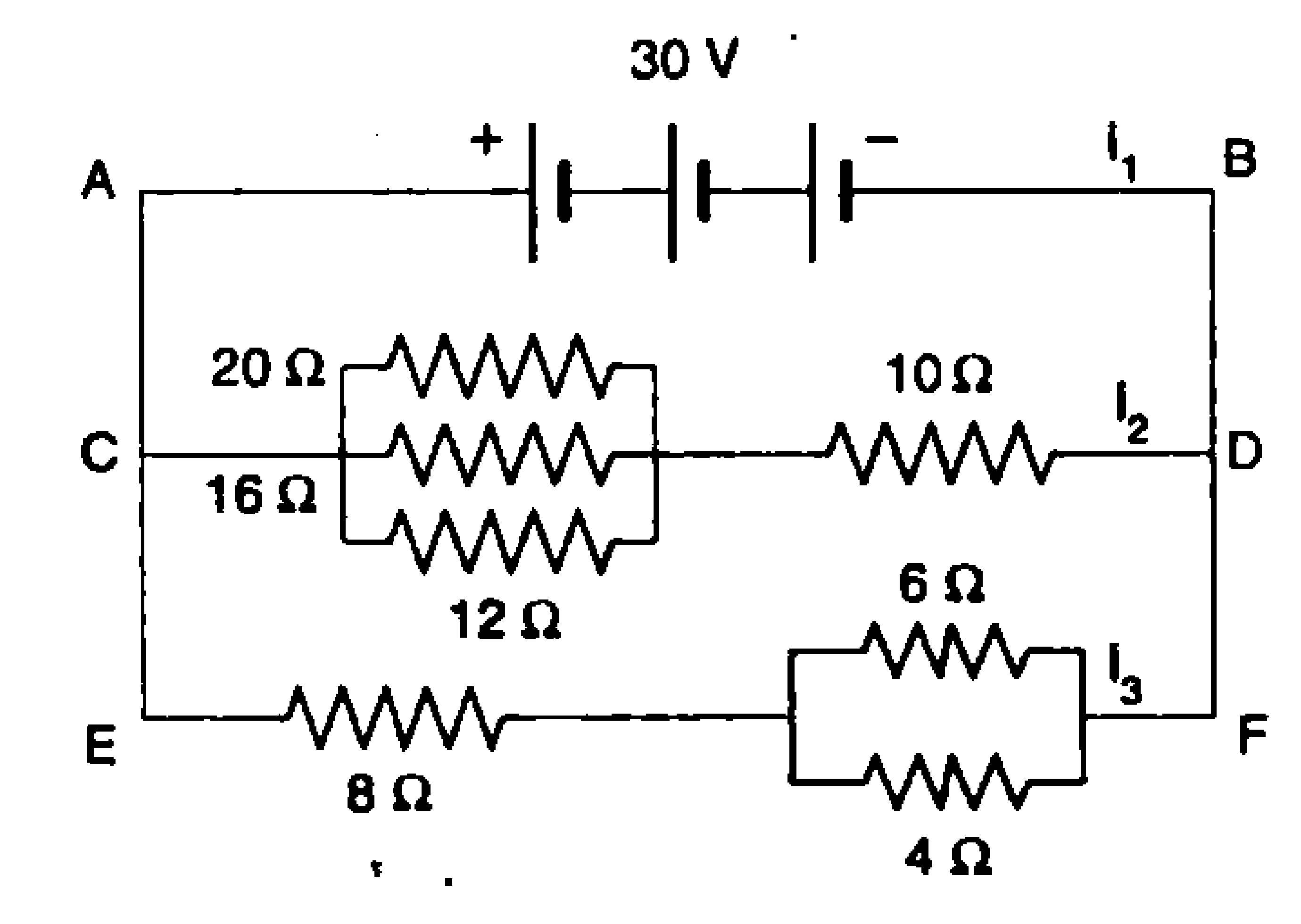
$$R_T = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} + 2 + 0{,}1 = 3{,}8\,\Omega \quad \text{(b)}$$

a) y b) en (1): $I = \frac{6\,V}{3{,}8\,\Omega}$

Rpta.: $I = 1{,}57\,A$

PROBLEMA 12. En el gráfico que se muestra, calcular:

a) Las intensidades I_1, I_2 e I_3.
b) Las intensidades y el voltaje en los bornes de la asociación en paralelo del ramal CD.



RESOLUCIÓN : Se indica con flechas una dirección arbitraria de la corriente.

a) Equivalente de las resistencias en paralelo.

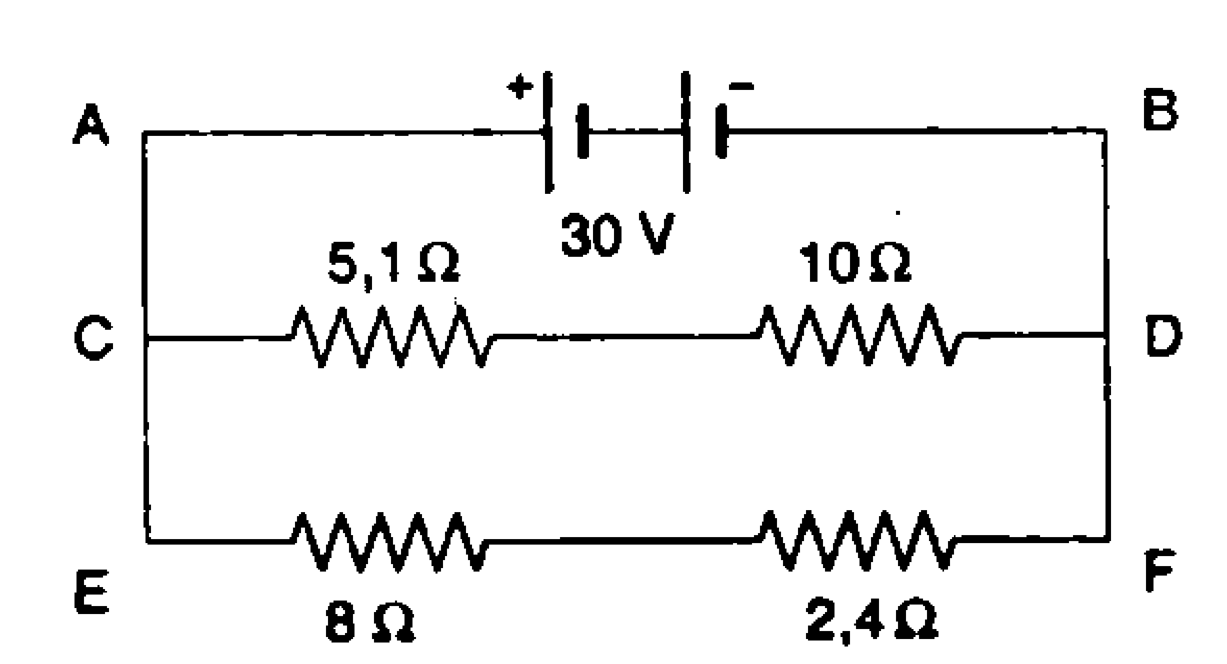
En CD: $\frac{1}{R_1} = \frac{1}{20\,\Omega} + \frac{1}{16\,\Omega} + \frac{1}{12\,\Omega}$

$$R_1 = 5{,}1\,\Omega$$

En EF: $\frac{1}{R_2} = \frac{1}{6\,\Omega} + \frac{1}{4\,\Omega}$

$$R_2 = 2{,}4\,\Omega$$

El circuito puede representarse gráficamente así:

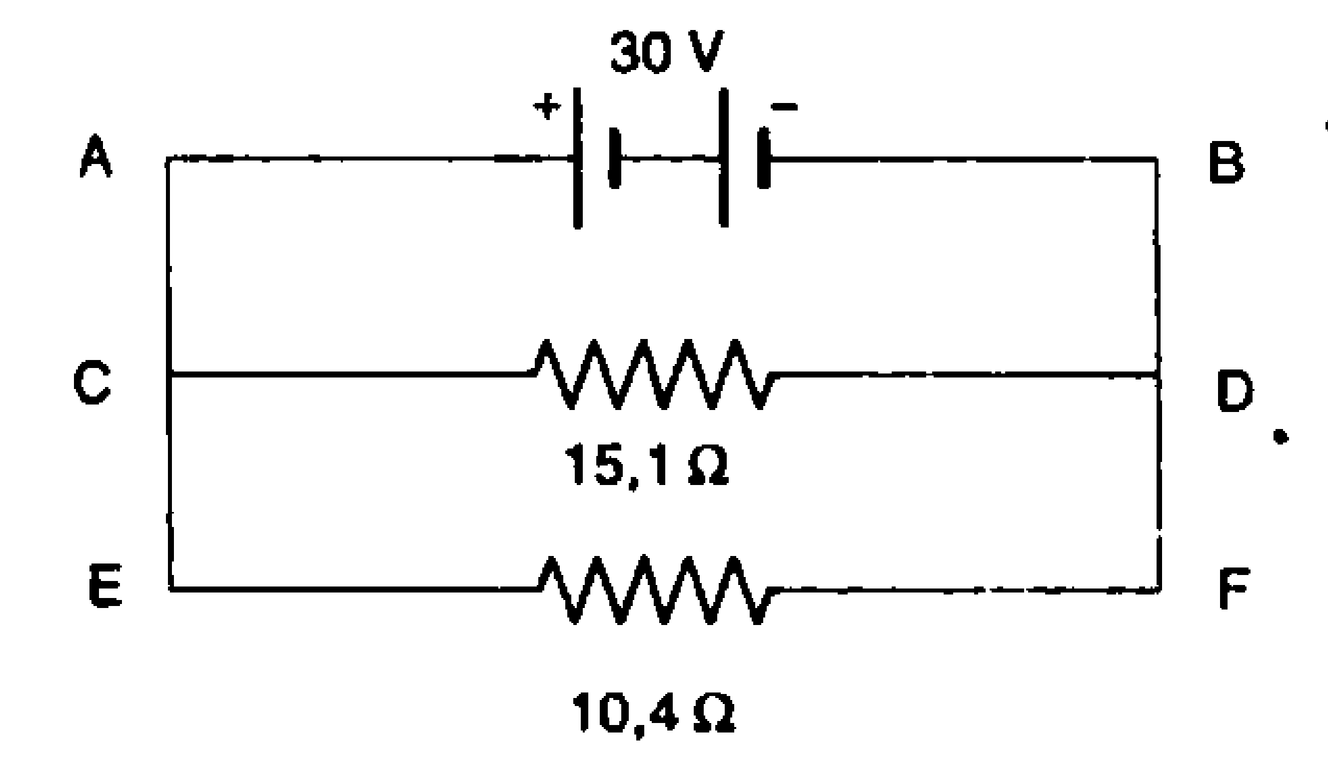


http://librosysolucionarios.net

Luego, la resistencia equivalente:

En CD: $R_{CD} = 5{,}1\ \Omega + 10\ \Omega = 15{,}1\ \Omega$

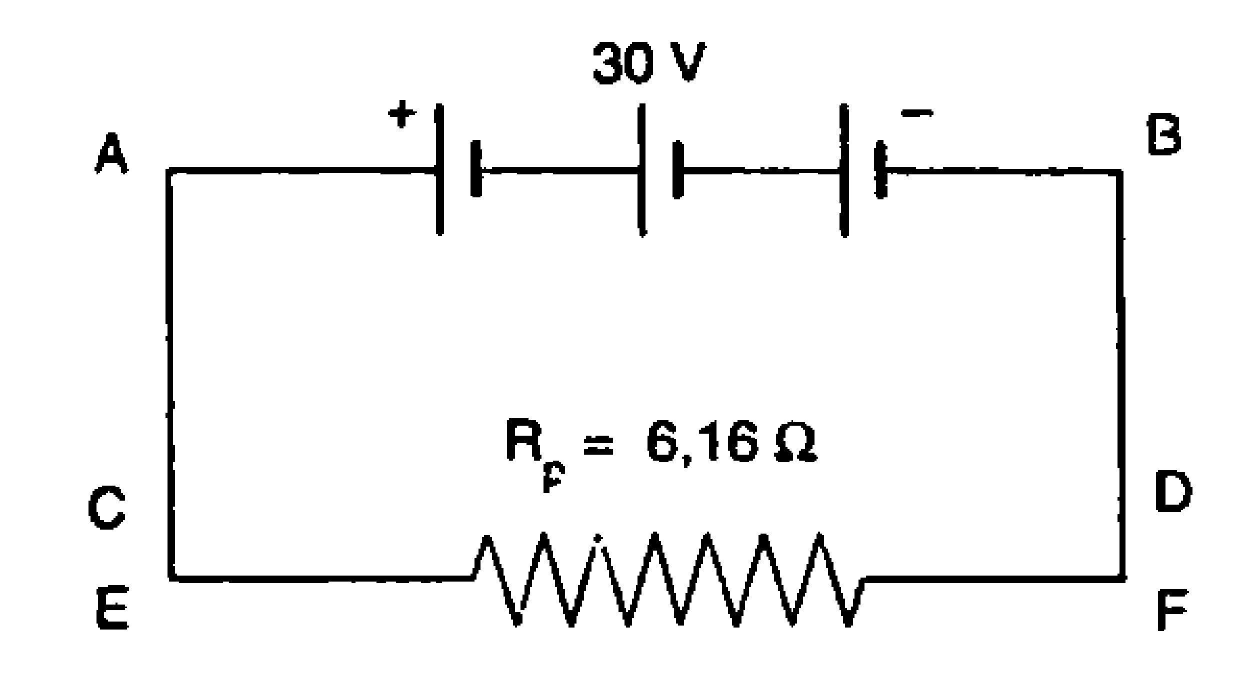
En EF: $R_{EF} = 8\ \Omega + 2{,}4\ \Omega = 10{,}4\ \Omega$



Resistencias equivalentes en CD y EF:

$$\frac{1}{R_p} = \frac{1}{15{,}1\ \Omega} + \frac{1}{10{,}4\ \Omega}$$

de donde $R_p = 6{,}16\ \Omega$



Intensidad de la batería:

$$I_1 = \frac{30\ \text{V}}{1\ \Omega + 6{,}16\ \Omega} = 4{,}2\ \text{A}$$

Tensión en los bornes de la batería:

$$E = 30\ \text{V} - 1\ \Omega \times 4{,}2\ \text{A}$$

$$E = 25{,}8\ \text{V}$$

Como la batería y los ramales CD y EF están en paralelo sus tensiones también serán 25,8 V, luego:

$$I_2 = \frac{25{,}8\ \text{V}}{R_{CD}} = \frac{25{,}8\ \text{V}}{15{,}1\ \Omega}$$

$$I_2 = 1{,}7\ \text{A}$$

$$I_3 = \frac{25{,}8\ \text{V}}{R_{EF}} = \frac{25{,}8\ \text{V}}{10{,}4\ \Omega}$$

$$I_3 = 2{,}5\ \text{A}$$

b) La intensidad del ramal CD es 1,7 A, la diferencia de potencial en la resistencia de 10 Ω será:

$$R\,I_2 = 10\ \Omega \times 1{,}7\ \text{A} = 17\ \text{V}$$

La caída de potencial en el mismo ramal para el grupo paralelo será: 25,8 V - 17 V = 8,8 V

Intensidad de la resistencia de 20 Ω:

$$I' = \frac{8{,}8\ \text{V}}{20\ \Omega} = 0{,}44\ \text{A}$$

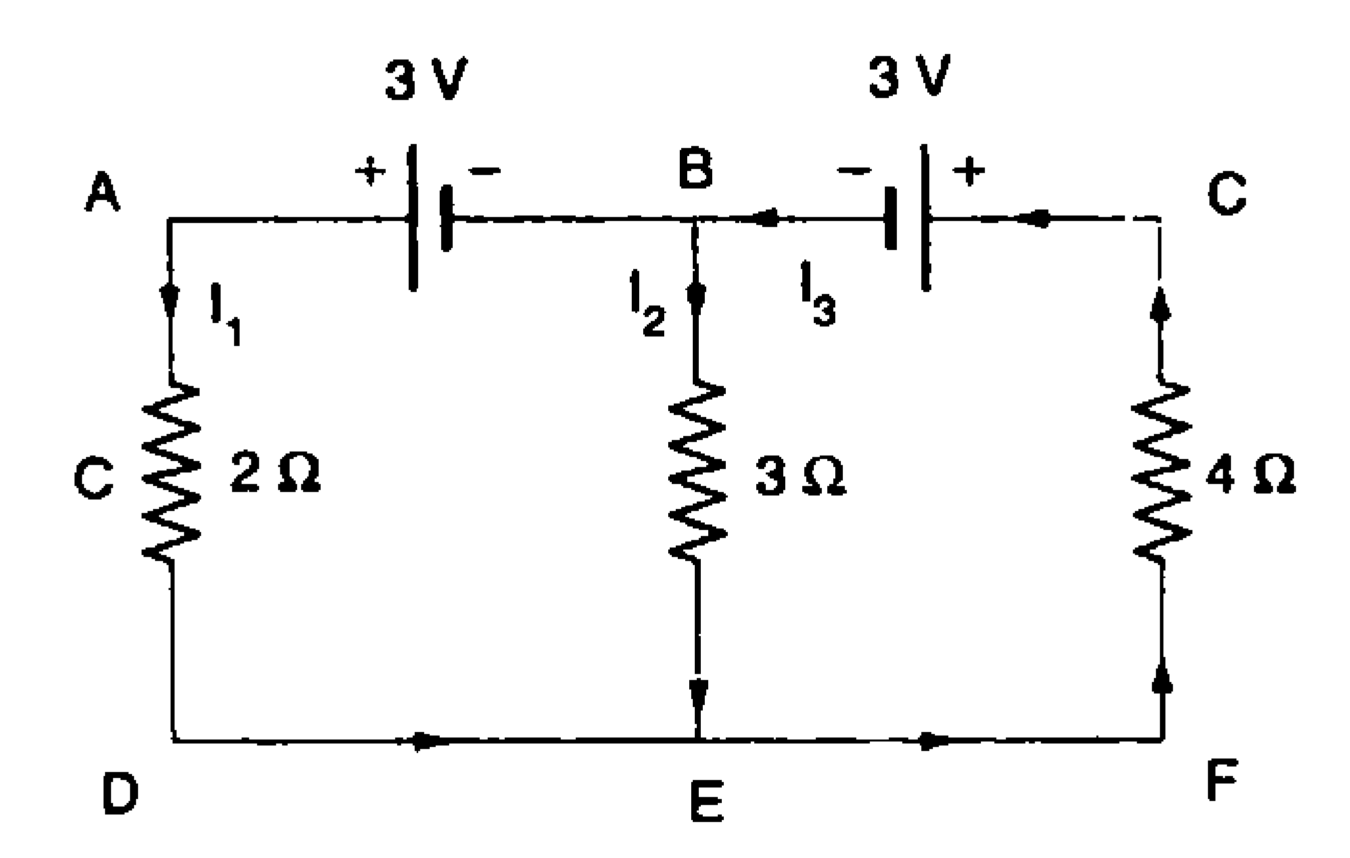
Intensidad de la resistencia de 16 Ω:

$$I'' = \frac{8{,}8\ \text{V}}{16\ \Omega} = 0{,}55\ \text{A}$$

Intensidad de la resistencia de 12 Ω:

$$I''' = \frac{8{,}8\ \text{V}}{12\ \Omega} = 0{,}73\ \text{A}$$

PROBLEMA 13. En la figura adjunta, calcular las intensidades de corriente que pasan por cada una de las resistencias externas. Despréciese el valor de las resistencias internas.



RESOLUCIÓN : Se ha elegido una dirección arbitraria de la corriente, la cual se ha marcado con flechas en el circuito (cuando se proponen figuras como problemas, no se indica con flechas el sentido de la corriente).

1ra. Ley de Kirchoff para el nudo B:

$$I_3 = I_1 + I_2 \qquad (1)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla ABEDA:

$$-3\ \text{V} = -2\ \Omega\, I_1 + 3\ \Omega\, I_3 \qquad (2)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla BCFEB:

$$5\ \text{V} = -3\ \Omega\, I_2 - 4\ \Omega\, I_3 \qquad (3)$$

De (1): $I_2 = I_3 - I_1 \qquad (4)$

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo en (2) y (3):

En (2): $-3\,V = -2\,\Omega\, I_1 + 3\,\Omega\,(I_3 - I_1)$

$-3\,V = -5\,\Omega\, I_1 + 3\,\Omega\, I_3$ (5)

En (3): $5\,V = -3\,\Omega\,(I_3 - I_1) - 4\,\Omega\, I_3$

$5\,V = 3\,\Omega\, I_1 - 7\,\Omega\, I_3$ (6)

De (5) y (6): $I_1 = 0{,}231\ A$

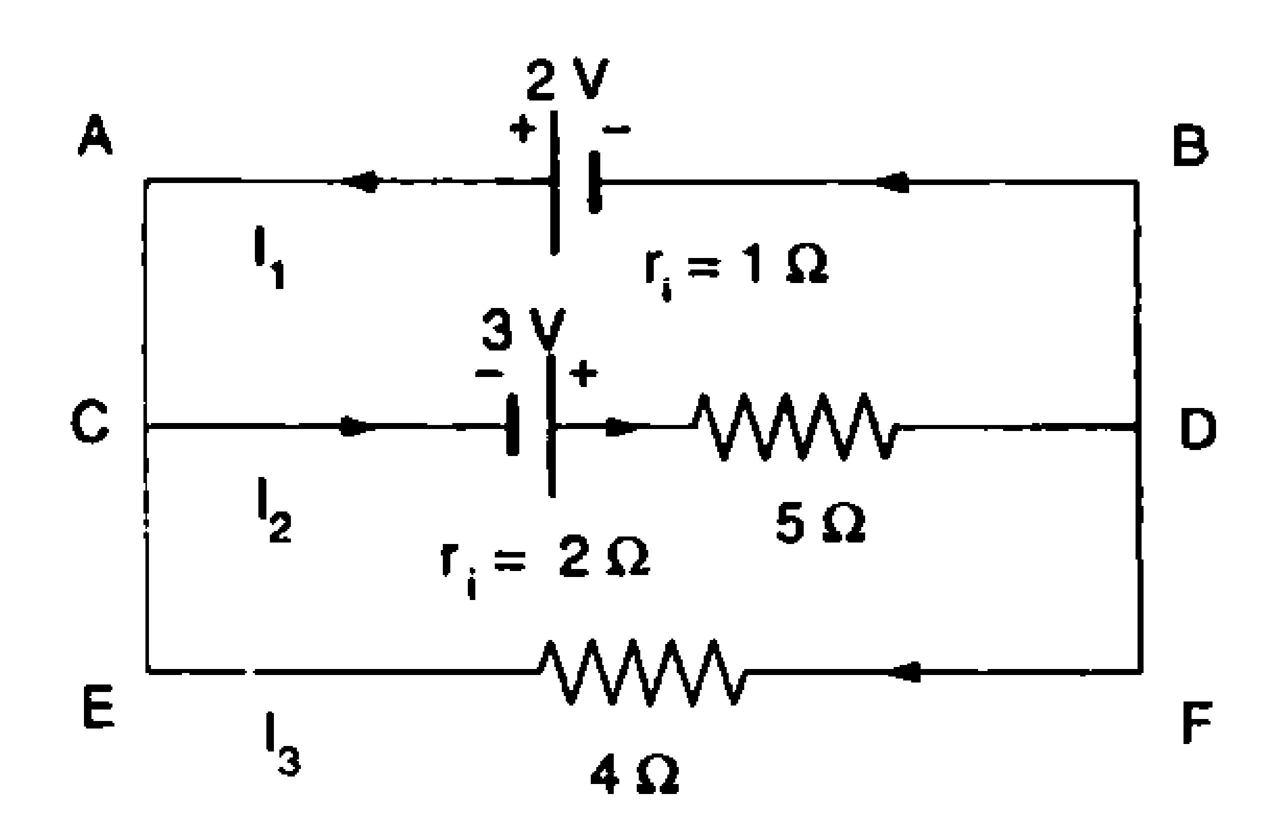
$I_3 = 0{,}615\ A$

Los signos negativos que salgan, significan que el sentido de la corriente que se ha supuesto, es contrario al verdadero.

Finalmente sustituyendo los valores de I_1 e I_3 en (4): $I_2 = 0{,}384\ A$

PROBLEMA 14. En el gráfico siguiente, se pide calcular:

a) La intensidad en el ramal EF.
b) El voltaje en los 3 ramales.



RESOLUCIÓN: Se elige arbitrariamente un sentido de la corriente.

1ra Ley de Kirchoff, nudo C:

$$I_2 = I_1 + I_3 \qquad (1)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla CDFE:

$$3 = 5\,I_2 + 4\,I_3 + 2\,I_2$$

$$3 = 7\,I_2 + 4\,I_3 \qquad (2)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla ABDC:

$$2 + 3 = 2\,I_2 + 5\,I_2 + I_1$$

$$5 = 7\,I_2 + I_1 \qquad (3)$$

Sustituyendo (1) en (2) y en (3):

$$3 = 7\,I_1 + 11\,I_3 \qquad (4)$$

$$5 = 8\,I_1 + 7\,I_3 \qquad (5)$$

De (4): $$I_1 = \frac{3 - 11I_3}{7} \qquad (6)$$

Sustituyendo en (5):

$$5 = \frac{8(3 - 11\,I_3)}{7} + 7\,I_3$$

$\therefore \quad I_3 = -0{,}282\ A$

El signo negativo indica que el sentido de la corriente I_3 es contrario al que se supuso. Sustituyendo en (6):

$$I_1 = 0{,}872\ A$$

Sustituyendo estos valores en (1):

$$I_2 = 0{,}590\ A$$

b) Como lo 3 ramales están en paralelo, sus voltajes son iguales, cuyos valores se obtienen así:

AB: $E = 2\,V - I_1\, r$

$E = 2\,V - 0{,}872\,A \times 1\,\Omega$

$E = 1{,}13\,V$

CD: $E = -3\,V - I_2\,(R_2 + r_2)$

$E = -3\,V + 0{,}59\,A \times (5 + 2)\,\Omega$

$E = 1{,}13\,V$

EF: $E = I_3\, R_3$

$E = 0{,}282\,A \times 4\,\Omega = 1{,}13\,\Omega$

PROBLEMA 15. En la figura que se muestra a continuación se pide hallar I_1, I_2 e I_3.

$E_1 = 30\ V$, I_1, A, B, $r_1 = 2\,\Omega$, $E_2 = 40\ V$, $R_1 = 20\,\Omega$, I_2, E, D, $r_2 = 3\,\Omega$, $E_3 = 15\ V$, $R_2 = 5\,\Omega$, I_3, F, C, $r_3 = 3\,\Omega$

RESOLUCIÓN: En primer lugar tiene que suponerse un sentido para la corriente. Ese sentido es arbitrario.

1ra Ley de Kirchoff para el nudo D:

$$I_2 = I_1 + I_3 \qquad (1)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla ABDEA:

$$E_1 + E_2 = I_1 r_1 + I_1 R_1 + I_2 r_2$$

Sustituyendo datos:

$$30 + 40 = I_1 \times 2 + I_1 \times 20 + I_2 \times 3$$

$$\therefore \quad 70 = 22 I_1 + 3 I_2 \qquad (2)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla DEFCD:.

$$E_2 + E_3 = I_2 r_2 + I_3 r_3 + I_3 R_2$$

Sustituyendo datos:

$$40 + 15 = I_2 \times 3 + I_3 \times 3 + I_3 \times 5$$

de donde:

$$55 = 3 I_2 + 8 I_3 \qquad (3)$$

$$\text{De (2):} \quad I_1 = \frac{70 - 3 I_2}{22} \qquad (4)$$

$$\text{De (3):} \quad I_3 = \frac{55 - 3 I_2}{8} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1):

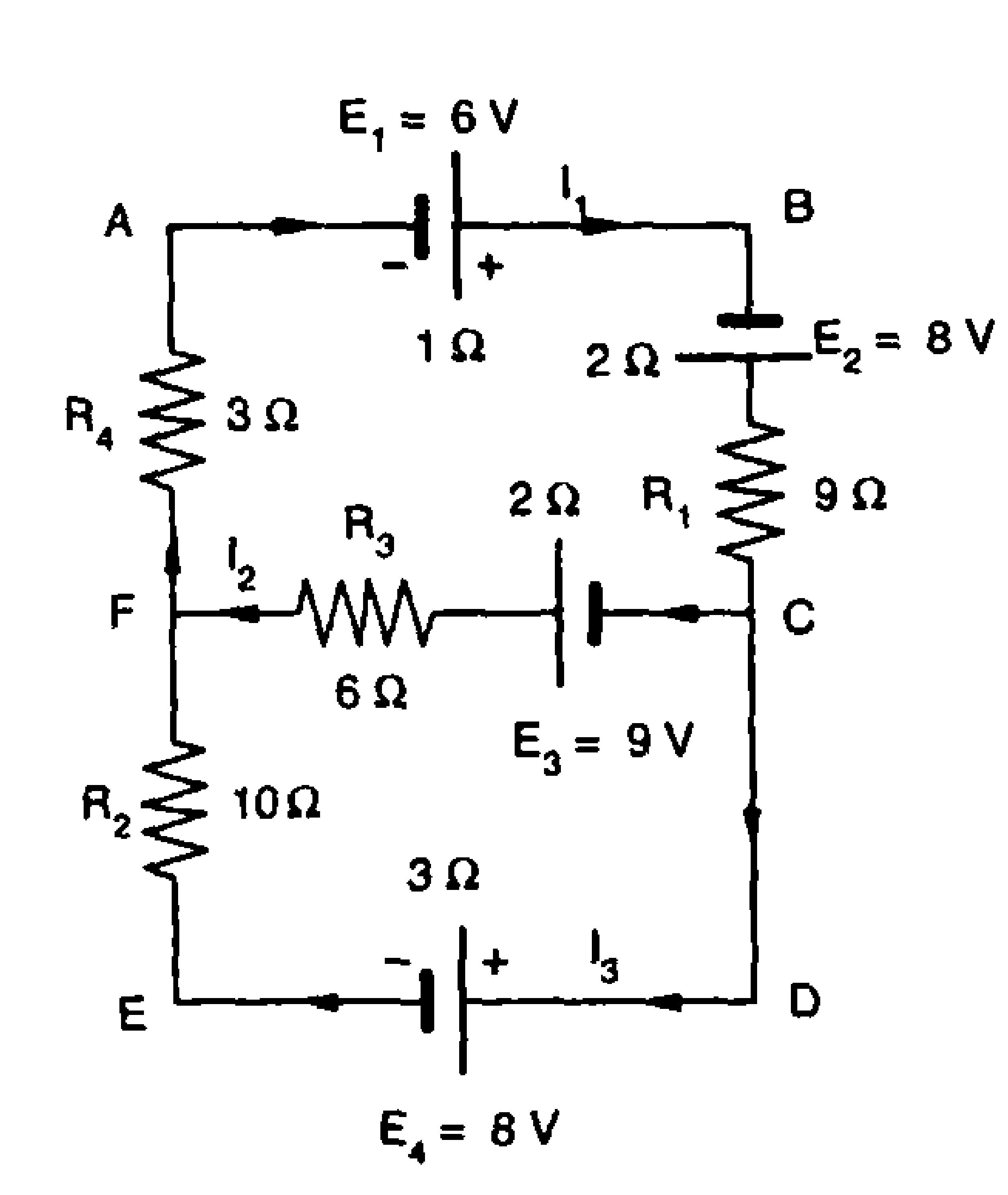
$$I_2 = \frac{70 - 3 I_2}{32} + \frac{55 - 3 I_2}{8}$$

de donde: $I_2 = 6{,}654$ A

Sustituyendo en (4) y (5):

$$I_1 = 2{,}274 \text{ A}; \quad I_3 = 4{,}379 \text{ A}$$

PROBLEMA 16. Hallar las intensidades I_1, I_2 e I_3 de la corriente que circula por cada tramo del circuito mostrado en la figura.



RESOLUCIÓN :

Se asigna un sentido arbitrario al sentido de la corriente, como el que se ha indicado en la figura. (Cuando la figura fue propuesta como problema, no se indicaba el sentido con las flechas).

1ra Ley de Kirchoff para el nudo C :

$$I_1 = I_2 + I_3 \qquad (1)$$

2da Ley de Kirchoff para la malla ABCFA:

$$E_1 + E_2 + E_3 = I_1 r_1 + I_1 r_2 + $$
$$+ I_1 R_1 + I_2 r_3 + I_2 R_3 + I_1 R_4$$

Sustituyendo datos:

$$6 + 8 + 9 = I_1 + 2 I_1 + 9 I_1 + $$
$$+ 2 I_2 + 6 I_2 + 3 I_1$$
$$23 = 15 I_1 + 8 I_2$$

2da Ley de Kirchoff, para la malla FCDEF:

$$E_3 + E_4 = -I_3 r_4 - I_3 R_2 + I_2 r_3$$
$$9 + 8 = -3 I_3 - 10 I_3 + 6 I_3 + 2 I_2$$
$$17 = 2 I_2 - 7 I_3 \qquad (3)$$

$$\text{De (2):} \quad I_1 = \frac{23 - 8 I_2}{15} \qquad (4)$$

$$\text{De (3):} \quad I_3 = \frac{2 I_2 - 17}{7} \qquad (5)$$

Sustituyendo (4) y (5) en (1):

$$\frac{23 - 8 I_2}{15} = I_2 + \frac{2 I_2 - 17}{7}$$

de donde: $I_2 = 2{,}18$ A

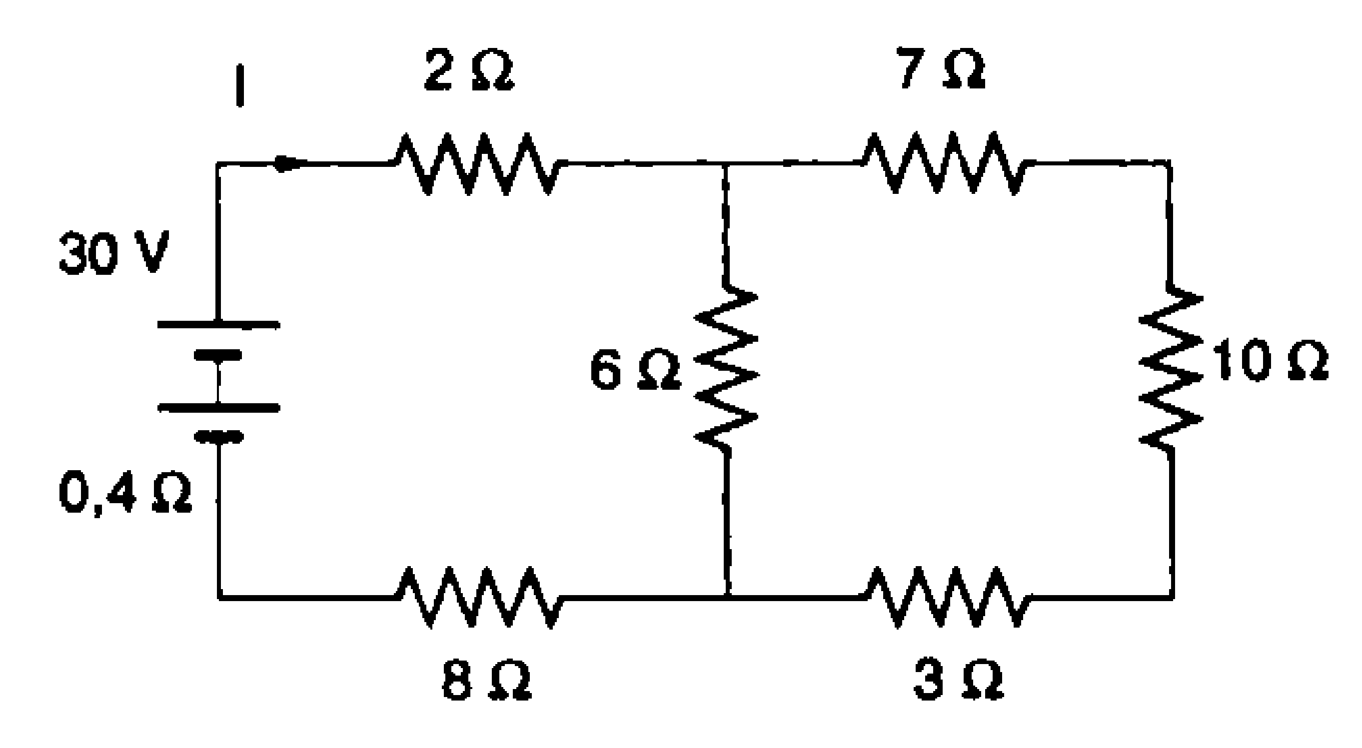
Sustituyendo en (4) y (5):

$$I_1 = 0{,}37 \text{ A}; \quad I_3 = -1{,}81 \text{ A}$$

http://librosysolucionarios.net

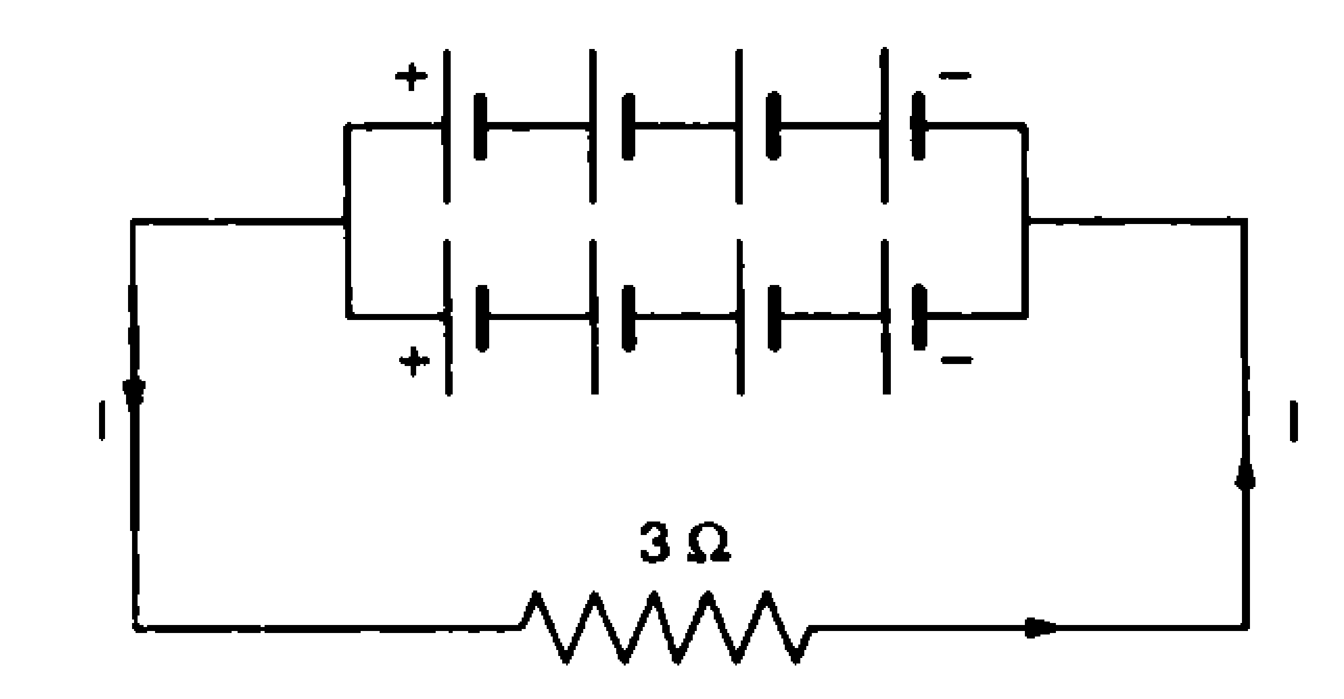
PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Hallar la intensidad de la corriente del circuito propuesto.



Rpta.: $I \cong 2{,}08$ A

2. Cada serie de pilas consta de 4 pilas de 1,5 V cada una y 0,08 Ω de resistencia interna. Tomando en cuenta la resistencia externa, hallar la intensidad del circuito.



Rpta.: $I = 1{,}9$ A

3. Un conductor de resistencia 5 Ω y un galvanómetro de resistencia 12 Ω se ponen en paralelo. ¿Cuál es la proporción de las intensidades que pasan por cada uno?

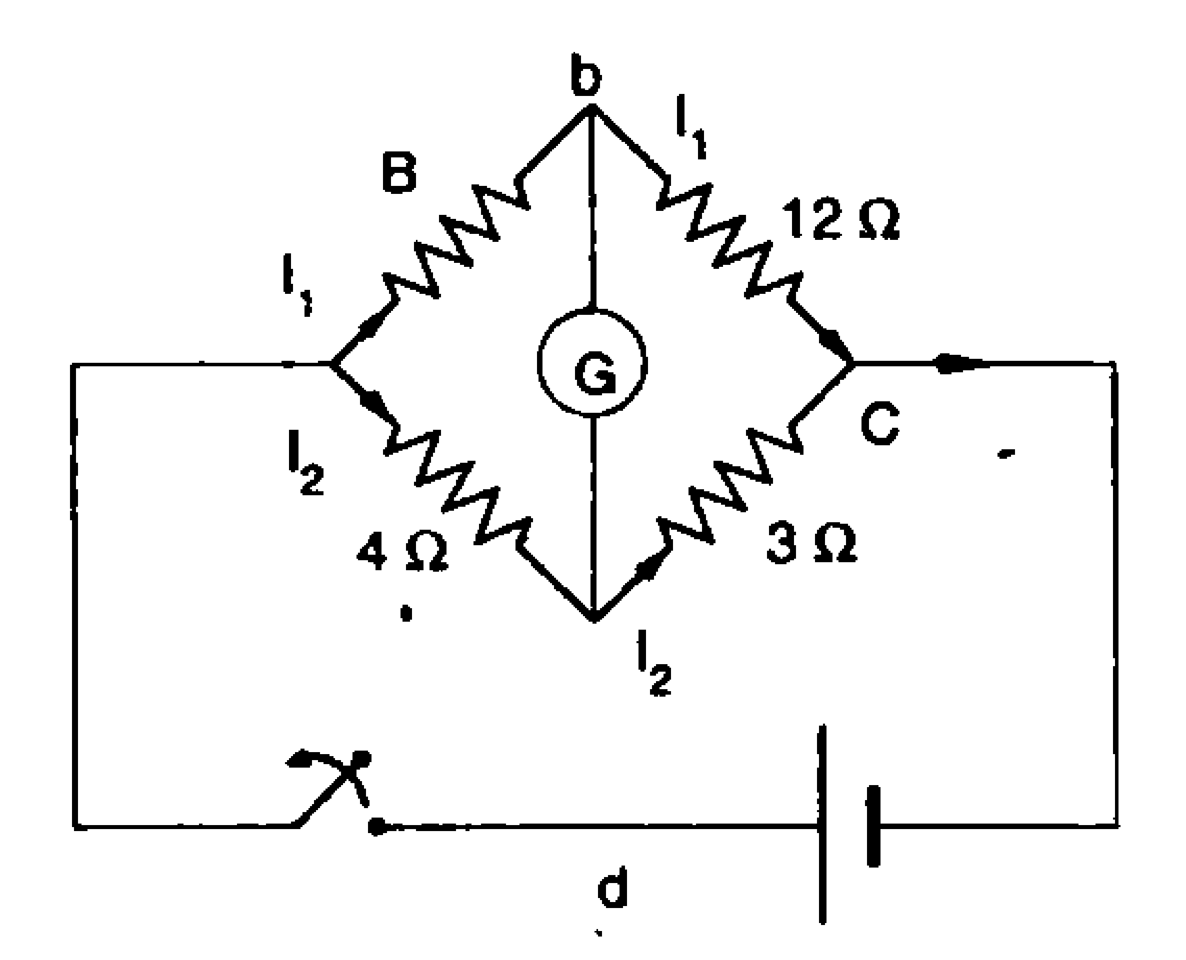
Rpta.: $I_C = 0{,}2491$

$I_G = 0{,}7061$

4. ¿Cuál será la resistencia que debe colocarse en paralelo para que por un amperímetro de 0,1 Ω de resistencia pase el 10% de la corriente?

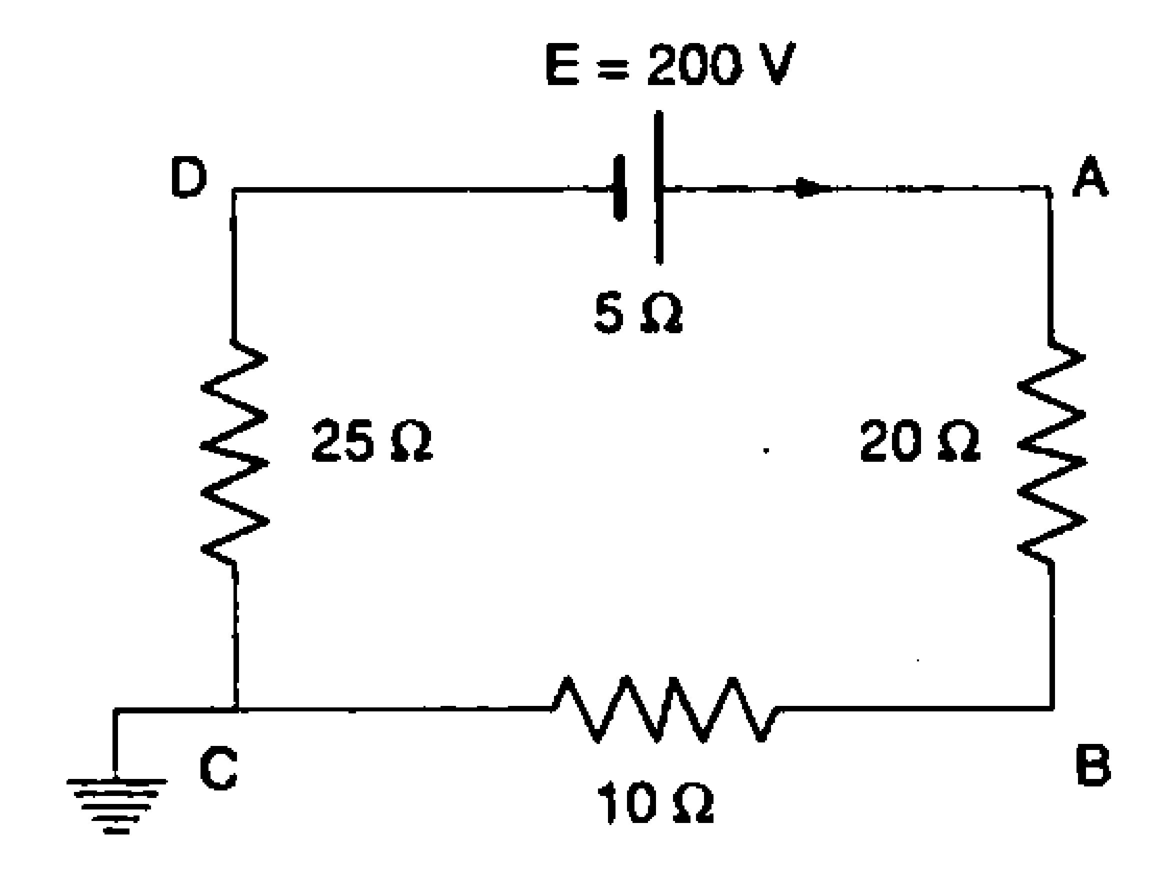
Rpta.: Q = 0,01 Ω

5. Para calcular la resistencia de una bobina "B" se usa un puente de Wheatstone. Las otras resistencias se conocen. La lectura en el galvanómetro es cero ¿Cuál es la resistencia de la bobina?



Rpta.: $R_B = 16$ Ω

6. En el siguiente gráfico, calcular:
   a) La intensidad.
   b) La diferencia de potencial en los bornes de la batería.
   c) La diferencia de potencial $V_A - V_B$
   d) El potencial en A



NOTA : El hecho que el punto C esté unido a tierra, indica solamente que el potencial en ese punto es cero.

Rpta.: a) $I = 3{,}\hat{3}$ A

b) $V = 183{,}3$ V

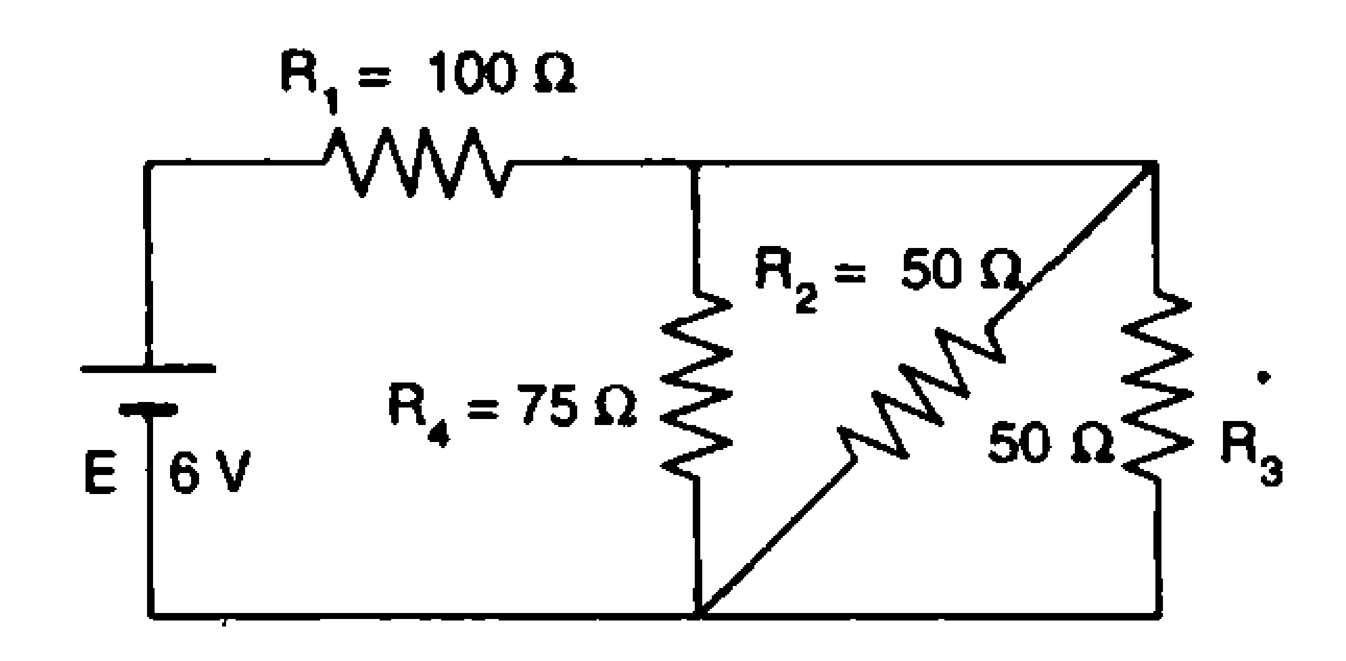
c) $V_A - V_B = 66{,}6$ V

d) $V_A - V_C = 100$ V

7. En la figura:
   a) ¿Cuál es la resistencia equivalente de la red?

http://librosysolucionarios.net

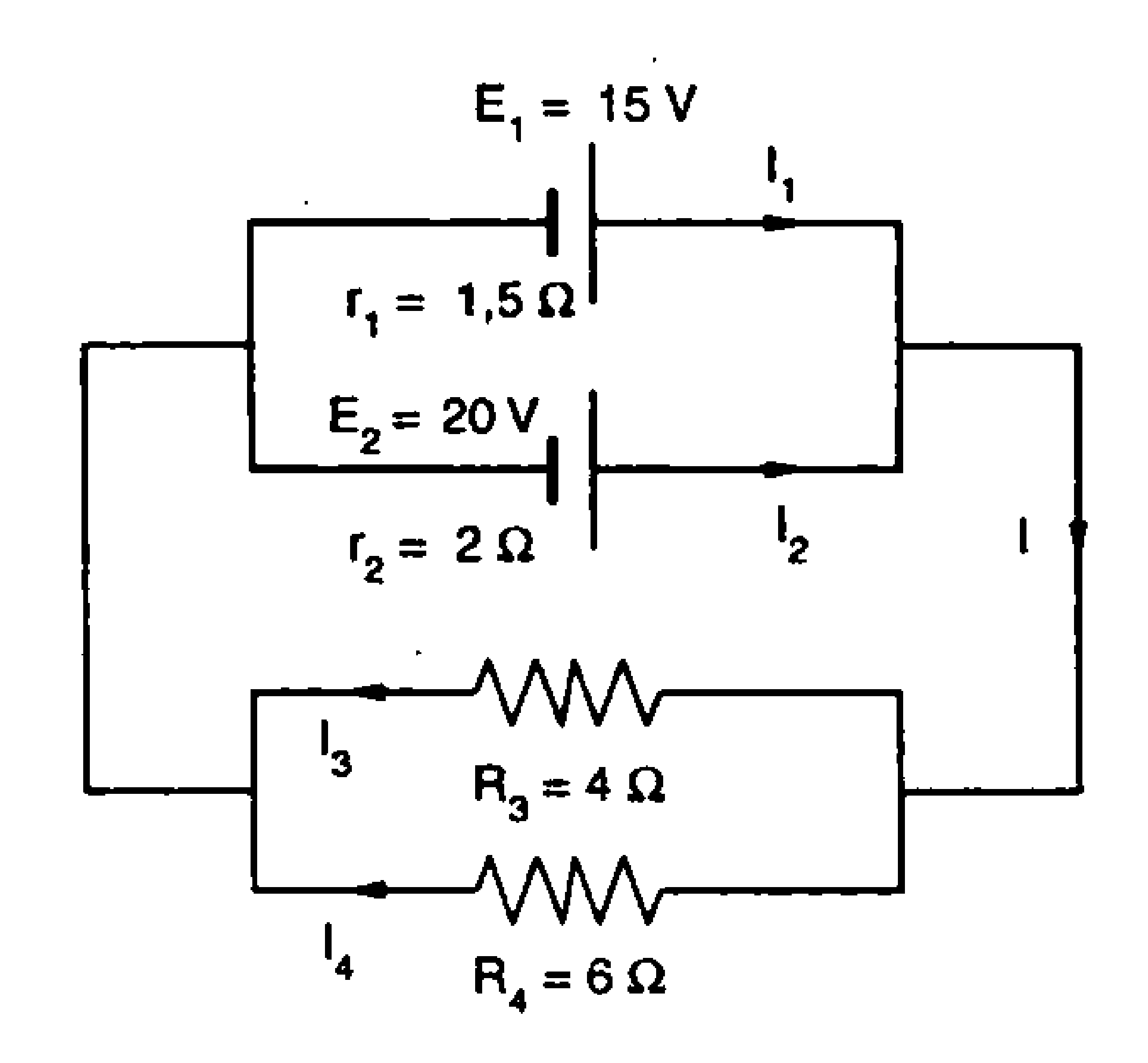
b) ¿Cuál es la corriente en cada resistencia?



Rpta.: R = 118,75 Ω $I_2 = I_3 = 0{,}02$ A

$I_1 = 0{,}05$ A $I_4 = 2{,}105$ A

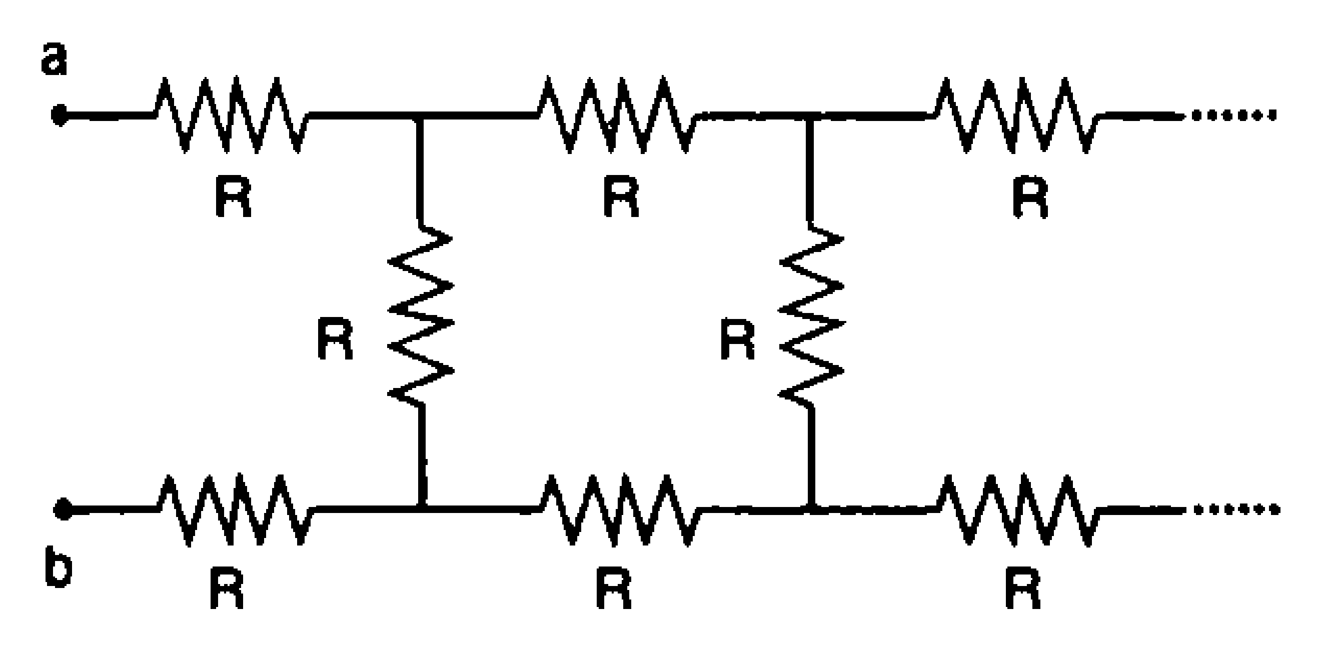
8. Calcular las intensidades de las diferentes partes del circuito.



Rpta.: $I_1 = 1{,}578$ A $I_3 = 3{,}158$ A

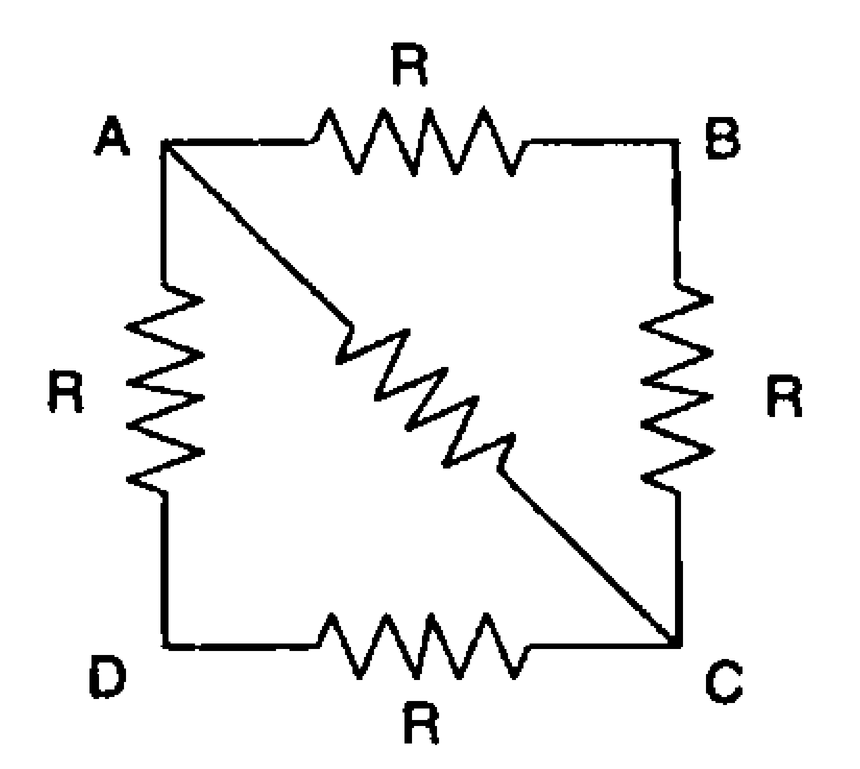
$I_2 = 3{,}684$ A $I_4 = 2{,}105$ A

9. Hallar la resistencia efectiva (entre los terminales a y b) de una serie indefinida de resistencias conectadas como se indica en la figura, si todas tienen un mismo valor R.



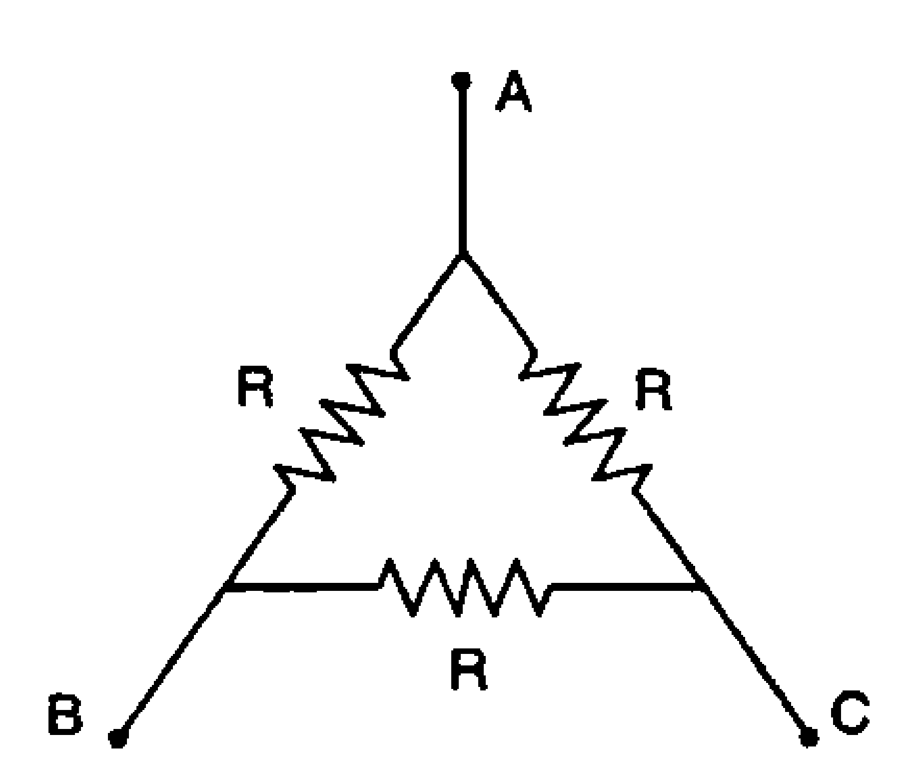
Rpta.: $R_{Eq} = (1 + \sqrt{3})\,R$

10. ¿Entre qué puntos se tiene la menor resistencia equivalente?



Rpta.: AC

11. La resistencia medida entre 2 pares terminales es de 8 r. Dar la resistencia R.

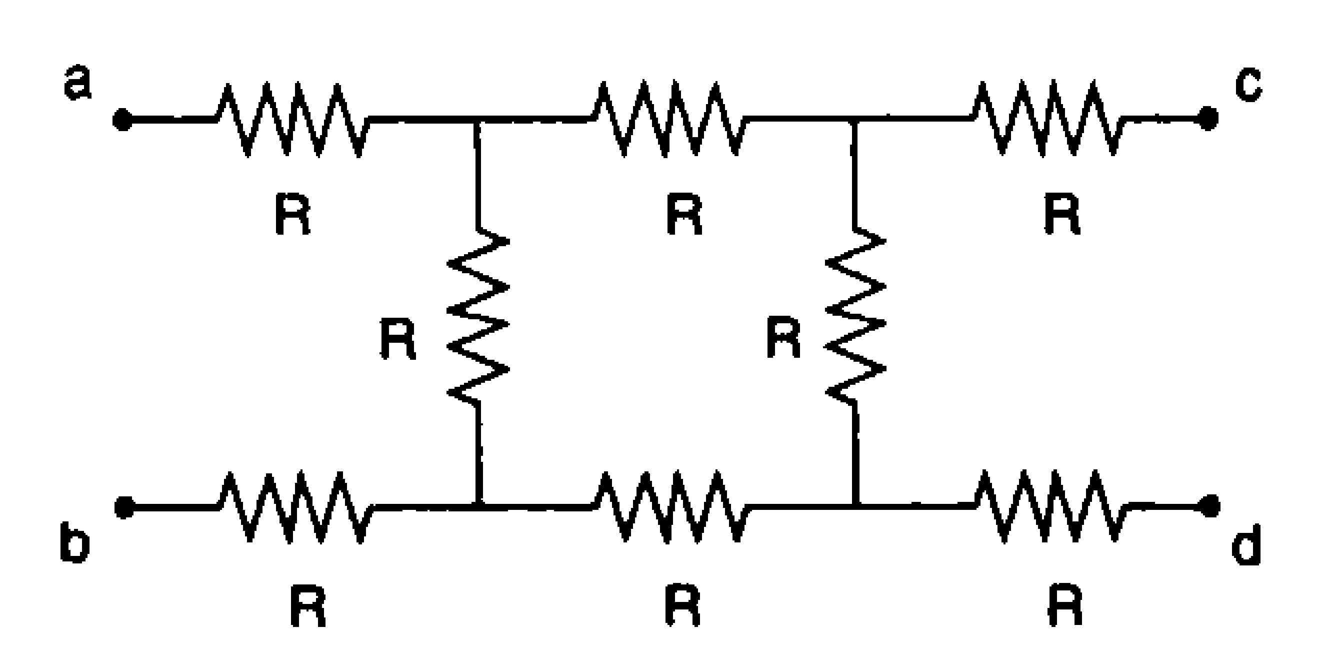


Rpta.: R = 12 r

12. Un alambre de cobre de longitud "L" y resistencia "R" se divide en "n" partes iguales. Luego los "n" segmentos se juntan formando un conductor de longitud L/n. Determinar su resistencia.

Rpta.: $R_x = \dfrac{R}{n^2}$

13. Hallar la resistencia equivalente vista desde ab.

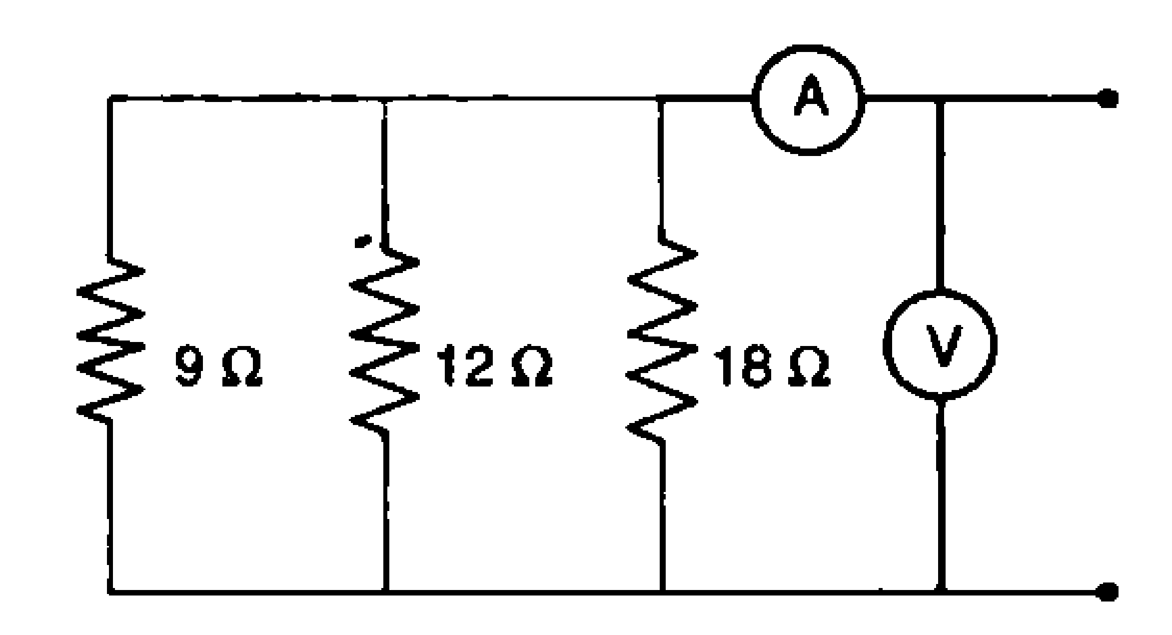


http://librosysolucionarios.net

Rpta.: $R_{EQUIVALENTE_{ab}} = \frac{11}{4} R$

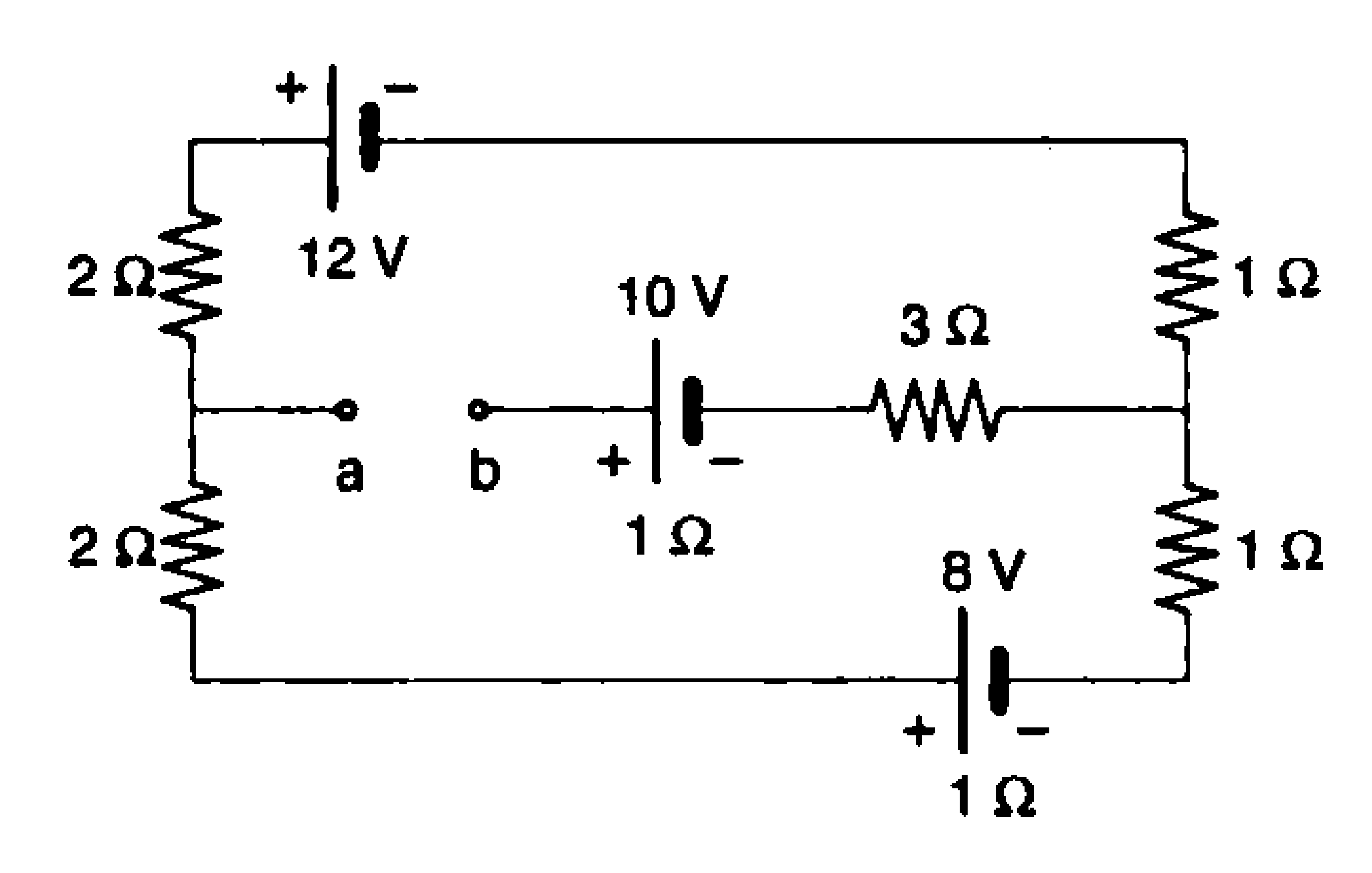
NOTA : Al tomarse la resistencia equivalente entre a y b, no circula corriente por "gc" y por lo tanto se puede sacar esa rama sin alterar el circuito. La rama "hd" se puede sacar también.

14. En el circuito mostrado el amperímetro A marca 6 amperios. ¿Qué resistencia debe quitarse para que A marque 4 amperios?



Rpta.: Se debe quitar R = 12 Ω

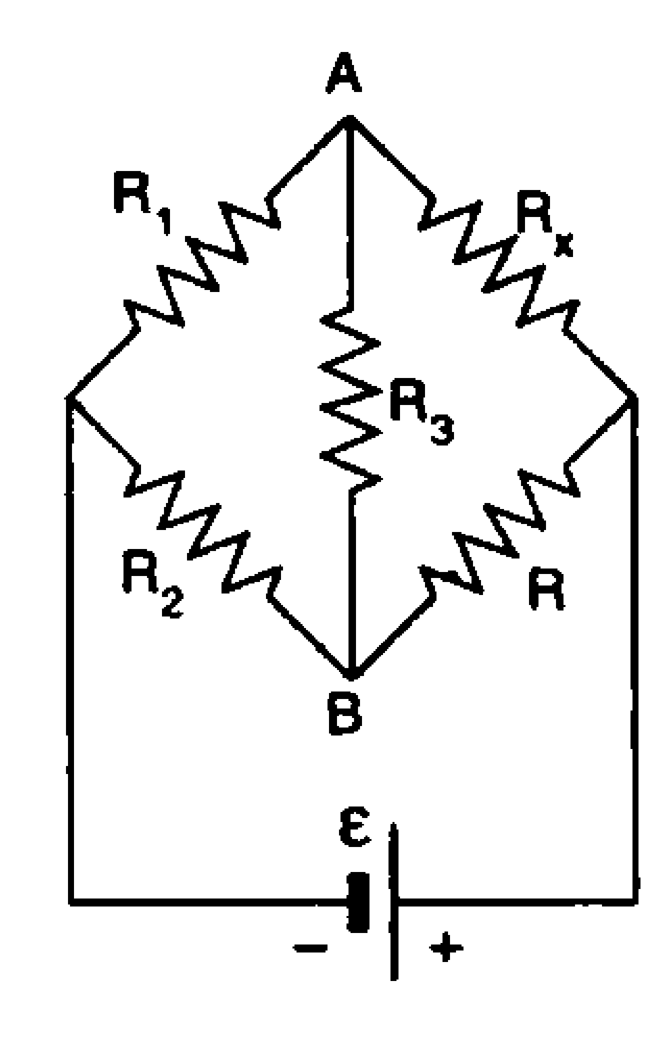
15. En el circuito que se muestra:
a) Hallar la diferencia de potencial entre "a" y "b".
b) Si "a" y "b" se conectan, calcular la corriente en la pila de 12V.



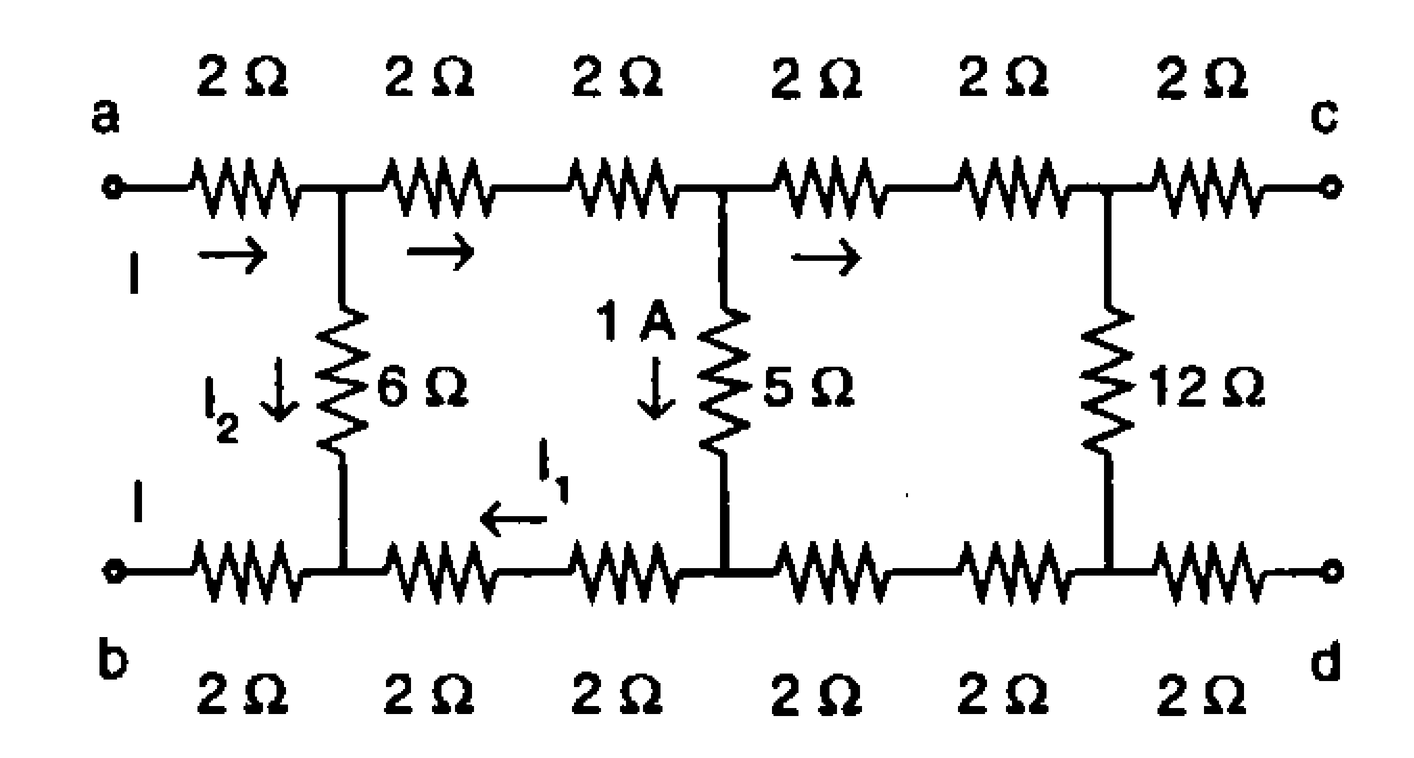
Rpta.: a) 0,22 V
b) 0,46 V

16. En el circuito mostrado, hallar R_x si: $V_{AB} = 0V$, además: $R_1 = 10\,\Omega$, $R_2 = 5\,\Omega$ y $R_3 = 15\,\Omega$

Rpta.: $R_x = 30\,\Omega$

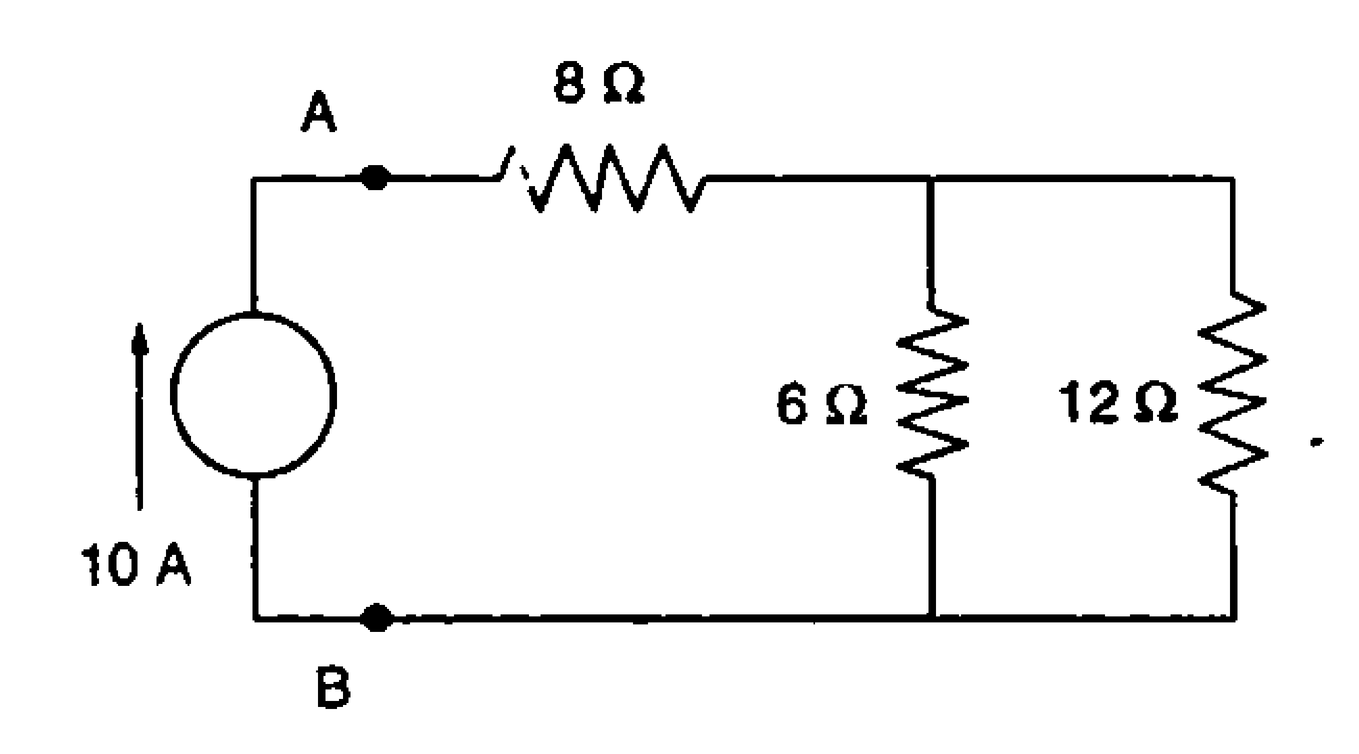


17. En el circuito dado:
a) Hallar la resistencia de la red entre los bornes "a" y "b".
b) Calcular la diferencia de potencial entre "a" y "b", cuando circula una corriente de 1 A en la resistencia de 5 Ω



Rpta.: a) 8 Ω b) 30 V

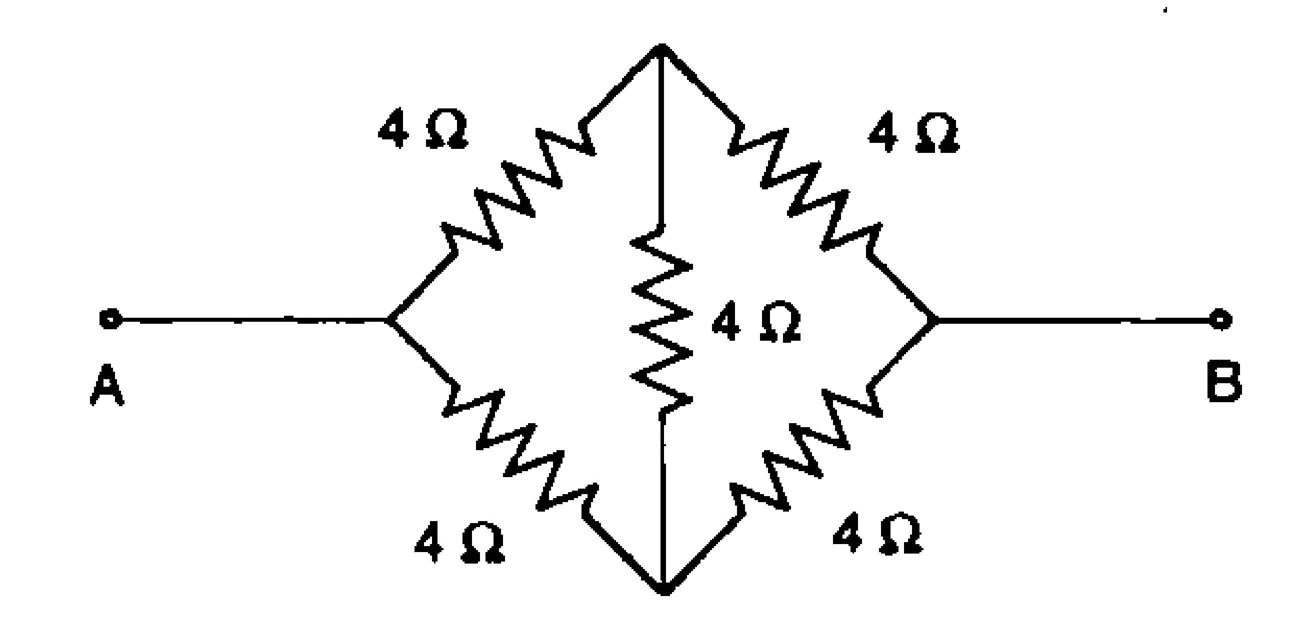
18. Hallar la diferencia de potencial entre los puntos "A" y "B" del circuito que se muestra.



Rpta.: $V_{AB} = 120\,V$

19. Hallar la resistencia equivalente (R_{eq}) vista desde A - B.

http://librosysolucionarios.net



Rpta.: $R_{eq} = 4\ \Omega$

20. En el diagrama adjunto: $r = 1\ \Omega$

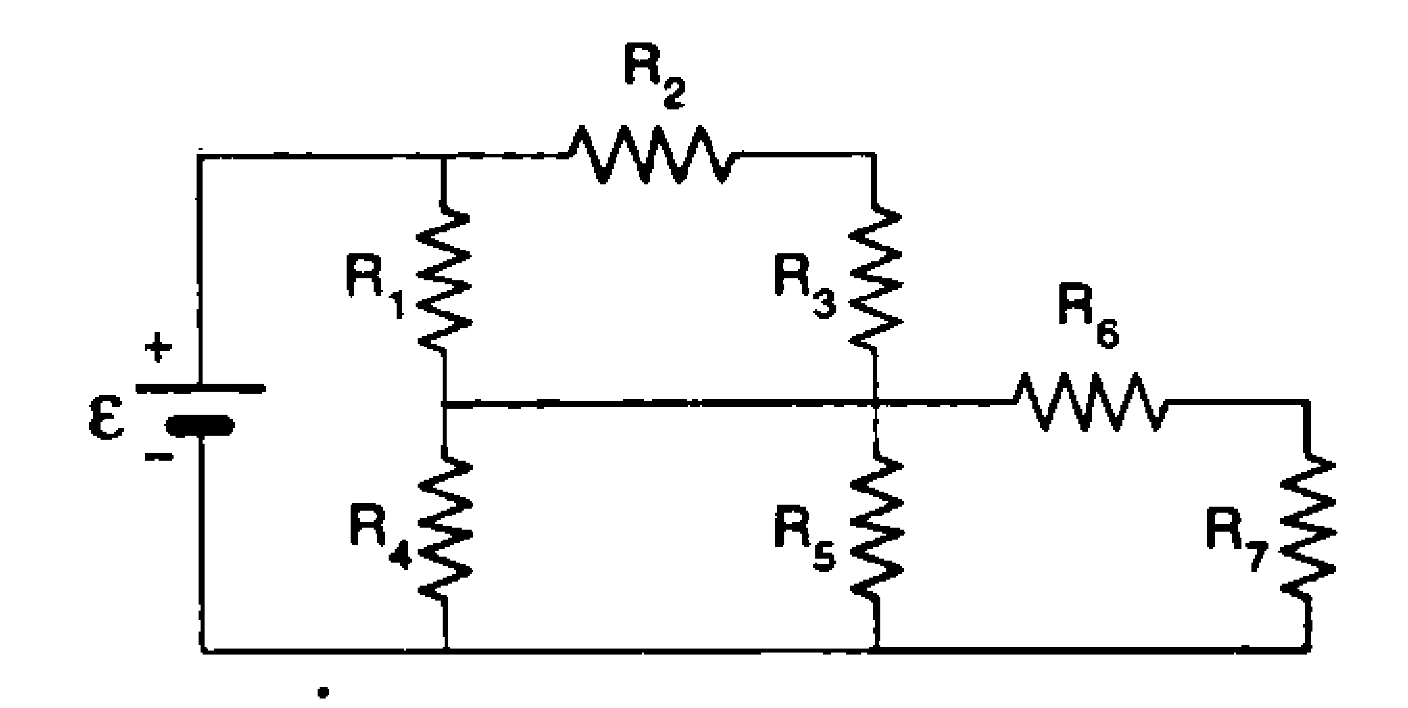
$R_1 = 5\ \Omega$ $\quad R_5 = 4\ \Omega$

$R_2 = 14\ \Omega$ $\quad R_6 = 1\ \Omega$

$R_3 = 6\ \Omega$ $\quad R_7 = 5\ \Omega$

$R_4 = 12\ \Omega$ $\quad \varepsilon = 105\ V$

Determinar la intensidad a través de cada resistor y su caída de potencial.



Rpta.: a) $I_1 = 12\ A$ $\quad I_4 = 2{,}5\ A$

$I_2 = 3\ A$ $\quad I_5 = 7{,}5\ A$

$I_3 = 3\ A$ $\quad I_6 = I_7 = 5\ A$

Rpta.: b) $V_1 = 60\ V$ $\quad V_5 = 30\ V$

$V_2 = 42\ V$ $\quad V_6 = 5\ V$

$V_3 = 18\ V$ $\quad V_7 = 25\ V$

$V_4 = 30\ V$

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 17

ENERGÍA Y POTENCIA DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

ENERGÍA ELÉCTRICA

Es la capacidad que tiene la corriente eléctrica para realizar un trabajo.

La energía eléctrica puede ser:

a) **Energía consumida** por aparatos eléctricos; y

b) **Energía producida** por un generador

NOTA: Las unidades SI de energía eléctrica o trabajo eléctrico y potencia eléctrica, son las mismas unidades empleadas en Mecánica y Calormetría.

a) **Energía consumida o disipada**

La energía consumida es la energía aprovechada o usada por un aparato o elemento del circuito.

De la expresión: $V = \dfrac{W}{Q}$

se tiene: $\boxed{W = V \cdot Q}$ (I)

W : Energía consumida, en joules "J"
V : Diferencia de potenciales, en voltios "V"
Q : Carga eléctrica, en coulombs "C"

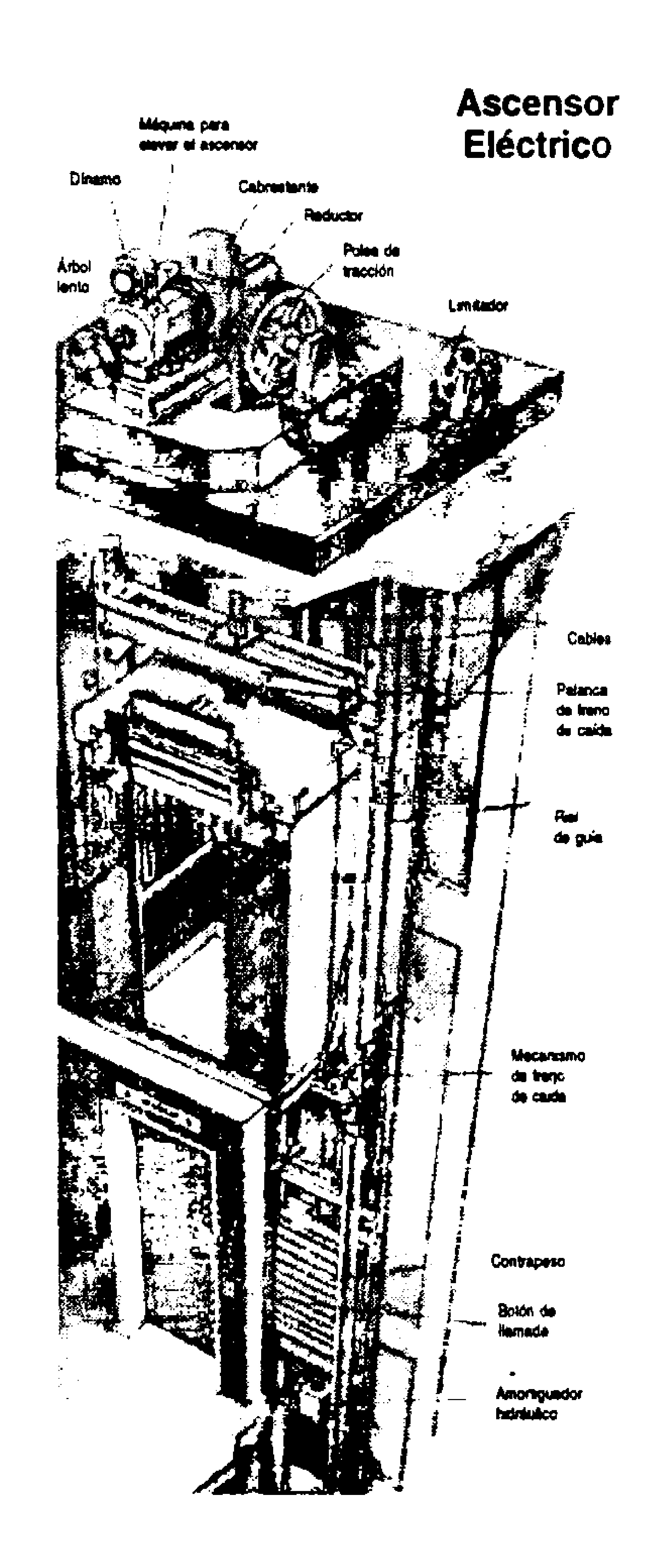
$$\boxed{\text{joule} = \text{voltio} \times \text{coulomb}}$$

$$\boxed{J = V \cdot C}$$

La fórmula (I) puede tomar otras formas en función de otras mediciones de la corriente. Así:

$Q = I \cdot t \quad \therefore \quad W = V \cdot I \cdot t$ (II)

Ascensor Eléctrico



$$I = \frac{V}{R} \quad \therefore \quad W = \frac{V^2 . t}{R} \quad (III)$$

$$V = I.R \quad \therefore \quad W = I^2.R.t \quad (IV)$$

b) Energía producida por un generador

Es la que sale del generador para ser aprovechada.

Recordando el valor de la f.e.m. (E) :

$$E = \frac{W}{Q}$$

de donde: $\boxed{W = E . Q}$ (I)

W : Energía de la fuente, en joules "J"
E : Fuerza elctromotriz, en voltios "V"
Q : Carga suministrada por la fuente, en coulombs "C"

$$\boxed{\text{joule} = \text{voltio} \times \text{coulomb}}$$

También puede tomar otras formas como:

$$W = E.I.t \ ; \ W = \frac{E^2.t}{R} \ ; \ W = I^2.R.t$$

POTENCIA ELÉCTRICA

Es el trabajo o energía desarrollada en la unidad de tiempo.

$$\boxed{P = \frac{W}{t}} \quad (I)$$

P = potencia, en watts "W"
W = energía o trabajo, en joules "J"
t = tiempo, en segundos "s"

$$\boxed{\text{watt} = \frac{\text{joule}}{\text{segundo}}}$$

$$\boxed{W = \frac{J}{s}}$$

También la fórmula de la potencia (I) puede tomar otras formas en función de otras mediciones de ia corriente. Así:

$$W = E.Q \quad \therefore \quad P = \frac{E.Q}{t} \quad (II)$$

$$Q = I.t \quad \therefore \quad P = I.E \quad (III)$$

$$I = \frac{E}{R} \quad \therefore \quad P = \frac{E^2}{R} \quad (IV)$$

$$E = I.R \quad \therefore \quad P = I^2.R \quad (V)$$

La unidad de potencia que se usa en la práctica es el kilowatt.

$$\boxed{1\ kW = 1\ 000\ W}$$

Cuando la potencia está en kwatt y el tiempo en horas, la unidad de energía o trabajo es: kW . h
Su equivalente en joules:

$$1\ kW . h = 1\ 000\ W \times 3\ 600\ s$$

$$1\ kW . h = 3,6 \times 10^6\ W \times s$$

$$\boxed{1\ kW . h = 3,6 \times 10^6\ J}$$

PROBLEMA 1. ¿Qué energía producirá una corriente de 15 amperios durante 2 horas con una diferencia de potencial de 220 voltios?

RESOLUCIÓN : $I = 15\ A$

$V = 220\ V$ $t = 2\ h$

Sabiendo: $W = Q . V$

Pero: $Q = I . t$, luego: $W = I . V . t$

Sustituyendo valores:

$$W = 15\ A \times 220\ V \times 2 \times 3\ 600\ s$$

$$W = 23\ 760\ 000\ A \times V \times s$$

$$W = 23\ 760\ 000\ A \times \frac{J}{C} \times s$$

Rpta.: $W = 23,76 \times 10^6\ J$

PROBLEMA 2. Calcular la cantidad de corriente que pasa por un conductor, con una intensidad de 15 amperios, durante 10 minutos.

RESOLUCIÓN : $I = 15\ A$

$t = 10\ min$

$$Q = I.t = 15\ A \times 10 \times 60\ s$$

Rpta.: $Q = 9 \times 10^3\ C$

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 3. Un horno eléctrico funciona durante 24 horas con una corriente de 25 amperios y 220 voltios. El precio del kwatt . hora es de S/. 8,50. Calcular el costo del funcionamiento diario.

RESOLUCIÓN : $t = 24\ h$

$E = 220\ V$ $\quad I = 25\ A$

Precio = S/. 8,50 / kW . h

Costo = ? soles

Se calcula el trabajo en kwatt . hora:

$$W = P \cdot t$$

Pero: $P = E \cdot I$, luego: $W = E \cdot I \cdot t$

$$W = 220\ V \times 25\ A \times 24\ h$$

$$W = 132 \times 10^3\ W \cdot h$$

$$W = 132\ kW \cdot h$$

Cálculo del costo:

132 kW . hora x 8,50 soles / kW . h

Rpta.: Costo: 1 122,00 soles diarios

EFECTO JOULE O LEY DE JOULE

El calor desprendido en un circuito por efecto del paso de la corriente se llama "efecto Joule" y se enuncia así:

"El calor "Q" producido en un conductor al pasar la corriente a través de él, es directamente proporcional a la energía eléctrica "W" gastada para vencer la resistencia del conductor".

$$\boxed{Q = 0,24\,W} \qquad (I)$$

Pero: $W = I^2 . R . t$, luego:

$$\boxed{Q = 0,24\, I^2 . R . t} \qquad (II)$$

0,24 : Factor de conversión de joules a calorías (0,24 cal/joule).

Q : calor producido, en calorías

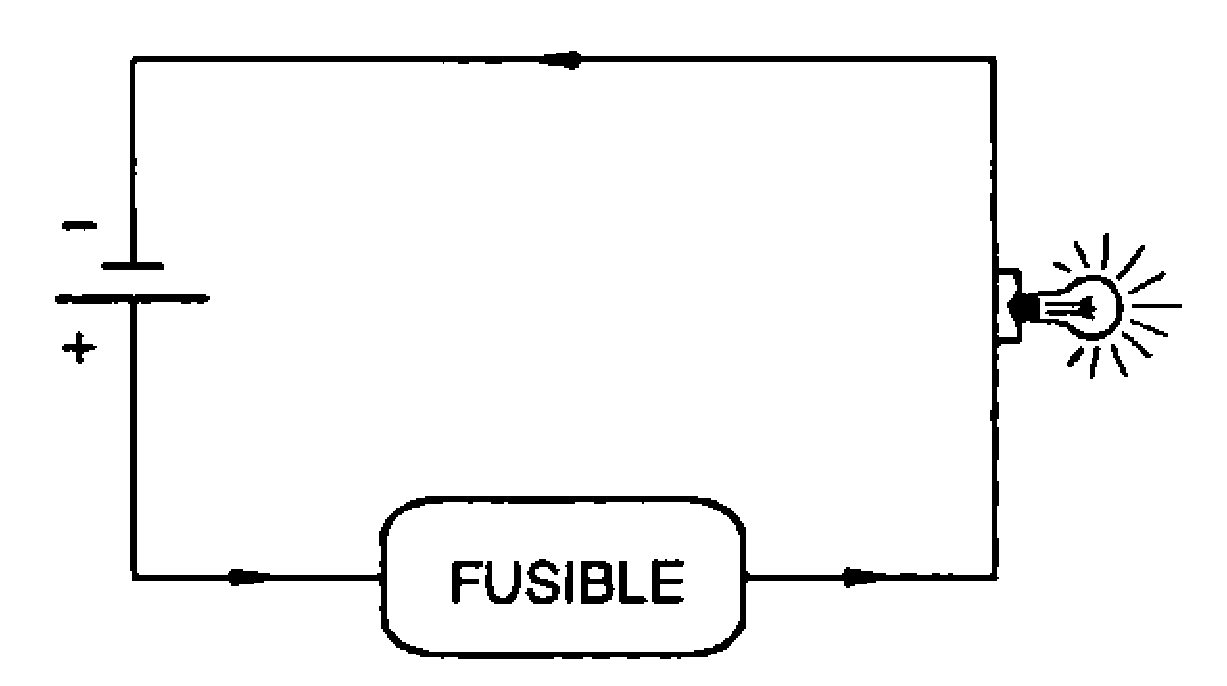
I : intensidad de la corriente, en amperios.

t : tiempo que circula la corriente, en segundos

$$\boxed{1\ J = 0,24\ cal}$$

Aplicaciones más importantes del "efecto joule"

1. Calefacción eléctrica: planchas, cocinas, hornos, etc.
2. Fusibles o corta - circuitos: son conductores de muy corta longitud, que resisten sólo en forma medida el paso de cierta cantidad de corriente, pasado ese límite aumenta tanto su temperatura que se funde y corta el circuito. Los fusibles los más comunes son de alambre de plomo.



PROBLEMA 4. Por un conductor de 5 ohmios de resistencia circula una corriente de 10 amperios durante 15 minutos. Esta resistencia está sumergida en 2 000 g de agua contenida en un calorímetro cuyo equivalente en agua es 10 g. ¿Qué temperatura habrá elevado el agua?

RESOLUCIÓN : $R = 5\ \Omega$

$I = 10\ A$

$t_i = 15\ min$

$m = 2\ 000\ g$ agua

Eq. m = 10 g agua

$\Delta t = ?$

Resistencia

G

El calor que produce la resistencia es aprovechado o absorbido por el agua y en muy pequeña cantidad por las paredes interiores del calorímetro.

Calor ganado = Calor perdido
Es decir:

Calor ganado por el agua + calor ganado por el calorímetro = Calor perdido por la resistencia.

$$m_a.Ce.\Delta t + m_c.Ce.\Delta t = 0{,}24\ I^2.R.t \quad (1)$$

pero como el equivalente del caloríme-tro en agua es 10 g.
Sustituyendo valores en (1) :

$$2\,000\ g \times \frac{1\ cal}{g \times °C} \times \Delta t + 10\ g \times \frac{1\ cal}{g \times °C} \times \Delta t =$$

$$= 0{,}24\ \frac{cal}{J} \times (10\ A)^2 \times 5\ \Omega \times 15 \times 60\ s$$

$$\Delta t \times 2\,010\ \frac{cal}{°C} = 0{,}24\ \frac{cal}{J} \times 450\,000\ J$$

Rpta.: $\Delta t = 53{,}73\ °C$

PROBLEMA 5. Calcular cuántos jou-les serán necesarios para en cender una lámpara de 400 ohmios de resistencia con una corriente de 1 amperio durante 30 minutos.

RESOLUCIÓN : $R = 400\ \Omega$
$t = 30\ min$
$I = 1\ A$
$W = I^2.R.t$

$$W = (1\ A)^2 \times 400\ \Omega \times 30 \times 60\ s$$

$$W = 720\,000\ A \times s \times A \times \frac{V}{A}$$

$$W = 72 \times 10^4\ C \times V$$

Rpta.: $W = 72 \times 10^4\ J$

RENDIMIENTO DE LA CORRIENTE ELÉCTRICA

Se llama así a la relación entre la potencia utilizada y la potencia total producida por el generador de un sistema.

$$\boxed{\rho = \frac{P_u}{P_t}} \qquad (I)$$

ρ : Rendimiento, adimensional
P_u : Potencia utilizada, en watt o kwatt
P_t : Potencia producida, en watt o kwatt

Como:
$P_u = P_t$ - Potencia perdida en el generador.

$$P_u = E.I - I^2.r$$

Sustituyendo en (I) :

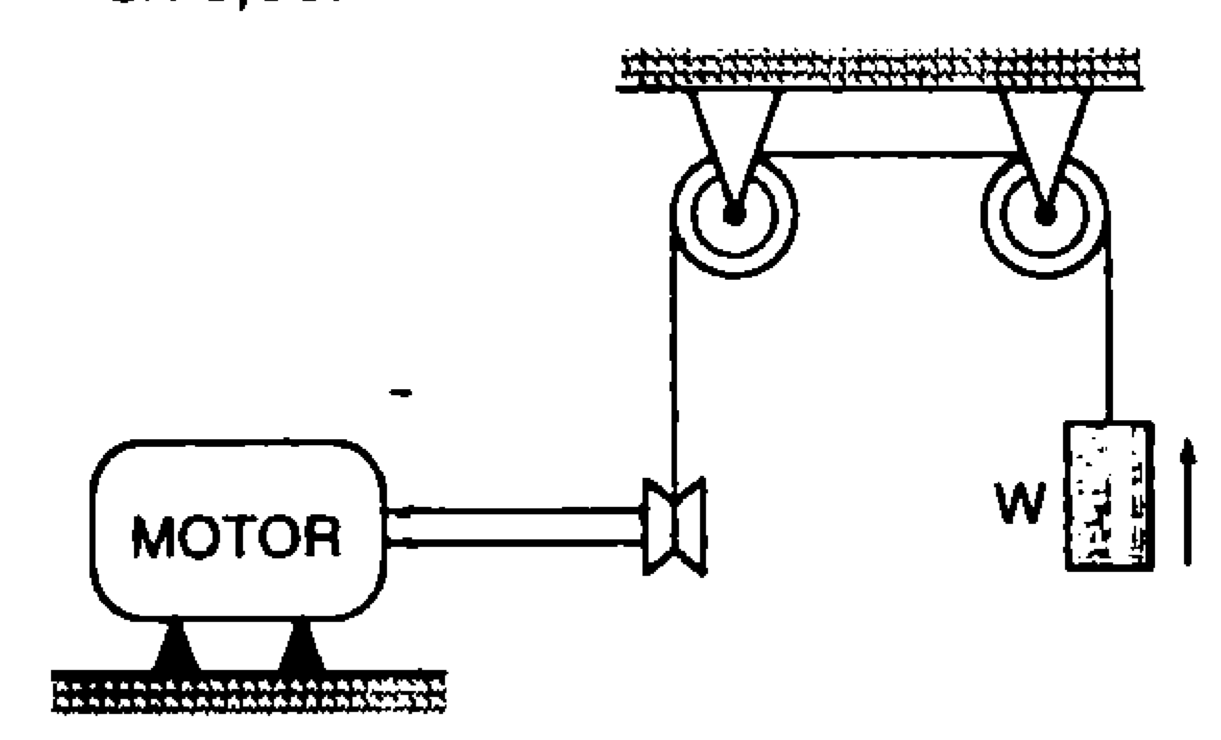
$$\rho = \frac{E.I - I^2.r}{E.I}$$

$$\boxed{\rho = 1 - \frac{I.r}{E}} \qquad (II)$$

Donde:
ρ : Rendimiento.
I : Intensidad de la corriente, en amperios "A".
R : Resistencia interna del generador en ohmios "Ω".
E : Fuerza electromotríz del generador, en voltios "V".

PROBLEMA 6. Un motor eléctrico, con rendimiento de 0,25 eleva un peso de 980 N con una velocidad de 2 m/s con una fuerza electromotríz de 220V. Calcular:

a) La intensidad de la corriente.
b) El costo del funcionamiento del motor durante 1 hora, si el kwatt . hora cuesta S/. 8,50.



RESOLUCIÓN : $\rho = 0{,}25$
$t = 1\ h$ $\quad v = 2\ m/s$
$E = 220\ V$

Precio = 8,50 soles/kW . h

http://librosysolucionarios.net

Peso = 980 N
Costo = ?

a) Cálculo de la P_u:

$$P_u = \frac{F.d}{t} = \frac{980\ N \times 2\ m}{1\ s}$$

De donde: $P_u = 1960\ \frac{N.m}{s}$

$$\rho = \frac{P_u}{P_t}$$

De donde:

$$P_t = \frac{P_u}{\rho} = \frac{1960\ \frac{N.m}{s}}{0{,}25} = 7\ 840\ \frac{N.m}{s}$$

$$P_t = 7\ 840\ \frac{J}{s}$$

ó: $P_t = 7\ 840\ W$

Por otro lado: $P_t = I.E$

de donde: $I = \frac{P_t}{E} = \frac{7\ 840\ W}{220\ V}$

$$I = 35{,}6\ A$$

b) Cálculo de la energía total desarrollada por el motor:

$$W = P_t \times t = 7{,}84\ kW \times 1\ h$$

$$W = 7{,}84\ kW.h$$

Costo = 7,84 kW.h × 8,50 soles/kW.h
Costo = S/. 66,64

PROBLEMA 7. Un elemento está conectado a una diferencia de potencial de 110V, circula una corriente de 5 A, durante 2 minutos; calcular la energía disipada.

RESOLUCIÓN: $E = 110\ V$
$t = 2\ min$ $I = 5\ A$

$$W = E.I.t = 110\ V \times 5\ A \times 2 \times 60\ s$$

$$W = 66 \times 10^3\ V \times A \times s$$

$$W = 66 \times 10^3\ V \times C$$

Rpta.: $W = 66 \times 10^3\ J$

PROBLEMA 8. Calcular el calor disipado en una resistencia de 800 Ω por el que circulan 20 A durante 1 hora.

RESOLUCIÓN: $R = 800$
$t = 1\ h$ $I = 20\ A$

$$Q = 0{,}24\ I^2.R.t \quad \text{(efecto Joule)}$$

$$Q = 0{,}24\ \frac{cal}{J} \times (20\ A)^2 \times 8\ 000\ \Omega \times 3\ 600\ s$$

$$Q = 276{,}48 \times 10^6\ \frac{cal}{J} \times A \times \Omega \times s$$

Pero: $A \times s = C$ y $A \times \Omega = V$

Luego: $Q = 276{,}48 \times 10^6\ \frac{cal}{J} \times C \times V$

pero: $C \times V = J$

$$\therefore\ Q = 276{,}48 \times 10^6\ \frac{cal}{J} \times J$$

Rpta.: $Q = 276{,}48 \times 10^6\ cal$

PROBLEMA 9. A través de una resistencia de 800 Ω pasa una corriente de 20 A. Calcular la potencia disipada.

RESOLUCIÓN: $R = 800\ \Omega$; $I = 20\ A$

Sabiendo: $P = R.I^2 = 800\ \Omega \times (20\ A)^2$

$$P = 32 \times 10^4\ \Omega \times A \times A$$

$$P = 32 \times 10^4\ V \times A$$

Rpta.: $P = 320\ kW$

PROBLEMA 10. Con una diferencia de potencial, o voltaje de 220 voltios, pasa a través de un foco, 40 coulomb. Calcular:

a) La energía consumida por el foco.
b) El costo, si el kW . hora cuesta S/. 8,50.

RESOLUCIÓN:

a) $W = V.Q = 220\ V \times 40\ C$

$$W = 8\ 800\ V \times C$$

$$W = 8\ 800\ J$$

b) Transformando los joules en kW.h:

$$J = W \times s$$

$$J = \frac{1\,000\text{ W}}{1\,000} \times \frac{\text{h}}{3\,600}$$

$$J = \frac{\text{kW . h}}{3{,}6 \times 10^6}$$

Luego: $W = 8\,800\text{ J}$; será:

$$W = 8\,800 \times \frac{\text{kW . h}}{3{,}6 \times 10^6}$$

$$W = 2\,444 \times 10^{-6}\text{ kW . h}$$

Rpta.: Costos = 0,02 soles

PROBLEMA 11. Un cable gemelo de energía eléctrica, está conectado a un generador de 500 voltios. La sección de cada alambre es de 3 cm², su longitud es de 5 km y su resistividad r = $1{,}72 \times 10^{-6}\ \Omega \times \text{cm}$, y conduce una intensidad de 500 A. Calcular:

a) la potencia transmitida.
b) La potencia perdida por el efecto Joule.
c) La potencia que llega.
d) la diferencia de potencial en el extremo de llegada.
e) La cantidad de agua que se podría calentar en media hora de 0° C a 100°C con la energía perdida por el efecto Joule.

RESOLUCIÓN:

a) Potencia transmitida:

$$P_T = V.I = 500\text{ V} \times 500\text{ A}$$

$$P_T = 25 \times 10^4\text{ W}$$

$$P_T = 250\text{ kW}$$

b) Potencia perdida:

$$P_p = I^2.R \qquad (I)$$

Pero: $R = 2\rho\dfrac{L}{A}$

porque son 2 alambres, luego:

$$P_p = I^2 \cdot 2\rho \cdot \frac{L}{A} = (500\text{ A})^2 \times 2$$

$$\times 1{,}72 \times 10^{-6}\ \Omega \times \text{cm} \times \frac{5 \times 10^5\text{ cm}}{3\text{ cm}^2}$$

$$P_p = 143{,}33\text{ kW}$$

c) Potencia que llega:

$$P_{LL} = P_T - P_p = 250\text{ kW} - 143{,}33\text{ kW}$$

$$P_{LL} = 106{,}67\text{ kW}$$

d) Diferencia de potencial:

$$V = V_T - V_p \qquad (1)$$

donde: $V_p = I \cdot R = I \cdot 2\rho \cdot \dfrac{L}{A}$

$$V_p = 500\text{ A} \times 2 \times 1{,}72 \times 10^{-6}\ \Omega \times$$

$$\times \text{cm} \times \frac{5 \times 10^5\text{ cm}}{3\text{ cm}^2}$$

$$V_p = 286{,}7\text{ V}$$

Sustituyendo valores en (1):

$$V = 500\text{ V} - 286{,}7\text{ V}$$

$$V = 213{,}3\text{ V}$$

e) Cálculo de la energía, en calorías, perdida por el efecto Joule:

$$Q = 0{,}24 \times I^2.R.t$$

$$Q = 0{,}24 \cdot I^2 \cdot 2\rho \cdot \frac{L}{A} \cdot t$$

$$Q = 0{,}24 \times (500\text{ A})^2 \times 2 \times 1\,800\text{ s} \times$$

$$\times 1{,}72 \times 10^{-6}\ \Omega \times \text{cm} \times \frac{5 \times 10^5\text{ cm}}{3\text{ cm}^2}$$

$$Q = 619{,}2 \times 10^5\text{ cal}$$

$$Q = 619{,}2 \times 10^2\text{ kcal}$$

Este calor debe ser ganado por el agua para hervir de 0 °C a 100 °C, es decir el calor perdido por el conductor debe ser igual al calor ganado por el agua:

$$619{,}2 \times 10^2\text{ kcal} = Ce \times m \times \Delta t$$

de donde:

$$m = \frac{619{,}2 \times 10^2\text{ kcal}}{Ce \times \Delta t}$$

$$m = \frac{619{,}2 \times 10^2\text{ kcal}}{1\,\dfrac{\text{cal}}{\text{g} \times {}^\circ\text{C}} \times 100\,^\circ\text{C}}$$

Rpta.: 619,2 kg de agua ó 619,2 lit.

PROBLEMA 12. Un motor está conectado durante 3 horas a una corriente de 15 A y 220 V. Calcular:

http://librosysolucionarios.net

a) El trabajo realizado en kW . h
b) El costo del funcionamiento: 8,50 soles / kW . h

RESOLUCIÓN : $I = 15\,A$

$t = 3\,h$ $E = 220\,V$

a) Sabiendo: $W = E \cdot I \cdot t$

$$W = 220\,V \times 15\,A \times 3 \times 3\,600\,s$$

$$W = 3\,564 \times 10^4\,V \times A \times s$$

$$W = 3\,564 \times 10^4\,J$$

pero: $1\,J = \dfrac{kW.h}{3{,}5 \times 10^6}$

$$\therefore\ W = 3\,654 \times 10^4 \times \frac{kW.h}{3{,}5 \times 10^6}$$

Rpta.: $W = 9{,}9\,kW.h$

b) $\text{Costo} = 9{,}9\,kW.h \times 8{,}50\,\dfrac{soles}{kW.h}$

Rpta.: Costo = 84,15 soles

PROBLEMA 13. Calcular cuánto tarda un calentador eléctrico para elevar la temperatura de 500 g de agua desde 20 °C a 80 °C. El calentador tiene una resistencia de 40 Ω y funciona con 120 voltios.

RESOLUCIÓN : Por conservación de la energía:

$$m_{agua} \cdot Ce_{agua} \cdot \Delta t = 0{,}24 \cdot \frac{V^2}{R} \cdot t$$

$$500 \cdot 1(80 - 20) = \frac{0{,}24 \cdot 120^2}{40} \cdot t$$

$$t = \frac{500 \cdot 60 \cdot 40}{0{,}24 \cdot 120^2}$$

$$t = \frac{50\,000}{144}\,s$$

Transformando a minutos:

$$t = \frac{50\,000}{144} \times \frac{1}{60}\,min$$

Rpta.: $t = 5\,min\ 47\,s$

PROBLEMA 14. En un calorímetro de equivalente en agua despreciable, se tiene 500 g de hielo a -4 °C. Se coloca un calentador de inmersión por el cual circula una corriente de 10 A. ¿Cuál será la resistencia del calentador para que en 15 minutos se vaporice el hielo?

$$Ce_{hielo} = 0{,}5\,\frac{cal}{g \times °C}$$

$$Cf_{hielo} = 80\,; \qquad Cv_{agua} = 1$$

RESOLUCIÓN :

$$0{,}24\,I^2.R.t = m_{hielo}.Ce_{hielo}.\Delta t +$$

$$+ m_{hielo}.Cf_{hielo} + m_{agua}.Ce_{agua}.\Delta t' +$$

$$+ m_{agua}.Cv_{agua}$$

$$t = t_f - t_i = 0\,°C - (-4\,°C) = 4\,°C$$

$$t' = t'_f - t'_i = 100\,°C - 0\,°C = 100\,°C$$

Reemplazando datos numéricos:

$$0{,}24 \times 10^2 \times R \times 15 \times 60 = 500 \times$$

$$\times 0{,}5 \times 4 + 500 \times 80 + 500 \times 1 \times$$

$$\times 100 + 500 \times 540$$

$$21\,600\,R = 361\,000$$

Rpta.: $R = 16{,}7\,\Omega$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. ¿Cuál es el trabajo y la potencia que se da a un motor eléctrico durante 3 horas en una corriente de 10 A y 220 V?

Rpta.: $P = 2{,}2\,kW$

$W = 2\,376 \times 10^4\,J$

2. ¿Cuál es el trabajo y cual la potencia que provoca el paso de 120 000 coulomb durante 2 horas por un conductor con una diferencia de potencial de 110 voltios?

Rpta.: $W = 132 \times 10^5\,J$

http://librosysolucionarios.net

$P = 1{,}833 \text{ kW . h}$

3. Calcular el costo para calentar 100 litros de agua de 20 °C hasta 100 °C. La empresa eléctrica cobra por cada kW . h 3,60 soles. Considere que el recipiente que contiene el agua es de capacidad calorífica despreciable.

Rpta.: Costo = 33,44 soles

4. Una corriente de 25 amperios circula por una resistencia de 30 Ω. ¿Cuál será el calor desprendido en 2 horas?

Rpta.: 323×10^5 cal

5. Un horno eléctrico de 10 Ω funciona con una corriente de 20 A.
a) Calcular la potencia que desarrolla en watts.
b) El costo de funcionamiento durante 5 horas a 3,60 soles el kW . h

Rpta.: a) 4×10^3 W
b) 72 soles

6. Con una corriente de 25 amperios y 220 voltios funciona un motor para elevar una carga de 3 toneladas a una velocidad de 0,1 m/s. Calcular:
a) La potencia entregada al motor en H.P.
b) La potencia producida por el motor en H.P.
c) El rendimiento del sistema.

Rpta.: a) 7,38 H.P. ; b) 4 H.P.
c) 54 %

7. Se quiere construir un horno para calentar 50 litros de agua de 10 °C a 100 °C en 15 minutos utilizando una f.e.m. de 220 voltios. Si el rendimiento es de 90%, ¿cuál será la longitud del alambre de 1 mm de diámetro y de 30×10^{-8} Ω . m de resistividad que se empleará?

Rpta.: L = 5,47 m

8. Hallar la resistencia de un calentador eléctrico empleado para elevar la temperatu ra de 500 g de agua desde la temperatura de 28 °C hasta su temperatura de ebullición en un intervalo de tiempo de 2 minutos, se sabe que existe unas pérdidas caloríficas del 25%, la diferencia de potencial de funcionamiento es de 100 voltios.

Rpta.: 6 Ω

9. Calcular el trabajo eléctrico que se requiere para transportar 10^{19} electrones a través de una resistencia de 4 Ω, la cual puede soportar una intensidad de corriente de 25 A.

Rpta.: 160 J

10. Se tiene una lámpara de 40 W y 120 V. ¿Qué resistencia complementaria hay que conectar en serie a la lámpara para que su funcionamiento sea normal cuando la red tenga una tensión eléctrica de 220V?

Rpta.: 300 Ω

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 18

MAGNETISMO Y ELECTROMAGNETISMO

MAGNETISMO

DEFINICIÓN

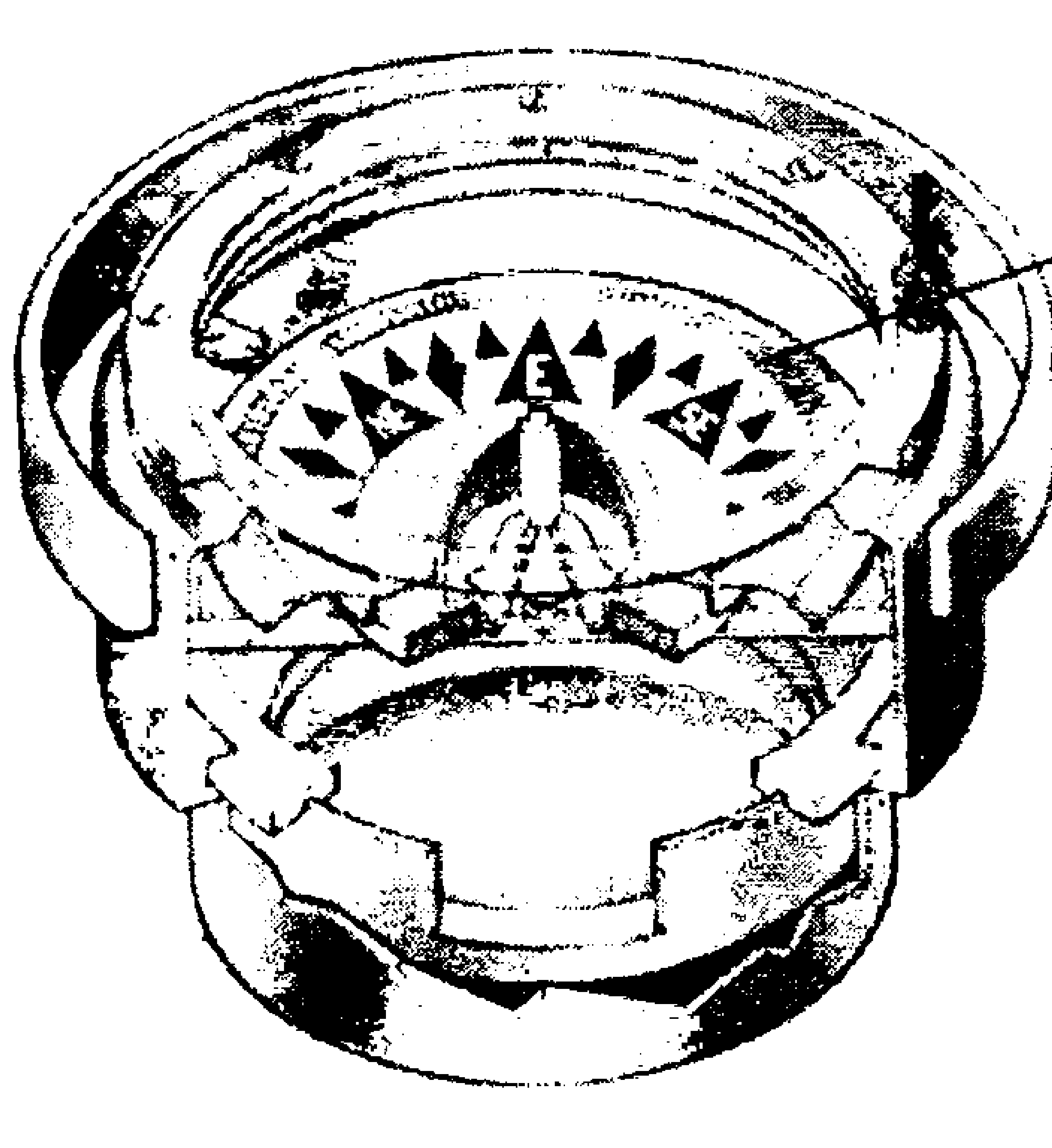
Es la propiedad que tienen algunos cuerpos de atraer al fierro de acuerdo a ciertas leyes físicas.

IMÁN

Es un cuerpo generalmente de la forma de una barra, dotado de la capacidad de atraer al fierro y de orientarse de Norte a Sur al dejarlo en libre oscilación horizontal sobre su punto medio.

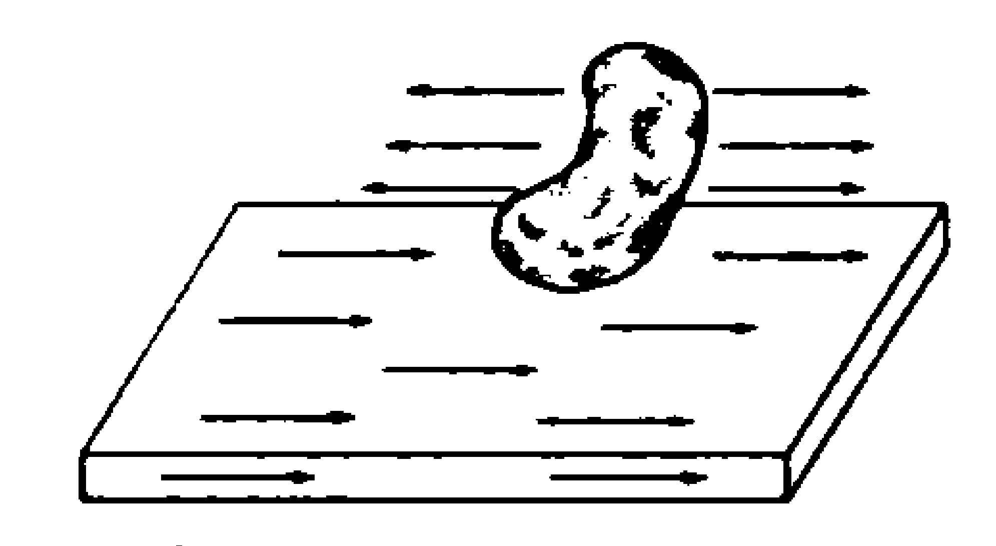
Los imanes pueden ser naturales y artificiales.

El imán natural es el óxido ferroso férrico o "magnetita" ($Fe_3 O_4$) que abunda en Asia Menor, especialmente en el lugar denominado Magnesia, de ahí su nombre de "magnetita".

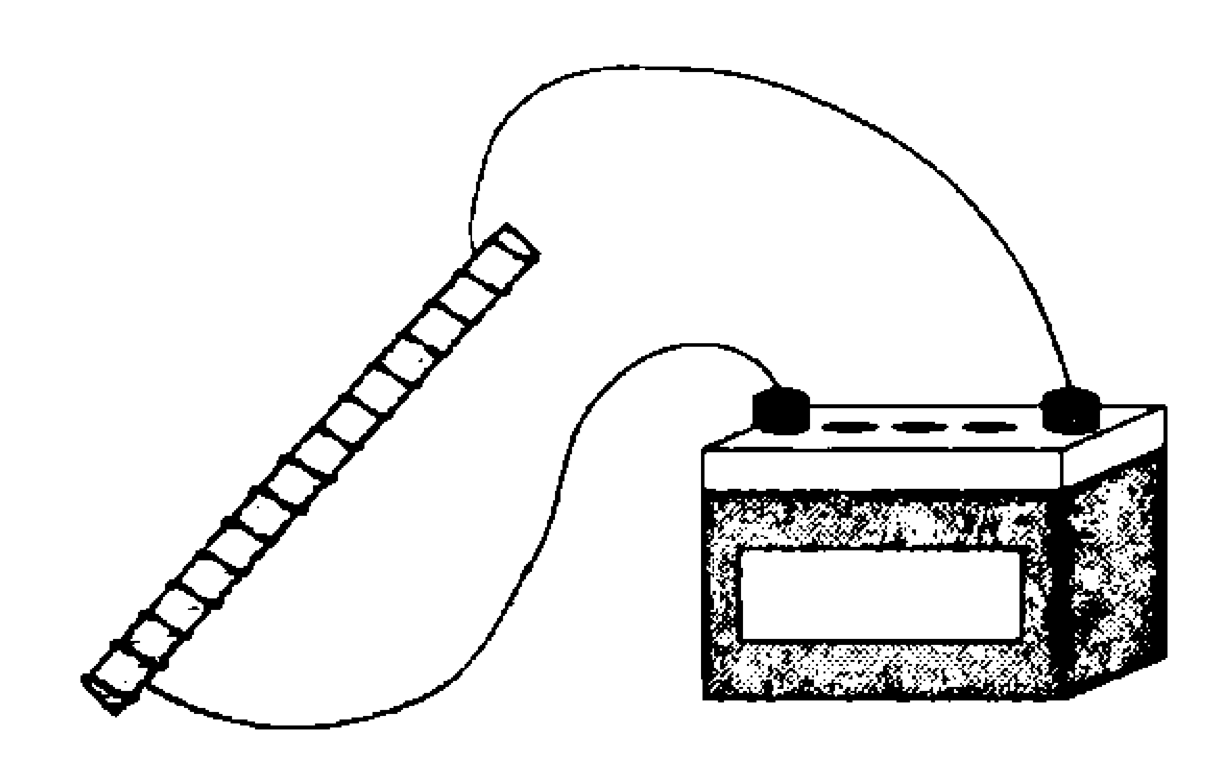


Los imanes artificiales se fabrican frotando una barra de hierro o acero, en una misma dirección, con un imán natural. También se fabrican o construyen, enrrollando un delgado alambre de cobre a una barra metálica, luego se conecta los extremos del alambre a los bornes de una pila o generador de corriente eléctrica, entonces la barra se convierte en un imán.

El fierro se imana más rápido que el acero, pero también pierde más rápido está propiedad.



IMANTACIÓN POR FROTACIÓN



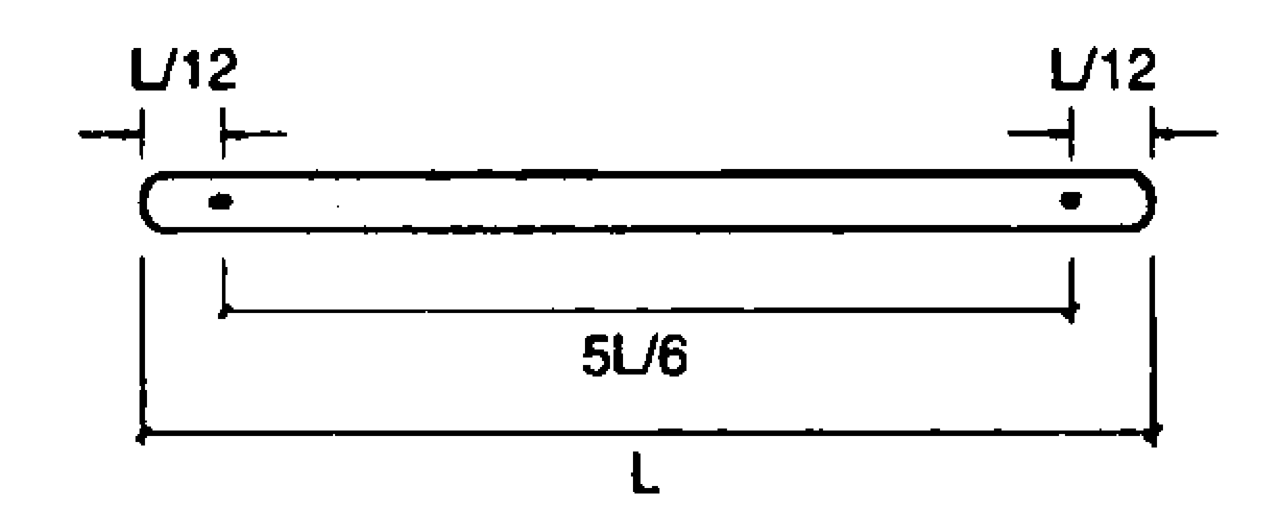
IMANTACIÓN ELÉCTRICA

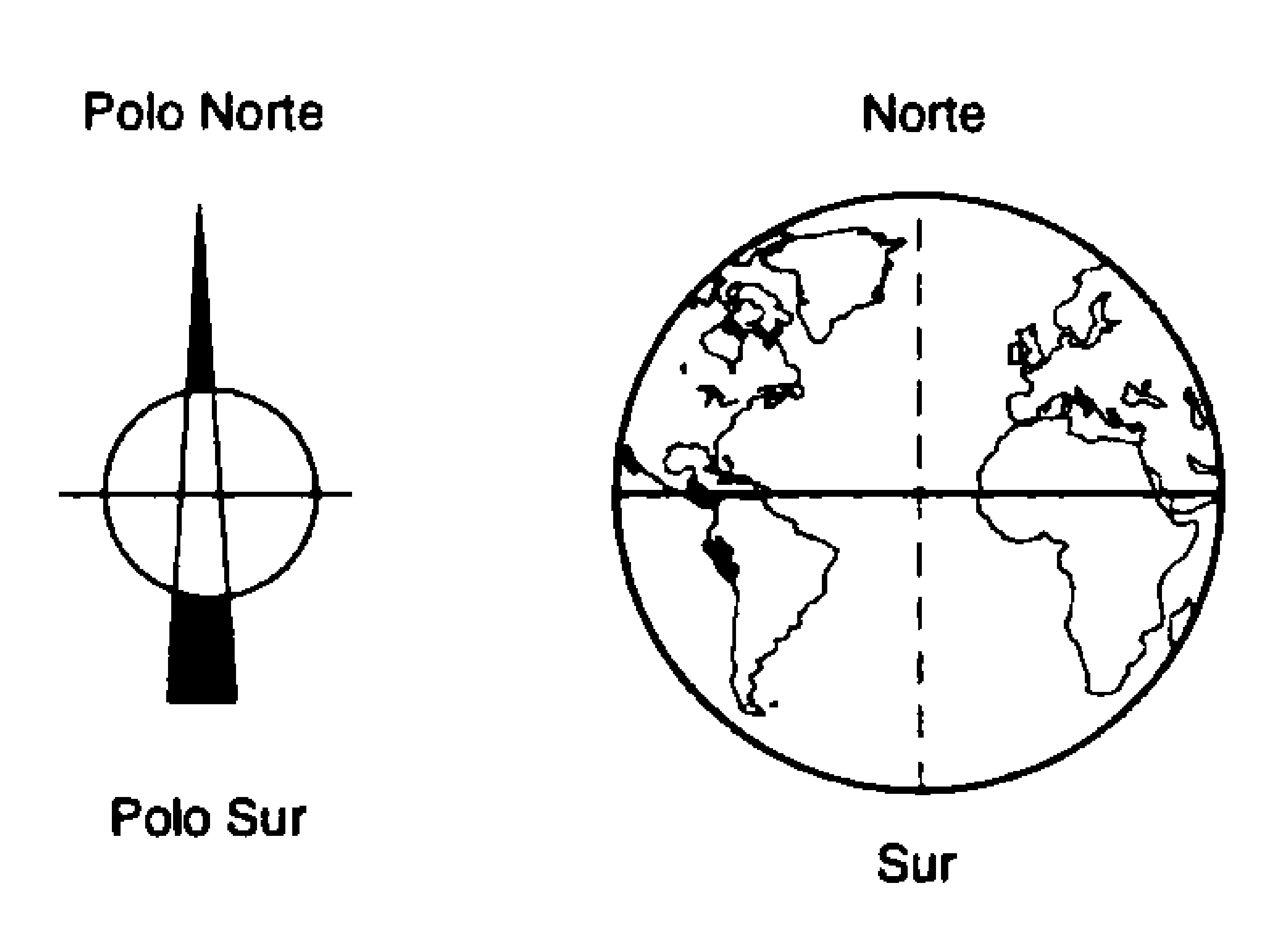
Los imanes artificiales presentan diversas formas, siendo los más comunes: barras, herradura y agujas.

POLOS MAGNÉTICOS

Cuando una barra de imán natural o artificial se recubre con limaduras de hierro, una masa de limaduras queda adherida en los extremos de la barra, no así en la parte central, esto indica que el imán solo tiene fuerza atractiva en sus extremos, a estos extremos se les llama POLOS y a la parte media ZONA NEUTRA. Se ha podido determinar que los "centros de gravedad" de los polos están separados en 5/6 de la longitud de la barra o lo que es lo mismo que cada polo está concentrado a 1/12 del extremo.

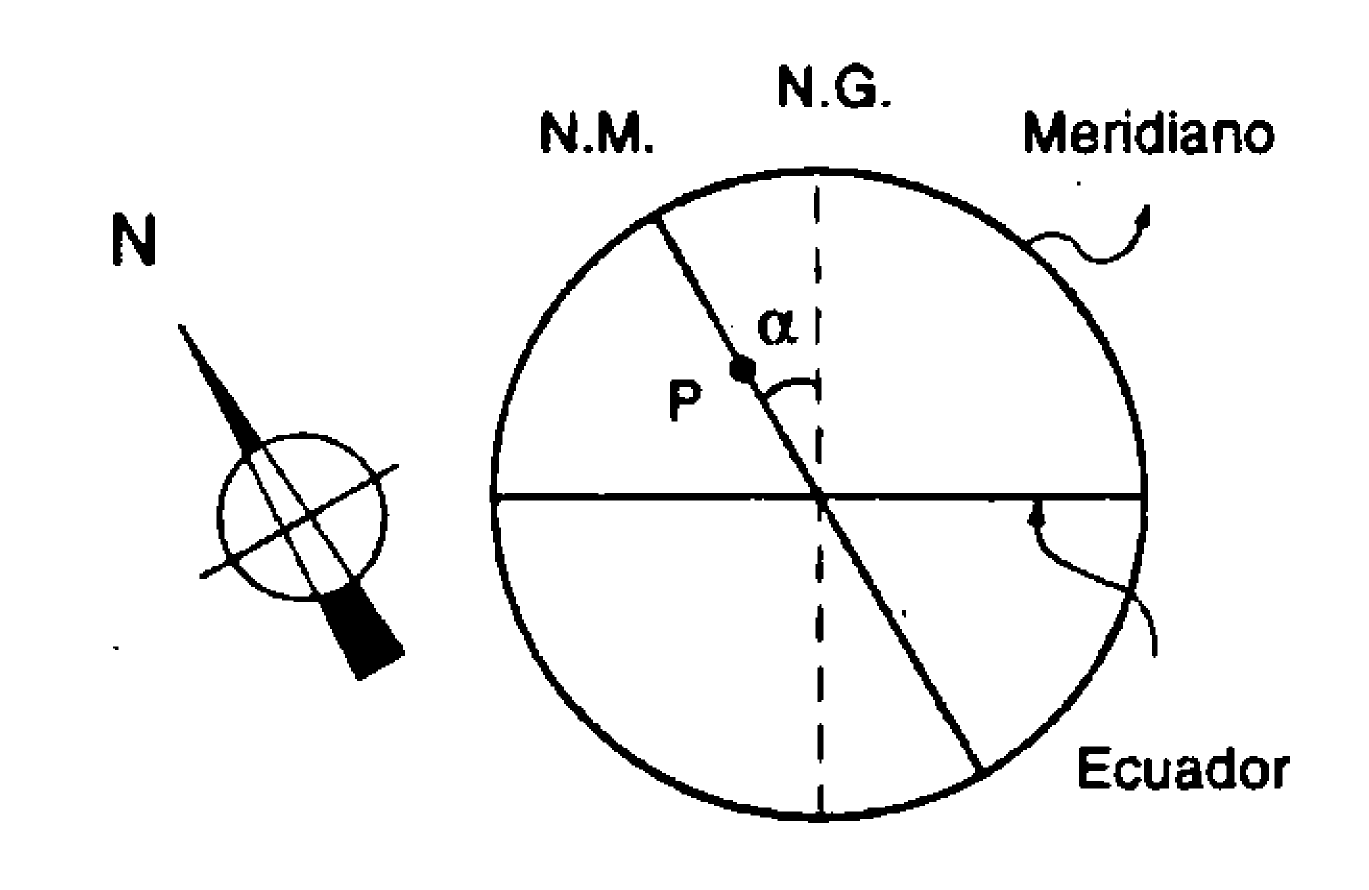
Si se suspende libremente del centro de la barra y se deja oscilar hasta que se detenga, ésta queda orientada magnéticamente del Norte al Sur. El Polo que señala el Norte magnético de la Tierra se llama convencionalmetePOLO NORTE y al otro, POLO SUR. Sin embargo, si se razona un poco, se llegará a la conclusión que estos polos deberián nombrarse al revés, ya que los polos iguales se rechasan y los contrarios se atraen, pero para evitar confusión se ha convenido en lo dicho.





DECLINACIÓN MAGNÉTICA

"La Tierra es un gran imán, pero su "Polo Norte Magnético" no coincide con su "Polo Norte Geográfico", entonces cuando un imán se orienta al Polo Norte señala el "Norte Magnético de la Tierra", y no el "Norte Geográfico", esta desviación de dirección es un ángu-

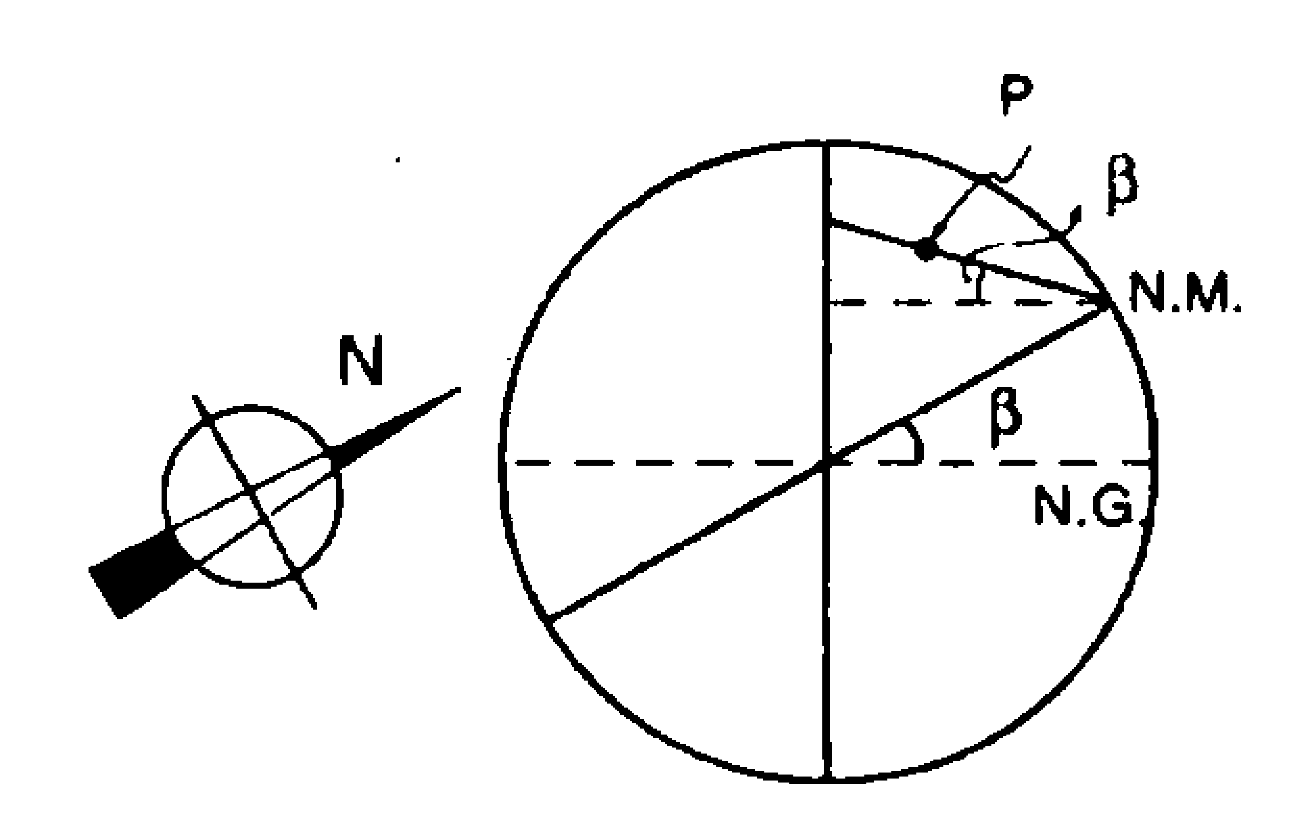


lo que se llama "Declinación Magnética" y que varía según el lugar de la Tierra. En Lima por ejemplo es aproximadamente 2° al N-O, "α" es el ángulo de declinación magnética del punto "P".

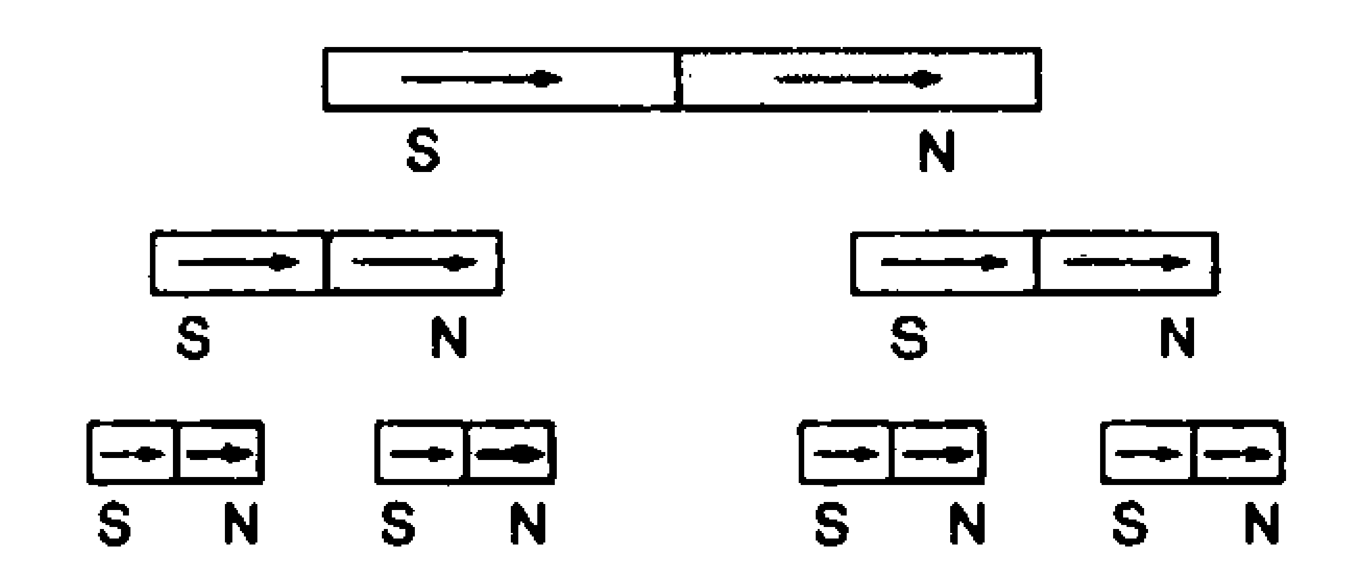
INCLINACIÓN MAGNÉTICA

Si el eje del imán es horizontal, el imán oscila verticalmente; si se le deja oscilar hasta que se oriente resulta que su eje no coincide con la horizontal, hace un ángulo con la horizontal, este ángulo se llama "inclinación magnética".

En el gráfico la inclinación magnética del punto "P" es el ángulo "β"



NOTA : No existe un imán con un solo polo. Si un imán se divide por su mitad, cada mitad se convierte en un nuevo imán con Polo Norte y Polo Sur.

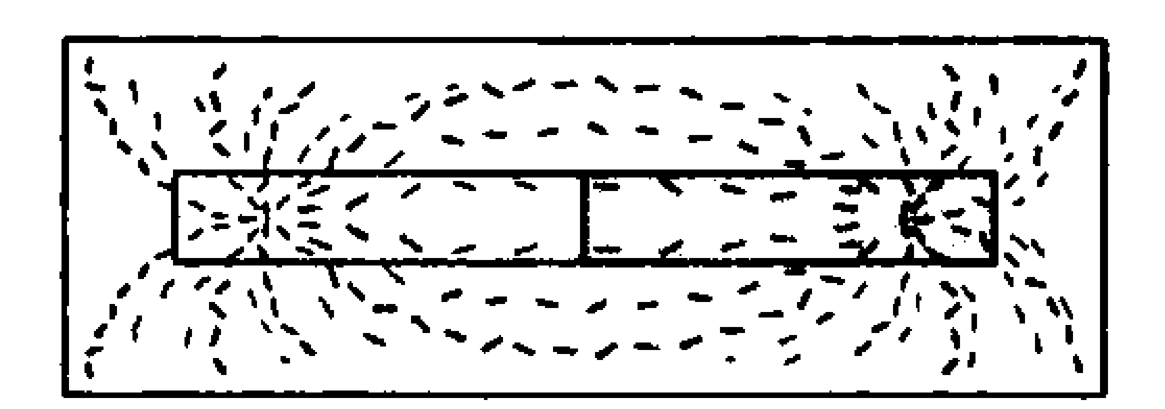


CAMPO MAGNÉTICO "B"

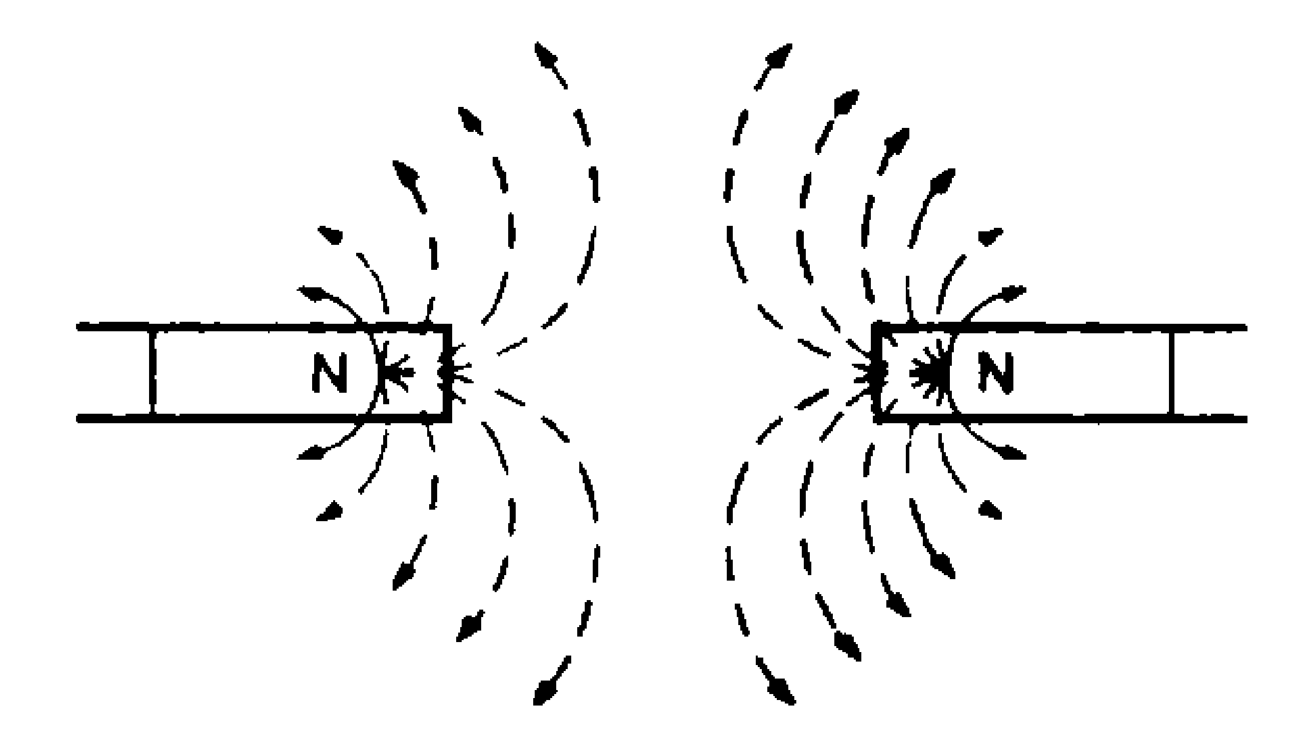
Es la propiedad o característica FUNDAMENTAL del magnetismo. Es el espacio que rodea a un imán, en el cual éste pone de manifiesto su poder de atracción o repulsión; teóricamente tiene un alcance infinito; sin embargo, sus efectos se perciben con claridad sólo en las inmediaciones cercanas al imán.

LINEAS DE FUERZA DE UN CAMPO MAGNÉTICO:

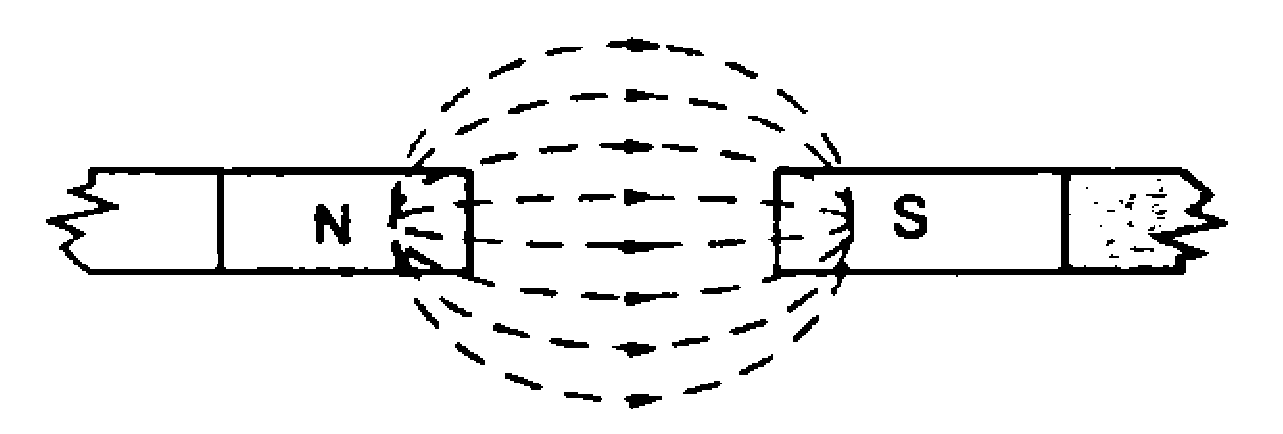
Son líneas imaginarias que pueden ser diseñadas objetivamente mediante la siguiente experiencia: sobre una hoja de papel se espolvorea limaduras de hierro y debajo de la hoja, pegada a ésta, se coloca un imán de barra, se dan pequeños golpecitos a la hoja con el propio imán, pero en el mismo sitio, y se observa que las limaduras empiezan a orientarse y diseñarse en líneas que salen de un polo y llegan al otro, como se muestra en la figura, estas líneas se llaman "líneas de fuerza de un campo magnético".



Sobre esta base se diseña las líneas de fuerzas del campo magnético creado por polos iguales y polos contrarios.



Línea de fuerzas magnéticas en un campo creado por polos iguales



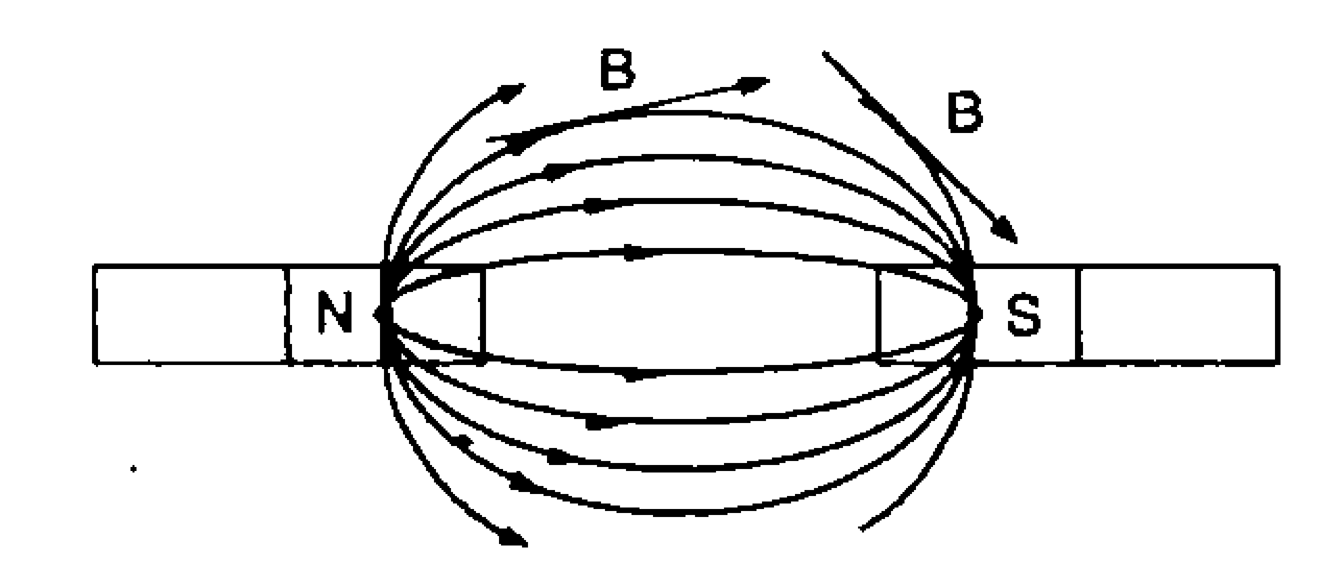
Línea de fuerzas magnéticas en un campo creado por polos contrarios

PROPIEDADES DE LAS LÍNEAS DE FUERZA DEL CAMPO MAGNÉTICO

a) **Las líneas de fuerza de un campo van del Polo Norte al Polo Sur.**

http://librosysolucionarios.net

b) **La intensidad del campo magnético en cada punto, es tangente a la línea de fuerza que pasa por ese punto.**



c) **Las líneas de fuerza de un mismo campo no se interfieren.**
d) **A mayor intensidad del campo, mayor densidad de las líneas de fuerza.**

FUERZAS MAGNÉTICAS

La fuerza de atracción o repulsión, de los polos de un mismo imán siempre es igual, de manera que, sabiendo la fuerza magnética de un polo se conoce la del otro polo.

La existencia de la fuerza magnética de los polos se puede probar por experimentos muy sencillo, como en la figura que sigue.

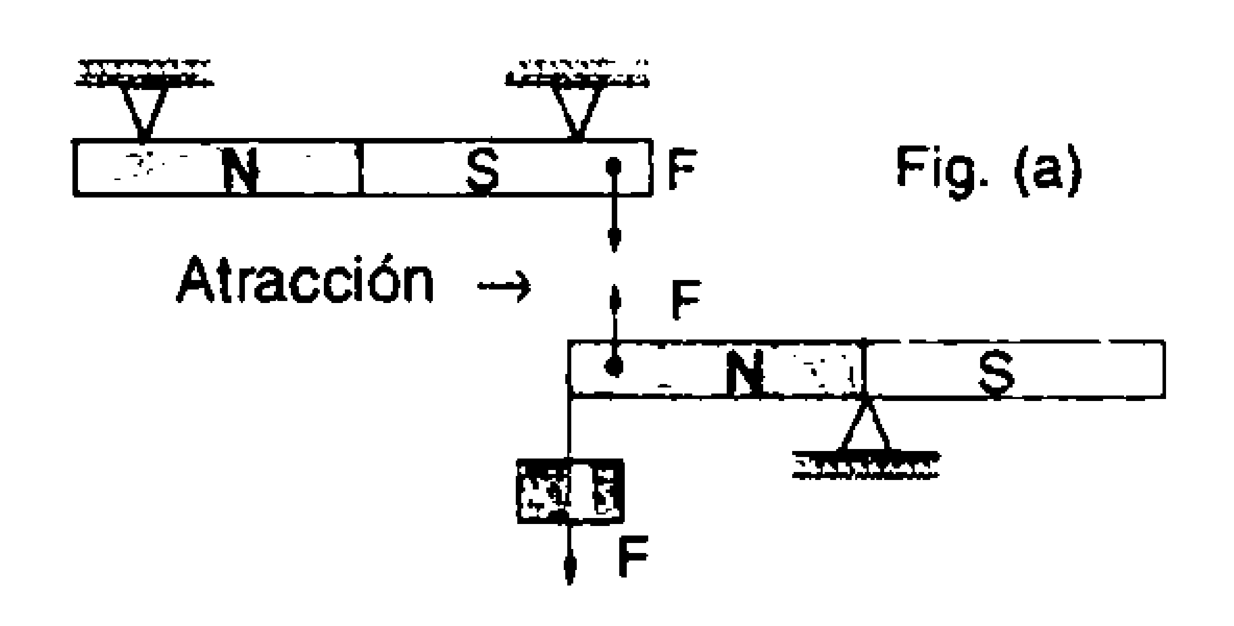


Fig. (a)

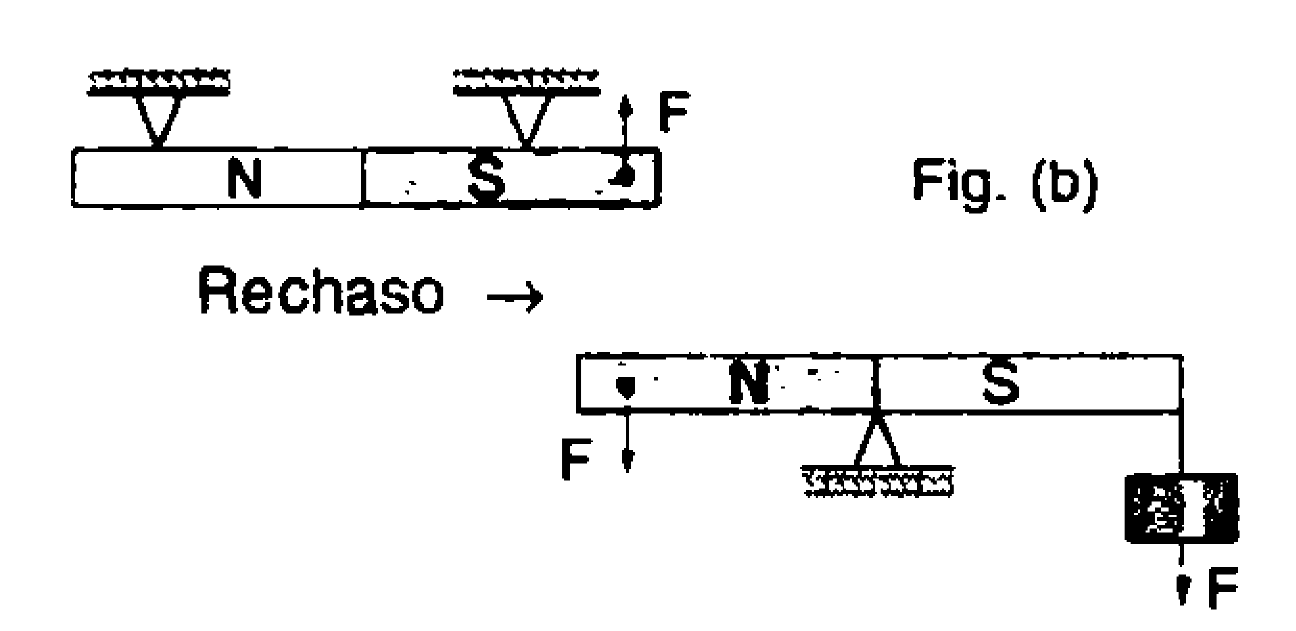


Fig. (b)

LEYES MAGNÉTICAS

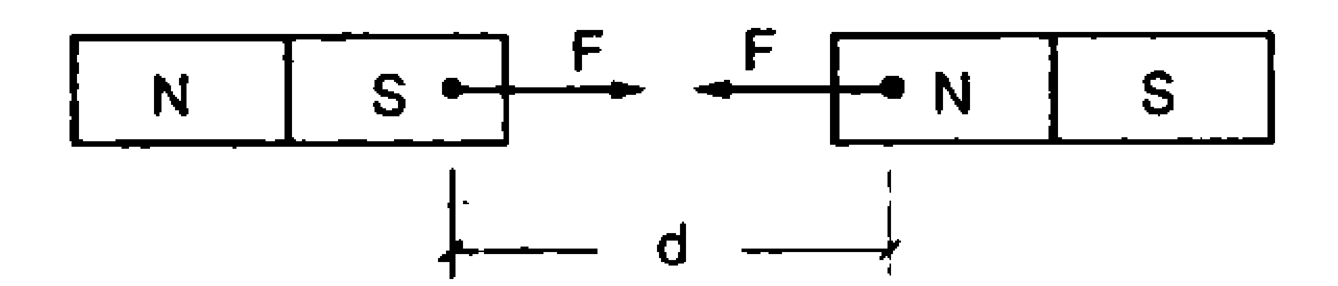
1ra Ley : Cualitativa

"Polos iguales se repelen, polos contrarios se atraen"

2da Ley : Cuantitativa o Coulomb Magnético

"La fuerza de atracción o repulsión entre dos polos magnéticos es directamente proporcional a las masas magnéticas de los polos magnéticos e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa".

$$F = K_M \frac{m_1 . m_2}{d^2}$$



F : Fuerza de atracción o repulsión, en newtons "N"

m_1 m_2 : Masa magnética de los polos, en amperios "A . m"

d : Distancia entre polos, en metros "m"

K_M : Constante magnética, cuyo valor es:

$$K_M = 10^{-7} \frac{N.m^2}{(A.m)^2}$$

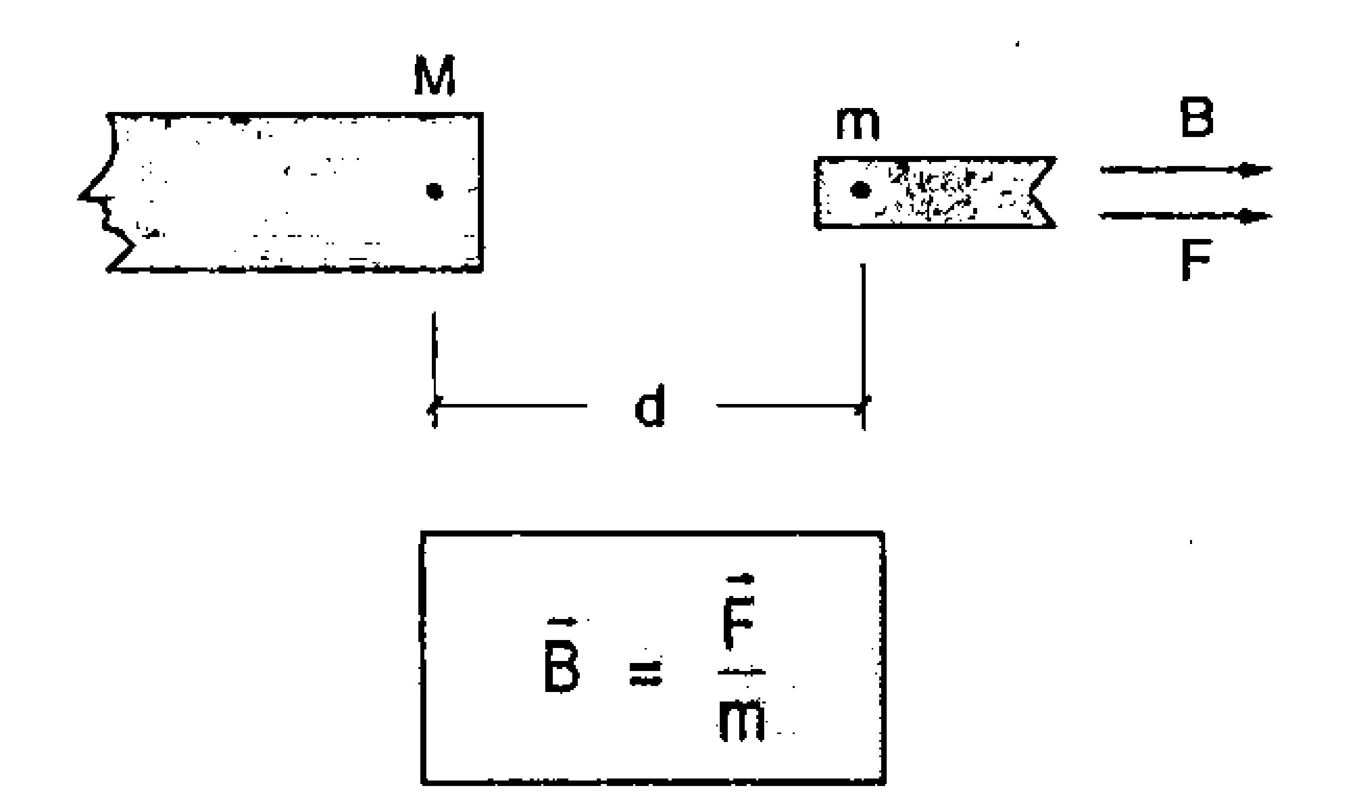
NOTAS:

1. Para que la ley sea válida debe suponerse que los imanes son lo suficientemente largos como para despreciar la potencia de los polos no considerados.
2. La ley cuantitativa (de Coulomb), fue enunciada y analizada sólo en el sistema c.g.s., en un sistema típico de laboratorio, en la práctica no se usa el SI.
3. **La definición de "A.m" es la siguiente: "Si un polo que está a una distancia de 1 m de otro polo de igual masa magnética, lo atrae o repele con la fuerza de 10^{-7} N, se dice que ambos polos tienen una masa de 1 amperio . metro "A.m".**

INTENSIDAD DE CAMPO MAGNÉTICO "B"

Es el poder magnético de un punto en las cercanías de un imán. Sea "m" la masa magnética en un punto de un campo, la intensidad se expresa así:

http://librosysolucionarios.net



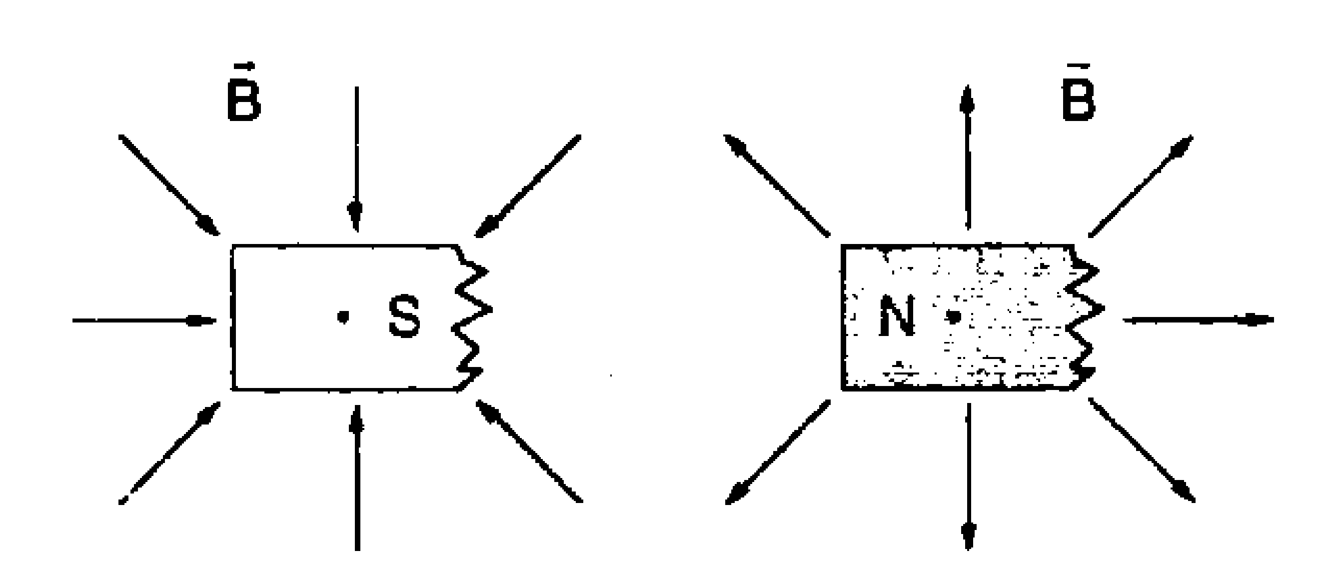
$$\vec{B} = \frac{\vec{F}}{m}$$

$$B\text{ (teslas)} = \frac{F\text{ (newtons)}}{m\text{ (amper . metro)}}$$

$$T = \frac{N}{A.m}$$

$\vec{B}$ ES UNA MAGNITUD VECTORIAL

Si el campo es creado por una ma-sa magnética S (sur), B está apuntando a la masa creadora de campo. Si el campo es creado por la masa magnética **N** (norte) B está apuntando hacia afuera de la masa creadora del campo.



INTENSIDAD DEL CAMPO MAGNÉTICO "B" PRODUCIDA POR UN POLO

Recordando:

$$F = K_M \frac{M.m}{d^2} \qquad (1)$$

y: $$B = \frac{F}{m} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) en (2):

$$B = K_M \frac{M}{d^2}$$

B : Intensidad del campo magnético a la distancia "d", en teslas "T"

M : Masa magnética del polo en amperio. metro "A.m"

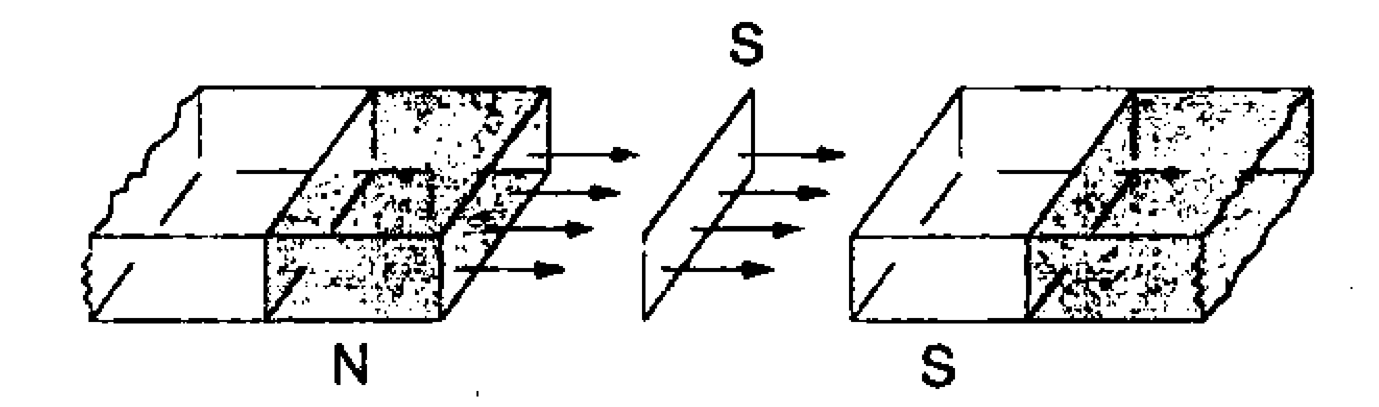
K_M : Constante de permeabilidad magnética de Coulomb, en el aire:

$$K_M = 10^{-7} \frac{N\,m^2}{(A.m)^2}$$

d : Distancia del polo a un punto del campo, en metros "m"

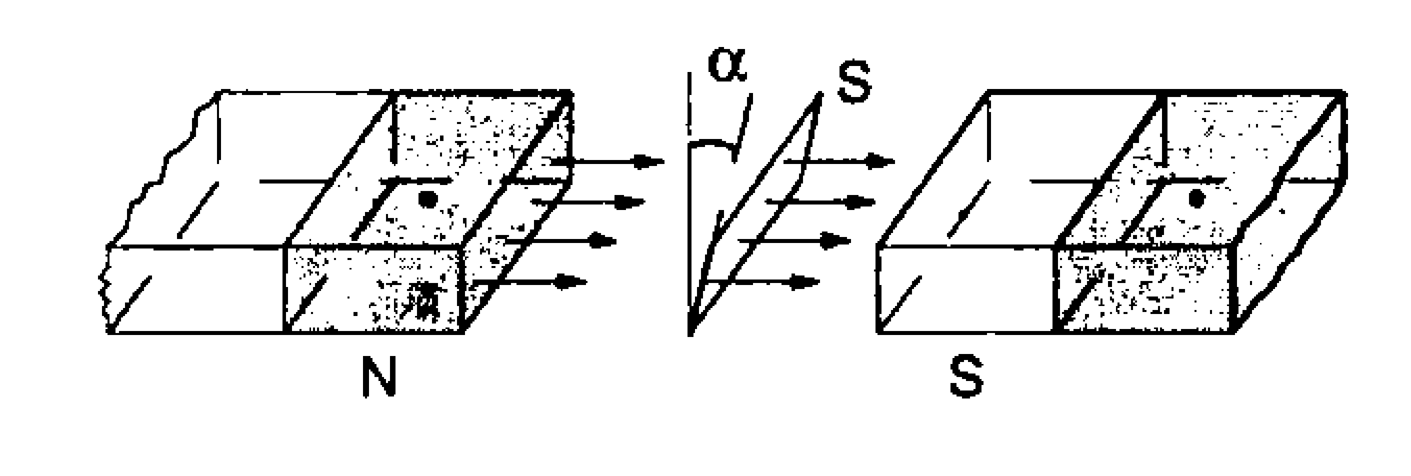
FLUJO MAGNÉTICO "ϕ"

Se llama flujo magnético "ϕ" al número total de líneas magnéticas "B" que pasan perpendicularmente por una sección determinada "S".



$$\phi = B.S \qquad (I)$$

Cuando el plano atravesado por las líneas magnéticas forma un ángulo "α" con la dirección de las líneas de fuerza, entonces:



$$\phi = B.S.\cos a \qquad (II)$$

UNIDADES EN EL SI :

ϕ en $T.m^2$

- Al producto "$T.m^2$" también se le llama weber "Wb".
- El weber "Wb" es una unidad muy grande entonces a veces se usa el maxwell "Mx"

http://librosysolucionarios.net

$$1\ Mx = 10^{-8}\ Wb$$

DENSIDAD DE FLUJO MAGNÉTICO "ϕ/S"

Es el flujo de líneas de fuerza magnética que atraviesa una unidad de área.

De (I): $\boxed{B = \dfrac{\phi}{S}}$

NOTA: Convencionalmente, la inducción magnética o intensidad de flujo magnético, y la densidad del flujo se igualan.

UNIDADES EN EL SI :

B : Inducción magnética o intensidad de flujo magnético o densidad de flujo magnético, en teslas "T"

ϕ : Flujo magnético, en teslas metro cuadrado "T.m²"

S : Área perpendicular al flujo magnético, en metros cuadrados "m²"

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Calcular la fuerza de atracción entre dos polos de 1 200 y 2 000 amperio.metro cad uno, si están separados por aire y a 5 cm de distancia.

RESOLUCIÓN: $F = K_M \dfrac{m_1 m_2}{d^2}$

$$F = \frac{10^{-7}\ N \times m^2}{(A\ .\ m)^2} \times$$

$$\times \frac{1\ 200\ A\ .\ m \times 2\ 000\ A\ .\ m}{(5 \times 10^{-2}\ m)}$$

Rpta.: 96 N

PROBLEMA 2. ¿Cuál es el valor de una masa magnética que está a una distancia de 3 mm de otra, cuya masa magnética es de 1 000 A . m y que la rechaza con una fuerza de 8×10^{-3} N, estando en el aire?

RESOLUCIÓN: $F = K_M \dfrac{m_1 m_2}{d^2}$

de donde: $m_1 = \dfrac{F\,d^2}{m_2 K_M}$ (I)

Adecuando los datos:

$$F = 8 \times 10^{-3}\ N \quad (1)$$

$$d^2 = (3\ mm)^2 = (3 \times 10^{-3}\ m)^2$$

$$d^2 = 9 \times 10^{-6}\ m^2 \quad (2)$$

$$K_M = \frac{10^{-7}\ N\,m^2}{(A\ .\ m)^2} \quad (3)$$

Sustituyendo (1) , (2) y (3) en (I):

$$m_1 = \frac{8 \times 10^{-3}\ N \times 9 \times 10^{-6}\ m^2}{10^{-7}\ \dfrac{N\,m^2}{(A\ .\ m)^2} \times 10^3\ A\ .\ m}$$

$$m_1 = 72 \times 10^{-5}\ A\ .\ m$$

PROBLEMA 3. En un punto de un campo magnético hay una masa magnética de 300 A . m y sobre ella actúa una fuerza de 5 N. Calcular la intensidad del campo magnético en ese punto.

RESOLUCIÓN: $B = \dfrac{F}{m}$

$$B = \frac{5\ N}{3\ 000\ A.m}$$

$$B = 1{,}67 \times 10^{-3}\ T$$

PROBLEMA 4. En un punto de un campo magnético positivo hay una intensidad de 50 teslas. ¿Con qué fuerza actuará el campo en ese punto sobre una masa magnética positiva de 400 A . m?

RESOLUCIÓN: $B = \dfrac{F}{M}$; de donde:

$$F = BM = 50\,T \times 400\,A.m$$

$$F = 50 \times 400\,\frac{N}{A.m} \times A.m$$

$$F = 2 \times 10^4\,N$$

PROBLEMA 5. Calcular la intensidad del campo magnético creado en el aire por el polo de un imán de 10 000 A . m para un punto situado a 5 cm del polo.

RESOLUCIÓN: $B = K_M \dfrac{M}{d^2}$

$$B = 10^{-7}\,\frac{(N\,m^2)}{(A.m)^2}\cdot\frac{10\,000\,A.m}{(5 \times 10^{-2}\,m)^2}$$

$$B = 0{,}4\,\frac{N}{A.m} = 0{,}4\,T$$

PROBLEMA 6. Dos masas magnéticas de 200 A . m y 30 A . m se atraen con una fuerza de 10^{-3} N. ¿Cuál es la distancia que las separa?

RESOLUCIÓN : Como el problema dice que se atraen quiere decir que se trata de polos opuestos:

$$F = K_M\,\frac{m_1\,m_2}{d^2}$$

de donde:

$$d^2 = \frac{K_M\,m_1\,m_2}{F}$$

$$d = \sqrt{\frac{10^{-7}\,\dfrac{N\,m^2}{(A.m)^2} \times 200\,A.m \times 30\,A.m}{10^{-3}\,N}}$$

Rpta.: $d = 0{,}77\,m$

PROBLEMA 7. En un punto donde hay una masa magnética de 500 A . m hay una intensidad de 18 teslas. ¿Cuál es la fuerza (de atracción o rechazo), en ese campo, dentro del cual está el punto magnético?

RESOLUCIÓN: $B = \dfrac{F}{m}$

De donde: $F = m\,B$

$$F = 500\,A.m \times 18\,T$$

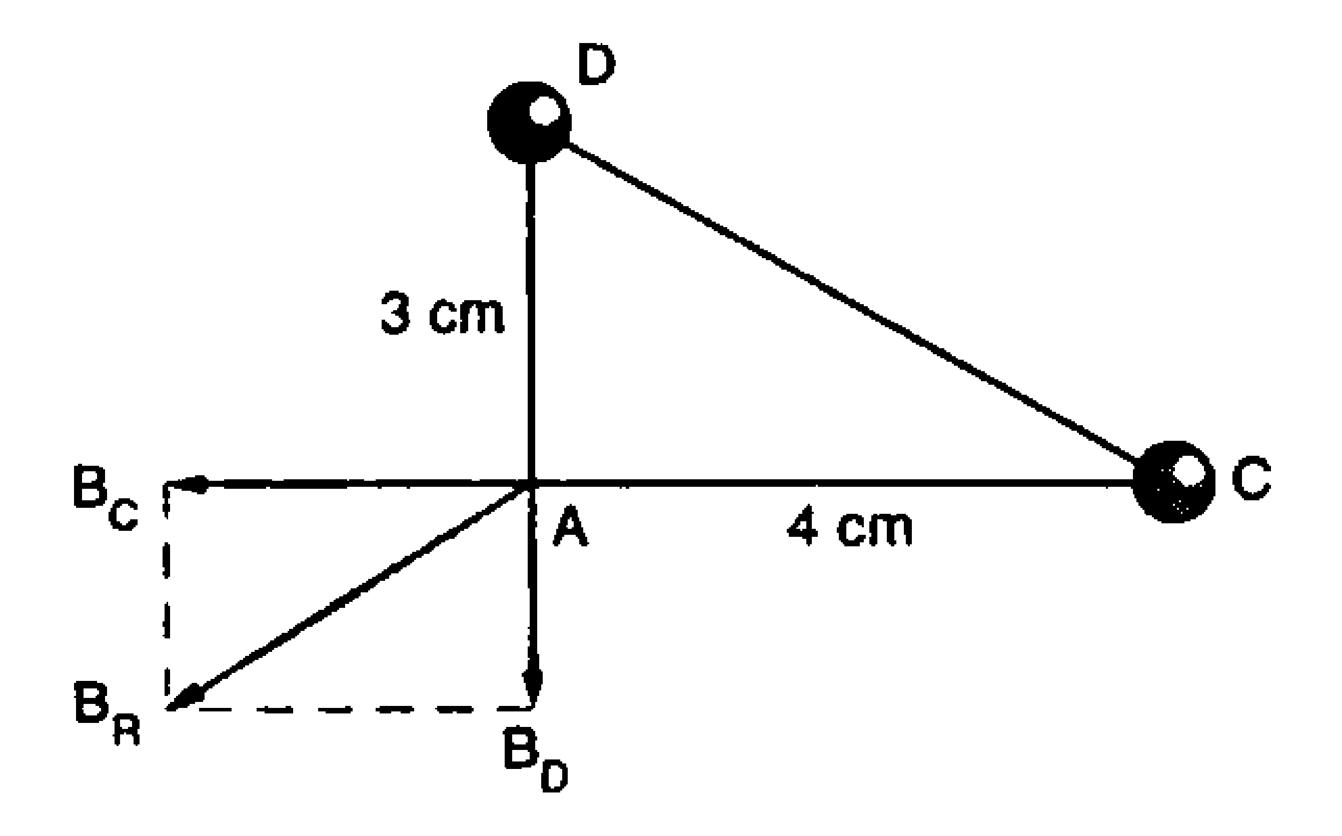
$$F = 9\,000\,A.m \times T$$

pero: $T = \dfrac{N}{A.m}$; luego:

Rpta.: $F = 9\,000\,N$

PROBLEMA 8. Dos masas magnéticas de 40 A . m y 100 A . m están en los vértices agudos D y C de un triángulo rectángulo de 3 y 4 cm de catetos. Calcular la intensidad resultante en el vértice recto.

RESOLUCIÓN:



- Intensidad del campo en el punto A, creado por la masa magnética **B**:

$$B_D = K_M\,\frac{M_B}{d_B^2}$$

$$B_D = 10^{-7}\,\frac{N\,m^2}{(A.m)^2} \times \frac{40\,A.m}{(3 \times 10^{-2}\,m)^2}$$

$$B_D = 4{,}4 \times 10^{-3}\,T \qquad (1)$$

- Intensidad del campo en el punto A, creado por la masa magnética C:

$$B_C = K_M\,\frac{M_C}{d_C^2}$$

$$B_C = 10^{-7}\,\frac{N\,m^2}{(A.m)^2} \times \frac{100\,A.m}{(4 \times 10^{-2}\,m)^2}$$

http://librosysolucionarios.net

$$B_C = 25 \times 10^{-3}\ T \qquad (2)$$

- Intensidad resultante

$$B_R = \sqrt{(B_D)^2 + (B_C)^2}$$

$$B_R = \sqrt{(4{,}4 \times 10^{-3})^2 + (25 \times 10^{-3}\ T)^2}$$

$$B_R = 25{,}38 \times 10^{-3}\ T$$

PROBLEMA 9. En un campo magnético creado por una masa de 80 A, se interpone una lámina permeable de flujo magnético. La lámina es de 40 cm² de área y está a 10 cm de la masa magnética. Calcular el flujo que lo atraviesa.

RESOLUCIÓN : Sabiendo que el flujo total es:

$$\phi = B . S \qquad (1)$$

Cálculo de B : (como $\mu = 1$)

$$B = K_M \frac{M}{d^2}$$

$$B = 10^{-7} \frac{N\,m^2}{(A.m)^2} \times \frac{80\ A.m}{(10 \times 10^{-2}\ m)^2}$$

$$B = 8 \times 10^{-4} \frac{N}{A.m}$$

Sustituyendo en (1) :

$$\phi = 8 \times 10^{-4} \frac{N}{A.m} \times 40 \times 10^{-4}\ m^2$$

$$\phi = 32 \times 10^{-7}\ T\,m^2$$

PROBLEMA 10. En el problema anterior, ¿cuál será la densidad del flujo?

RESOLUCIÓN :

$$B = \frac{\phi}{A} = \frac{32 \times 10^{-7}\ T\,m^2}{40 \times 10^{-4}\ m^2}$$

$$B = 0{,}80 \times 10^{-3}\ T \quad ; \quad ó:$$

Rpta.: $B = 8\ G$

PROBLEMA 11. ¿A qué distancia del polo norte de 15 A . m de un imán se debe colocar el polo sur de otro imán, cuya masa magnética es de 25 A . m, para que se origine una fuerza magnética cuya magnitud sea capaz de acelerar una masa de 5 g a 3 m/s?

RESOLUCIÓN : De acuerdo al problema:

$$F = K_M \frac{m_1 . m_2}{d^2} = m.a$$

de donde: $$d^2 = K_M \frac{m_1\,m_2}{m\,a}$$

$$d^2 = 10^{-7} \frac{N\,m^2}{(A.m)^2} \times \frac{15\ A.m \times 25\ A.m}{5 \times 10^{-3}\ kg \times 3\ m/s^2}$$

$$d^2 = 25 \times 10^{-4}\ m^2$$

Rpta.: $d = 5 \times 10^{-2}\ m = 0{,}05\ m$

PROBLEMA 12. El polo norte de un imán y el polo sur de otro, tienen masas magnéticas iguales a 10 A . m y 40 A . m, respectivamente. Determinar a qué distancia del polo norte, sobre la línea que une ambos polos, las intensidades de campo son iguales en magnitud. La distancia entre los polos es de 90 cm

RESOLUCIÓN :

Sea "x" la distancia medida con respecto al polo norte, donde se cumple por dato que:

$$B_1 = B_2 \qquad (1)$$

Se toman B_1 y B_2 como los campos producidos por los polos Norte y Sur.

Regresando a (1):

$$K_M \frac{M_1}{x^2} = K_M \frac{M_2}{(90 - x)^2}$$

Reemplazando datos:

$$\frac{10}{x^2} = \frac{40}{(90 - x)^2}$$

$$90 - x = 2x$$

$$3x = 90$$

Rpta.: $x = 30\ cm = 0{,}30\ m$

http://librosysolucionarios.net

ELECTROMAGNETISMO

DEFINICIÓN

Es el estudio de la relación que hay entre la corriente eléctrica y el magnetismo.

¿Qué fenómenos puede originar la corriente eléctrica a su paso?

Puede originar los siguientes:

1. **Fenómeno Químico:**
   En una solución iónica, al paso de la corriente eléctrica, mediante dos electrodos sumergidos en la solución, los iones son atraídos unos al cátodo, por eso se llaman cationes, y otros al ánodo, por eso se llaman aniones. Este proceso se llama electrólisis.

2. **Fenómeno Térmico:**
   Al paso de la corriente eléctrica a través de un conductor, éste se calienta y libera una cantidad de energía térmica alrededor del conductor. A este fenómeno se le conoce como Efecto Joule.

3. **Fenómeno Magnético:**
   Que es el que estudiaremos a continuación.

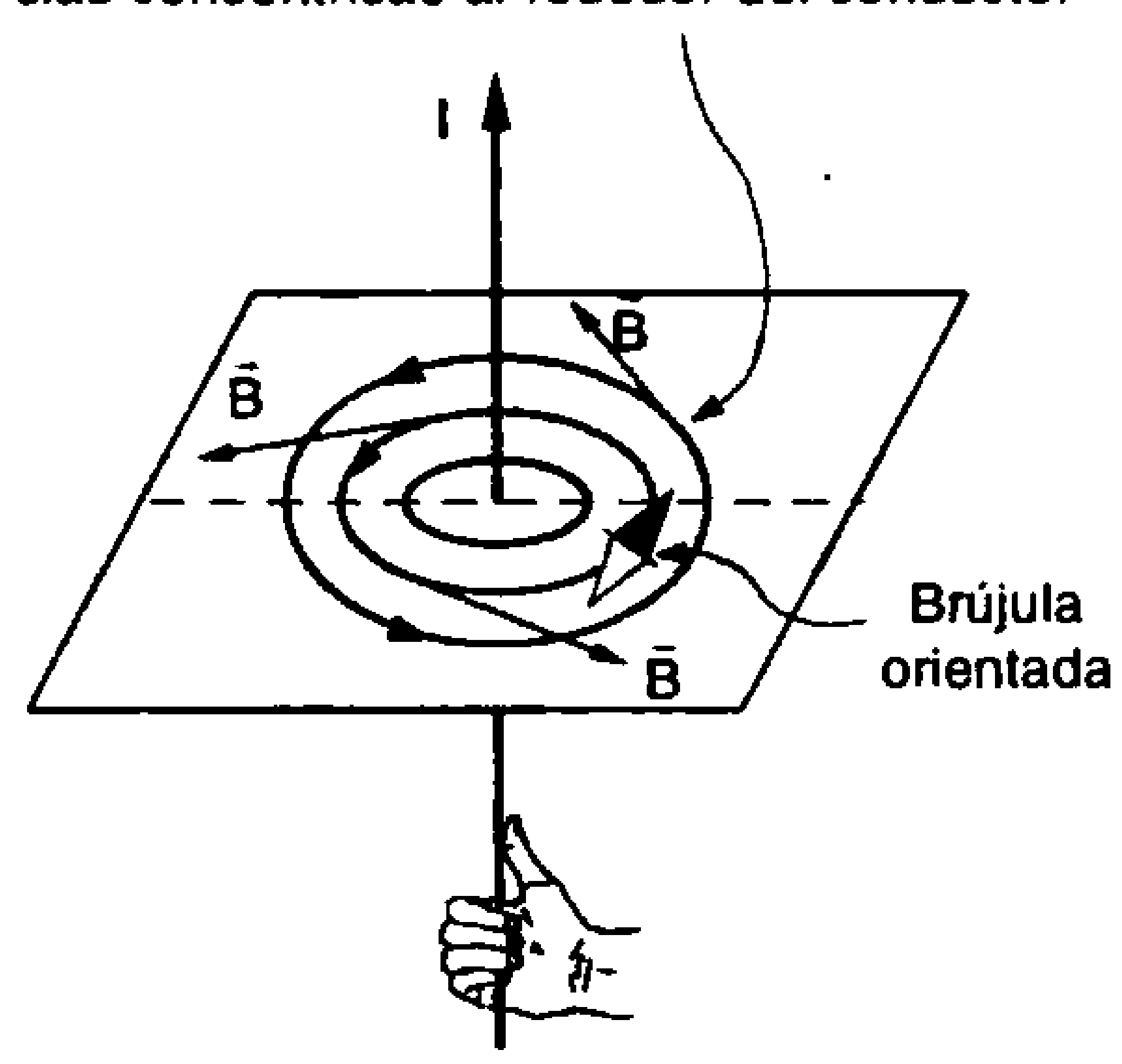
FENÓMENO MAGNÉTICO

En el año 1820, el danés Oersted descubrió que, alrededor de un conductor eléctrico, por donde circula corriente eléctrica, se crea un campo magnético.

Una pequeña brújula oscilatoria horizontal, colocada longitudinalmente sobre un conductor eléctrico por donde pasa corriente eléctrica, se orienta transversal a la dirección del conductor, esto hizo pensar a Oersted que las líneas de fuerza de un campo eléctrico son vectores transversales a la dirección de la corriente eléctrica.

Entonces cuando por un conductor rectilíneo circula corriente eléctrica, genera un campo magnético, el cual se representa mediante circunferencias concéntricas al conductor, éstas circunferencias están contenidas en un plano perpendicular al conductor.

Campo magnético representado por circunferencias concéntricas al redeor del conductor



Si una brújula se ubica cerca y encima de un conductor, en forma paralela, ocurren tres casos:

1. No hay ninguna desviación si por el conductor no pasa corriente eléctrica.
2. Cuando por el conductor pasa corriente eléctrica, la brújula gira alrededor de su eje y se pone transversal al conductor.
3. Cuando se cambia el sentido de la corriente que circula por el conductor, la brújula también gira pero en sentido contrario.

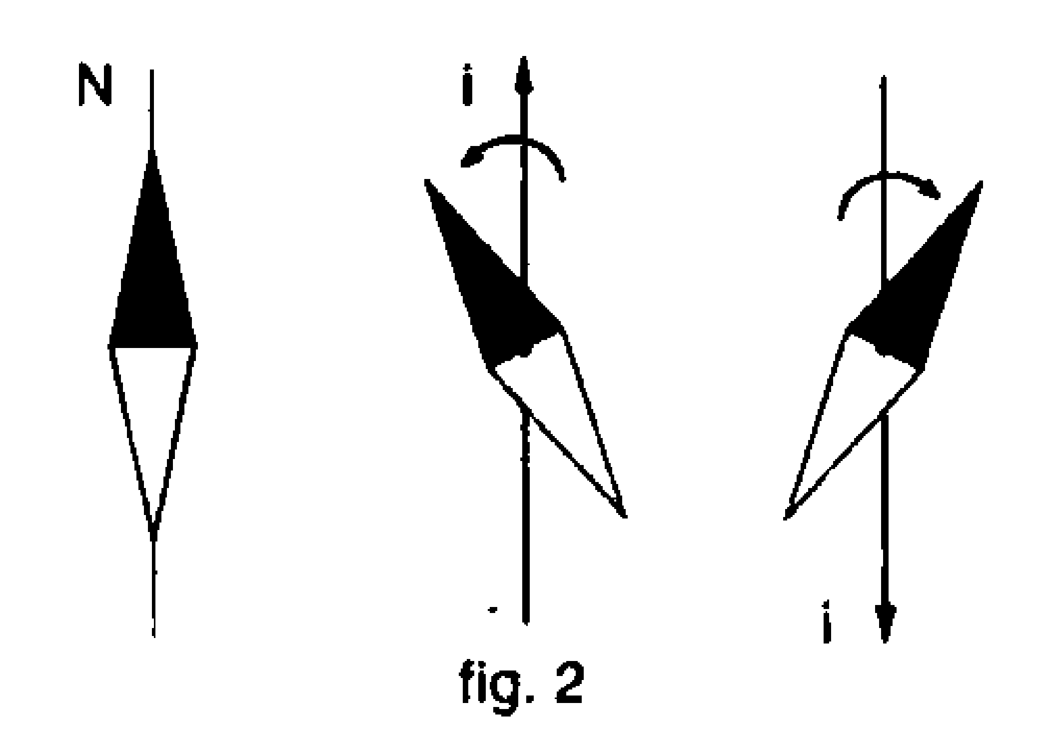


fig. 2

Cuando por el conductor no circula corriente la brújula no se desvía. Cuando circula corriente se pone transversal.

EFECTO OERSTED

Oersted, como resultado de su investigación, planteó: "Siempre que por un conduc-

http://librosysolucionarios.net

tor (generalmente alambre de cobre) **pasa corriente eléctrica, alrededor suyo se crea un campo magnético**, cuyo sentido u orientación depende del sentido de la corriente y cuya dirección es perpendicular a la dirección de la corriente".

REGLA DE LA MANO DERECHA (DE AMPERE)

Poniendo la palma de la mano estirada sobre un conductor, con la punta del dedo pulgar apuntando el sentido de la corriente, los otros dedos al empuñar el conductor indican la dirección y el sentido de las líneas magnéticas del campo electromagnético.

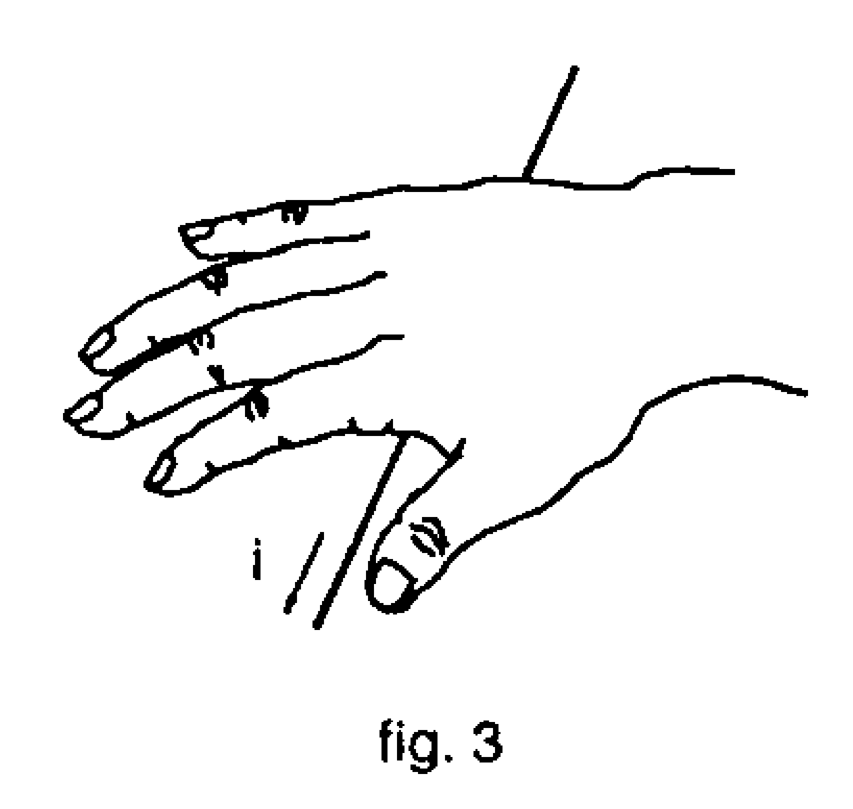


fig. 3

REGLA DEL TORNILLO O TIRABUZÓN (DE MAXWELL)

El sentido de las líneas de fuerza del campo magnético, es la del tornillo o del tirabuzón que gira para avanzar, siendo el sentido de la corriente el del avance del tirabuzón.

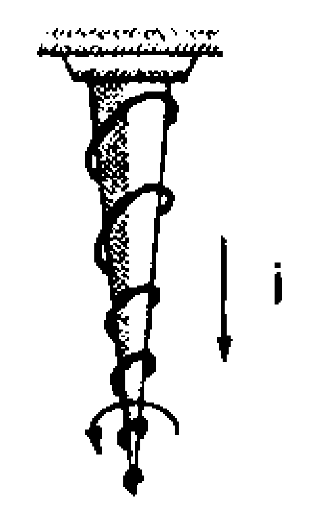


fig. 4

Las "líneas de fuerza" del campo magnético carecen de principio y de fin porque estas líneas son siempre cerradas. A estos campos cuyas líneas de fuerza son cerradas se denominan "campos rotacionales". Recordemos que en el campo eléctrico las líneas de fuerza empiezan en las cargas positivas y terminan en las negativas.

El campo eléctrico se caracteriza por una magnitud física vectorial, la "Intensidad de campo eléctrico: $\vec{E}$".

Del mismo modo el campo magnético se caracteriza por una magnitud física vectorial llamada "Inducción magnética $\vec{B}$".

Las llamadas "líneas de fuerzas" del campo magnético son en realidad "líneas de inducción magnética".

El vector inducción magnética $\vec{B}$ es tangente a la línea de inducción magnética. Tal como se muestra en la Fig. 5.

¿Cómo se cuantifica la inducción magnética $\vec{B}$?
Se cuantifica mediante la Ley de Biot y Savart.

LEY DE BIOT Y SAVART

"La intensidad del campo electromagnético o inducción magnética creada a su alrededor por un conductor rectilíneo por donde circula corriente eléctrica, es directamente proporcional a la intensidad de corriente e inversamente proporcional a la distancia del punto considerado al conductor"

Biot y Savart fueron más allá de lo cualitativo del descubrimiento de Oersted, dieron la "intensidad relativa del campo magnético" en función de la corriente eléctrica y en función de la posición relativa respecto al conductor.

DEDUCCIÓN DE LA LEY DE BIOT - SAVART

1° El módulo de la inducción magnética $\vec{B}$ es directamente proporcional a la intensidad de la corriente eléctrica "i", es decir:

$$\vec{B} \; \alpha \; i \qquad (1)$$

2° Esta observación es válida sólo cuando el campo magnético es producido por una corriente que fluye por un conductor rectilíneo.
La inducción magnética $\vec{B}$ decrece al aumentar la distancia "r" entre el conductor y el punto donde se mide $\vec{B}$, es decir:

$$\vec{B} \; \alpha \; \frac{1}{r} \qquad (2)$$

La dirección de $\vec{B}$ no varía al variar la intensidad de corriente eléctrica i.

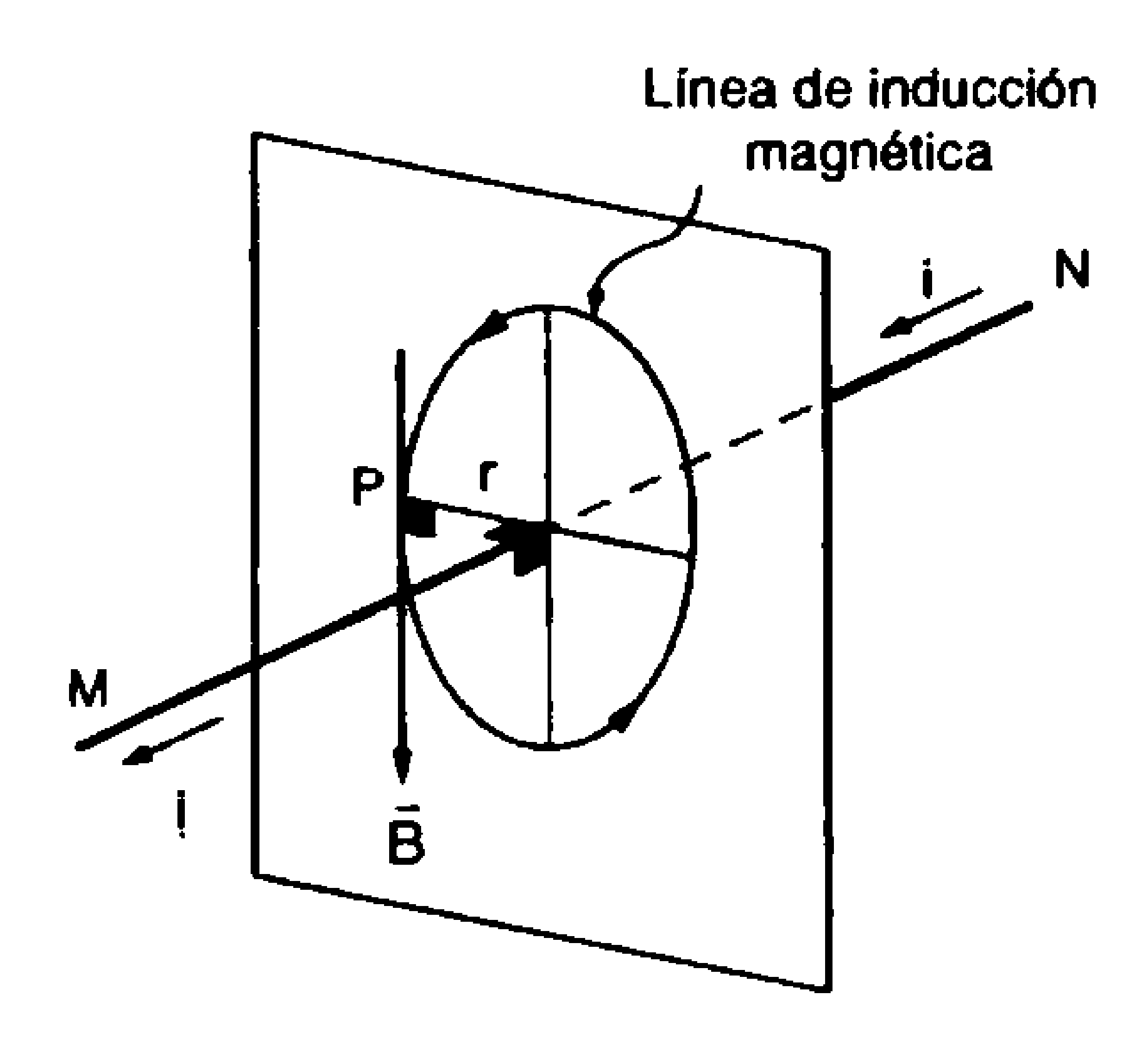


Fig. 5

De las relaciones (1) y (2), se obtiene:

$$B \; \alpha \; \frac{i}{r}$$

LEY DE BIOT - SAVART PARA UN SEGMENTO DE CONDUCTOR

Si la corriente eléctrica es "i", la distancia entre el segmento de recta MNy el punto P donde se realiza la medida de la inducción magnética $\vec{B}$ es "r", entonces su valor es:

$$B_P = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta)$$

Donde:

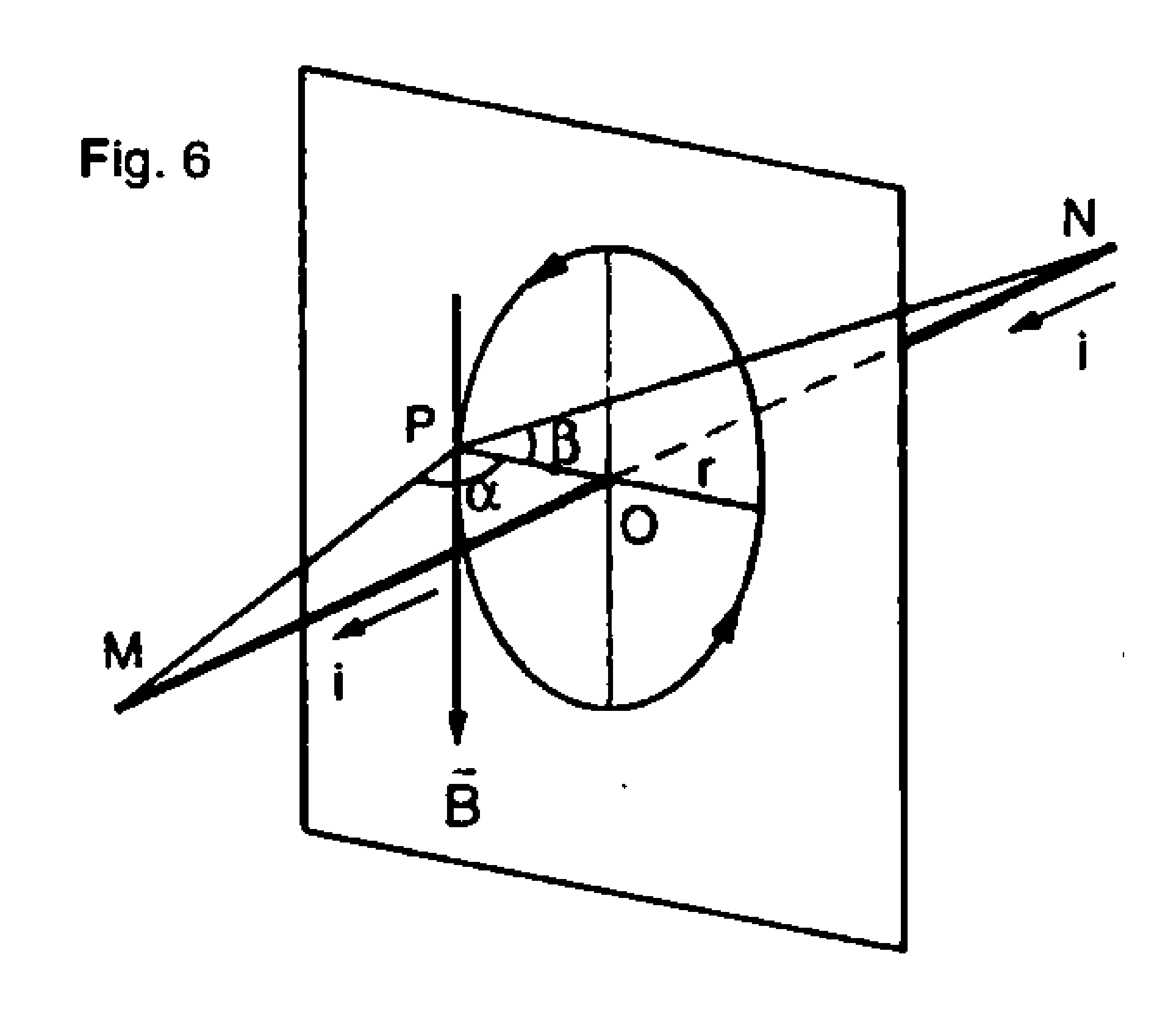
μ_0 : Es la constante de permeabilidad electromagnética del aire o vacío.

α y β : Ángulos formados por la perpendicular al vector $\vec{B}$ trazado desde el conductor (punto O) y los segmentos trazados, desde P, a los extremos M y N del conductor (Fig. 6).

B_P : Módulo de la inducción magnética en el punto P, se mide en teslas "T"

i : Intensidad de corriente eléctrica, se mide en amperios "A"

Fig. 6



r : Es la distancia desde el punto O hasta el punto P, se mide en metros "m"

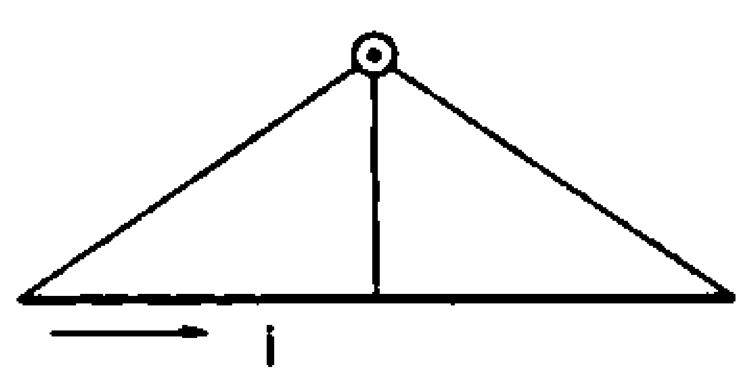
$$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7}\,\frac{T.m}{A}$$

T : tesla
m : metro
A : amperio

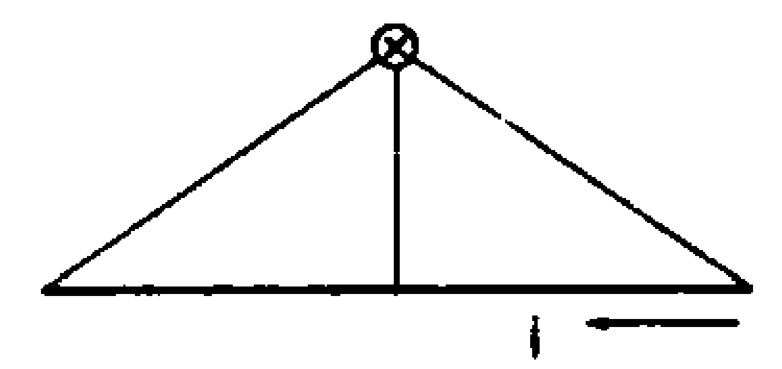
Simbología de $\vec{B}$ saliente y entrante:

⊗ Significa que $\vec{B}$ entra al plano de esta hoja.

⊙ Significa que $\vec{B}$ sale del plano de esta hoja.



El sentido de $\vec{B}$ es saliente de esta hoja de papel



El sentido de $\vec{B}$ es entrante de esta hoja de papel

RELACIÓN ENTRE μ_0 y ε_0

μ_0 es el análogo magnético de la permeabilidad eléctrica ε_0 en el aire o vacío. Sin embargo existe una diferencia en la manera

http://librosysolucionarios.net

cómo se determinan sus valores, ε_0 se determina experimentalmente, mientras que μ_0 se elige mediante una definición arbitraria. Sin embargo existe una relación entre μ_0, ε_0 y c (velocidad de la luz).

$$\boxed{\frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0} = c^2}$$

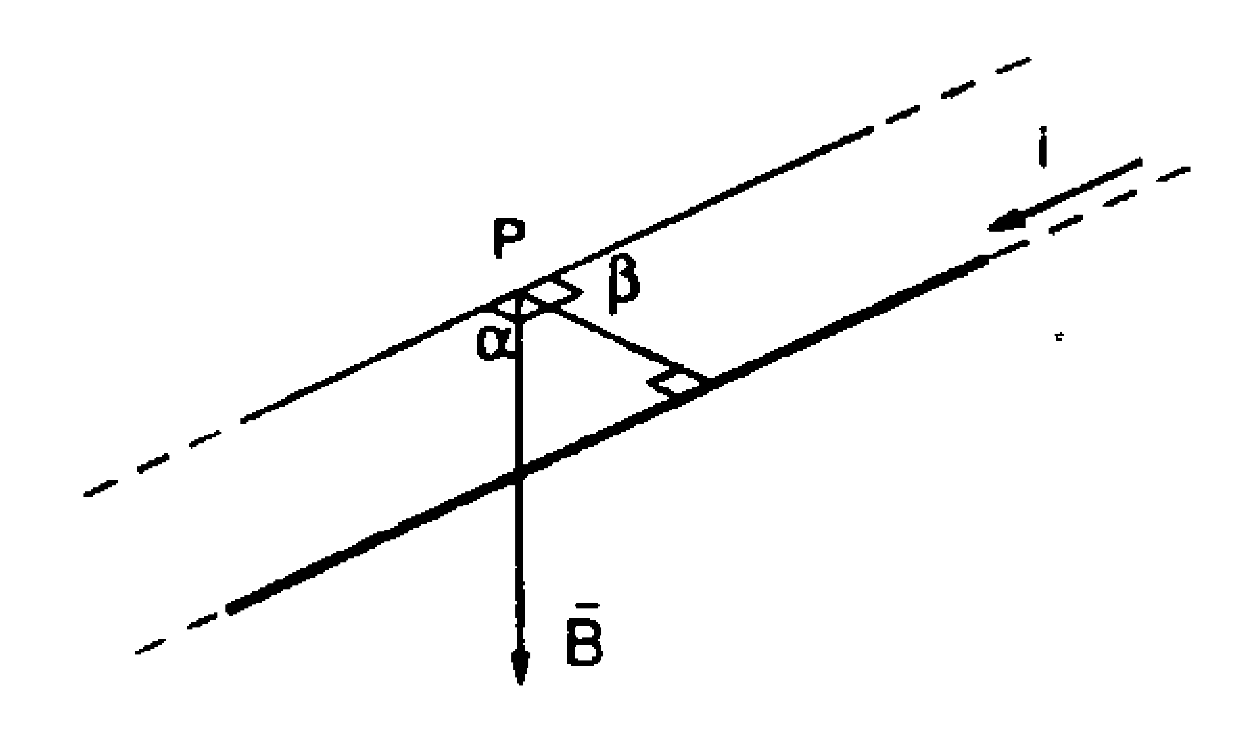
Donde:

μ_0 : Permeabilidad magnética del espacio libre.
ε_0 : Permitividad eléctrica del espacio libre.
c : Velocidad de la luz.

APLICACIONES DE LA LEY DE BIOT-SAVART

1. PARA UN CONDUCTOR RECTILÍNEO INFINITAMENTE LARGO:

Si el segmento conductor (alambre) de la figura, aumenta su longitud hacia ambos extremos, entonces α y β tienden a 90° (MNP // MN)



Si el conductor es infinitamente largo se cumple que:

$$\alpha = 90° \quad ; \quad \beta = 90°$$

De la Ley de Biot-Savart:

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(\underbrace{\text{sen } 90°}_{1} + \underbrace{\text{sen } 90°}_{1})$$

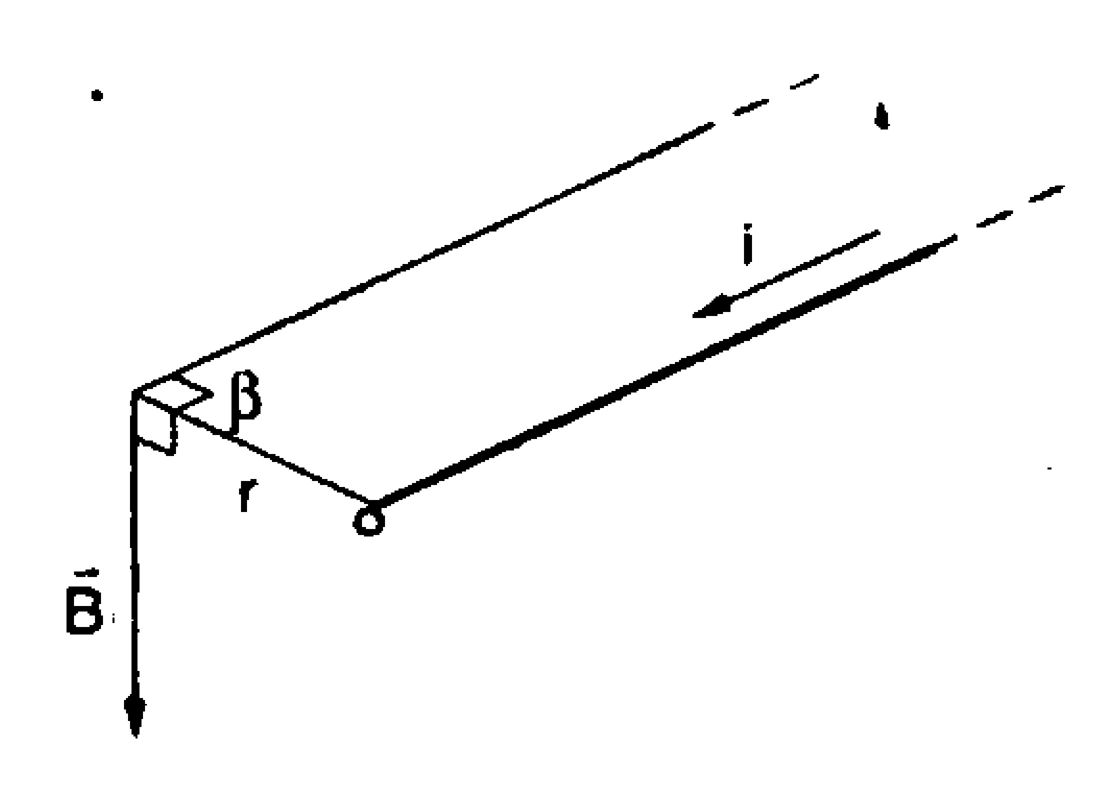
$$\therefore \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{2\pi . r}}$$

2. PARA UN CONDUCTOR IGUAL A UNA SEMIRECTA

En el segmento de recta $\overline{MN}$, el punto M se acerca a cero, α tiende a cero (α = 0); N se aleja al infinito y β → 90°, entonces

$$\alpha = 0° \quad ; \quad \beta = 90°$$

$$\text{sen } \alpha = 0 \quad \text{y} \quad \text{sen } \beta = 1$$



$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(\underbrace{\text{sen } 0°}_{0} + \underbrace{\text{sen } 90°}_{1})$$

$$\therefore \quad \boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}}$$

PRINCIPIO DE SUPERPOSICIÓN DE CAMPOS

Si en un punto dado del espacio varios vectores generan campos magnéticos cuyas inducciones son $\vec{B}_1, \vec{B}_2, \vec{B}_3$, etc; la inducción resultante en este punto será:

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 + \vec{B}_3 + ...$$

Con este principio se demuestra que la inducción que genera una recta infinitamente larga es igual al doble de la inducción generada por una semirecta, es decir:

$$\vec{B}_{recta} = \vec{B}_{semi\ recta} + \vec{B}_{semi\ recta}$$

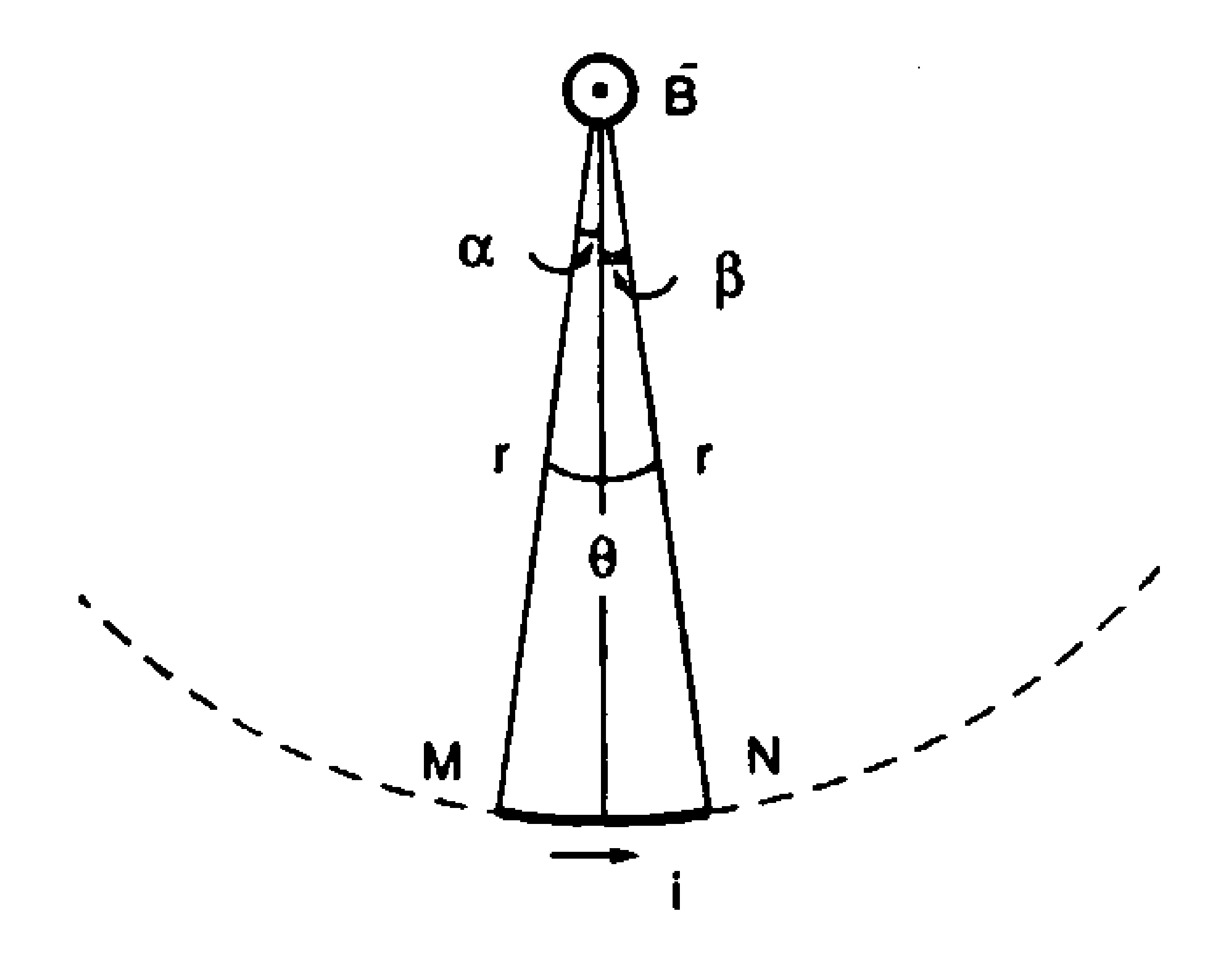
3. PARA UN ARCO CONDUCTOR MUY PEQUEÑO $\overset{\frown}{MN}$

1° Considerando un pequeñísimo segmento semejante a un pequeñísimo arco $\overset{\frown}{MN}$

2° Si α y β son muy pequeños y están medidos en radianes, entonces en el límite:

$$\text{sen } \alpha = \alpha \quad \text{y} \quad \text{sen } \beta = \beta$$

Ahora, llamando α + β = θ (también muy pequeño)



$\vec{B}$ (vector saliente del plano del papel del libro). Se tiene:

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta)$$

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\underbrace{(\alpha + \beta)}_{\theta}$$

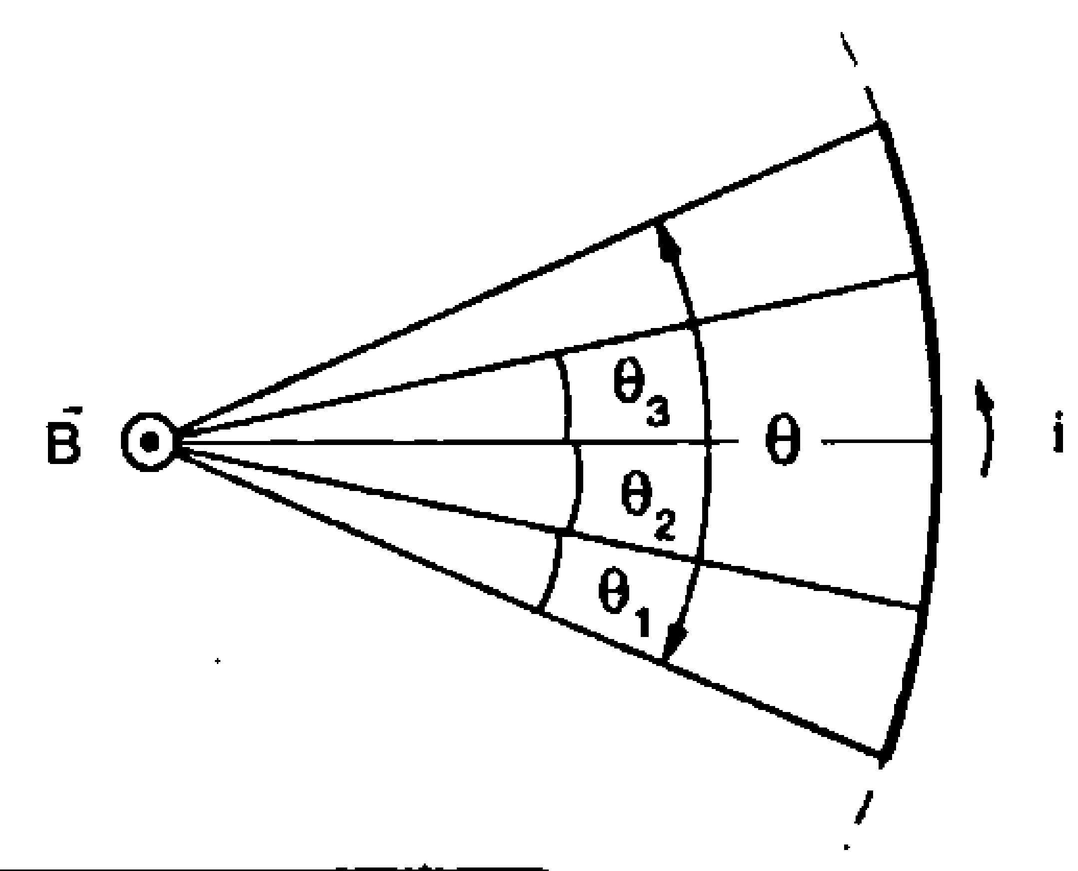
$$\boxed{B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\cdot\theta}$$

Para cualquier valor de θ muy pequeño:

3° Por el principio de superposición: varios pequeños arcos de circunferencia cuyos radios son "r" generan una inducción

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\theta_1 + \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\theta_2 + ...$$

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\underbrace{(\theta_1 + \theta_2 + ...)}_{\theta}$$



$$\boxed{B = \frac{u_0 . i}{4\pi . r}\cdot\theta}$$

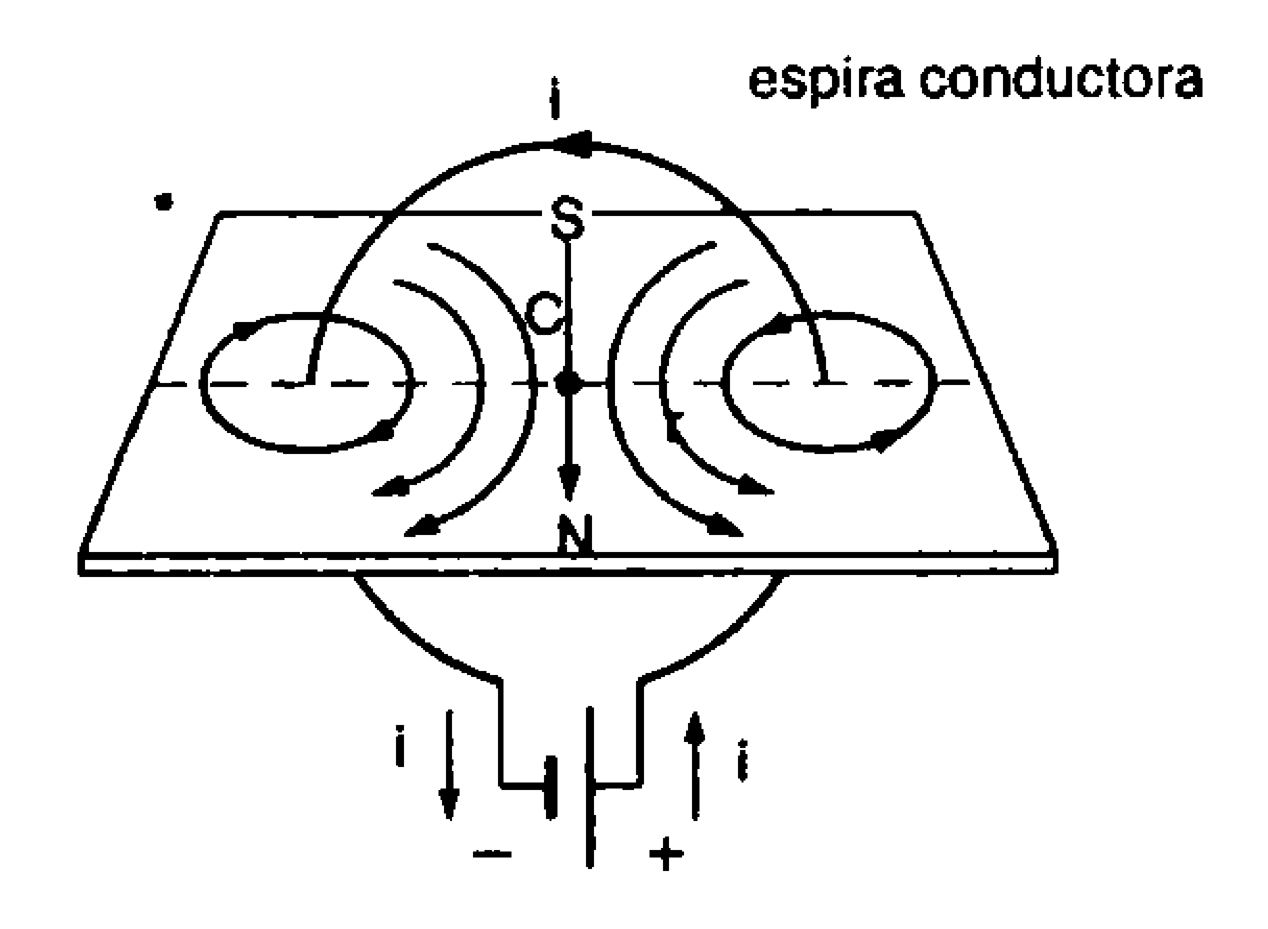
Para cualquier arco $0 < \theta < 2\pi$

El arco conductor se encuentra en el plano del papel del libro, entonces el vector inducción $\vec{B}$ es saliente del plano.

4. PARA UNA ESPIRA CIRCUNFERENCIAL

Un conductor circular por donde circula corriente eléctrica es un verdadero imán. Un experimento sencillo demuestra esta afirmación.

Un alambre circular que atraviesa una cartulina, conforme se muestra en la figura siguiente, es un conductor por donde está pasando corriente eléctrica. Si sobre la cartulina se espolovorea limadura de hierro se diseña un espectro, o líneas de fuerza, exactamente igual al que aparecería cuando debajo de la cartulina, con limadura encima, se colocaría un imán de barra. El alambre circular por donde circula corriente eléctrica se convierte en un imán cuyos polos norte y sur son los costados laterales del conductor circular.



Recuérdese que las líneas de fuerza salen del polo Norte y entran al polo Sur.

El valor de la inducción de campo electromagnético o inducción magnética de una espira en su centro, creado por una corriente circular se calcula así: del caso anterior, (3) cuando θ = 2 π rad, el arco es una circunferencia, es decir:

Si: $$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}\cdot\theta$$

$$B = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(2\pi)$$

http://librosysolucionarios.net

$$B = \frac{\mu_0 . i}{2r}$$

Este es el valor de la inducción magnética en el centro "C" de la espira. Ahora, en un punto cualquiera del eje de la espira, a una distancia "x" del centro es:

$$B_P = \frac{\mu_0}{2r} \cdot \frac{i.r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

5. PARA UN SEGMENTO DE RECTA EN UN PUNTO COLINEAL AL SEGMENTO

Si del punto P, que está en la misma línea del segmento, se trazan rectas a los extremos del mismo segmento, $\alpha = \beta = 0$, esto es: $\text{sen}\,\alpha = 0$ y $\text{sen}\,\beta = 0$.



De la ley Biot-Savart:

$$B_P = \frac{\mu_0 . i}{4\pi . r}(\underbrace{\text{sen}\,\alpha}_{0} + \underbrace{\text{sen}\,\beta}_{0}) \;;\; B_P = 0$$

$$\vec{B}_P = \vec{0}$$

La inducción magnética en el punto P es nula, cuando el punto P es un ounto del conductor.

NOTA : Como la unidad "teslas" es muy grande, a veces se usa también un submúltiplo: el gauss "G"

$$1\,G = 10^{-4}\,T$$

ó: $$1\,T = 10^4\,G$$

Ejemplo 1. Por un alambre recto delgado circula una corriente de 20 amperios, ¿cuál es el valor de la inducción magnética en el campo a una distancia de 0,8 m?

RESOLUCIÓN: $B_P = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$

$$B = \frac{4\pi \times 10^{-7}\,\frac{T.m}{A}}{2\pi} \times \frac{20\,A}{0{,}8\,m}$$

$B = 5 \times 10^{-6}\,T$; ó:

$B = 5 \times 10^{-6}\,(10^4\,G)$

$B = 5 \times 10^{-2}\,G$

Ejemplo 2. ¿Cuál es la intensidad de la corriente que circula por un conductor lineal si a 0,56 m crea una inducción de 20 G?

RESOLUCIÓN: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$

De donde: $i = \frac{2\pi . r . B}{\mu_0}$

$$i = \frac{20\,\pi \,.\, 0{,}56 \,.\, 20 \,.\, 10^{-4}}{4\,\pi \,.\, 10^{-7}}$$

de donde:

$$i = 56 \times 10^2\,A$$

Ejemplo 3. Calcular la inducción del campo magnético de una corriente lineal de 4 C y 20 V a una distancia de 30 cm del alambre conductor.

RESOLUCIÓN: $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$ (A)

Adecuando los datos:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{T.m}{A}$$

$i = q\,.\,V = 40\,C \times 20\,V = 8 \times 10^2\,A$

$r = 3 \times 10^{-2}\,m$

Sustituyendo en (A) :

$$B = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7}}{2\pi} \cdot \frac{T.m}{A} \cdot \frac{8 \,.\, 10^2\,A}{3 \,.\, 10^{-2}\,m}$$

$B = \frac{16}{3} \cdot 10^{-3}\,T$; ó:

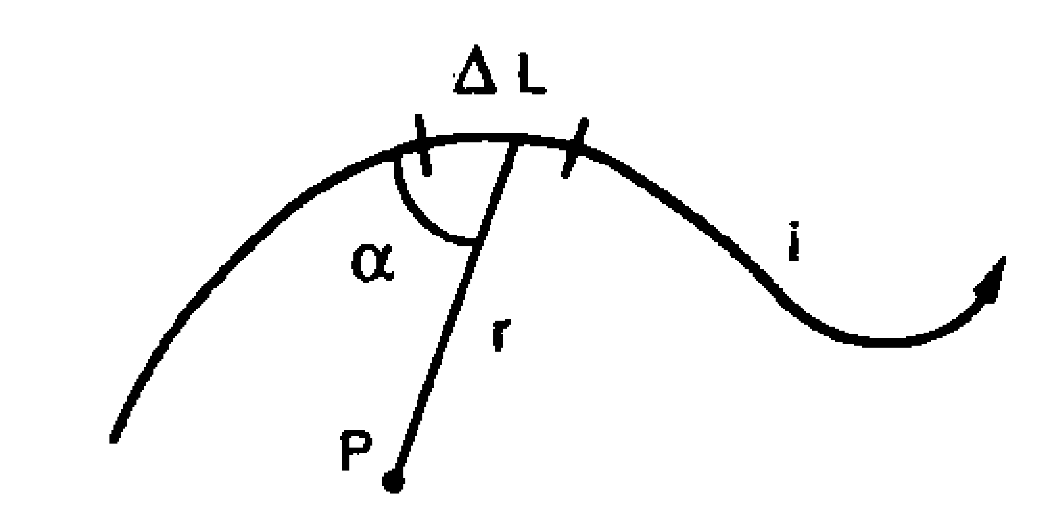
$B = \frac{16}{3} \cdot 10\,G$

http://librosysolucionarios.net

LEY DE AMPERE Y LAPLACE

Sobre la base de la Ley de Biot y Savart, Ampere y Laplace dedujeron una ley para calcular la intensidad electromagnética o inducción magnética en tramos pequeños de cualquier forma de conductores eléctricos y la enunciaron así:

"La inducción magnética "B" en un punto "P", es directamente proporcional a la constante "μ_0", a la intensidad eléctrica "i" que circula por un conductor, a la longitud "Δ L" del tramo del conductor y al seno del ángulo "α" que hace el tramo del conductor con la recta trazada al punto considerado, e inversamente proporcional a la distancia "r" del tramo Δ L al punto".



$$\Delta B = \frac{\mu_0}{4\pi} \cdot \frac{i \cdot \Delta L}{r^2} \text{ sen } \alpha$$

MULTIPLICADOR

Cuando se quiere aumentar la intensidad electromagnética o inducción magnética se emplea el MULTIPLICADOR que se forma juntando y conectando varias espiras por donde pasa la misma intensidad de corriente, de manera que el campo es la suma de los campos de cada espira.

Su intensidad depende pues del número de espiras.

$$B_C = \frac{\mu_0}{2} \cdot \frac{i}{r} \cdot N$$

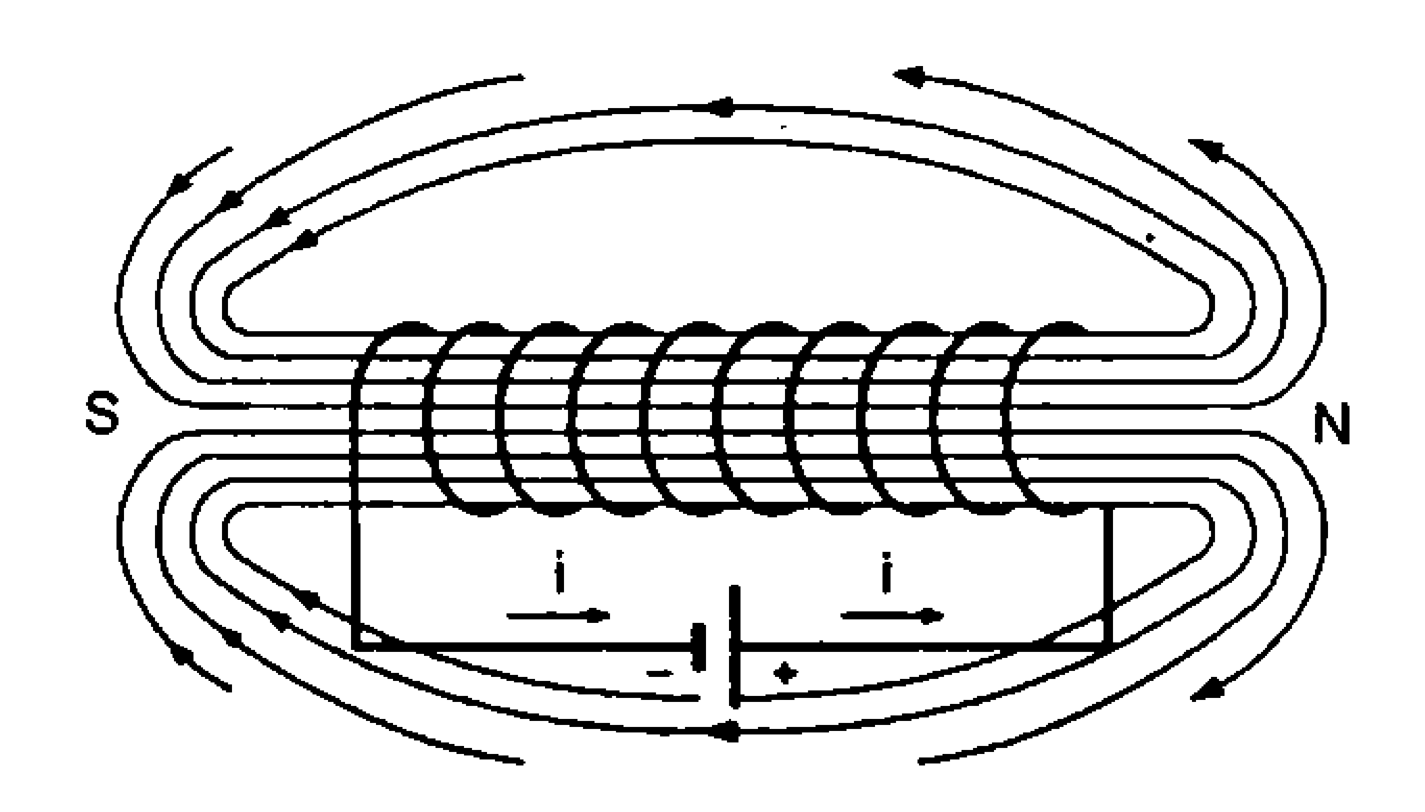
Donde:

N : número de espiras

SOLENOIDE O BOBINA

Se llama solenoide o bobina a un conductor formado por varios alambres circunferenciales o espiras unidos, es un alambre enrollado a semejanza de los hilos de un perno o como un resorte.

Cuando por este alambre, así enrollado, circula corriente eléctrica, se origina un campo magnético cuya intensidad es igual a la suma de las intensidades de los campos magnéticos de cada uno de los conductores circunferenciales o espiras.



CARACTERÍSTICAS DEL CAMPO DE UN SOLENOIDE

a) El campo magnético de un solenoide es mucho más intenso en el interior que en la parte exterior del solenoide.
b) El campo tiene su valor máximo de intensidad en el punto centro del campo interior del solenoide.
c) Las líneas de fuerza del campo entran por el polo sur y salen por el polo norte.

CARACTERÍSTICAS DE LA INTENSIDAD O INDUCCIÓN MAGNÉTICA "B" DE CAMPO DE UN SOLENOIDE EN SU INTERIOR

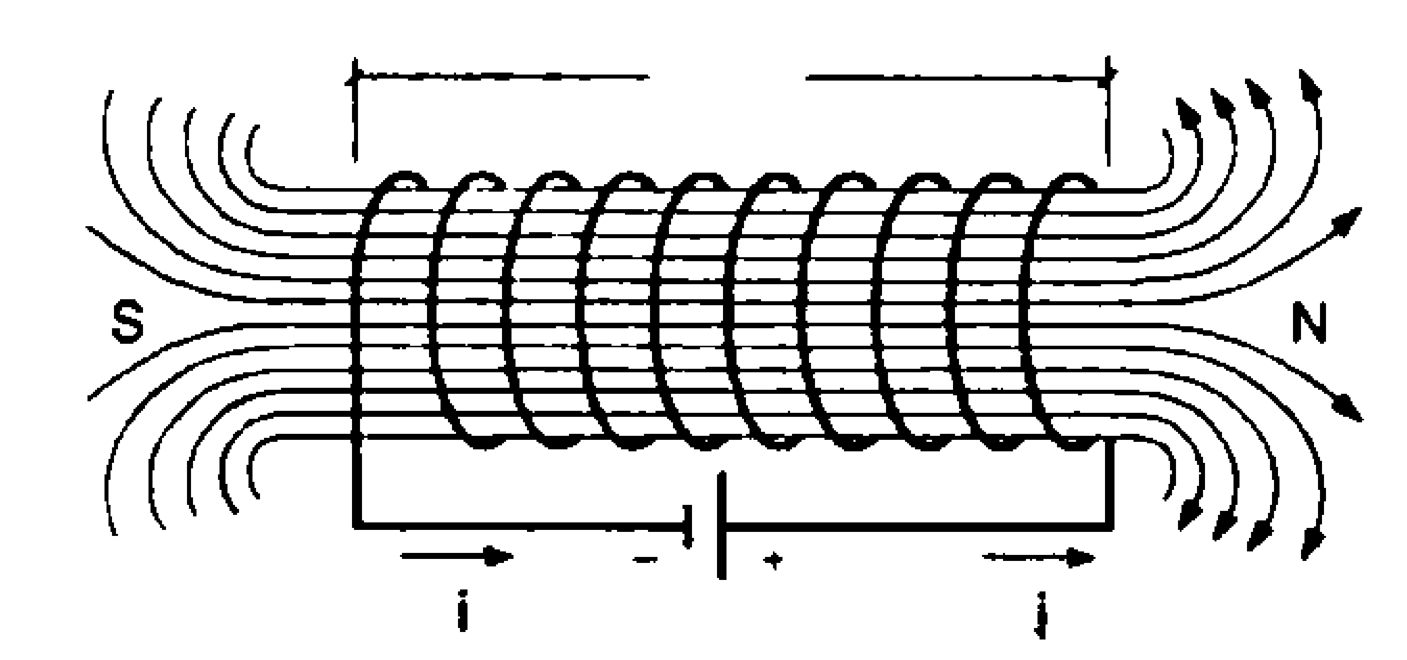
1. Es directamente proporcional al número "N" de espiras que conforman el solenoide.
2. Es directamente proporcional a la intensidad de la corriente "i" que circula.
3. Es inversamente proporcional a la longitud "L" del solenoide.

LEY DE LA CIRCULACIÓN DE AMPERE

Sobre la base de la ley de Biot y Savart, Ampere planteó la ley para calcular la intensidad magnética en el centro de un solenoide:

http://librosysolucionarios.net

$$B = \mu_0 \frac{N.i}{L} \qquad (A)$$



B : Intensidad del campo electromagnético o inducción magnético en el centro del solenoide, en teslas "T"
N : Número total de espiras
i : Intensidad de la corriente, en amperios "A"
L : Longitud del solenoide, en metros "m"
m_0: Permeabilidad del espacio libre o vacío

$$\mu_0 = 4\pi . 10^{-7} \frac{T.m}{A}$$

Si en la fórmula (A) se tiene que: $\frac{N}{L} = n$

Donde:
n = número de espiras por metro.
La fórmula (A) será:

$$B = \mu_0 . n . i$$

PROBLEMA 1. Por un solenoide que tiene 200 espiras por cm, circula una corriente de 20 amperios. ¿Cuál es la intensidad del campo electromagnético en el centro del solenoide?

RESOLUCIÓN : $N = 200$ espiras

$L = 1\,cm = 10^{-2}\,m \qquad i = 20\,A$

$$B = \mu_0 \frac{N.i}{L}$$

$$B = 2\pi \times 10^{-7} \frac{T.m}{A} \cdot \frac{200}{10^{-2}\,m} \cdot 20\,A$$

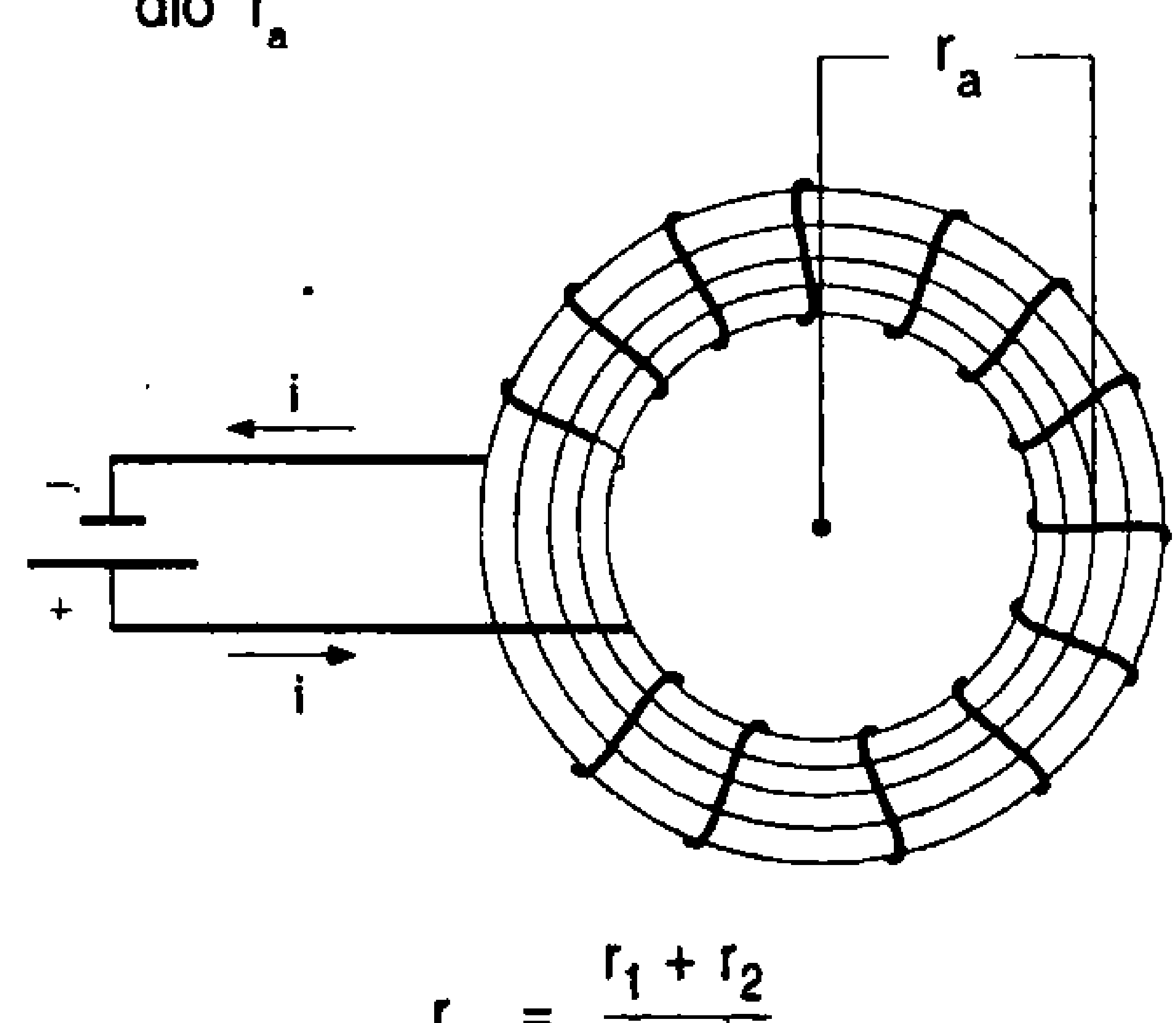
$B = 16\pi \times 10^{-2}\,T$ ó:

Rpta.: $B = 16\pi \times 10^{2}\,G$

BOBINA, SOLENOIDE ANULAR O SOLENOIDE TOROIDAL DE ROWLAND

Cuando se juntan los extremos de un solenoide, arqueando, para hacer una corona o anillo, ocurre que:

1. En el exterior el campo magnético es cero.
2. En el interior el campo magnético "B" es igual en cualquier punto.
3. El radio para los cálculos es el radio medio "r_a"



$$r_a = \frac{r_1 + r_2}{2}$$

INTENSIDAD DEL CAMPO ELECTROMAGNÉTICO EN EL INTERIOR DE UN SOLENOIDE CERRADO O TOROIDAL

En el interior de un solenoide toroidal, el campo magnético queda cerrado, pudiendo aplicarse la Ley de Ampere, con el cuidado de que $L = 2\pi r_a$, entonces:

$$B = \mu_0 \cdot \frac{N.i}{2\pi . r_a}$$

PROBLEMA 2. ¿Cuál será el valor de la intensidad del campo de un solenoide cerrado o toroidal cuya bobina tiene 400 espiras, o vueltas, por el cual pasa una corriente de 10 amperios? El radio medio de la bobina es de 12 cm.

RESOLUCIÓN $\qquad N = 400$

$r_a = 12\,cm = 12 . 10^{-2}\,m \qquad i = 10\,A$

http://librosysolucionarios.net

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi . r_a} \cdot N \cdot i$$

$$B = \frac{4\pi . 10^{-7}}{2\pi . 12 . 10^{-2}} \cdot 400 \cdot 10$$

$$B = \frac{2}{3} \times 10^{-2} \ T \ ; \ ó:$$

$$B = \frac{2}{3} \times 10^{2} \ G$$

NOTA : No confundir que "N" en la fórmula es el número de espiras del toroidal, en este problema N = 400, no es la unidad newton.

FLUJO A TRAVÉS DE SOLENOIDE

1. Cuando el núcleo del solenoide es aire

Recordando que el flujo magnético y también el flujo electromagnético se calcula así:

$$\phi = B . S$$

Pero: $B = \mu_0 . n . i$, luego:

$$\boxed{\phi = \mu_0 \cdot n \cdot i \cdot S}$$

ϕ : Flujo, en teslas "Tm^2" o weber "Wb"
i : Intensidad de la corriente que circula, en amperios "A"
S : Área circular de la bobina, en m^2

$n = \frac{N}{L}$, número de espiras por metro

PROBLEMA 3. Por un solenoide, o bobina de 1 m de largo y 32 cm de diámetro, con 1 000 espiras, circula una corriente de 10 amperios. Calcular el flujo magnético que pasa.

RESOLUCIÓN : L = 1 m

N = 1 000 espiras r = 16 cm = $16 . 10^{-2}$ m

i = 10 A

$$\phi = \mu_0 \cdot n \cdot i \cdot S \ ; \ ó:$$

$$\phi = \mu_0 \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

$$\phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1\,000}{1} \cdot 10 \cdot \pi (16 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\phi = 10{,}24\, \pi^2 \cdot 10^{-5} \ Tm^2 \ ; \ ó:$$

$$\phi = 10{,}24\, \pi^2 \cdot 10^{-5} \ Wb$$

PERMEABILIDAD MAGNÉTICA RELATIVA "μ_r"

Hasta ahora, todo lo que se ha estudiado de magnetismo y elctromag-netismo, supone que el medio en el que se ha producido el campo magnético es el aire o el vacío, en tal caso la permeabilidad magnética relativa "μ_r" tiene valor 1. Pero si el ambiente es diferente al aire o al vacío, es necesario incluir en las fórmula el factor "μ_r" es considerablemente mayor que "1".

La permeabilidad relativa es la relación entre el valor del flujo magnético en un material y el valor del flujo magnético en el aire o vacío.

$$\boxed{\mu_r = \frac{\phi_m}{\phi}}$$

ó: $$\boxed{\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0}}$$

Entonces las fórmulas de inducción magnética se pueden escribir así:

1. Inducción magnética de una corriente rectilínea

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \frac{i}{r}$$

2. Inducción magnética de una corriente circular.

$$B = 2\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \frac{i}{r}$$

3. Inducción magnética de un solenoide

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \frac{N}{L} \cdot i \ ; \ ó:$$

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot i$$

4. Inducción magnética de un solenoide toroidal.

$$B = 2 \cdot 10^{-7} \cdot \mu_r \cdot \frac{i}{r_a} \cdot N \ ; \ ó:$$

http://librosysolucionarios.net

$$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{i}{2\pi r_a} \cdot N$$

μ_r : Permeabilidad relativa de un material.
ϕ_m : Flujo magnético en un material
ϕ : Flujo magnético del vacío.
μ_0 : Permeabilidad del aire o vacío.

Ahora que ya se tiene el concepto de lo que es "μ_r", se tiene el flujo para el solenoide:

2. Cuando el núcleo del solenoide no es el aire

$$\boxed{\phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot n \cdot i \cdot S}$$

ó: $$\boxed{\phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S}$$

ó: $$\boxed{\phi = \mu \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S}$$

Donde: $\mu = \mu_0 . \mu_r$

Permeabilidad magnética del material del núcleo.

FLUJO INDUCIDO

Si un solenoide tiene un núcleo distinto al aire, de permeabilidad m_r el campo del solenoide crea magnetismo inducido en el núcleo, es decir que el núcleo también se convierte en un imán. Como este núcleo ahora está magnetizado por inducción, crea a su vez su propio campo magnético, lo que quiere decir que ahora pasan por el solenoide líneas de fuerza, de su propio campo y líneas de fuerza del campo producido por el núcleo.

El flujo de fuerzas magnéticas del conjunto se llama FLUJO INDUCIDO.

PROBLEMA 4. Calcular la intensidad del flujo de inducción con núcleo de hierro $\mu_r = 100$ de unsolenoide toroidal de 60 espiras por cm y 8 cm² de sección por el que circula una corriente de 5 amperios.

RESOLUCIÓN: $\mu_r = 100$

$L = 1\text{ cm} = 10^{-2}\text{ m}$ $S = 8\text{ cm}^2$
$i = 5\text{ A}$ $N = 60\text{ espiras}$

Sabiendo que:

$$\phi = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

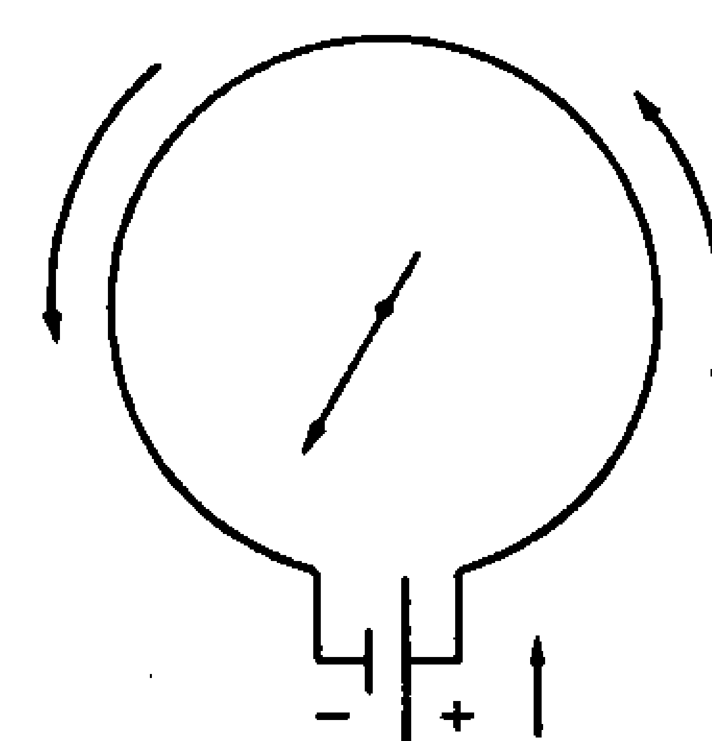
$$\phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 100 \cdot \frac{60}{10^{-2}} \cdot 5 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$$

$$\phi = 96\pi \cdot 10^{-5}\text{ Tm}^2 \text{ ; ó:}$$

$$\phi = 96\pi \cdot 10^{-5}\text{ Wb}$$

PROBLEMA 5. A través de un alambre circular de 60 cm de diámetro circula una corriente de 25 amperios. Calcular la intensidad del campo electromagnético creado por la corriente en el centro del círculo.

RESOLUCIÓN:



Recordando que $B = 2\pi K_M \cdot \frac{i}{r}$

Donde: $K_M = 10^{-7}\,\frac{T.m}{A}$

$i = 25\text{ A}$

$r = 3 . 10^{-2}\text{ m}$

$$\therefore\; B = 2\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{T.m}{A} \cdot \frac{25\text{ A}}{3 . 10^{-2}\text{m}}$$

Rpta.: $B = \frac{5}{3}\pi \cdot 10^{-5}\text{ T}$

PROBLEMA 6. ¿Cuántas espiras debe tener un solenoide de 20 cm de longitud para que con una corriente de

20 amperios se cree una intensidad magnética de 2 000 gauss?

RESOLUCIÓN : Recordando que:

$$B = \mu_0 \frac{Ni}{L}$$

de donde: $$N = \frac{BL}{\mu_0 i} \qquad (1)$$

Recordar que: $1\ G = 10^{-4}\ T$

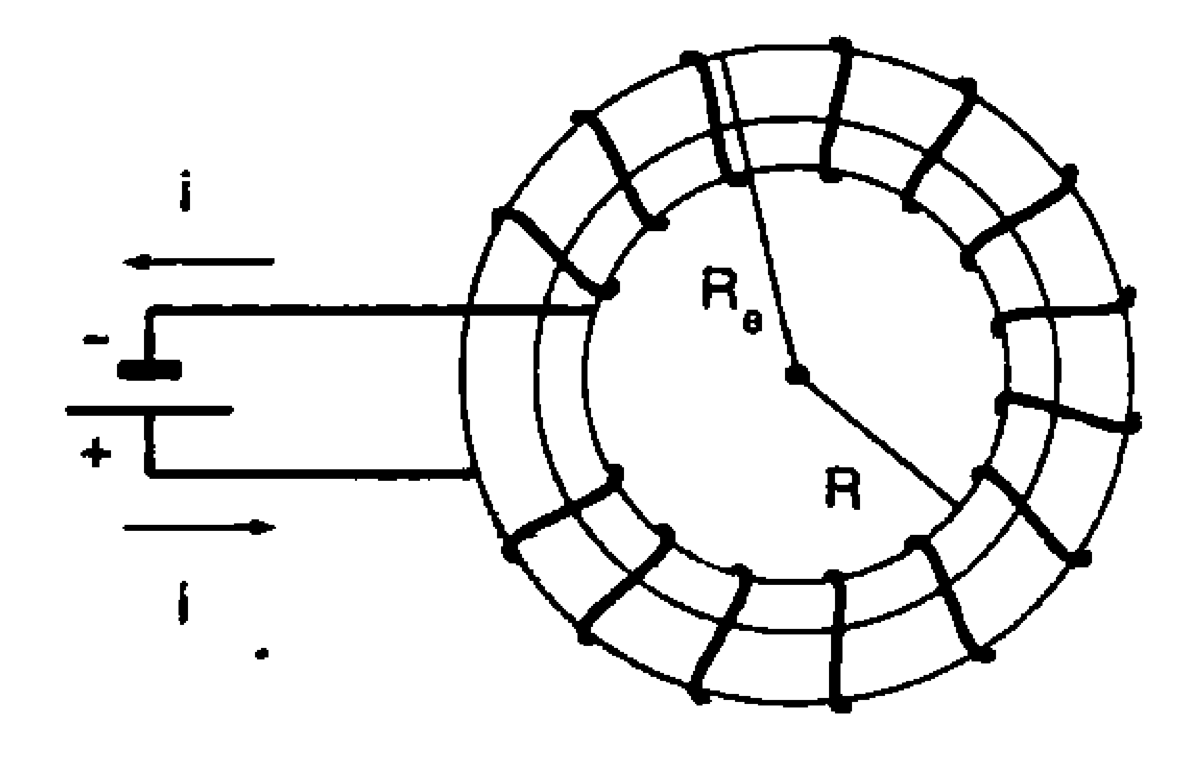
Sustituyendo datos en (1):

$$N = \frac{2\,000 \cdot 10^{-4}\ T \cdot 20 \cdot 10^{-2}\ m}{4\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{T.m}{A} \cdot 20\ A}$$

$$N = \frac{10^{-2}}{2\pi \cdot 10^{-6}} = \frac{10^{4}}{2\pi}$$

Rpta.: **N = 1 592 espiras**

PROBLEMA 7. Un solenoide toroidal cuya bobina tiene 500 vueltas y pasa una corriente de 20 A. El radio exterior es 50 cm y el radio interior es 40 cm. Calcular la intensidad del campo electromagnético del solenoide.



RESOLUCIÓN : $n = 500$ espiras

$i = 20\ A$ $\qquad r_e = 50$ cm

$r_i = 40$ cm

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r_a} \cdot N \qquad (1)$$

$$r_a = \frac{r_i + r_e}{2} = \frac{40 + 50}{2} = 45\ cm$$

$$r_a = 45 \cdot 10^{-2}\ m$$

Sustituyendo valores en (1):

$$B = 2 \cdot 10^{-7}\ \frac{T.m}{A} \cdot \frac{20\ A}{45 \cdot 10^{-2} m} \cdot 500$$

$$B = 0{,}04 \cdot 10^{-6}\ T$$

Rpta.: $B = 4 \cdot 10^{-4}\ T$ ó:

$B = 4 \cdot 10^{-8}\ G$

PROBLEMA 8. Por una bobina plana circular de 15 espiras de radio 20 cm, circula una corriente de 30 amperios. ¿Cuál es la densidad electromagnética que fluye en el centro de la bobina?

RESOLUCIÓN :

$$B = 2\pi K_M \frac{i}{r_a} \cdot N$$

Recuérdese que: $K_M = 10^{-7} \frac{T \cdot m}{A}$

$$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\ \frac{T.m}{A} \cdot \frac{30\ A}{20 \cdot 10^{-2} m} \cdot 15$$

Rpta.: $1{,}4 \cdot 10^{-3}\ T$; ó:

$1{,}4 \cdot 10^{-3}\ \frac{Wb}{m^2}$

NOTA : Convencionalmente se igualan la inducción magnética y la densidad del flujo magnético.

PROBLEMA 9. Por un hilo recto y largo circula una corriente eléctrica de 25 amperios. ¿Cuál es la densidad de flujo en un punto, a 3 cm del hilo?

RESOLUCIÓN : $B = \frac{\mu_0}{2\pi} \cdot \frac{i}{r}$

Donde: $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$

Reemplazando:

$$B = 2 \cdot 10^{-7}\ \frac{T.m}{A} \cdot \frac{25\ A}{3 \cdot 10^{-2} m}$$

$B = 1{,}67 \cdot 10^{-4}\ T$ ó:

http://librosysolucionarios.net

$$B = 1{,}67 \cdot 10^{-4} \frac{Wb}{m^2}$$

PROBLEMA 10. Calcular el flujo magnético de un solenoide con núcleo ferromagnético que está envuelto por un conductor cilíndrico de 20 mm de radio y 40 cm de longitud y cuenta con 360 espiras por las que pasa una corriente de 25 amperios ($\mu_r = 2\,000$)

RESOLUCIÓN: $r = 0{,}02$ m

$\mu_r = 2\,000$ $N = 360$ espiras

$L = 0{,}4$ m

$i = 25$ A

Sabiendo que: $\phi = B \cdot S$ (1)

Pero: $$B = \mu_0 \cdot \mu_r \cdot \frac{N \cdot i}{L}$$

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2\,000 \cdot \frac{360 \cdot 25}{0{,}4}$$

$$\mathbf{B = 56{,}55\ T}$$

Sustituyendo en (1):

$$\phi = 56{,}55\ T \cdot \pi\,(0{,}02\ m)^2$$

$$\phi = 0.071\ T\,m^2$$

Rpta.: $\phi = 0.071$ Wb

PROBLEMA 11. Una bobina toroidal tiene 3 000 espiras. Los diámetros interior y exterior son 22 y 26 cm respectivamente. Calcular la densidad de flujo en el interior de la bobina cuando por ella circula una corriente de 5 amperios.

RESOLUCIÓN: $$B = 2\pi K_M \frac{i}{r_a} \cdot N$$

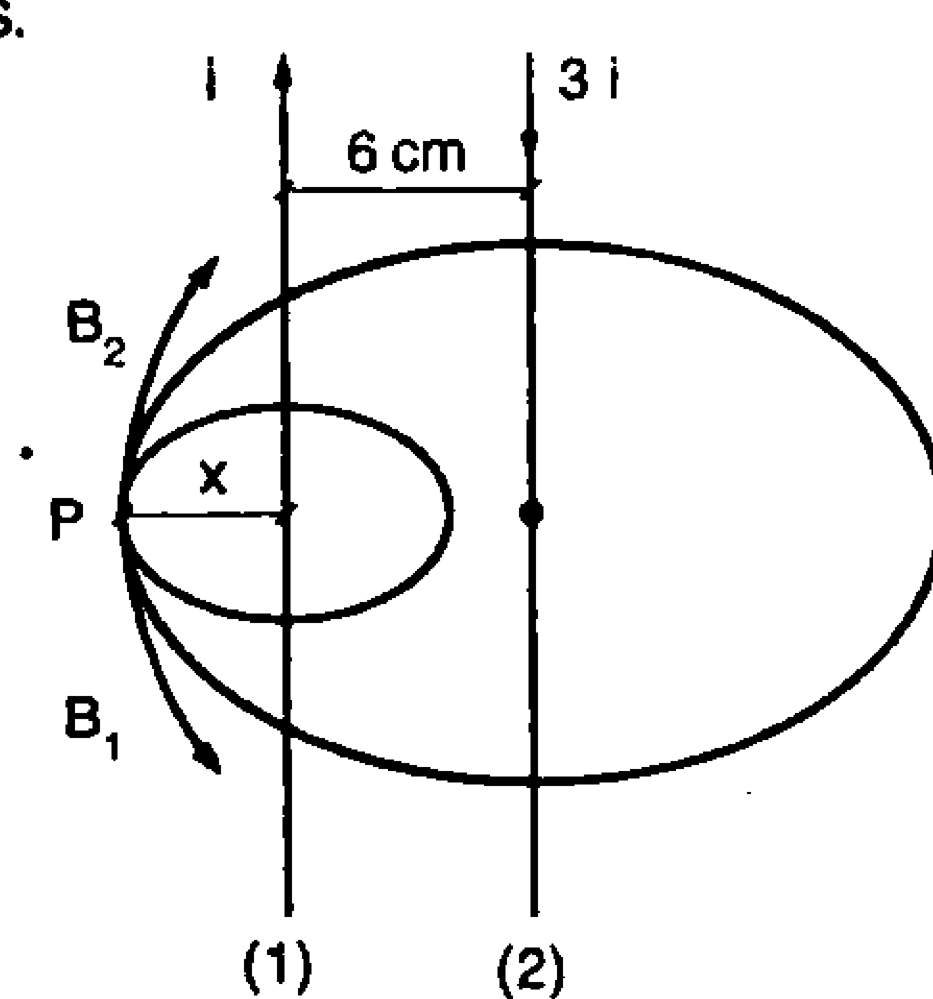
Donde: $$R_a = \frac{r_i + r_e}{2} = 0{,}12\ m$$

$$B = 2\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{5}{0{,}12} \cdot 3\,000$$

$$B = 79 \cdot 10^{-3}\ T\text{, ó:}$$

$$B = 79 \cdot 10^{-3} \frac{Wb}{m^2}$$

PROBLEMA 12. La figura muestra conductores rectilíneos infinitamente largos con corrientes "i" y "3i". La distancia entre ellos es de 6 cm. Calcular a qué distancia del conductor (1) la intensidad del campo magnético de ambos conductores son iguales.



RESOLUCIÓN:

Sea P el punto donde las intensidades son iguales.

Por condición: $B_1 = B_2$

$$\therefore \quad 2K_M \cdot \frac{i}{r_1} = 2K_M \cdot \frac{i}{r_2}$$

Simplificando y llamando:

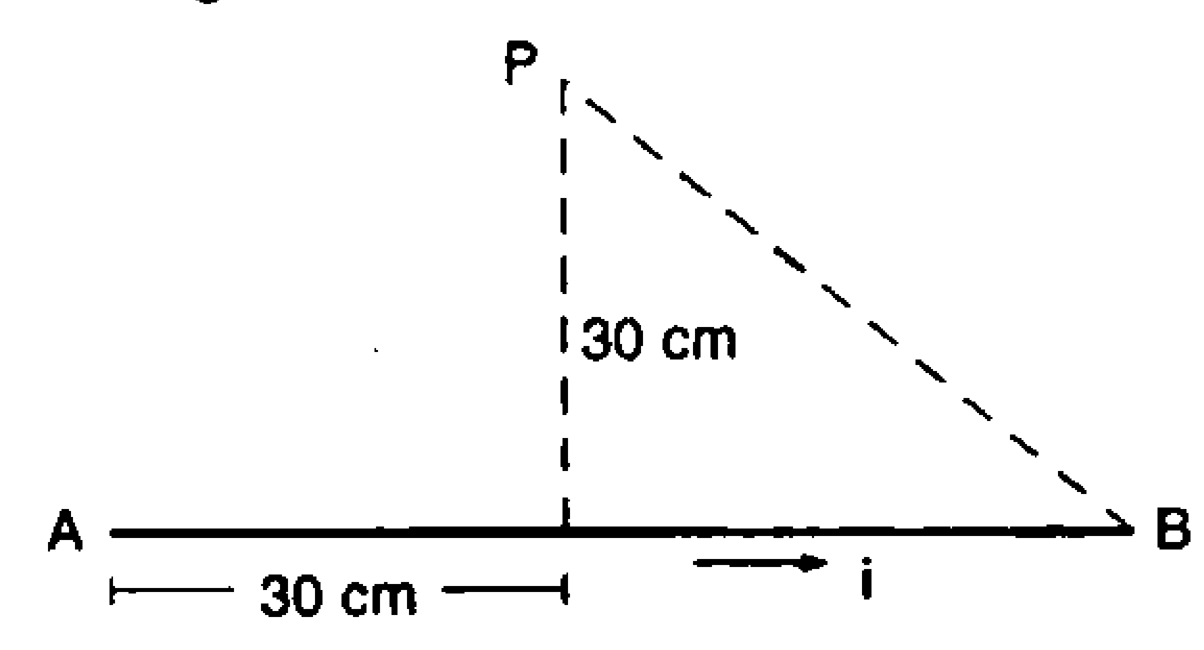
$$r_1 = x$$

$$r_2 = x + 6$$

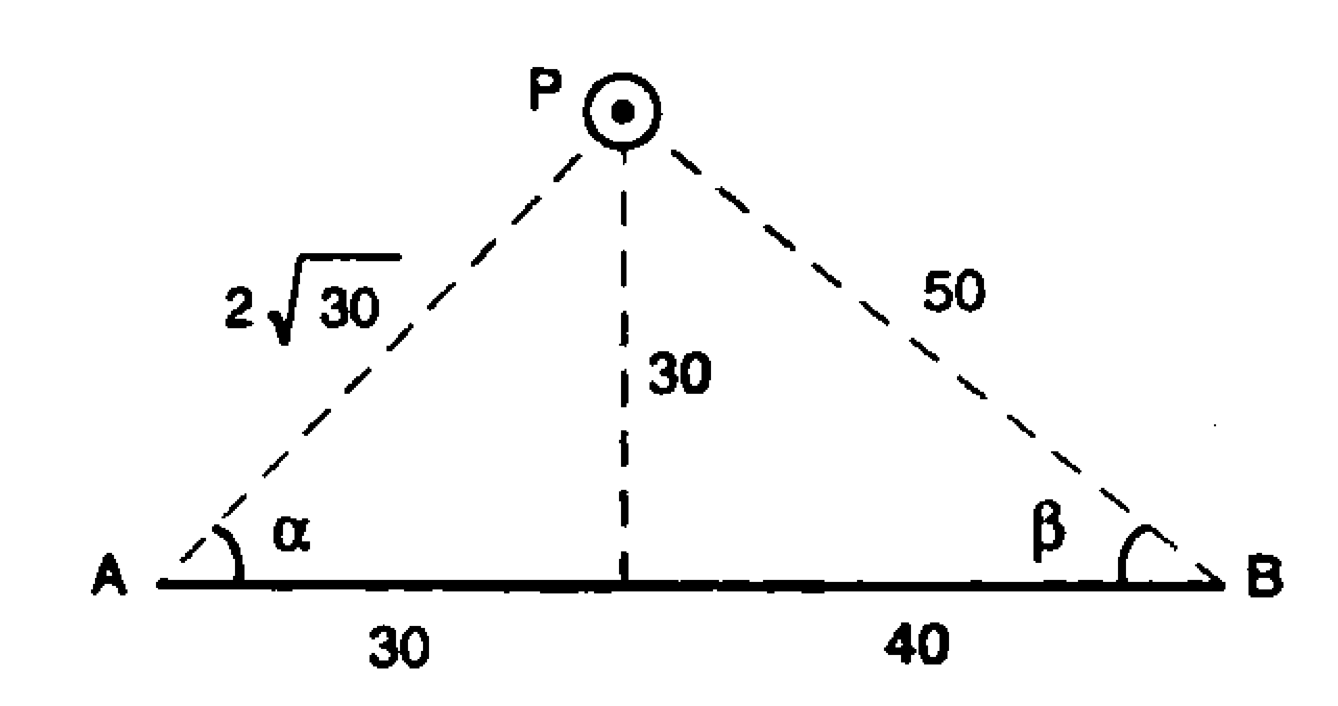
$$\therefore \quad \frac{1}{x} = \frac{1}{x+6}$$

Rpta.: $x = 3$ cm

PROBLEMA 13. A través de un segmento de recta de 30 cm circula una corriente de 15 amperios en un punto P, según la figura.



RESOLUCIÓN : Por la regla de la mano derecha se determina la inducción, tiene un sentido de la hoja afuera ⊙. Completando la figura se calcula los ángulos α y β.



Ahora, recordando la fórmula de Biot y Savart:

$$B_P = \frac{\mu_0 \cdot i}{4\pi r}(\text{sen}\,\alpha + \text{sen}\,\beta) \quad (1)$$

Donde: $r = 30\text{ cm} = 0{,}30\text{ m}$

$i = 15\text{ A}$

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{30}{2\sqrt{30}} \;;\; \text{sen}\,\beta = \frac{3}{5}$$

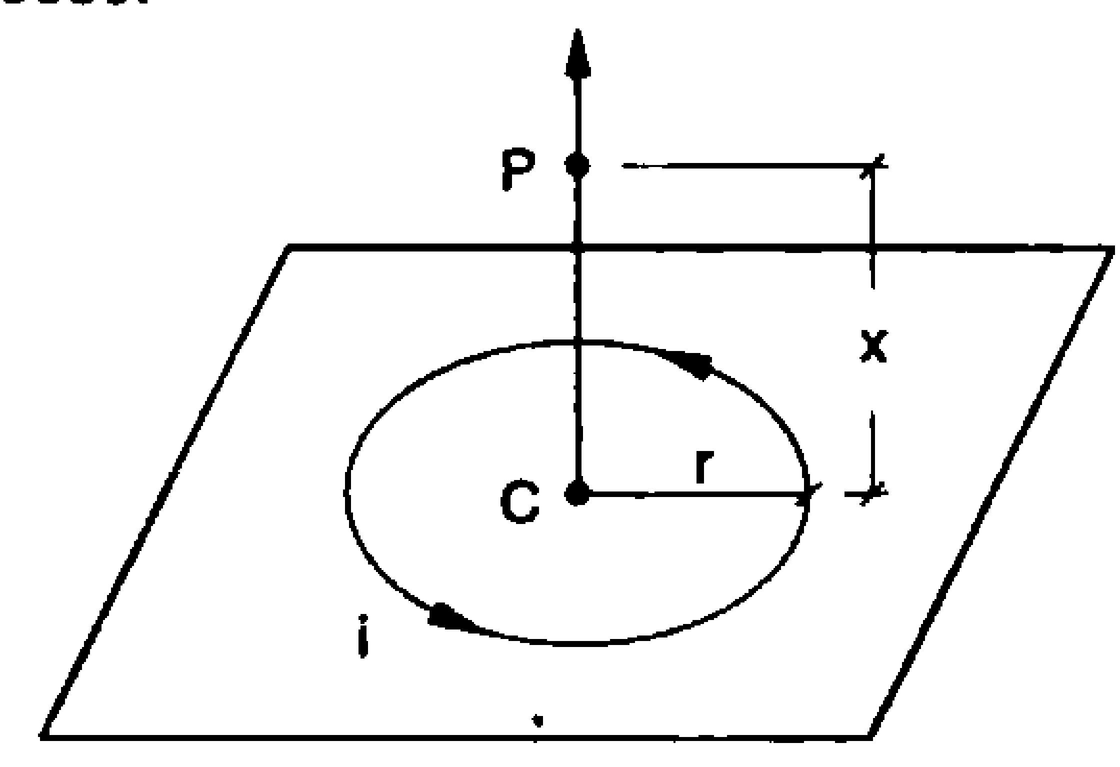
Sustituyendo en (1):

$$B_P = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7} \,.\, 15}{0{,}30}\left(\frac{30}{2\sqrt{30}} + \frac{3}{5}\right)$$

$$B_P = 209{,}78 \,.\, 10^{-6}\text{ T}$$

PROBLEMA 14. Por una espira de 0,5 m de radio circula una corriente de 30 A. Calcualr la inducción magnética en el eje de la espira a 60 cm de su centro.

RESOLUCIÓN : Sea el gráfico que indica el suceso:



$$B_P = \frac{\mu_0}{2r} \cdot \frac{i \,.\, r^2}{(x^2 + r^2)^{3/2}}$$

Donde:

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\,\frac{\text{T . m}}{\text{A}}$$

$i = 30\text{ A}$

$r = 50\text{ cm} = 0{,}50\text{ m}$

$x = 60\text{ cm} = 0{,}60\text{ m}$

Sustituyendo estos datos :

$$B_P = \frac{4\pi \,.\, 10^{-7}\,\frac{\text{T.m}}{\text{A}}}{2} \cdot \frac{30\text{ A}}{\left[(0{,}60\text{ m})^2 + (0{,}50\text{ m})^2\right]^{3/2}}$$

$$B_P = 392{,}7 \,.\, 10^{-7}\text{ T}$$

CIRCUITOS MAGNÉTICOS

Son CAMPOS ELÉCTRICOS INDUCIDOS por campos magnéticos variables y también son CAMPOS MAGNÉTICOS INDUCIDOS por campos eléctricos variables, cerrados, de flujo magnético inducido. Para explicar esto estudiaremos la ley de Rowland, efecto y ley de Faraday y ley de Lenz.

LEY DE ROWLAND

Se refiere a los circuitos cerrados de flujo magnético inducido, tomando en cuenta el material que se usa, su sección recta, la intensidad de la corriente eléctrica, el número de espiras de la bobina, la permeabilidad del material, etc, etc, para la construcción de máquinas electromagnéticas, como motores, electroimanes, timbres, etc.

El flujo a través de un solenoide toroidal con material de permeabilidad μ es:

$$\phi = \mu \cdot \frac{N}{L} \cdot i \cdot S$$

que se puede escribir así:

$$\phi = \frac{N \cdot i}{\frac{1}{\mu} \cdot \frac{L}{S}} \qquad (A)$$

Llamando a: $N \cdot i = \mathcal{F}$

Donde:

$\mathcal{F}$: Fuerza magnetomotríz, en amperio vuelta "A v" y llamando a:

$$\frac{1}{\mu} \cdot \frac{L}{S} = \mathcal{R}$$

Donde:

$\mathcal{R}$: Reluctancia magnética, en: $rel = \frac{A^2}{N.m}$

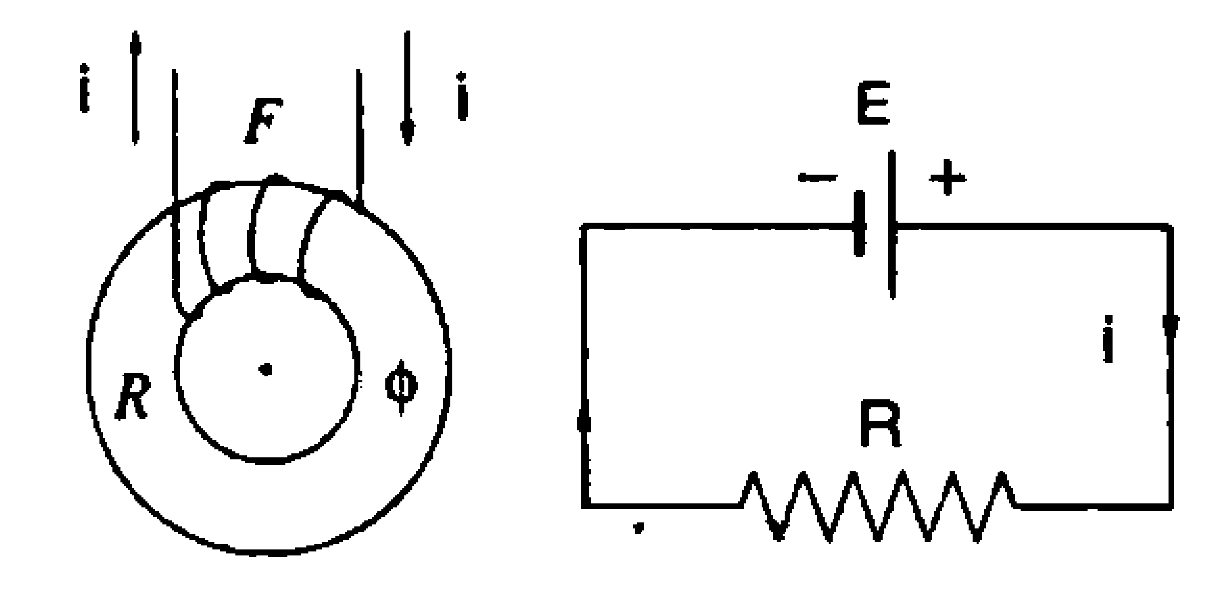
Sustituyendo en A:

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}}$$

Que es la Ley de Rowland y se enuncia así: "En un circuito magnético, el flujo es directamente proporcional a la Fuerza magnetomotríz e inversamente proporcional a la Reluctancia".

Esta Ley es comprable a la Ley de Ohm donde ϕ (flujo magnético) es como I (intensidad); $\mathcal{F}$ (fuerza magnetomotríz) es como E (fuerza electromotríz); $\mathcal{R}$ (reluctancia) es como R (resistencia)

$$\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} \quad , \text{ similar a } \quad i = \frac{E}{R}$$



UNIDADES SI:

ϕ , en weber "Wb"

$\mathcal{F}$, en amperio vuelta "Av" o amperio espira "Ae"

$\mathcal{R}$, en "$\frac{A^2}{Nm}$", esta unidad se llama "rel"

PROBLEMA 1. ¿Cuál es el flujo magnético que pasa a través de un toroidal con núcleo de $\mu_r = 120$, de 50 cm de longitud, 300 espiras, 5 cm de diámetro y una corriente de 1,2 amperios?

RESOLUCIÓN: $\mu_r = 120$

$r = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ m $\quad L = 0{,}5$ m

$i = 1{,}2$ A $\quad N = 30$ espiras

Sabemos que: $\phi = \frac{\mathcal{F}}{\mathcal{R}} \qquad$ (I)

$\mathcal{F} = N.i = 300\,e.1{,}2\,A = 360\,A\,e \quad (1)$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{L}{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{L}{S}$$

$$\mathcal{R} = \frac{1}{4\pi \cdot 10^{-7} \frac{T.m}{A} \cdot 120} \cdot \frac{0{,}5\,m}{\pi (2{,}5 \cdot 10^{-2} m)^2}$$

Recordar que: $T = \frac{N}{A.m}$

$$\therefore \quad \mathcal{R} = \frac{10^{11} \cdot 0{,}5}{4\pi^2 \cdot 120 \cdot 6{,}25} \cdot \frac{A^2}{Nm}$$

$$\therefore \quad \mathcal{R} = 168 \cdot 10^4 \frac{A^2}{N.m} \qquad (2)$$

Sustituyendo (1) y (2) en (I):

$$\phi = \frac{360\,A.e}{168{,}86 \cdot 10^4 \frac{A^2}{Nm}}$$

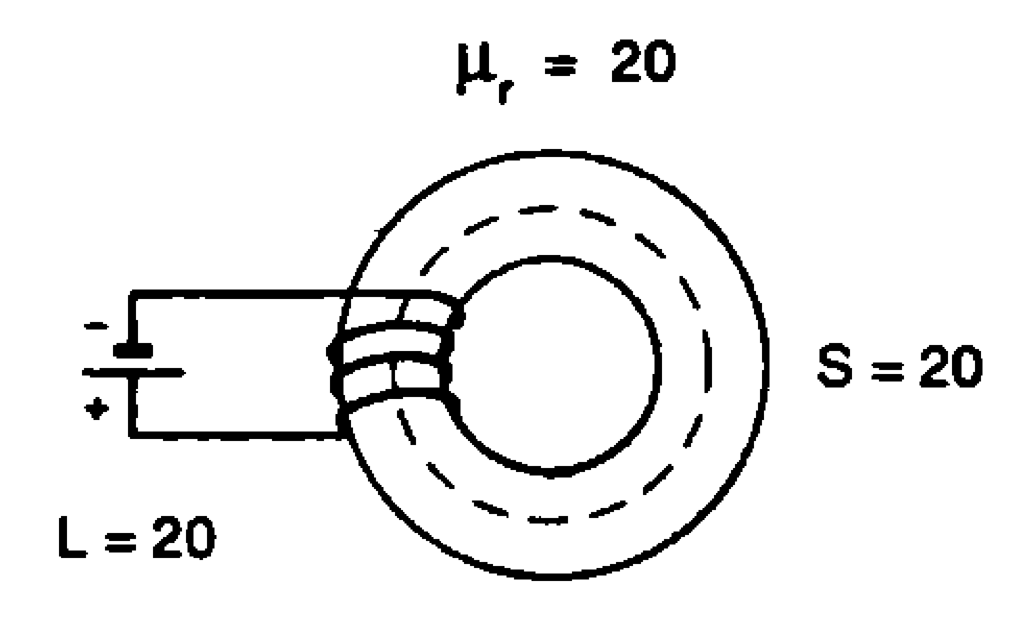
$$\phi = 2{,}13 \cdot 10^{-4} \frac{N}{A\,m} \cdot m^2$$

Rpta.: $\phi = 2{,}13 \cdot 10^{-4}\ T\,m^2$

$\phi = 2{,}13 \cdot 10^{-4}$ Wb

PROBLEMA 2. Calcular la fuerza magnetomotríz en A .e necesaria para producir un flujo en un circuito con un material de $\mu_r = 20$ una armadura de 100 cm de largo y 4 cm² de sección.

http://librosysolucionarios.net



RESOLUCIÓN: $F = \phi . R$ (1)

Cálculo de R:

$$R = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{L}{S} = \frac{1}{\mu_0 \mu_r} \cdot \frac{L}{S}$$

$$R = \frac{1}{4\pi . 10^{-7} . 20} \cdot \frac{1}{4 . 10^{-4}}$$

$$R = 9{,}95 \cdot 10^7 \cdot \frac{A^2}{Nm}$$

Sustituyendo en (1):

$$R = 2 \cdot 10^{-4} Wb \cdot 9{,}95 \cdot 10^7 \cdot \frac{A^2}{Nm}$$

$$R = 19{,}9 \cdot 10^3 \cdot T\,m^2 \cdot \frac{A^2}{Nm}$$

$$R = 19{,}9 \cdot 10^3 \cdot \frac{N}{A.m}\,m^2 \cdot \frac{A^2}{Nm}$$

$$R = 19{,}9 \cdot 10^3\ A\,e$$

PROBLEMA 3. Calcular el flujo que atraviesa un solenoide 50 e/cm, usando una corriente de 10 amperios, si el diámetro del núcleo, $\mu_r = 5$, es de 6 cm.

RESOLUCIÓN: $\phi = \mu_0 . \mu_r . n . i . S$

Sustituyendo datos:

$$\phi = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 5 \cdot \frac{50\,e}{10^{-2}} \cdot 10 \cdot \pi\,(3 \cdot 10^{-2})^2$$

$$\phi = 88\,826{,}4 \cdot 10^{-8}\ \frac{N}{A.m} \cdot m^2$$

$$\phi = 88\,826{,}4 \cdot 10^{-8}\ T\,m^2 \ ; \text{ ó:}$$

$$\phi = 88\,826{,}4 \cdot 10^{-8}\ Wb$$

PROBLEMA 4. Una corriente de 20 amperios recorre un solenoide de 15 espiras por cm. El núcleo tiene una permeabilidad de $\mu = 5$.

Calcular:

a) Campo magnético en el centro del solenoide.

b) Flujo a través del solenoide si tiene una sección de 4 cm².

RESOLUCIÓN:

a) $B = \mu_0 . \mu_r . n . I$

$$B = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 2{,}5 \cdot \frac{15}{10^{-2}} \cdot 20$$

$$B = 9\,425 . 10^{-5} . 2{,}5\ T$$

b) $\phi = B . S$

$$\phi = 9\,425 . 10^{-5} . 2{,}5\ T . 4 . 10^{-4}\ m^2$$

$$\phi = 37\,700 . 10^{-9}\ T\,m^2 \ ; \text{ ó:}$$

$$\phi = 37\,700 . 10^{-9}\ Wb$$

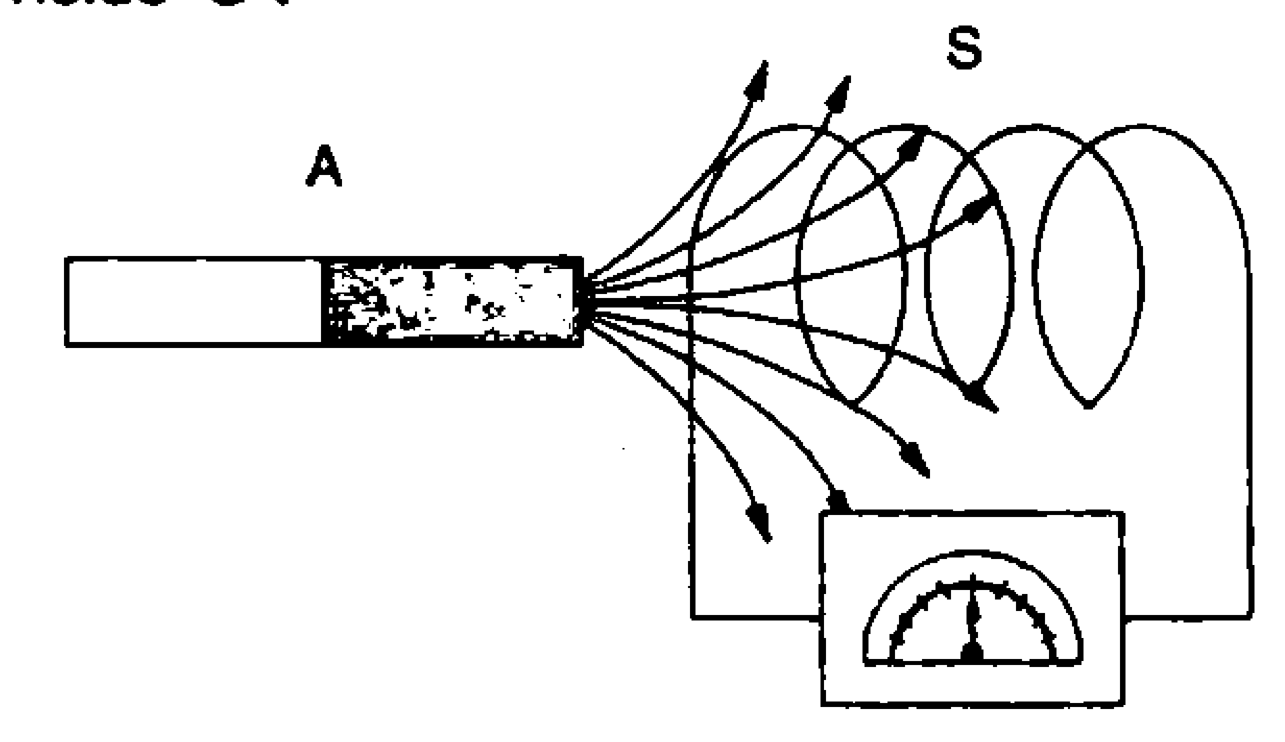
APLICACIONES DEL EFECTO OERSTED

1. Campanilla eléctrica.
2. Relais o relevadores.
3. Telégrados.
4. Motores.
5. Galvanómetros.
6. Amperímetros.
7. Voltímetros. etc.

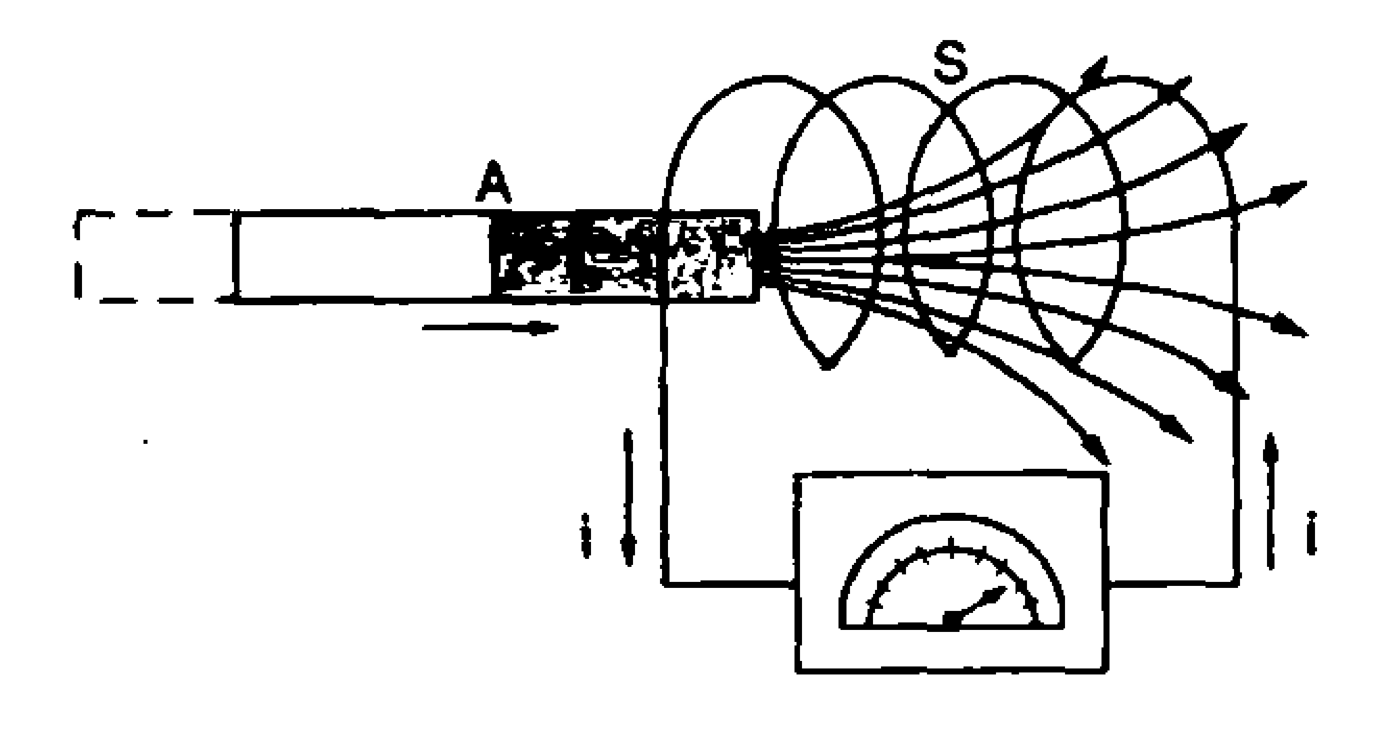
EFECTO FARADAY

Es un efecto contrario al de Oersted El año 1 831 Faraday comprobó que al acercar y alejar un imán a un solenoide se crea, en el solenoide, una corriente a la que llamó "corriente inducida".

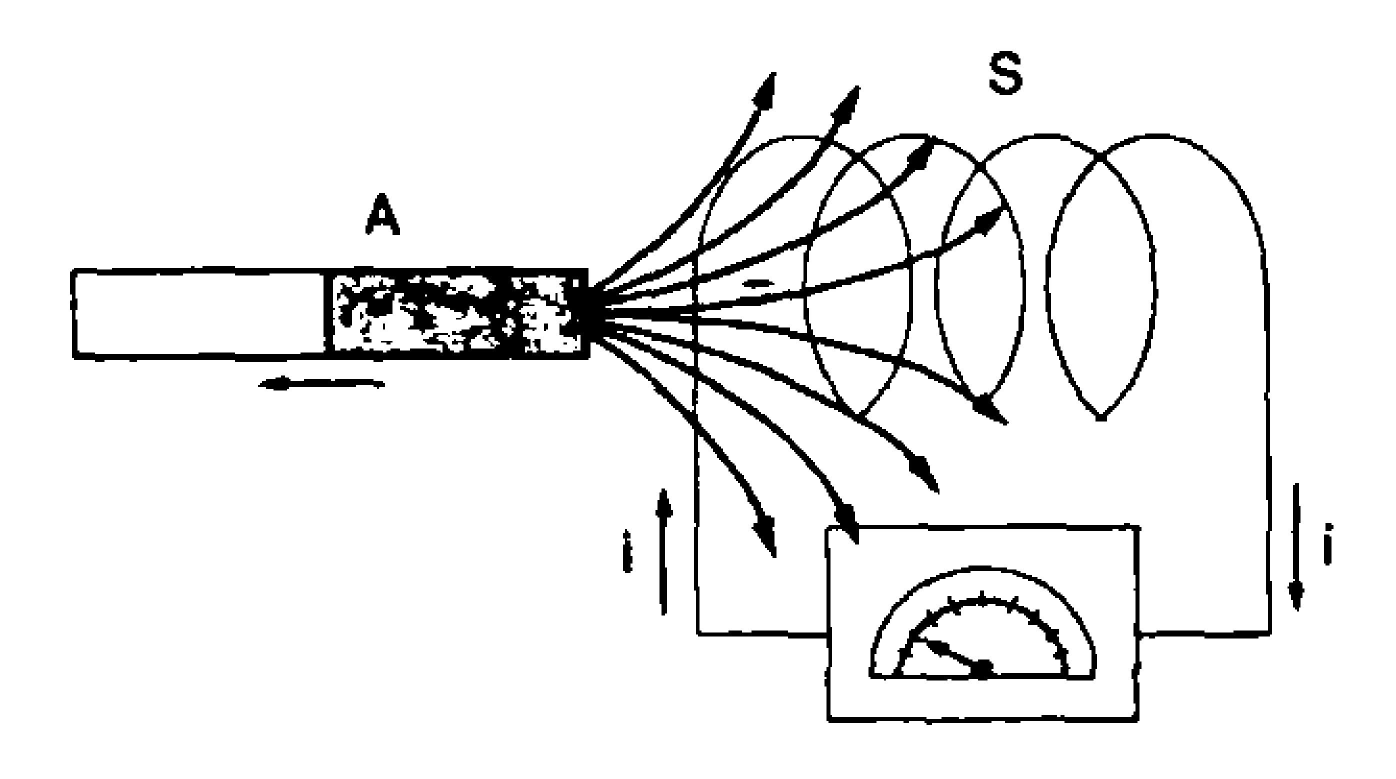
El experimento fue el siguiente: sea un imán "A" con sus líneas de fuerza y un solenoide "S".



1. Inmóvil A, "no circula corriente" en el solenoide



2. Se acerca A al solenoide, "circula corriente".

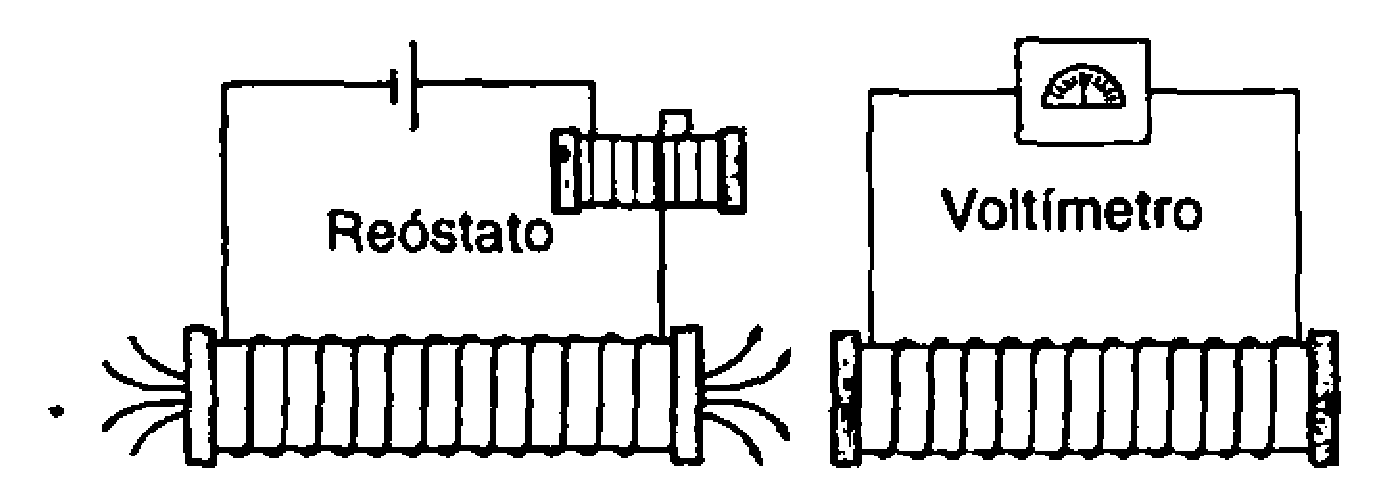


3. Se aleja A del solenoide, "circula corriente de sentido contrario"

1. Si el imán no se mueve, el número de líneas que atraviesa el solenoide no varía; no hay corriente inducida.
2. Si el imán se acerca, el número de líneas que atraviesa el solenoide aumenta; hay corriente.
3. Si el imán se aleja, el número de líneas que atraviesa el solenoide disminuye; hay corriente de sentido contrario al anterior.
4. Si el imán se acerca y se aleja repetida y rápidamente, el número de líneas que atraviesa el solenoide varía también rápidamente, la intensidad de la corriente inducida aumenta. **La corriente que circula por el solenoide es alterna.**

INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

El mismo efecto anterior se puede producir con un "solenoide primario", por donde pasa corriente y que desempeña la función de imán, sobre otro "solenoide secundario" o "inducido", simplemente variando la intensidad de la corriente en el "primario" se varía la inducción magnética en el "secundario" y por consiguiente la corriente inducida.



En conclusión el "efecto Faraday" indica que: "Todo cuerpo magnético variable crea una corriente eléctrica".

Es oportuno insistir que: la corriente inducida es más intensa cuando más rápido varia el flujo de inducción atravesante, o llamado también concatenado.

Sea ϕ_i el flujo inicial y sea ϕ_2 el flujo final de mayor valor, la variación del flujo es :

$$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$$

La velocidad de variación del flujo será:

$$v = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

LEY DE FARADAY

"La fuerza electromotríz inducida en un solenoide es directamente proporcional, pero de signo contrario, al número de espiras del solenoide y a la rapidez con que cambia el flujo magnético que encierra".

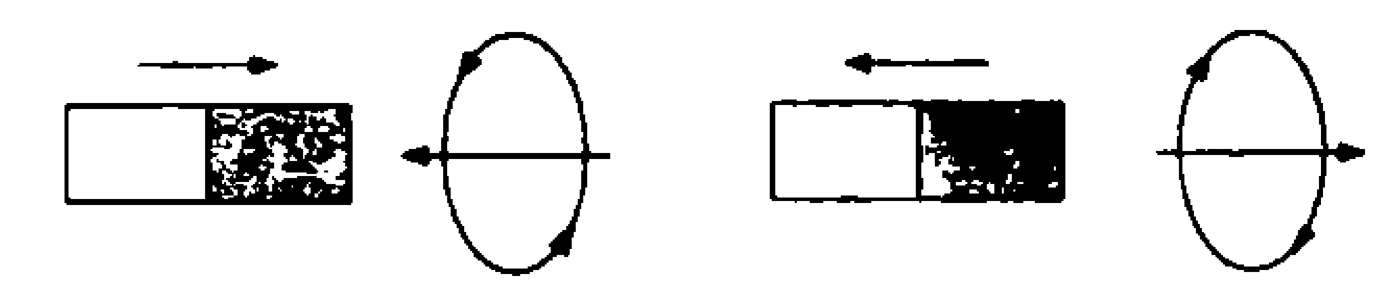
$$E = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

E : Fuerza electromotríz, en voltios "V"
N : Número de espiras del solenoide inducido.
$\Delta\phi$: Variación del flujo magnético, en weber "Wb"
Δt : Período del tiempo, en segundos "s"

http://librosysolucionarios.net

LEY DE LENZ

"La corriente inducida aparece en un sentido tal que se opone a la causa que la produce"



El signo menos en la Ley de Fara-day indica matemáticamente esta oposición.

Si se imprime al imán un movimiento de vaivén, se produce en el solenoide una "corriente alterna". Esta es una consecuencia de la Ley de Lenz.

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. El flujo magnético que pasa por una esfera colocada perpendicularmente a un campo magnético varía según la relación.

$$\phi_f = 6t_f^2 + 7t_f + 1$$

Estando ϕ_f expresado en miliwebers y "t" en segundos. ¿De qué magnitud es la f.e.m. incluida en la esfera, cuando t = 2 s

RESOLUCIÓN: Por Ley de Faraday:

$$E = -\frac{N \cdot \Delta\phi}{\Delta t} \qquad (A)$$

Donde: N = 1

$$\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$$

$$\Delta t = t_f - t_i$$

$$\therefore \qquad t_f = t_i + \Delta t \qquad (I)$$

Sustituyendo los valores dados de (I) en la relación del problema:

$$\Delta\phi = [6(t_i + \Delta t)^2 + 7(t_i + \Delta t) + + 1] - (6t_i^2 + 7t_i + 1)$$

$$\Delta\phi = 12t_i \cdot \Delta t + 7\Delta t + 6(\Delta t)^2$$

Luego, sustituyendo en (A) y simplificando:

$$E = -12t_i - 7 - 6\Delta t$$

Como se desea conocer la f.e.m. "cada instante", entonces $\Delta t = 0$; luego:

$$E = -(12t_i + 7)$$

Para $t_i = 2$ s:

$$E = -31 \text{ mV} \quad \text{(micro voltio)}$$

PROBLEMA 2. Un solenoide largo tiene 200 vueltas/cm y lleva una corriente de 1,5 A; su diámetro es de 3,0 cm. en su centro se coloca una bobina de 100 espiras muy cerradas de 2,0 cm de diámetro. Esta bobina se coloca de tal manera que "B" en el centro del solenoide sea paralelo al eje. La corriente en el solenoide se reduce a cero y después aumenta 1,5 A en sentido contrario y con rapidez constante, en un período de 0,050 s. ¿Qué f.e.m. inducida aparece en la bobina mientras ésta cambiando la corriente?

RESOLUCIÓN :

La inducción del centro del solenoide es:

$$B = \mu_0 . n . i$$

$$B = (4\pi . 10^{-7})(200 . 10^2) . 1,5$$

$$B = 1,5 . 10^{-2} \frac{Wb}{m^2}$$

El área de la bobina, no del solenoide, es $3,14 . 10^{-4}$ m². El flujo incial ϕ que pasa por cada vuelta de la bobina es:

$$\phi = B . S = (3,8 . 10^{-2})(3,14 . 10^{-4})$$

$$\phi = 1,2 . 10^{-5} \text{ Wb}$$

De acuerdo al enunciado del problema, el flujo va desde un valor inicial $1,2 \times 10^{-5}$ Wb hasta un valor final de $-1,2 \times 10^{-5}$ Wb, luego:

$$\Delta\phi = -1,2 . 10^{-5} - (+1,2 . 10^{-5})$$

$$\Delta\phi = 2,4 . 10^{-5} \text{ Wb}$$

http://librosysolucionarios.net

Por la Ley de Faraday:

$$E = -\frac{N \cdot \Delta \phi}{\Delta t}$$

$$E = -\frac{100\,(-2{,}4 \,.\, 10^{-5})\ \text{Wb}}{0{,}05\ \text{s}}$$

$$E = 48\ \text{mV}$$

PROBLEMA 3. Un solenoide de 96 espiras de hilo, un largo de 8 cm y una sección transversal de 6 cm², transporta una corriente de 0,25 A. Se arrolla sobre el solenoide secundario de 2 espiras. Cuando se abre el interruptor, el campo magnético en el solenoide se anula en 0,05 s.

¿Qué f.e.m. induce en las dos espiras?

RESOLUCIÓN:

De acuerdo a la Ley de Faraday:

$$E = -\frac{N \cdot \Delta \phi}{\Delta t} = -\frac{2 \cdot \Delta \phi}{0{,}05\ \text{s}} \qquad (\text{I})$$

De la definición de flujo:

$$\Delta\phi = \Delta(B \times S)$$

Pero como S es constante e igual a6 . 10^{-4} m², se tiene:

$$\Delta\phi = S \,.\, \Delta B = A\,(B_f - B_i)$$

$$\Delta\phi = 6 \,.\, 10^{-4}\,(0 - B_i)$$

$$\Delta\phi = -6 \,.\, 10^{-4}\, B_i \qquad (\text{II})$$

Cálculo de $\mathbf{B}_i$: $\quad B_i = \dfrac{\mu_0 \,.\, i \,.\, N}{L}$

$$B_i = \frac{(4\pi \,.\, 10^{-7})\,(0{,}25)\,(96)}{0{,}08}$$

$$B_i = 37{,}68 \,.\, 10^{-5}\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Sustituyendo en (II):

$$\Delta\phi = -6 \,.\, 10^{-4} \,.\, 37{,}68 \,.\, 10^{-5}\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2}$$

Sustituyendo en (I):

$$E = 9 \,.\, 10^{-5}\ \text{V}$$

PROBLEMA 4. Una bobina de 80 espiras tarda 0,04 s en pasar entre los extremos de los polos de un imán, desde un lugar en el que el flujo magnético es de 6 . 10^{-5} Wb hasta otro en el que el flujo magnético vale 2 . 10^{-5} Wb. Calcular el valor de la f.e.m. inducida en la bobina.

RESOLUCIÓN: $E = N \cdot \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$

$$E = 80 \cdot \frac{(6 \,.\, 10^{-5} - 2 \,.\, 10^{-5})}{4 \,.\, 10^{-2}} \cdot \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

$$E = 0{,}08\ \text{V}$$

PROBLEMA 5. Un disco de cobre de 70 cm de radio gira alrededor de su eje con una velocidad de 40 rps y está situado en un plano perpendicular a un campo magnético uniforme de inducción **0,3** T. Hallar la diferencia de potencial entre un punto de su periferia **y** el centro.

RESOLUCIÓN: En 1/40 segundos cada radio corta una vez todas las líneas de flujo que atraviezan el disco. Luego:

$$\phi = B \,.\, A$$

$$\phi = 0{,}3\ \frac{\text{Wb}}{\text{m}^2} \cdot \pi \cdot (0{,}7\ \text{m})^2$$

$$\phi = 147 \cdot \pi \cdot 10^{-3}\ \text{Wb}$$

Pero: $\quad E = \dfrac{\Delta\phi}{\Delta t}$

$$E = \frac{147 \,.\, 10^{-3}\ \text{Wb}}{\frac{1}{40}\ \text{s}}$$

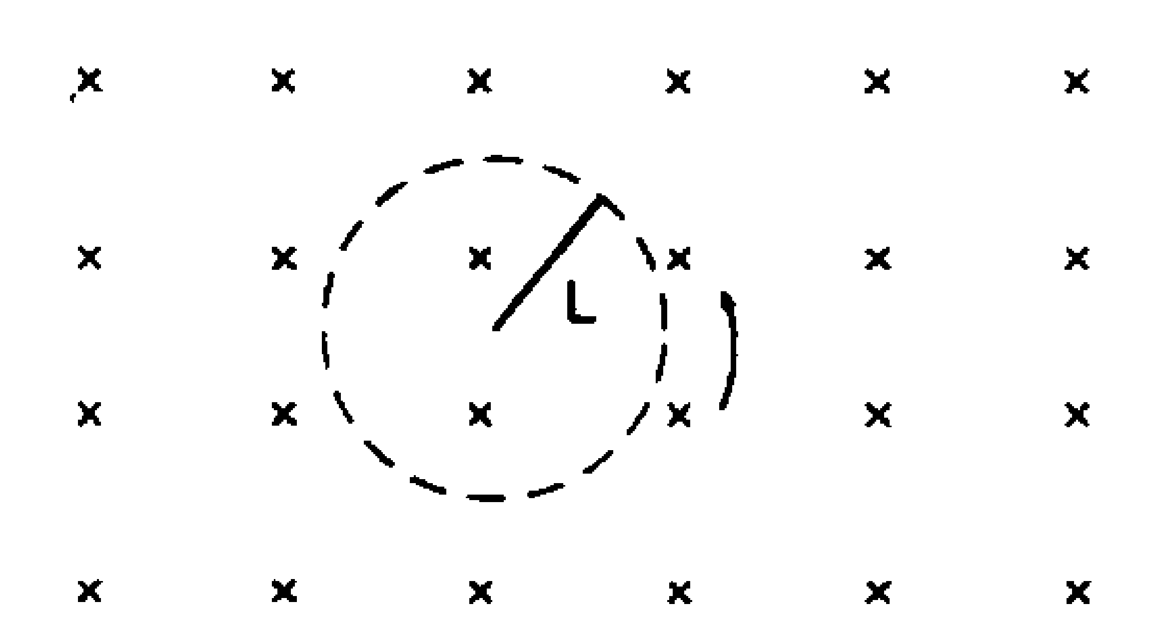
$$E = 40 \,.\, 147 \,.\, 10^{-3}\ \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

$$E = 18{,}46\ \text{V}$$

PROBLEMA 6. Una varilla delgada de 1 m de longitud gira alrededor de un eje que pasa por un extremo y es perpendicular a la varilla con una velocidad angular de 2 rev/s. El plano de rotación de la varilla es perpendicular a un campo magnético uniforme de densidad de flujo B = 0.5Wb/

http://librosysolucionarios.net

m^2. ¿Qué f.e.m. se induce entre los extremos de la varilla?



RESOLUCIÓN : Por Faraday:

$$E = \frac{\phi}{t} \qquad (I)$$

pero: $\phi = B \cdot S = B \cdot \pi \cdot L^2$

En (I): $E = \dfrac{B \cdot \pi \cdot L^2}{t}$

Multiplicando y dividiendo por 2:

$$E = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \left(\frac{2\pi}{t}\right) L^2$$

pero: $\dfrac{2\pi}{t} = \omega$, luego:

$$E = \frac{1}{2} \cdot B \cdot \omega \cdot L^2$$

Sustituyendo los datos proporcionados por el enunciado:

$$E = \frac{1}{2} \cdot 0{,}5 \frac{Wb}{m^2} \cdot \frac{2 \cdot 2\pi}{s} \cdot 1\ m^2$$

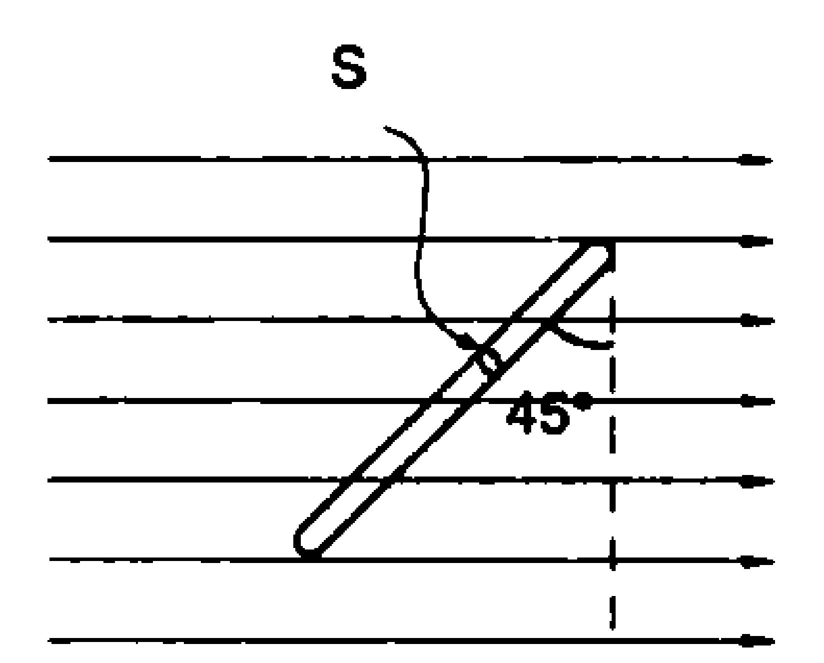
$$E = 3{,}14\ V$$

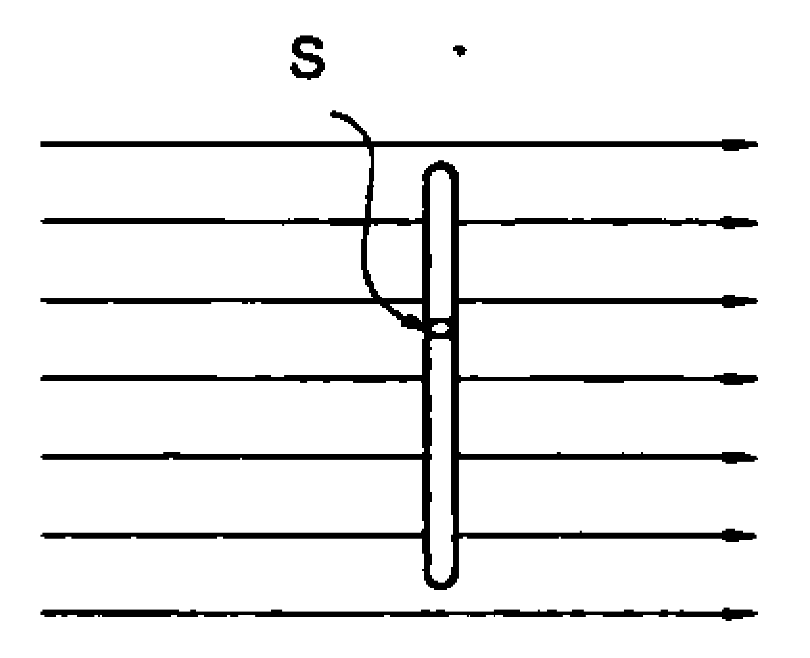
PROBLEMA 7. Un cuadro rectangular con 50 espiras bobinada s apretadamente tiene unas dimensiones de 12 cm x 25 cm. El plano de la bobina del cuadro gira desde una posición en la cual forma un ángulo de 45° con el campo magnético de densidad de flujo de 2Wb/m² hasta una posición perpendicular al campo, en un tiempo de 0,1 s. ¿Cuál es la f.e.m. media inducida en el cuadro?

RESOLUCIÓN :

Siendo el área de las bobinas:

$$S = 0{,}12 \cdot m\ 0{,}25\ m = 0{,}03\ m^2$$





$$\phi_i = B \cdot S \cos 45°$$

$$\phi_f = B \cdot S$$

$$\therefore \quad \Delta\phi = \phi_f - \phi_i = B \cdot S\,(1 - \cos 45°)$$

$$\Delta\phi = 2 \frac{Wb}{m^2} \cdot 0{,}03\ m^2 \left(1 - \frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$\Delta\phi = 0{,}017\,58\ Wb$$

Se sabe que: $E = - \dfrac{N \cdot \Delta\phi}{\Delta t}$

$$E = - \frac{50\ esp \cdot 0{,}017\,58\ Wb}{0{,}1\ s}$$

$$E = -8{,}79\ V$$

$$E = 8{,}79\ V$$

PROBLEMA 8. Una bobina de 50 cm de largo tiene un núcleo de aire, 20 cm² de sección y tiene 1 000 espiras. Por la bobina circula una corriente de 10 A y después se le aumenta a 16 A en 0,2 s. Calcular:

a) La variación del flujo.
b) La velocidad de variación del flujo.
c) La f.e.m. inducida.

http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN :

a) $\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$ (I)

Cálculo de ϕ_i y ϕ_f :

$\phi_i = B . S$ (1)

$B_i = \mu . n . i$ donde: $\mu = \mu_0 \mu_r$

Pero por enunciado: $\mu = 1$

$\therefore$ $B_i = \mu_0 . n . i$

$$B_i = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1\,000}{50 . 10^{-2}} \cdot 10$$

$B_i = 2{,}5 \cdot 10^{-2}$ T

Sustituyendo en (1) :

$\phi_i = 2{,}5 . 10^{-2}$ T . $20 . 10^{-4}$ m^2

$\phi_i = 50 . 10^{-6}$ T m^2

$\phi_i = 50 . 10^{-6}$ Wb (a)

Por otro lado:

$\phi_f = B_f . A$ (2)

$B_f = \mu . n . i_f$

donde: $\mu = \mu_0 \mu_r$

Pero por enunciado: $\mu = 1$

$$\therefore B_f = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot \frac{1\,000}{50 . 10^{-2}} \cdot 16$$

$B_f = 4{,}02 \cdot 10^{-2}$ T

Sustituyendo valores en (2) :

$\phi_f = 4{,}02 . 10^{-2}$ T . $20 . 10^{-4}$ m^2

$\phi_f = 80{,}4 . 10^{-6}$ T m^2

$\phi_f = 80{,}4 . 10^{-6}$ Wb (b)

Sustituyendo valores en (I) :

$\Delta\phi_f = 80{,}4 . 10^{-6}$ Wb - $50 . 10^{-6}$ Wb

$\Delta\phi_f = 30{,}4$ Wb

b) $$\Delta v = \frac{\Delta\phi}{\Delta t}$$

$$\Delta v = \frac{30{,}4 \text{ Wb}}{0{,}2 \text{ s}} = 152 . 10^{-6} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

$$\Delta v = 0{,}152 . 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

c) $$E = -N \cdot \frac{\Delta\phi}{\Delta t} = -N \cdot \Delta V$$

$$E = -1\,000 . 0{,}152 . 10^{-3} \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

$E = 0{,}152$ V

PROBLEMA 9. ¿Cuál será la f.e.m. inducida en una bobina de núcleo de permeabilidad $\mu_r = 10$, de 20 cm de largo, 8 cm^2 de sección con 400 espiras? Por la bobina circula una corriente de 4 amperios y en un momento se eleva la intensidad en 50% en 0,08 s.

RESOLUCIÓN :

$\mu_r = 10$ $N = 400$ e

$L = 20 . 10^{-2}$ m $i_i = 4$ A

$S = 8 . 10^{-4}$ m^2 $\Delta i = 50\%$

$$E = -N \frac{\Delta\phi}{\Delta t} \quad \text{(I)}$$

pero: $\Delta\phi = \phi_f - \phi_i$ (II)

$\phi_i = \mu_0 . \mu_r . n . i_i . S$

$$\phi_i = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot \frac{400}{20 . 10^{-2}} \cdot 4 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$$

$\phi_i = 0{,}8 . 10^{-4}$ Wb (a)

$\phi_f = \mu_0 . \mu_r . n . i_f . S$

donde: $i_f = i_i + 50\% = 4$ A + 2 A

$i_i = 6$ A

Luego:

$$\phi_f = 4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10 \cdot \frac{400}{20 . 10^{-2}} \cdot 6 \cdot 8 \cdot 10^{-4}$$

$\phi_f = 1{,}2 . 10^{-4}$ Wb

http://librosysolucionarios.net

Sustituyendo valores en (II):

$$\Delta \phi = 1,2 . 10^{-4} \text{ Wb} - 0,8 . 10^{-4} \text{ Wb}$$

$$\Delta \phi = 0,4 . 10^{-4} \text{ Wb}$$

Sustituyendo valores en (I):

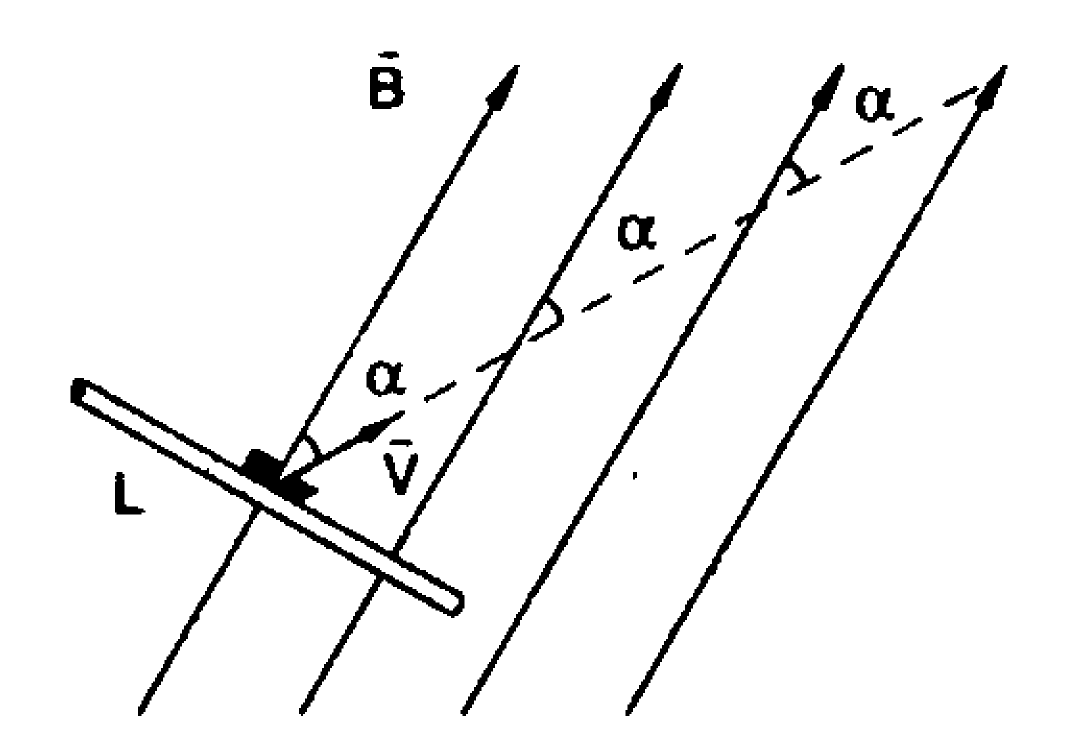
$$E = -400 \text{ e } \frac{0,4 . 10^{-4} \text{ Wb}}{0,08 \text{ s}}$$

$$E = -0,2 \frac{\text{Wb}}{\text{s}}$$

$$E = -0,2 \text{ V}$$

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. En la figura se muestra un conductor rectilíneo de 80 cm de longitud el cual se desplaza con una rapidez de 60 m/s en un campo magnético uniforme de inducción magnética 0,5 T. Calcular el ángulo "α" entre los vectores inducción magnética $\vec{B}$ y la velocidad $\vec{V}$. Se sabe que entre los extremos del conductor se origina una f.e.m. de 12 V.



Rpta.: α = 30°

2. Un avión se desplaza de Este o Oeste con una rapidez de 200 m/s en un lugar donde la declinación magnética es 0°. La inducción magnética del campo terrestre en dicho lugar es 5 . 10^{-4} T. Calcular la diferencia de potencial que existe entre los extremos de las alas, que distan 20 m entre sí.

Rpta.: 2 V

3. Un conductor lineal de 20 cm de longitud se desplaza en un campo magnético uniforme de inducción magnética 0,025 T, con una rapidez de 2 m/s de modo tal que el conductor y el vector de velocidad pertenecen al mismo plano, el cual es perpendicular a las líneas de campo. El vector velocidad forma con el conductor un ángulo de 30°. ¿Cuál es la diferencia de potencial inducida en los extremos del conductor?

Rpta.: 5 mV

4. En un campo magnético uniforme y vertical, de inducción magnética $\sqrt{3}$ T, se desplaza un alambre conductor, situado horizontalmente, de 0,5 m de longitud con una rapidez de 16 m/s, de modo tal que el vector velocidad forma con las líneas de campo 30° y con el conductor 60°. Calcular la f.e.m. inducida en el conductor.

Rpta.: 6 V

http://librosysolucionarios.net

CAPÍTULO 19

ÓPTICA

La Óptica es la parte de la Física que estudia la luz y todos los fenómenos relacionados con ella.

Durante muchos siglos la luz fue un misterio y un enigma para el hombre. ¿Qué es la luz? ¿Cómo se transmite? ¿Cómo llega desde el Sol a la Tierra, si entre ellos hay una distancia de 150'000,000 de km? ¿En qué forma viaja?

Los griegos suponían que la luz era un espectro, pero no el espectro de la luz blanca, sino que creían que era un fantasma horrible para los ojos, que irradiaba de los objetos y que al llegar a los ojos nos permitía ver los objetos.

Una de las primeras teorías científicas la sustentó Newton, quien sostenía que la luz era una emisión corpuscular de los cuerpos y que al llegar a los ojos los daña y eso es lo que hace percibir los objetos.

Aproximadamente en la misma época, Huygens, científico holandés, emitió una teoría sosteniendo que la luz era un fenómeno ondulatorio. Sin embargo, la enorme autoridad científica que entonces tenia Newton echó por tierra esta teoría.

Según la teoría corpuscular de Newton, la luz aumenta su velocidad al pasar de un medio menos denso a otro más denso.

La teoría ondulatoria de Huygens sostiene lo contrario, que la luz disminuye su velocidad cuando pasa de un medio menos denso a otro más denso. Esta diametral diferencia atrajo la atención de los sabios.

Fueron Fizeau y Foucault, quienes demostraron que la luz se propaga más rápido en un medio menos denso que en otro más denso. Esta demostración resultó fatal para la teoría de Newton.

El año 1887, el físico Alemán Enrique Rudolfo Hertz, profesor de la universidad de Bonn, descubre el fenómeno conocido como "efecto fotoeléctrico", este efecto se logra emitiendo los rayos ultravioletas del espectro de la luz blanca sobre un cuerpo cargado eléctricamente. Al recibir el impacto de la luz el cuerpo cargado eléctricamente emite electrones que se desplazan en forma ondulatoria. Demostró el carácter ondulatorio de las emisiones y estudió experimentalmente sus propiedades, certificando de esta manera la teoría electromagnética de Maxwell.

http://librosysolucionarios.net

Maxwell, en el año 1873, sostuvo que la luz estaba constituida por ondas transversales de naturaleza electromagnética, y producida por alteraciones del campo magnético y eléctrico de los átomos y que podía producir ondas semejantes a la de la luz por medio de circuitos oscilatorios.

En el año 1900, Planck propone la teoría de los "quanta" para explicar la propagación de la luz. Según esta teoría la energía de un haz luminoso está concentrada en paquetes constituyendo corpúsculos energéticos o fotones; estos fotones tendrán naturaleza ondulatoria, pues estarán asociados a una onda portadora. Según la teoría, la longitud de onda y el fotón constituyen un "quantum de luz", con lo que se explica el efecto fotoeléctrico como la transferencia de energía del fotón al electrón.

Todas estas consideraciones y teorías han llevado a los físicos a aceptar una doble naturaleza de la luz **corpuscular y ondulatoria.**

VELOCIDAD DE LA LUZ

La luz es propagada en línea recta. Las primeras observaciones indujeron a pensar que la luz se propagaba instantáneamente, sin embargo, ya Galileo se había preocupado por averiguar la velocidad de la luz, no llegando a ninguna conclusión finita, creyó que la velocidad de la luz era infinita.

Posteriormente investigadores como Olaf Romer, el año 1670; el francés Fizeau, el año 1849; León Foucault, el año 1850; el premio Nobel de física de 1913, el americano Alberto Michelson, el año 1931; llegaron a la conclusión que la luz tiene una velocidad finita de 300 000 km/s. Sin embargo, la velocidad de la luz es diferente según la sustancia a través de la cual se propague, siendo siempre menor en cualquier sustancia que no sea el aire o el vacío.

FOTOMETRÍA

Es el estudio de la medida de intensidad de iluminación.

UNIDAD DE INTENSIDAD: CANDELA "cd"

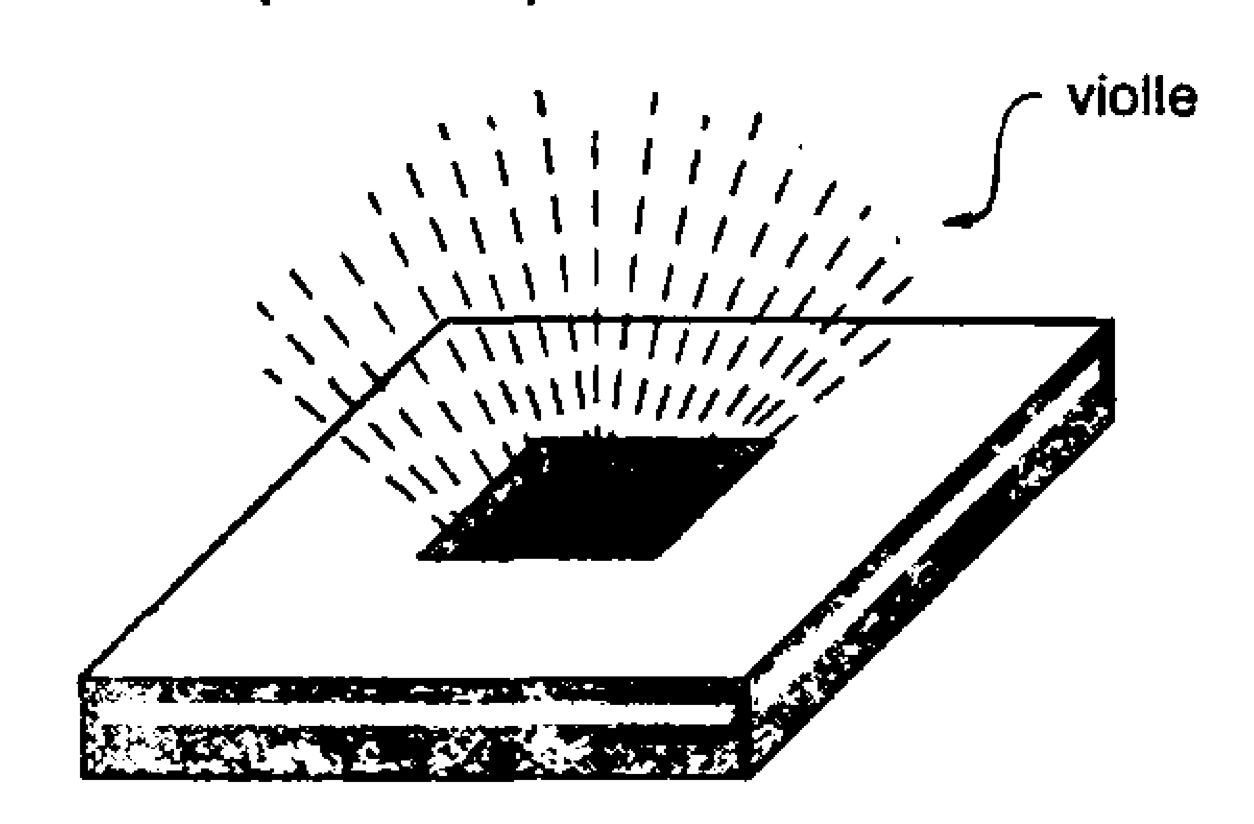
Para medir algo, se elige una unidad de medida; para medir la intensidad de iluminación se elige como unidad de medida una determinada intensidad luminosa.

Cuando un metal alcanza su punto de función su temperatura permanece constante hasta que termine de fundirse todo el cuerpo

El año 1884, el francés Luis Julio Gabriel Violle, presentó a la Conferencia Internacional de Pesas y Medidas (C.I.P.M.), un patrón como unidad de medida de la intensidad de la luz, este patrón consiste en la emisión luminosa, de 1 cm² de una plancha de platino en el momento de su punto de fusión al 772° C

Esta intensidad se usó como unidad de intensidad luminosa, en honor a él se llama "violle" y se define así:

"violle es la intensidad luminosa emitida por una plancha de platino de 1 cm² en estado fundente" (1 772° C)



CANDELA : "cd"

Sin embargo, la unidad de intensidad de intensidad luminosa del SI es la CANDELA "cd", cuya definición dada por C.I.P.M. el año 1 971 es:

"La candela es la intensidad luminosa, en dirección perpendicular, de una superficie de 1/600 000 m²
(1,67 x 10^{-6} m²) de un cuerpo negro a la temperatura de fusión platino bajo la presión de 101 325 N/m² (1 atm). Su símbolo "cd".

EQUIVALENCIAS:

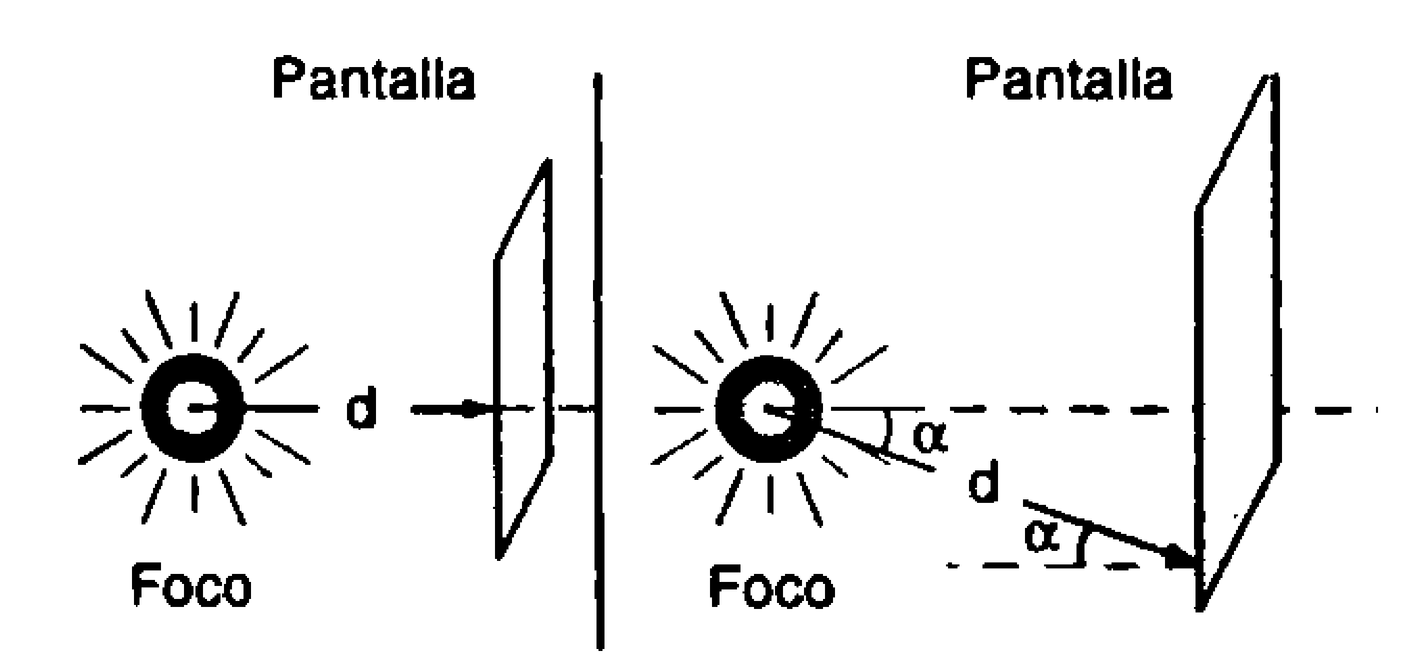
$$1\ \text{cd} = \frac{1}{20}\ \text{violle} = 1\ \text{bujía}$$

http://librosysolucionarios.net

ILUMINACIÓN

ILUMINACIÓN: "E"

Es la incidencia de los rayos lumino-sos que experimenta un cuerpo. O es la cantidad de luz que llega a un área.



$$E = \frac{I}{d^2} \quad ó \quad E = \frac{I.\cos\alpha}{d^2}$$

E : Iluminación, en lux "lx"
I : Intensidad, en candela "cd"
d : Distancia de foco a la superficie iluminada, en metros "m"
α : Ángulo de desviación de un rayo con respecto a la normal del plano iluminado.

LEYES DE LA ILUMINACIÓN

Primera Ley : La iluminación de una superficie es directamente proporcional a la intensidad "I" de la fuente luminosa.

Segunda Ley : La iluminación de una superficie es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre la fuente y la superficie iluminada.

Tercera Ley : Cuando los rayos sin inclinados, la iluminación es proporcional al coseno del ángulo formado por el rayo luminoso con la normal del plano iluminado.

UNIDAD DE ILUMINACIÓN: LUX "lx"

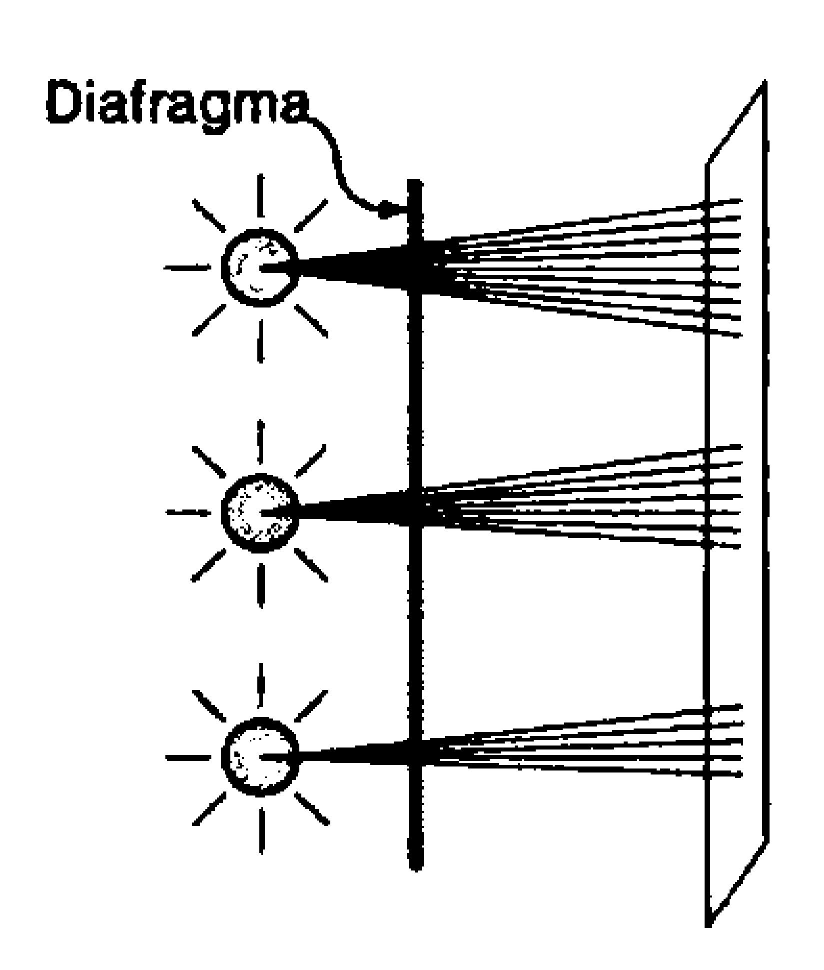
Representa la iluminación de un "foco puntual", que incide sobre una superficie a 1 m de distancia.

$$1\ lx = \frac{1\ cd}{1\ m^2} = 1\ \frac{cd}{m^2}$$

FLUJO LUMINOSO

Es la intensidad de energía luminosa que recibe una superficie.

La unidad SI del flujo luminoso es el LUMEN "lm".



$$f = E\,.\,A$$

f : Flujo luminoso, en lumen "lm"
E : Iluminación, en lux "lx"
A : Área iluminada, en metros "m^2"

$$1\ lm = 1\ lx\,.\,1m^2 = 1\ lx\,.\,m^2$$

PROBLEMA 1. Se quiere iluminar con una lámpara de 800 lx una superficie de 1 000 cm^2. ¿Cuántos lúmenes debe emitir la lámpara?

RESOLUCIÓN : $f = E\,A$

$$f = 800\ lx\,.\,cm^2$$

$$f = 800\ lx\,.\,m^2$$

$$f = 80\ lm$$

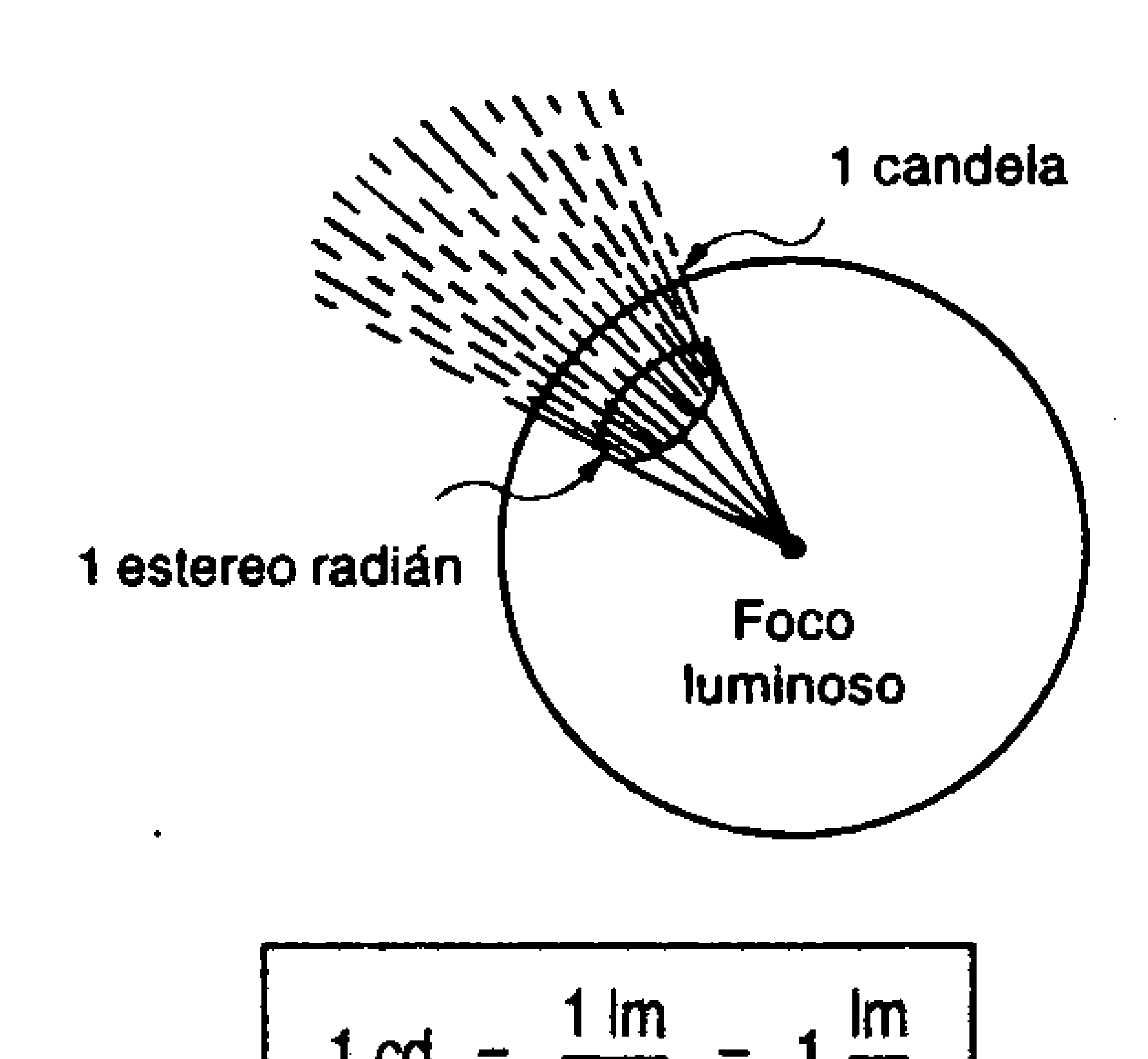
INTENSIDAD LUMINOSA

Es la cantidad de flujo emitido por un manantial por cada unidad de ángulo sólido.

http://librosysolucionarios.net

$$I = \frac{f}{\omega}$$

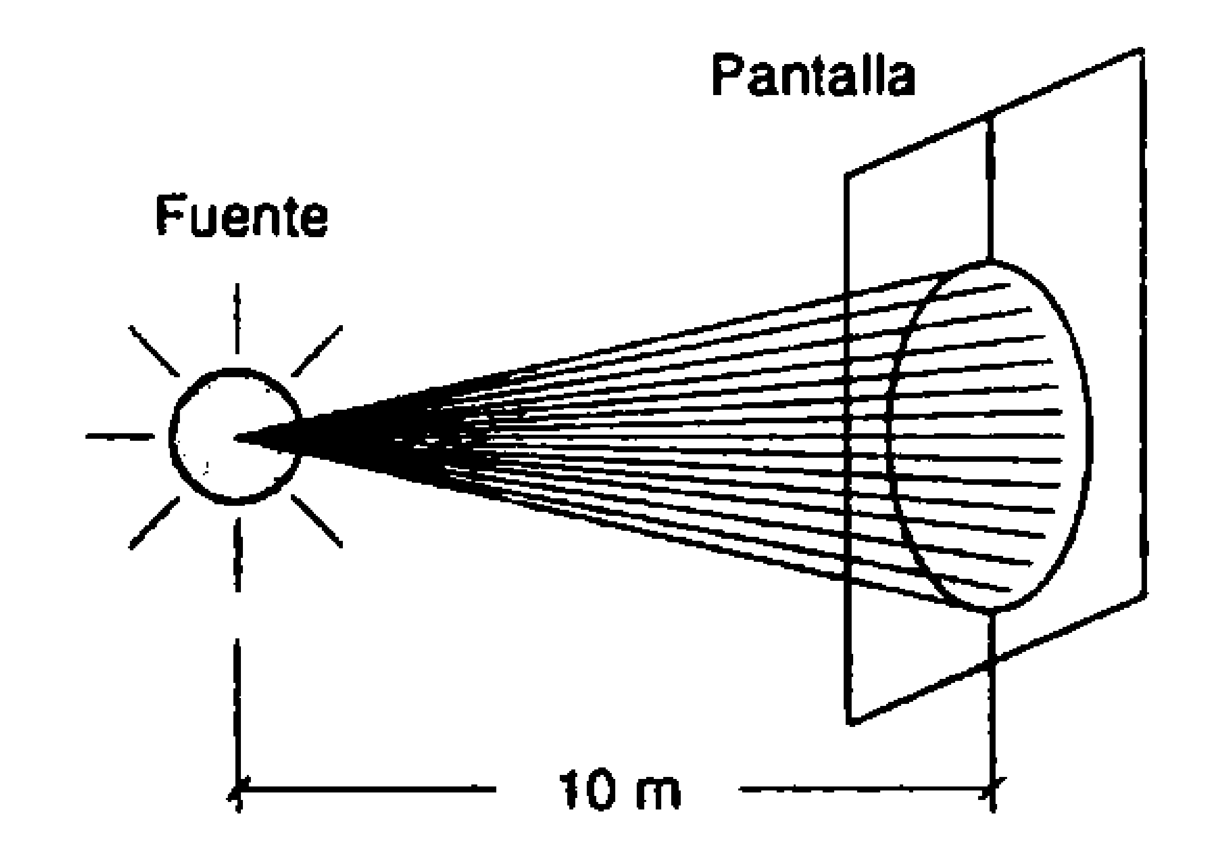
I : Intensidad luminosa, en candela "cd"
f : Flujo luminoso, en lumen "lm"
ω: Ángulo sólido, en estereoradián "sr"



$$1\ cd = \frac{1\ lm}{1\ sr} = 1\ \frac{lm}{sr}$$

PROBLEMA 2. Una fuente luminosa ilumina una pantalla de 4 m² situada a 10 m de la fuente. Calcular:

a) El ángulo sólido subtenido por el haz de luz que llega a la pantalla .
b) Si la iluminación que recibe dicha pantalla es de 100 lx determinar el flujo que recibe la misma.
c) La intensidad luminosa de la fuente.



RESOLUCIÓN :

a) Por Geometría:

$$\omega = \frac{A}{r^2} = \frac{4\ m^2}{(10\ m)^2} = 0{,}04\ sr$$

b) $f = E.A = 100\ lx.4\ m^2 = 400\ lm$

c) $I = \dfrac{f}{\omega} = \dfrac{400\ lm}{0{,}04\ sr} = 10\,000\ cd.$

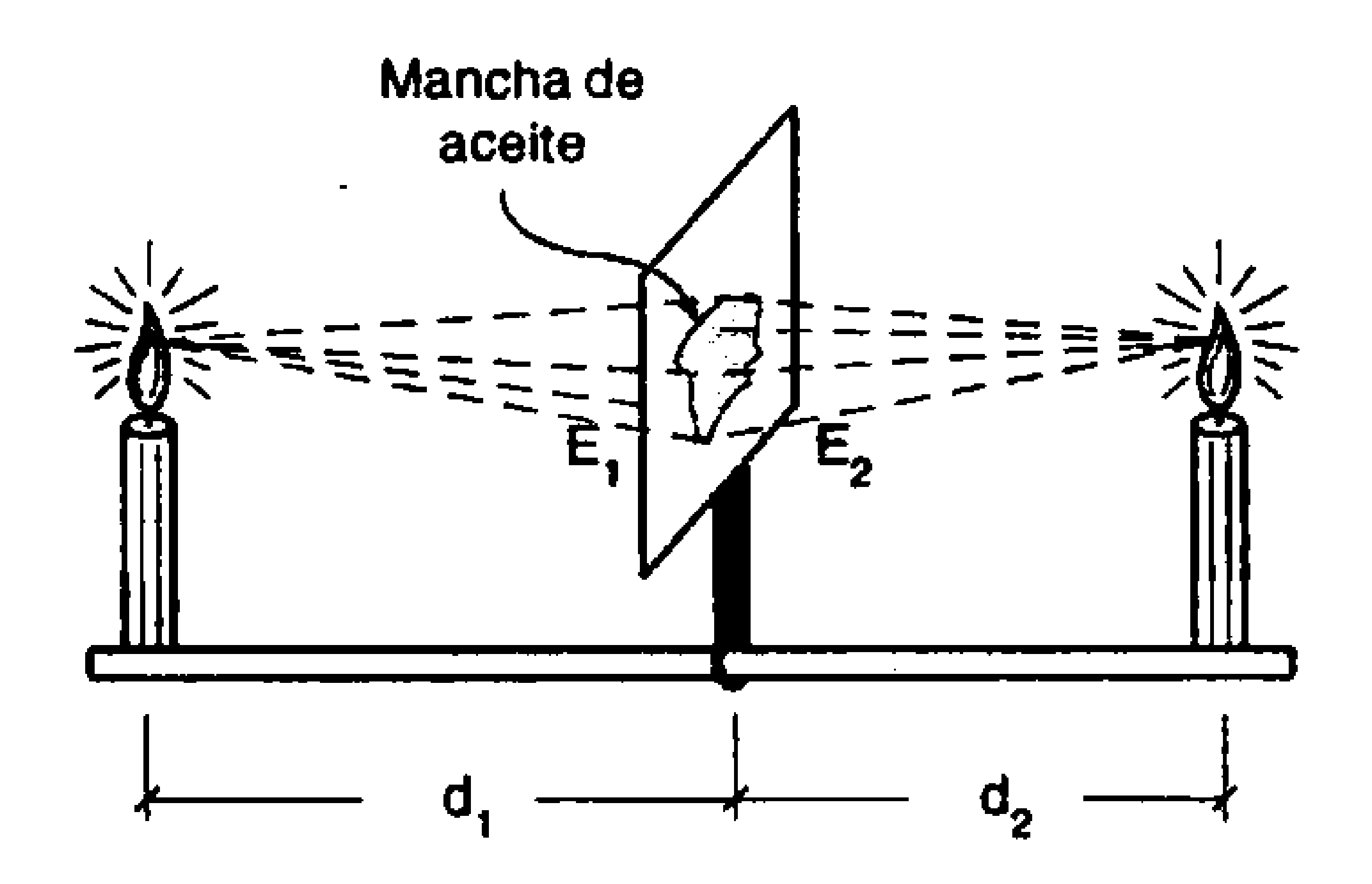
FOTÓMETROS

Son aparatos que permiten conocerla intensidad luminosa de un foco.

FOTÓMETRO DE BUNSEN

Este fotómetro permite conocer la intensidad luminosa "I" de un foco, conociendo la intensidad luminosa de otro foco.

- Se coloca una mancha de aceite sobre una pantalla de papel que está entre los dos focos luminosos, se hace desplazar a esta pantalla a lo largo de la corredera que une los dos focos luminosos, y cuando la mancha de aceite no sea vista es porque las dos caras tienen igual iluminación.



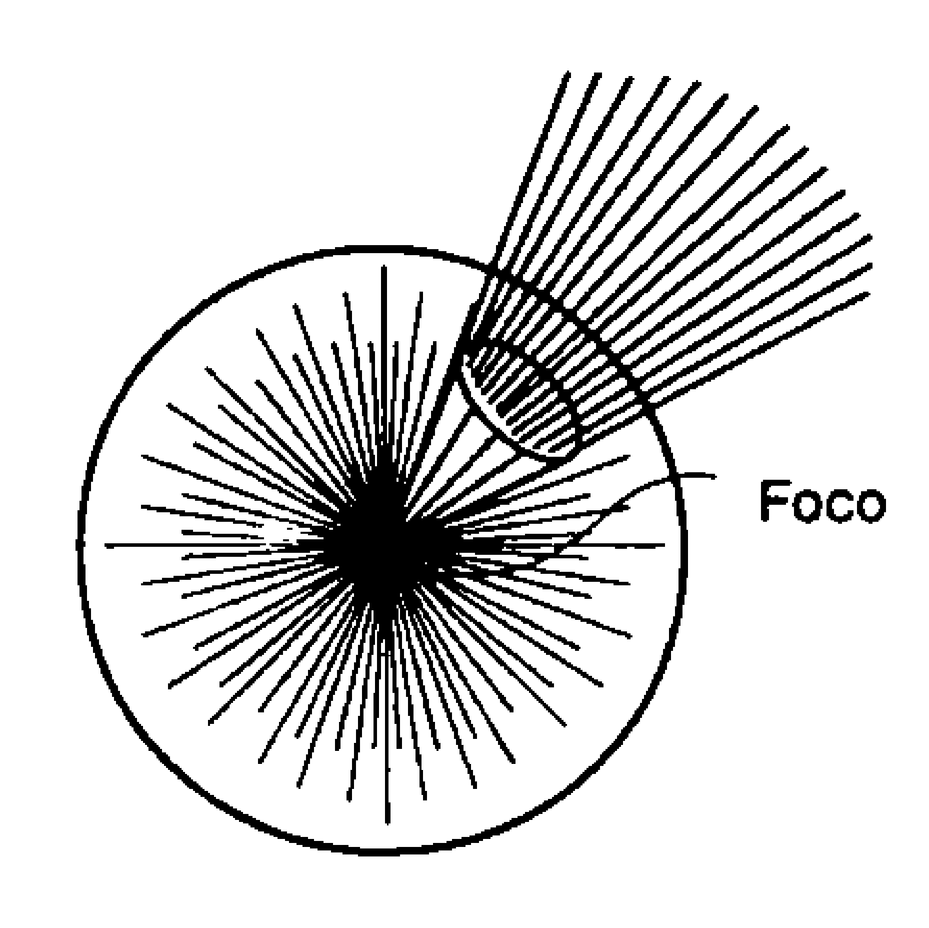
Esto es: $E_1 = E_2$

o sea: $\dfrac{I_1}{d_1^2} = \dfrac{I_2}{d_2^2}$

FLUJO TOTAL DE INTENSIDAD

Es el flujo total que emite la fuente alrededor suyo. Considerando como si estuviera ubicado en el centro de una esfera hueca, ilumina toda la parte interior de ella

http://librosysolucionarios.net



Sabiendo que: $f = E \times A$

pero: $E = \dfrac{I}{r^2}$ $\therefore$ $f = \dfrac{I.A}{r^2}$ (a)

Además: A de una superficie esférica es πr^2 ; sustituyendo en (a):

$$f_T = 4\pi.I$$

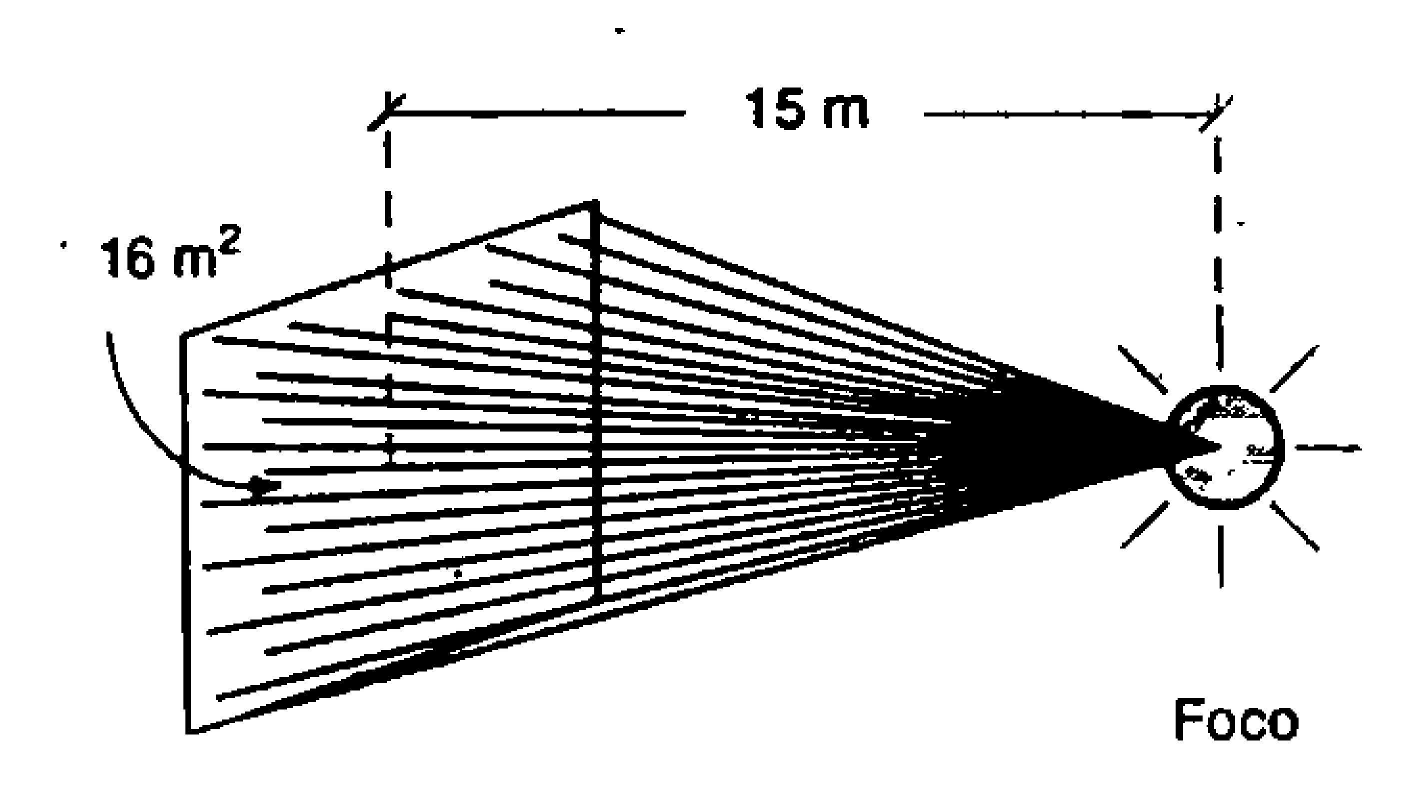
f_T : Flujo total de iluminación, en lúmenes
π : En radianes
I : Intensidad luminosa, en candela.

$$1\ lm = 1\ cd.1\ sr = 1\ cd.sr$$

PROBLEMA 3. Una fuente luminosa, ilumina una pantalla de 16 m², situado a 15 m del foco. Calcular el flujo total emitido por dicha fuente si la pantalla recibe una iluminación de 200 lx

RESOLUCIÓN :

$A = 16\ m^2$; $d = 15\ m$; $E = 200\ lx$



Sabiendo que: $f_T = 4\pi I$ (a)

Cálculo de la intensidad luminosa:

Sabiendo que: $E = \dfrac{I}{r^2}$; de donde:

$$I = Er^2 = 200\ lx\,(15m)^2 = 45 \times 10^3\ cd$$

Sustituyendo en (a):

$$f_T = 4 \times 3{,}141\,6 \times 45 \times 10^3\ cd \times sr$$

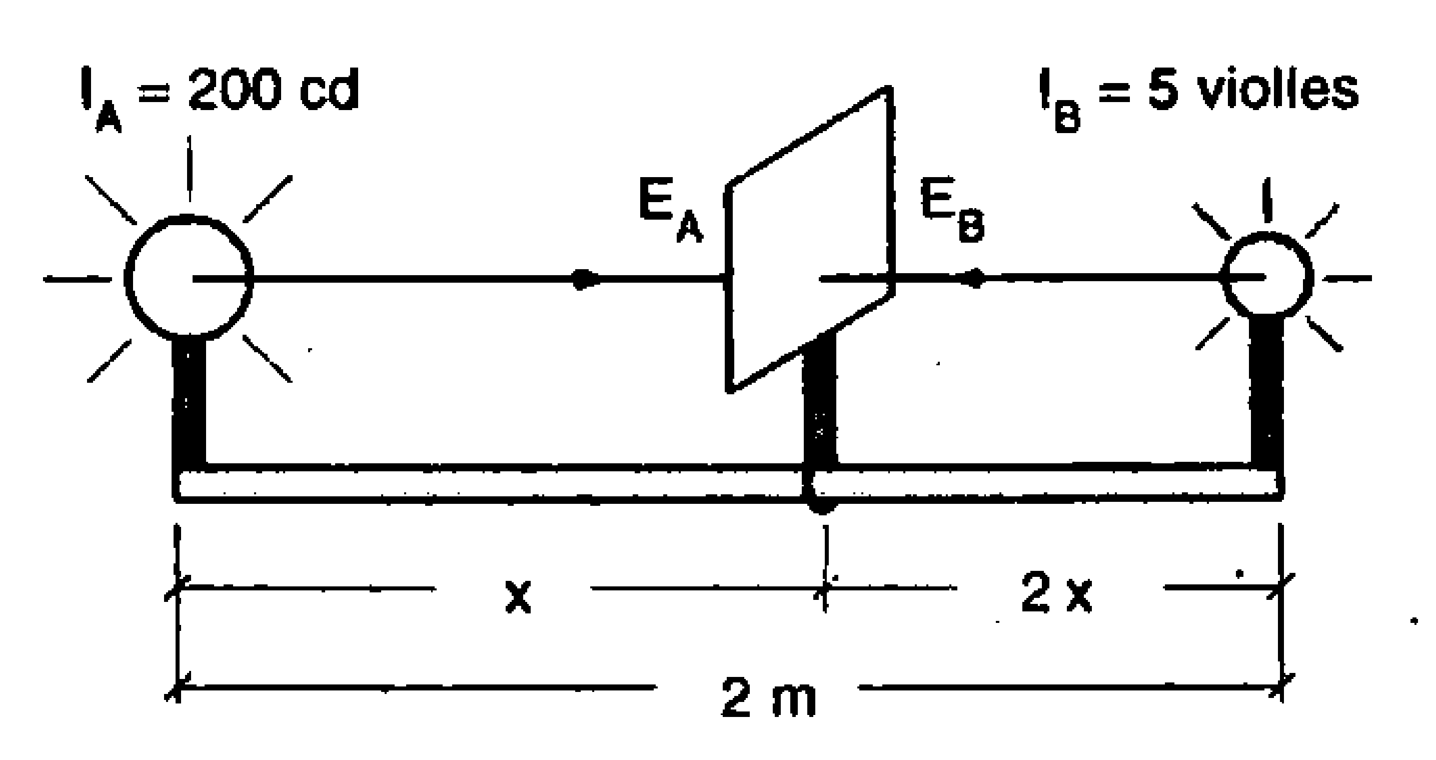
Rpta.: $f_T = 565\,488\ Lm$

PROBLEMA 4. La pantalla de la figura se desliza sobre una regla de 2 m. Hallar la distancia en que debe colocarse la pantalla con respecto al foco A para que ambos lados sean igualmente iluminados.

RESOLUCIÓN :

Por enunciado: $E_A = E_B$

es decir: $\dfrac{I_A \cos\alpha}{x^2} = \dfrac{I_B \cos\alpha}{(2-x)^2}$



Pero como los rayos inciden perpendicularmente a la pantalla $\alpha = 0°$, luego $\cos 0° = 1$, luego:

$$\frac{I_A}{x^2} = \frac{I_B}{(2-x)^2} \qquad (1)$$

$I_A = 200\ cd$

$I_B = 5\ violles = 5 \times 20\ cd = 100\ cd$

En (1): $\dfrac{200\ cd}{x^2} = \dfrac{100\ cd}{(2-x)^2}$

$$2(2-x)^2 = x^2$$

$$x^2 - 8x + 8 = 0$$

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - 8}$$
$$x_1 = 6{,}83 \text{ (no es respuesta)}$$

Rpta.: $x_2 = 1{,}17$ m

PROBLEMA 5. Calcular el flujo luminoso de una lámpara que ilumina con 120 lx una pantalla de 50 cm².

RESOLUCIÓN: $f = E.A$

$$f = 120\ \text{lx} \cdot 0{,}0050\ \text{m}^2 = 0{,}6\ \text{lx} \cdot \text{m}^2$$

Rpta.: $f = 0{,}6$ lm

PROBLEMA 6. De una fuente luminosa se emite 15 lúmenes sobre un área de 60 cm². Calcular la iluminación que experimenta la pantalla.

RESOLUCIÓN:

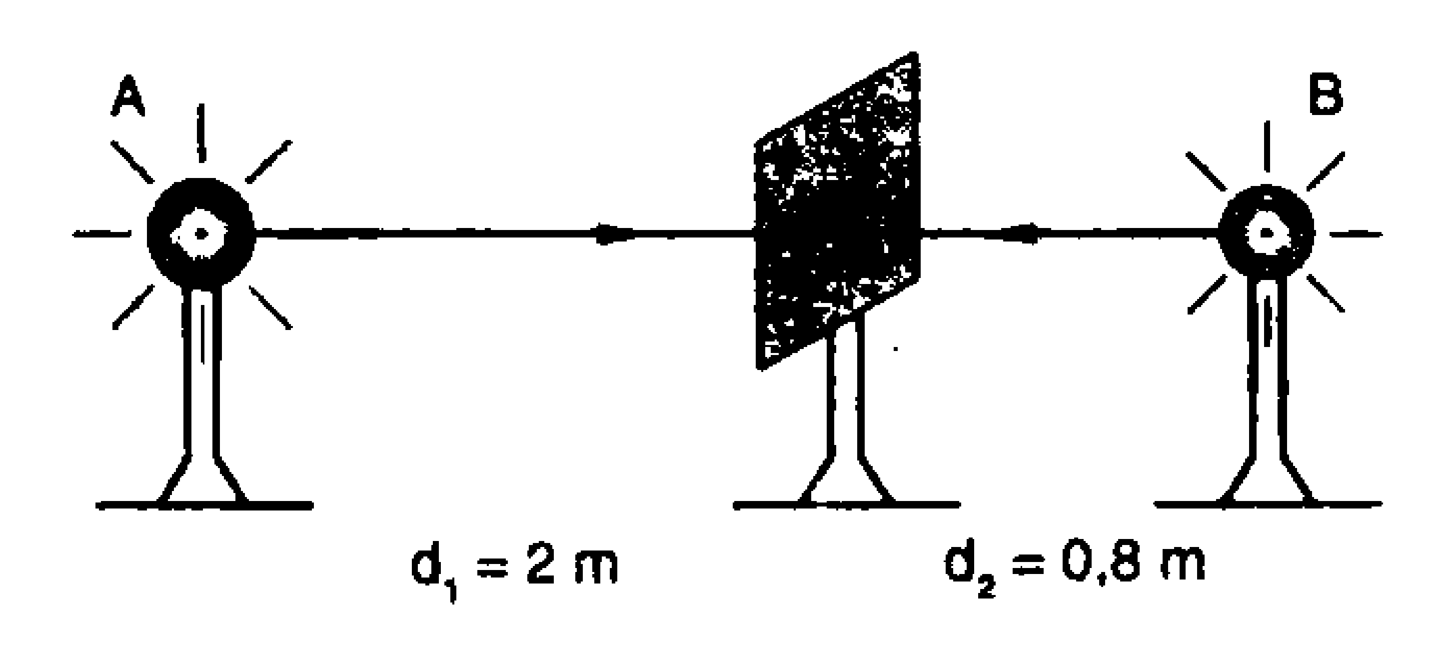
$$f = E \cdot A \quad \text{de donde:} \quad E = \frac{f}{A}$$

$$\therefore \quad E = \frac{15\ \text{lm}}{0{,}006\ \text{m}^2} = 2\,500\ \frac{\text{lm}}{\text{m}^2}$$

Rpta.: $E = 2\,500$ lx

PROBLEMA 7. La intensidad de un foco es de 100 cd, está a una distancia de 2 m de una pantalla, en un fotómetro de Bunsen. Por la espalda, la pantalla recibe una iluminación igual de otro foco situado a 80 cm.

Calcular la intensidad del segundo foco.



RESOLUCIÓN: Por dato: $E_A = E_B$

O sea: $\frac{I_A}{d_1^2} = \frac{I_B}{d_2^2}$; de donde:

$$I_B = I_A \frac{d_2^2}{d_1^2}$$

$$I_B = 100\ \text{cd}\ \frac{(0{,}80\ \text{m})^2}{(2{,}0\ \text{m})^2} = 16\ \text{cd}$$

Rpta.: $I_B = 16$ cd ó 16 bujías

PROBLEMA 8. El filamento luminoso de una lámpara emite una intensidad luminosa de 70 cd. Calcular el flujo total de la lámpara.

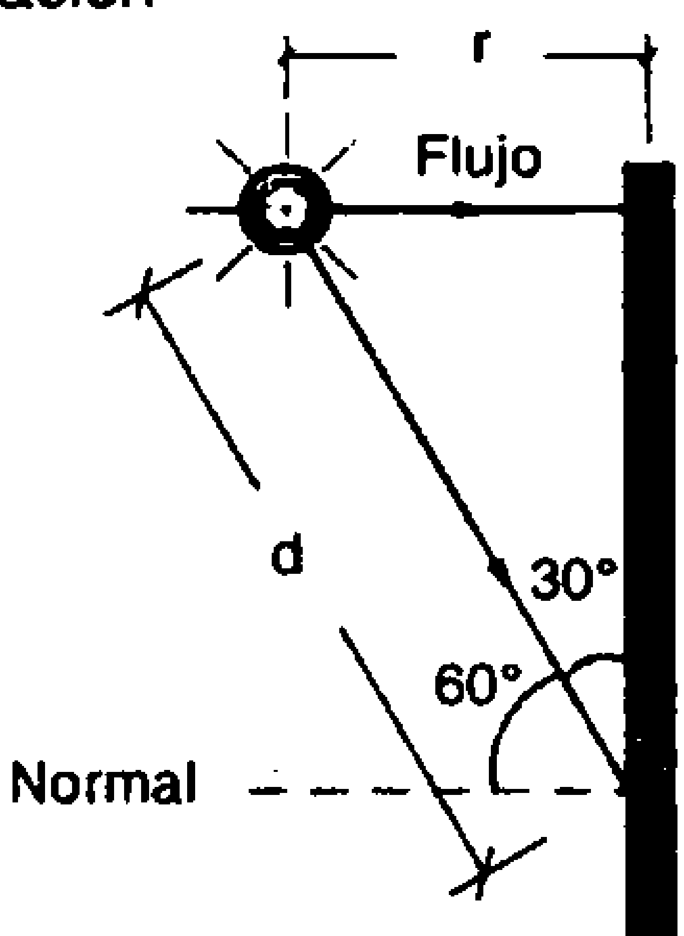
RESOLUCIÓN: Sabiendo que:

$$f_T = 4\pi . I$$
$$f_T = 4 \times 3{,}14 = 70 \times \text{sr}$$
$$= 879{,}6\ \text{cd} \times \text{sr}$$

Rpta.: $f_T = 879{,}6$ lm

PROBLEMA 9. Una lámpara emite una intensidad de 80 bujías sobre una pantalla situada a una distancia de 1,50 m. Calcular

a) La iluminación, si los rayos caen perpendiculares a la pantalla.
b) En un lugar donde los rayos caen con 30° de inclinación



RESOLUCIÓN:

$$i = 80\ \text{bujía} = 80\ \text{cd}; \quad r = 1{,}50\ \text{m}.$$

a) $$E = \frac{I}{r^2} = \frac{80\ \text{cd}}{(1{,}50\ \text{m})^2}$$

$$E = 35{,}55\ \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 35{,}55\ \text{lx}$$

b) $E = \dfrac{I \cos \alpha}{d^2}$

$$E = \frac{80 \text{ cd} \times \cos 60°}{(1{,}50 \text{ m})^2}$$

$$E = 17{,}77 \frac{\text{cd}}{\text{m}^2} = 17{,}77 \text{ lx}$$

PROBLEMA 10. Las cumbres de dos montañas están a 60 km de distancia. Dos personas en las cumbres se hacen señales de luz, cuando el tiempo está despejado. ¿Qué tiempo después de encender la lámpara una, recepciona a la otra?

RESOLUCIÓN : d = 60 km

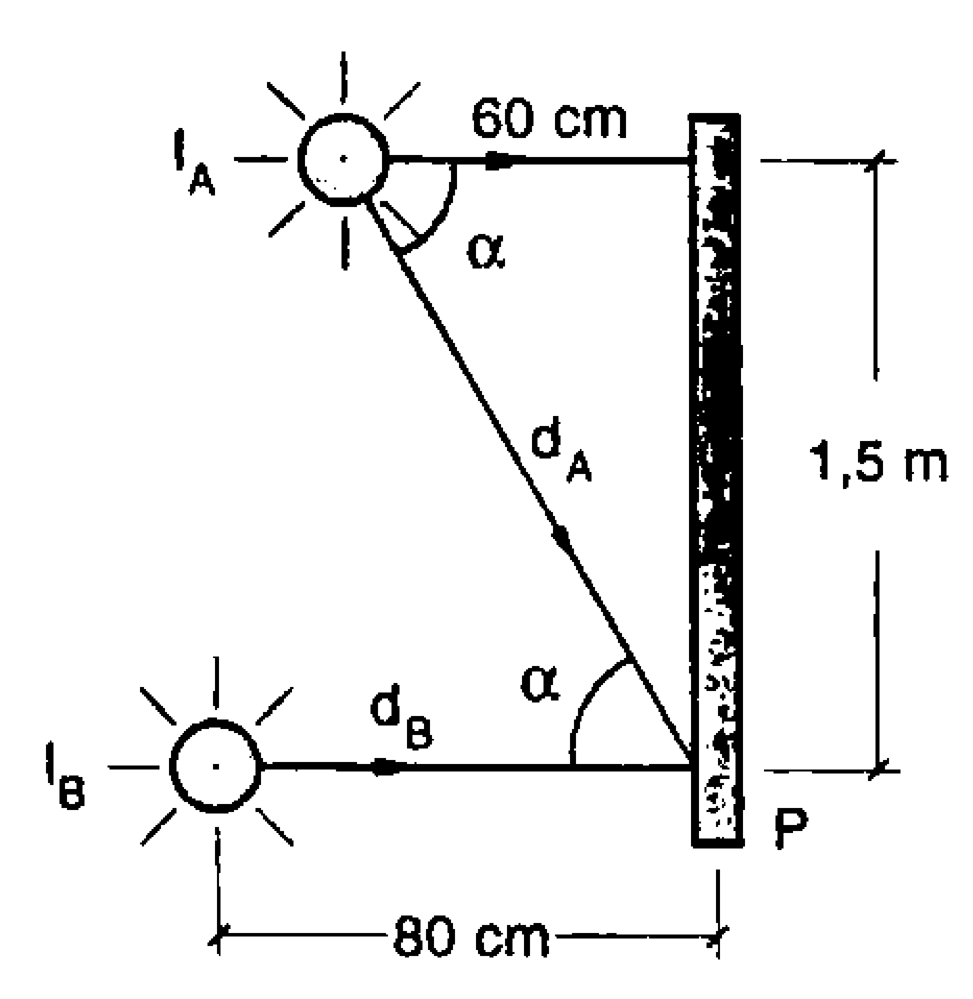
Recordando que la velocidad de la luz 300 000 km/s

Además: $t = \dfrac{d}{v}$

$$t = \frac{60 \text{ km}}{300\,000 \text{ km/s}} = 0{,}000\,2 \text{ s}$$

$$t = 2 \times 10^{-4} \text{ s}$$

PROBLEMA 11. Dos lámparas de 100 y 200 candela iluminan una pantalla de 1,5 m de alto. La primera está a la altura de la parte superior y la segunda a la altura de la parte inferior de la pantalla, a 60 y 80 cm de distancia de la pantalla, respectivamente. Calcular la iluminación de la pantalla en la parte inferior.



RESOLUCIÓN :

Iluminación de A sobre P :

$$E_A = \frac{I_A \cos \alpha}{d_A^2} \qquad (1)$$

Iluminación de B sobre P:

$$E_B = \frac{I_B}{d_A^2} \qquad (2)$$

La iluminación total sobre P:

$$E_T = E_A + E_B = \frac{I_A \cos \alpha}{d_B^2} + \frac{I_B}{d_B^2}$$

$$E_T = \frac{100 \text{ cd}}{(1{,}60 \text{ m})^2} \cdot \frac{0{,}60}{\sqrt{(0{,}60)^2 + (1{,}50)^2}} + \frac{200 \text{ cd}}{(0{,}80 \text{ m})^2}$$

Rpta.: E = 327 lx

PROBLEMA 12. Una lámpara está 3 m delante de una pared. ¿A qué distancia de la pared debe acercarse para que la iluminación sobre la pared sea el triple que al principio?

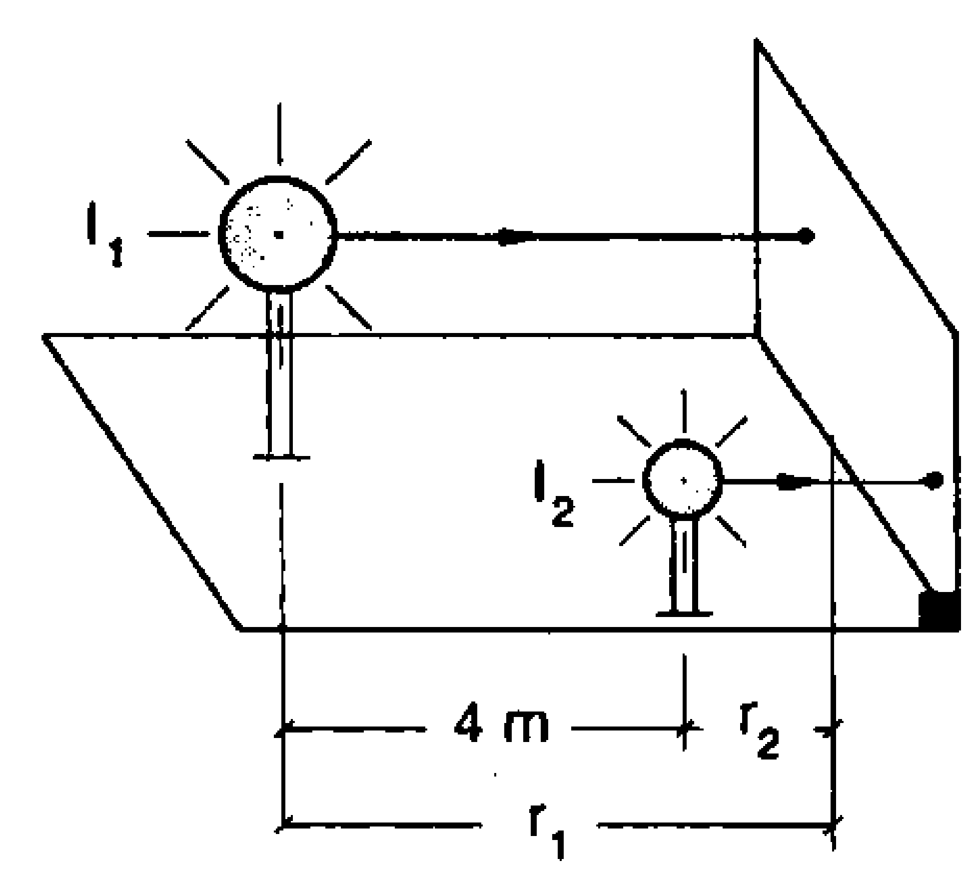
RESOLUCIÓN : De acuerdo al problema:

$$E_2 = 3 E_1$$

$$\frac{I}{r_2^2} = 3 \frac{I}{r_1^2} \Rightarrow r_2^2 = \frac{1}{3} r_1^2$$

Rpta.: $r_2 = 1{,}73$ m

PROBLEMA 13. Dos focos de 150 cd y 20 cd, producen igual iluminación sobre una pantalla. La diferencia de las distancias es de 4 m. Determinar las distancias a la pantalla.



RESOLUCIÓN:
Sean r_1 y r_2 las distancias de los focos.
Según el problema:

$$E_1 = E_2$$

$$\therefore \quad \frac{I_1}{r_1^2} = \frac{I_2}{r_2^2}$$

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{I_1}{I_2}$$

$$\frac{r_1 - r_2}{r_2} = \frac{I_1 - I_2}{I_2}$$

$$r_2 = (r_1 - r_2)\,\frac{I_2}{I_1 - I_2}$$

$$r_2 = 4\,m\,\frac{20}{150 - 20}$$

$$r_2 = 4\,m \times \frac{20}{130}$$

Rpta.: $r_2 = 0{,}62$ m

$r_1 = 4$ m $+ 0{,}62$ m

$r_1 = 4{,}62$ m

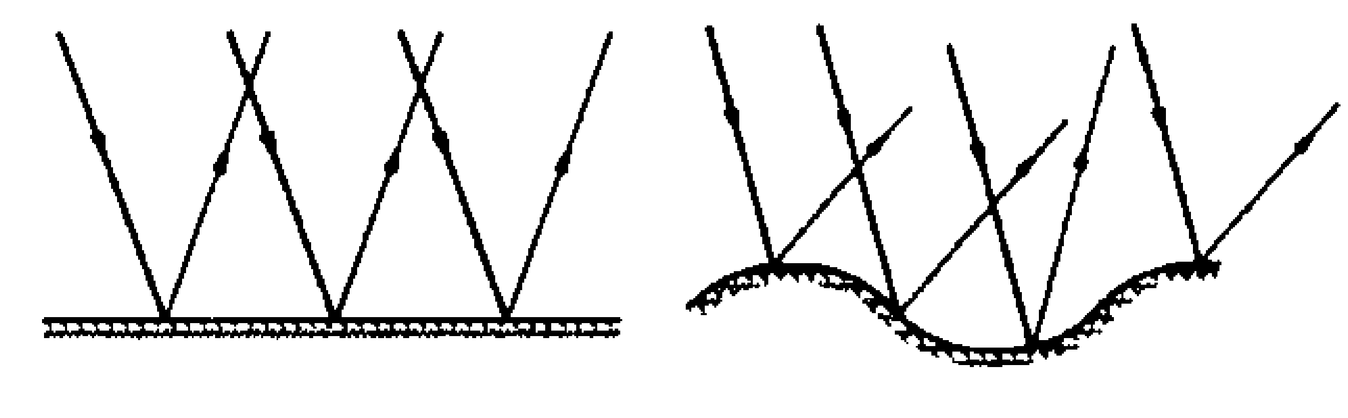
UNIDADES FOTOMÉTRICAS SI		
Propiedad que se mide	Unidad SI	Símbolo
Intensidad luminosa (I)	candela	cd
Flujo luminoso (f)	lumen	lm
Iluminación (E)	lux (lm/m²)	lx
Iluminación (L)	cd/m²	cd/m²

REFLEXIÓN DE LA LUZ

Al incidir los rayos luminosos sobre una superficie, éstos rebotan cambiando de dirección. A esto se llama reflexión.

Si la superficie en la que inciden rayos luminosos paralelos es una superficie plana y pulimentada, los rayos reflejados siguen siendo paralelos. Este tipo de reflexión se llama REGULAR.

Si la superficie en que inciden los rayos luminosos paralelos, es rugosa o áspera, los rayos reflejados se difunden. Este tipo de reflexión se llama DIFUSA.



Reflexión Regular   Reflexión Difusa

ÁNGULO DE INCIDENCIA

Es el ángulo que un rayo incidente hace con la normal al plano en el punto de incidencia

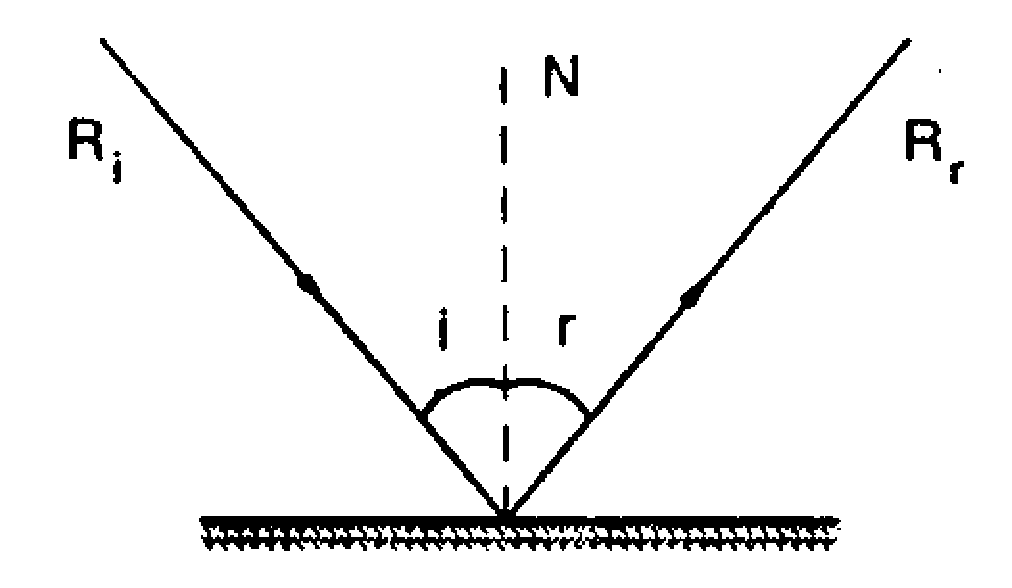
http://librosysolucionarios.net

ÁNGULO DE REFLEXIÓN

Es el ángulo que hace un rayo reflejado con la normal al plano de incidencia

NORMAL

Es una recta perpendicular al plano en el punto de incidencia del rayo luminoso



i = Ángulo de incidencia
r = Ángulo de reflexión

LEYES DE LA REFLEXIÓN

Primera Ley:
El ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión cuando la superficie de incidencia es plana.
Segunda Ley:
El rayo de incidencia, el rayo de reflexión y la normal están en un mismo plano perpendicular al plano de incidencia.

ESPEJOS

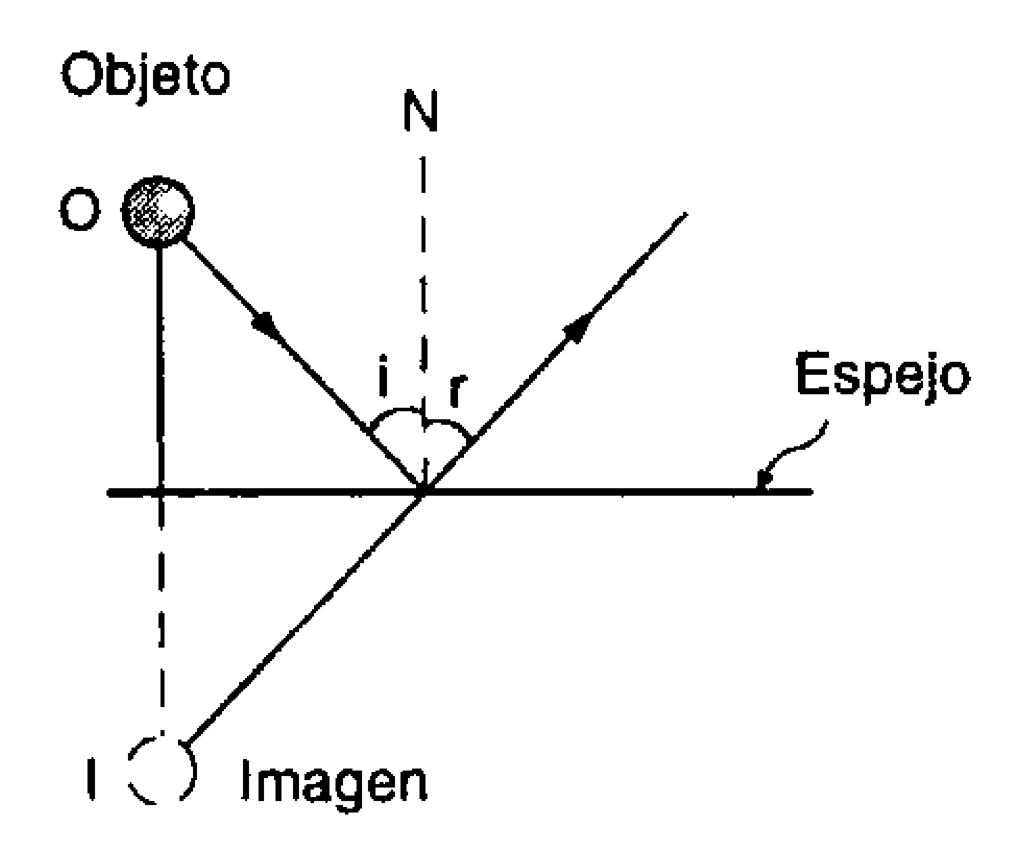
Son superficies pulimentadas que sirven para producir reflexión regular y producir imágenes

Los espejos pueden ser planos y esféricos. Estos últimos pueden ser: cóncavos y convexos.

ESPEJOS PLANOS

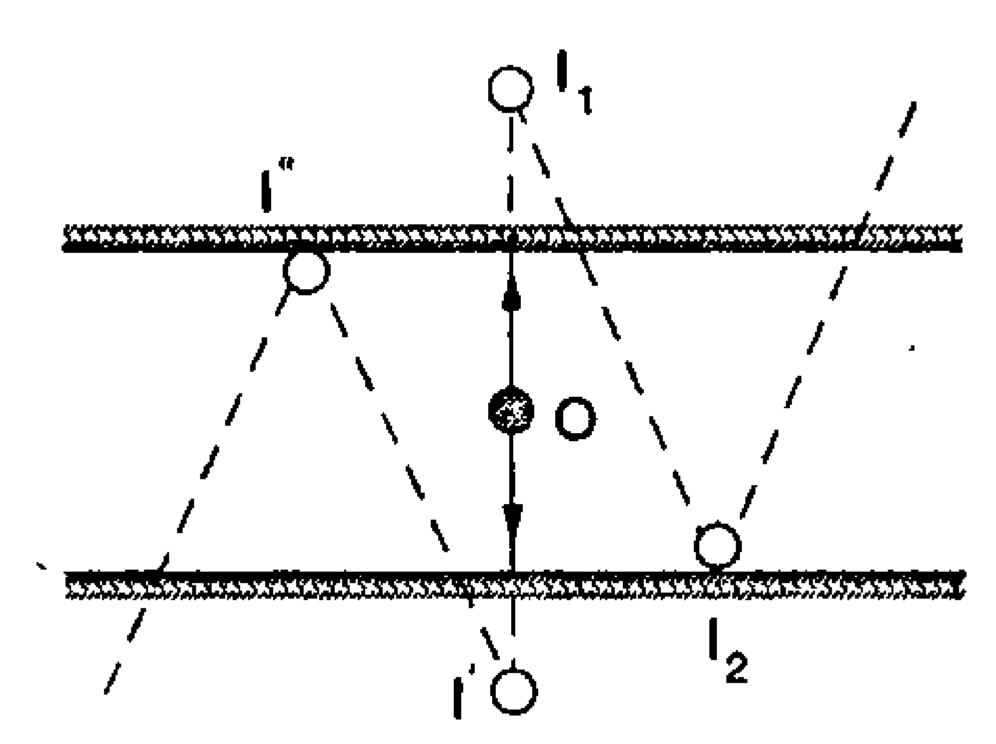
Son superficies pulimentadas planas que al incidir los rayos luminosos proporcionan una imagen con las siguientes características:

a) Derecha
b) Virtual; es decir detrás del espejo
c) Del mismo tamaño del objeto
d) Simétrico con respecto al espejo



ASOCIACIÓN DE ESPEJOS PLANOS

a) Asociación Paralela:
Cuando 2 espejos están paralelos, el número de imágenes es infinito.

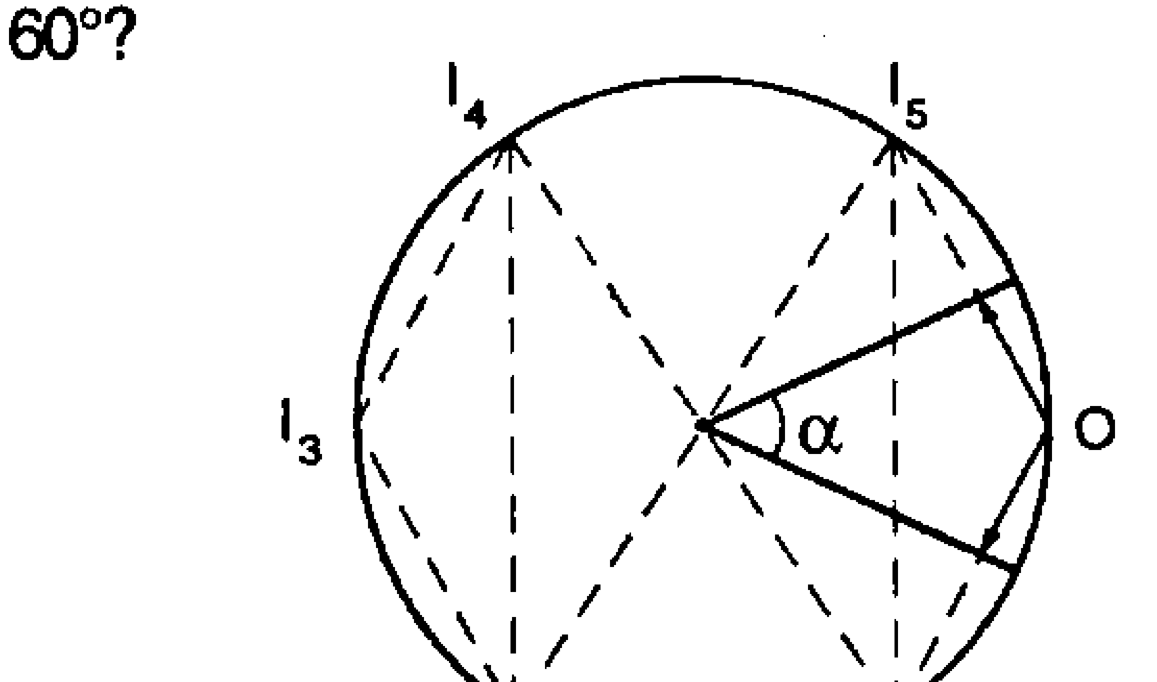


b) Asociación Angular:
Cuando 2 espejos forman un ángulo α, en tal caso el número de imágenes está dado por la expresión:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1 \; ; \; \text{cuando } \frac{360°}{\alpha} \text{ es par}$$

$$n = \frac{360°}{\alpha} \; ; \; \text{cuando } \frac{360°}{\alpha} \text{ es impar}$$

Ejemplo: ¿Cuántas imágenes forman dos espejos que hacen un ángulo de 60°?



http://librosysolucionarios.net

RESOLUCIÓN: $\frac{360°}{60}$ es par, entonces:

$$n = \frac{360°}{60} - 1 = 6 - 1$$

$$n = 5$$

ESPEJOS ESFÉRICOS:

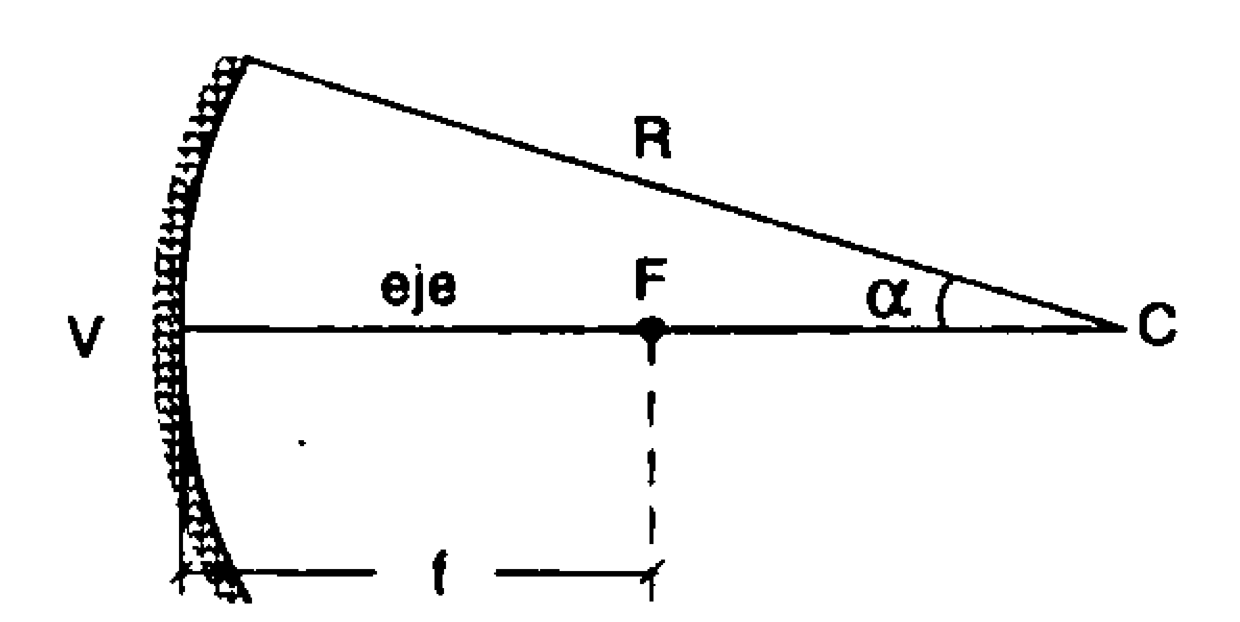
Espejo esférico es un casquete esférico pulido. Si está pulido por dentro el espejo es cóncavo o convergente; si está pulido por fuera es convexo o divergente.



Convexo o Divergente pulido por dentro   Cóncavo o Convergente pulido por fuera

Elementos de un espejo esféricos:

1. CENTRO DE CURVATURA, es el centro "C" de la esfera.
2. POLO DEL CASQUETE, es el vértice "V".
3. EJE PRINCIPAL, es la recta que une el vértice V y el centro de curvatura C



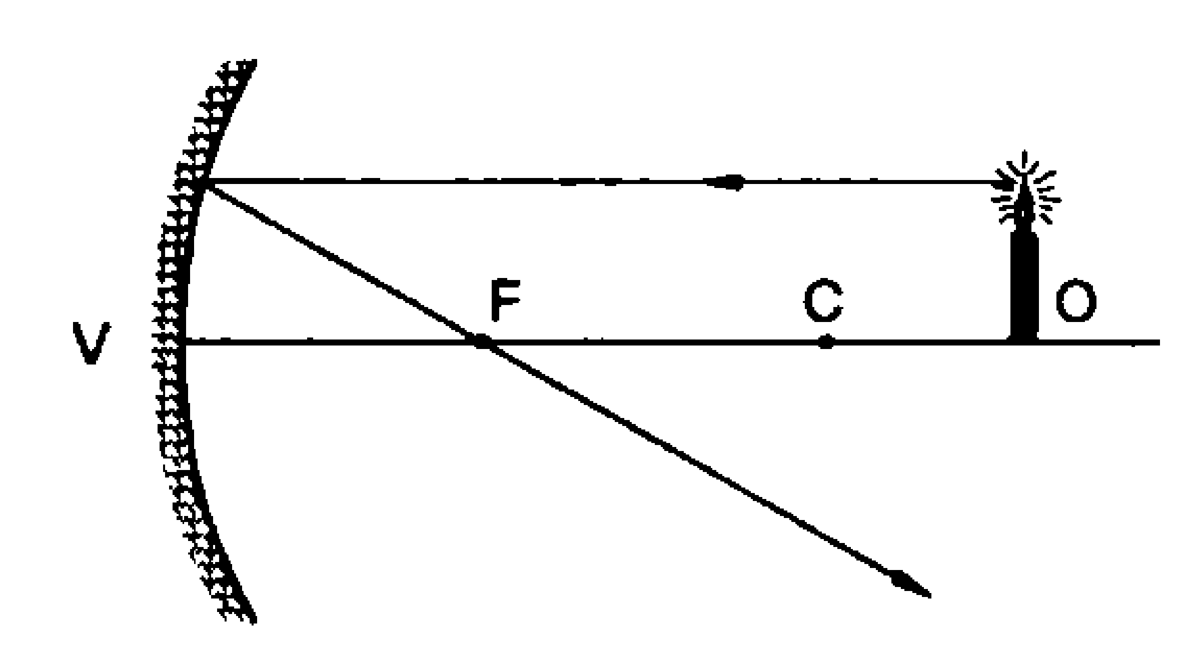
4. ABERTURA, es el ángulo a formado por el eje principal y el radio que pasa por el borde del espejo. Normalmente los espejo cóncavos no tienen más de 10° de abertura, lo que significa que su radio siempre es muy grande.
5. FOCO PRINCIPAL, es el punto "F" del eje principal por donde pasan los rayos reflejados del espejo.
6. DISTANCIA FOCAL, es la distancia "f" del foco principal al vértice del espejo; es la mitad del radio.

$$f = \frac{R}{2}$$

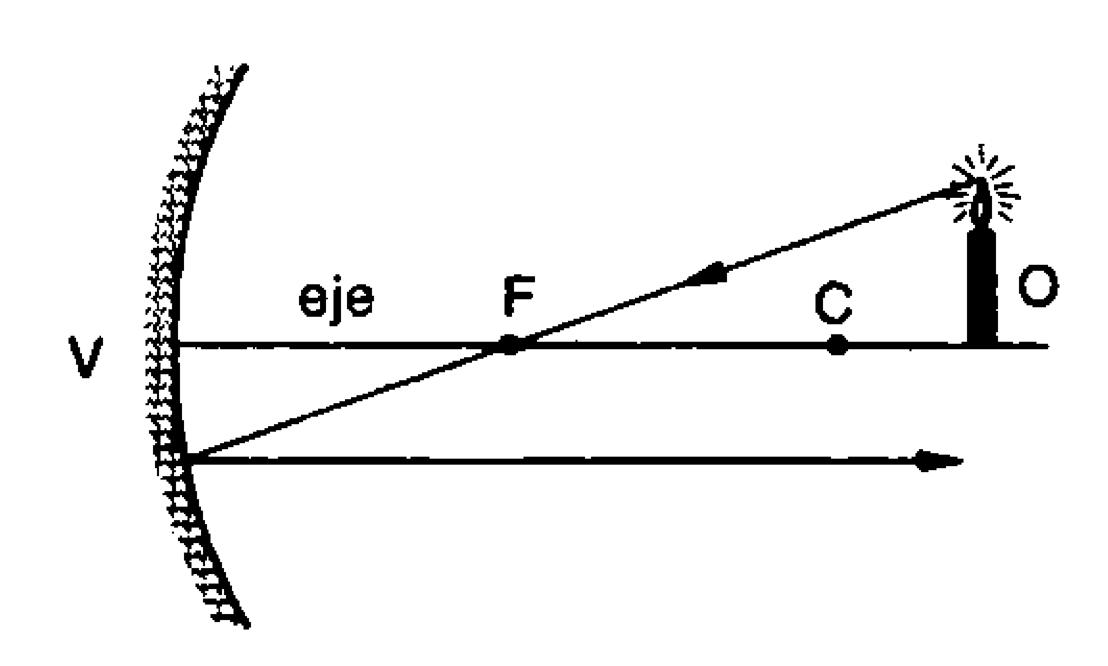
7. EJE SECUNDARIO, es cualquier eje que no sea el principal y que pasa por el centro "C" del espejo

RAYOS PRINCIPALES

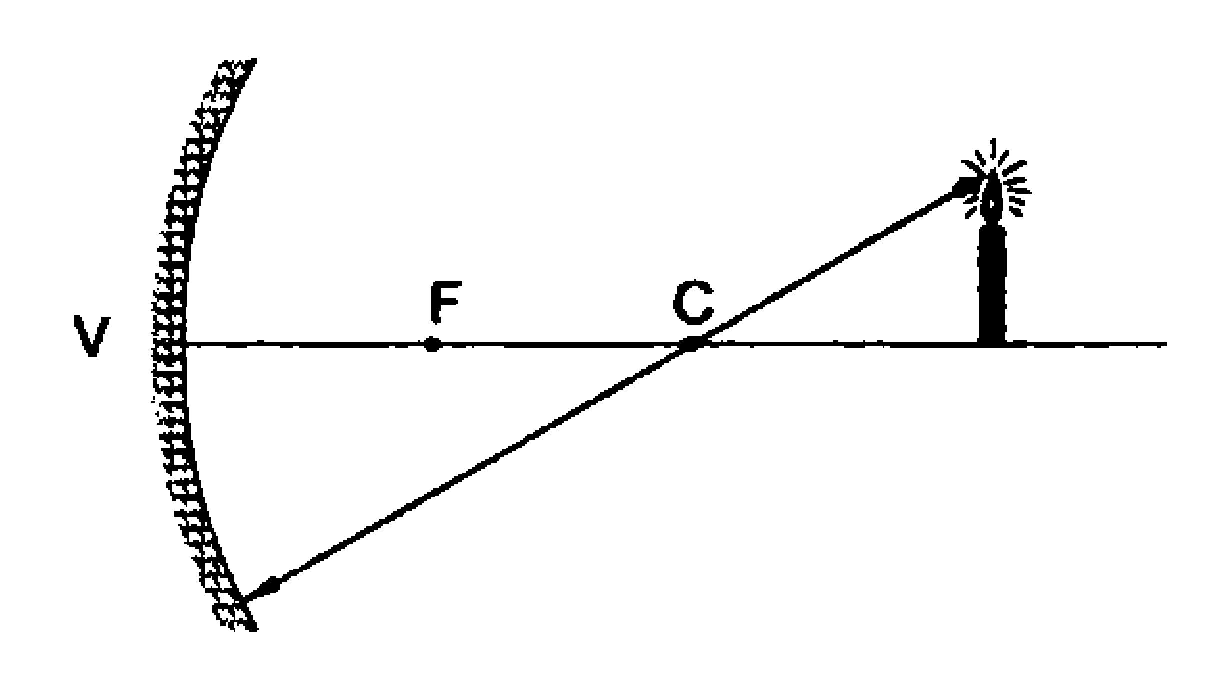
1. Todo rayo paralelo al eje principal se refleja pasando por el foco.



2. Todo rayo que pasa por el foco se refleja paralelo al eje principal.



3. Todo rayo que pasa por el centro de curvatura se refleja sobre sí mismo.



POSICIONES DEL OBJETO Y LA IMAGEN DE UN ESPEJO CÓNCAVO

La imagen de un objeto en un espejo cóncavo se obtiene trazando un rayo paralelo al

eje principal el cual se refleja por el foco, y una recta que pasa por el centro de curvatura; la intersección del rayo reflejado y la recta que pasa por el punto C es la imagen "I". Se presentan los siguientes casos:

1. **El objeto está más allá del centro de curvatura.**

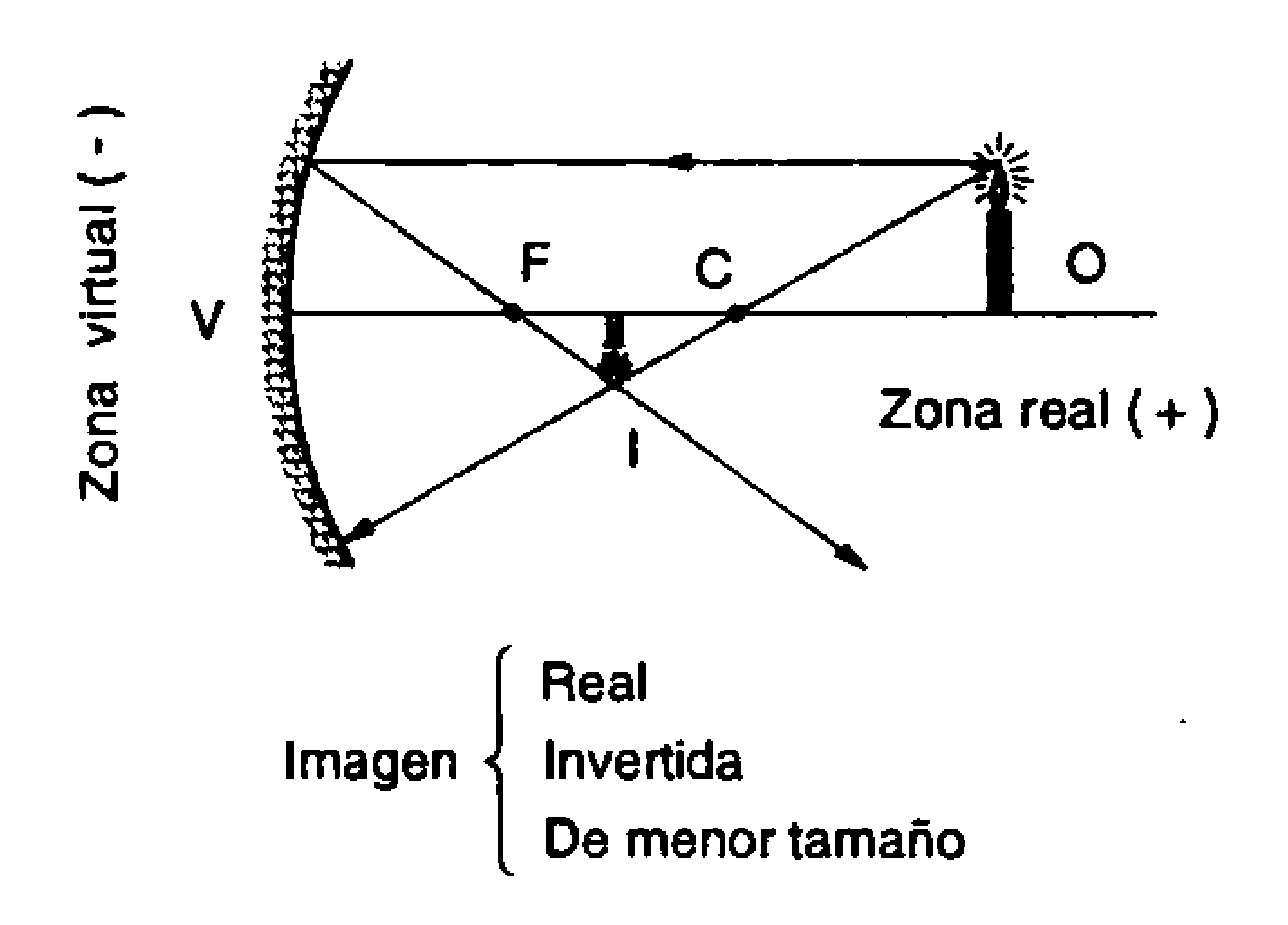


Imagen { Real / Invertida / De menor tamaño

2. **El objeto está sobre el centro de curvatura.**

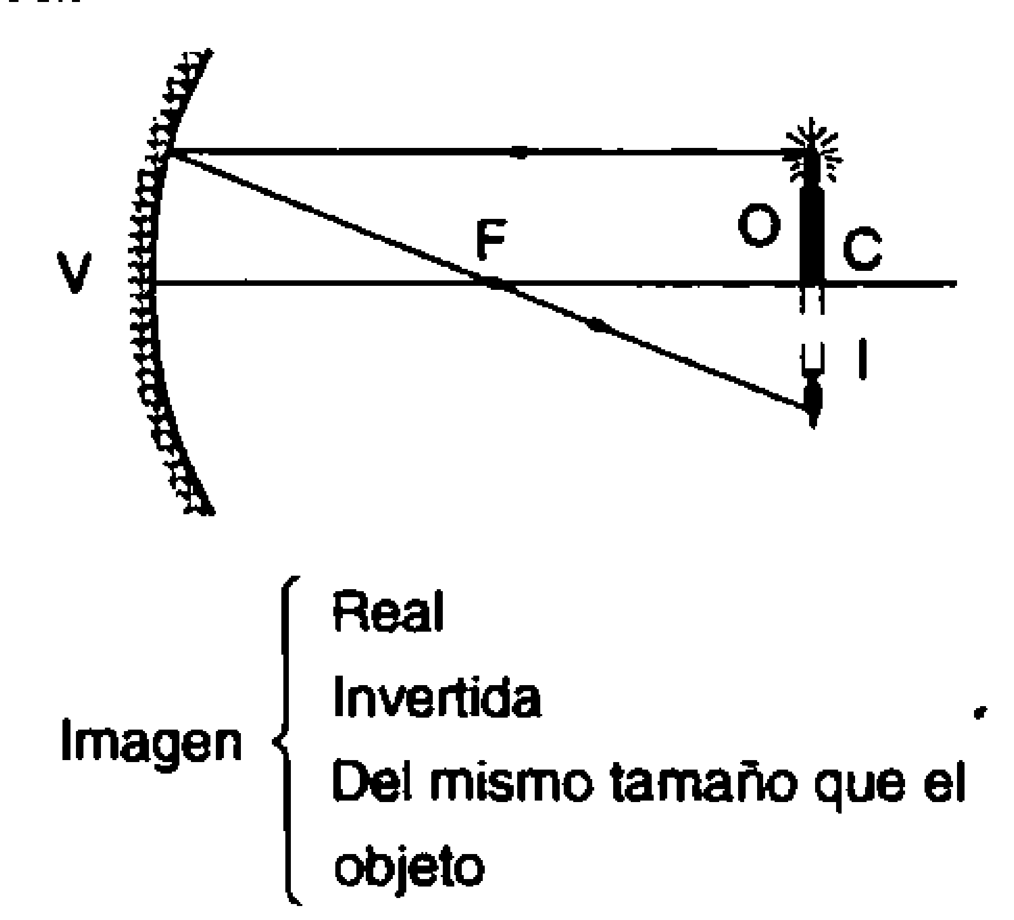


Imagen { Real / Invertida / Del mismo tamaño que el objeto

3. **El objeto está entre el foco y el centro de curvatura.**

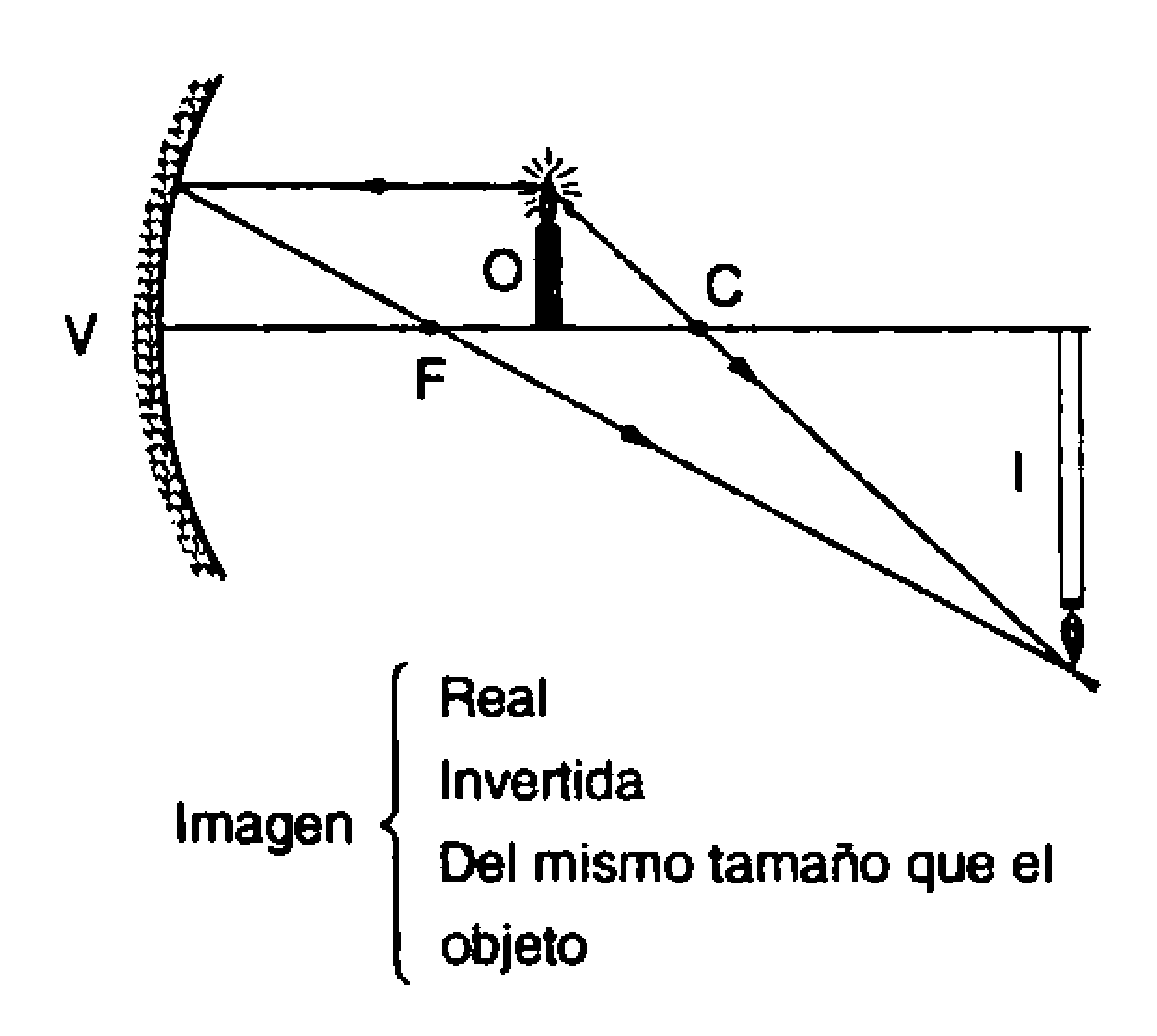


Imagen { Real / Invertida / Del mismo tamaño que el objeto

4. **El objeto está sobre el foco**

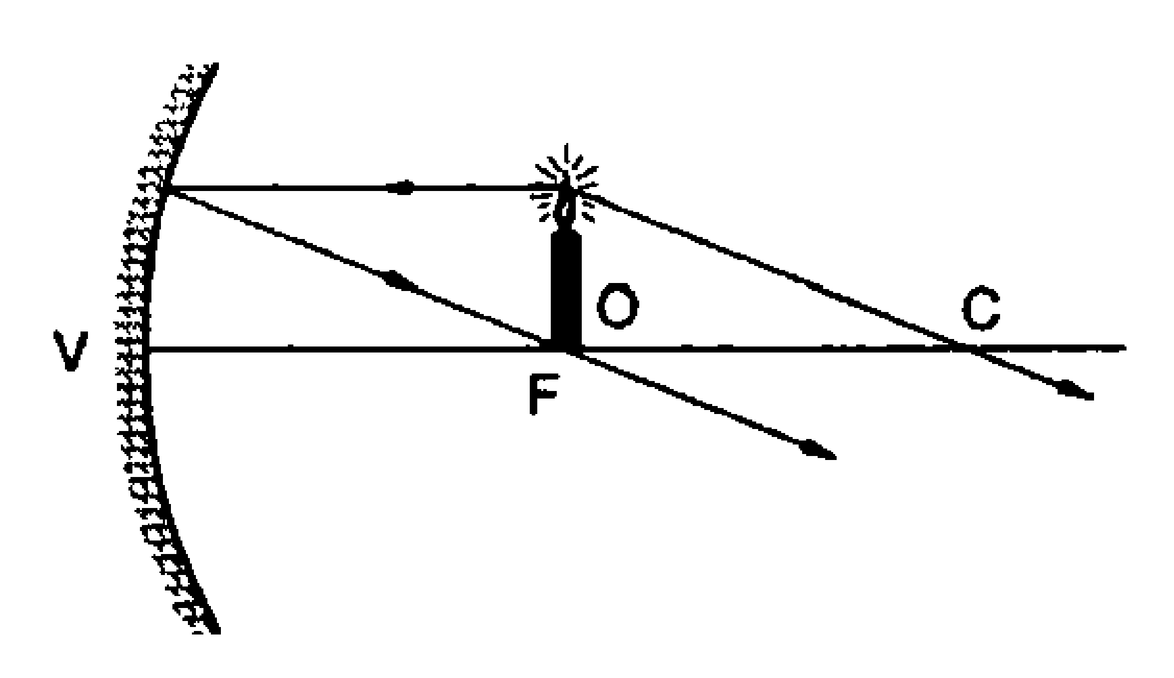


Imagen { Los rayos reflejados no se cortan, luego no hay imagen, o la imagen está en el infinito

5. **El objeto está entre el foco y el vértice del espejo.**

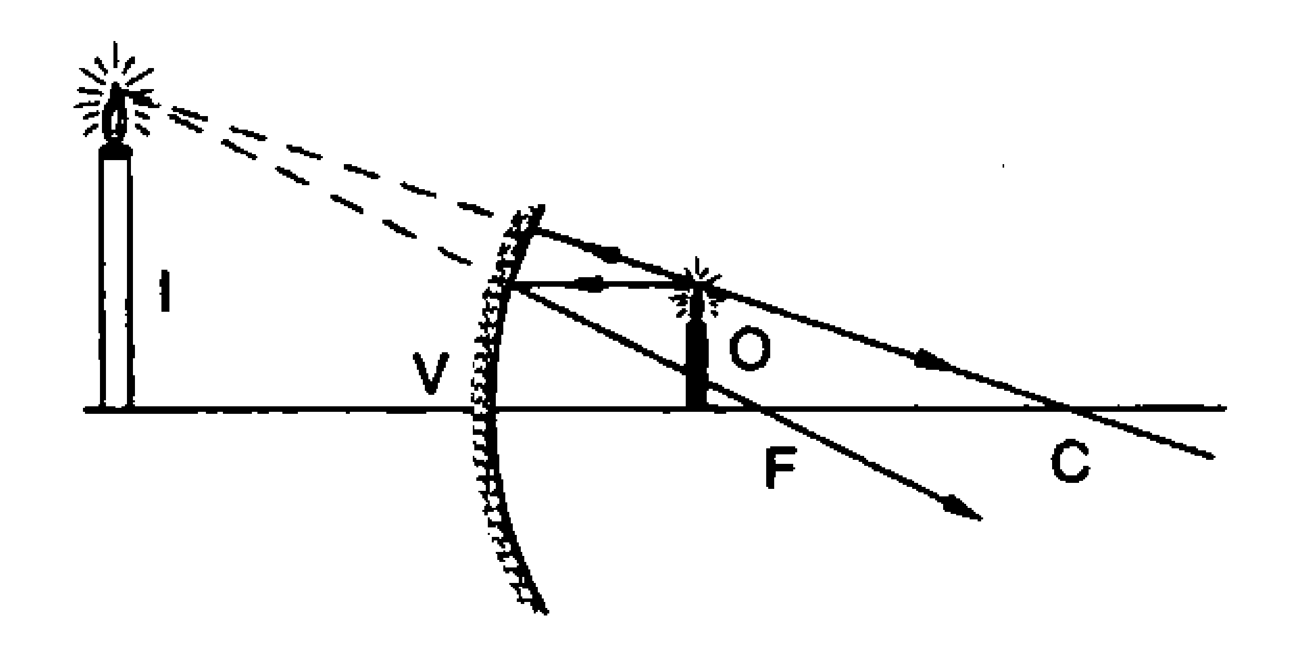


Imagen { Virtual (por que se cortan en la prolongación del rayo reflejado) al otro lado del espejo) Derecha / De mayor tamaño que el objeto

6. **Cuando se trata de un punto que está en el eje principal**

Se supone un punto Q, que no pertenece al eje pero que está en la perpendicular levantada o bajada del punto Q. Se traza la imagen de la magnitud de esta perpendicular como en el caso 1 y el pie de esa imagen sobre el eje principal es la imagen del punto.

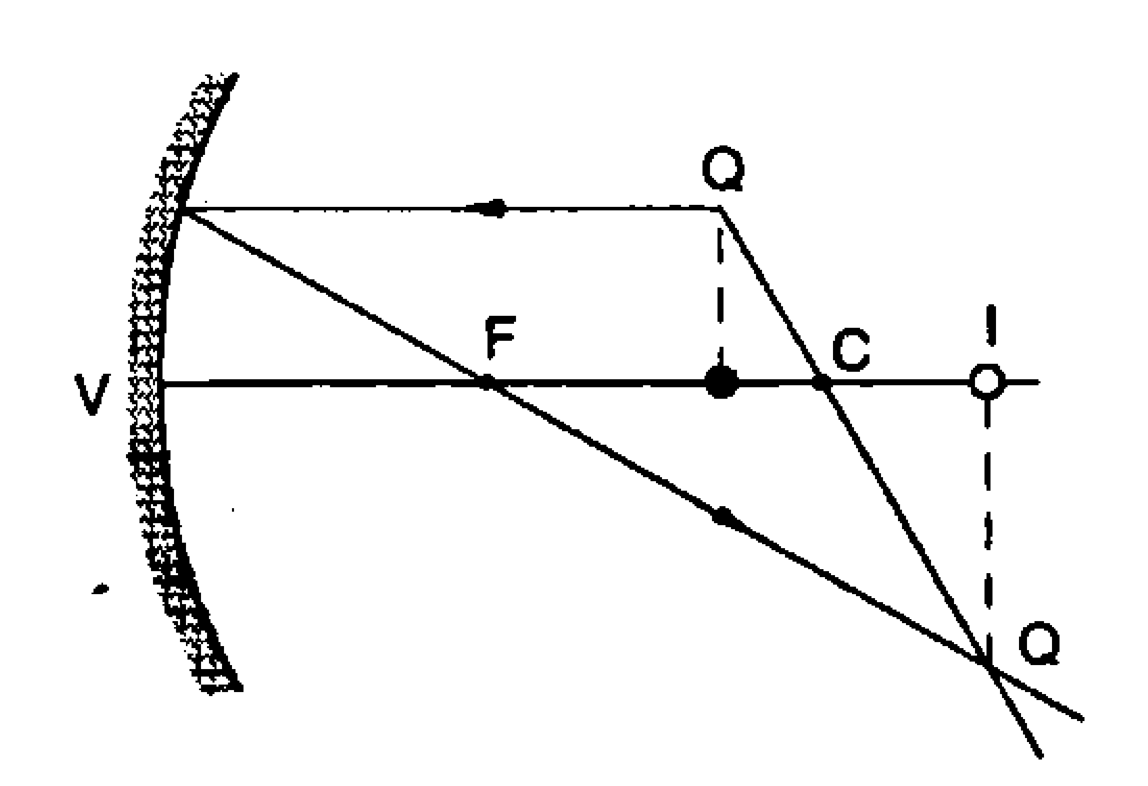


IMAGEN DE UN ESPEJO CONVEXO

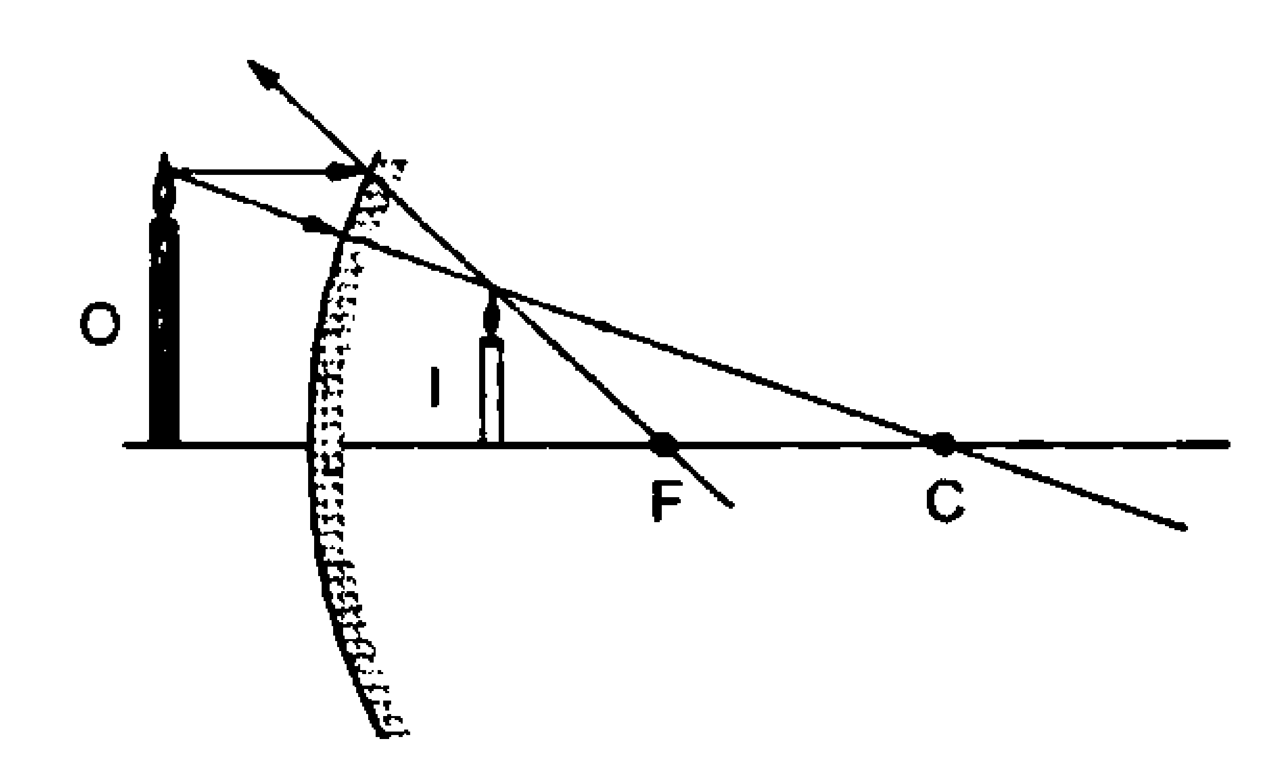


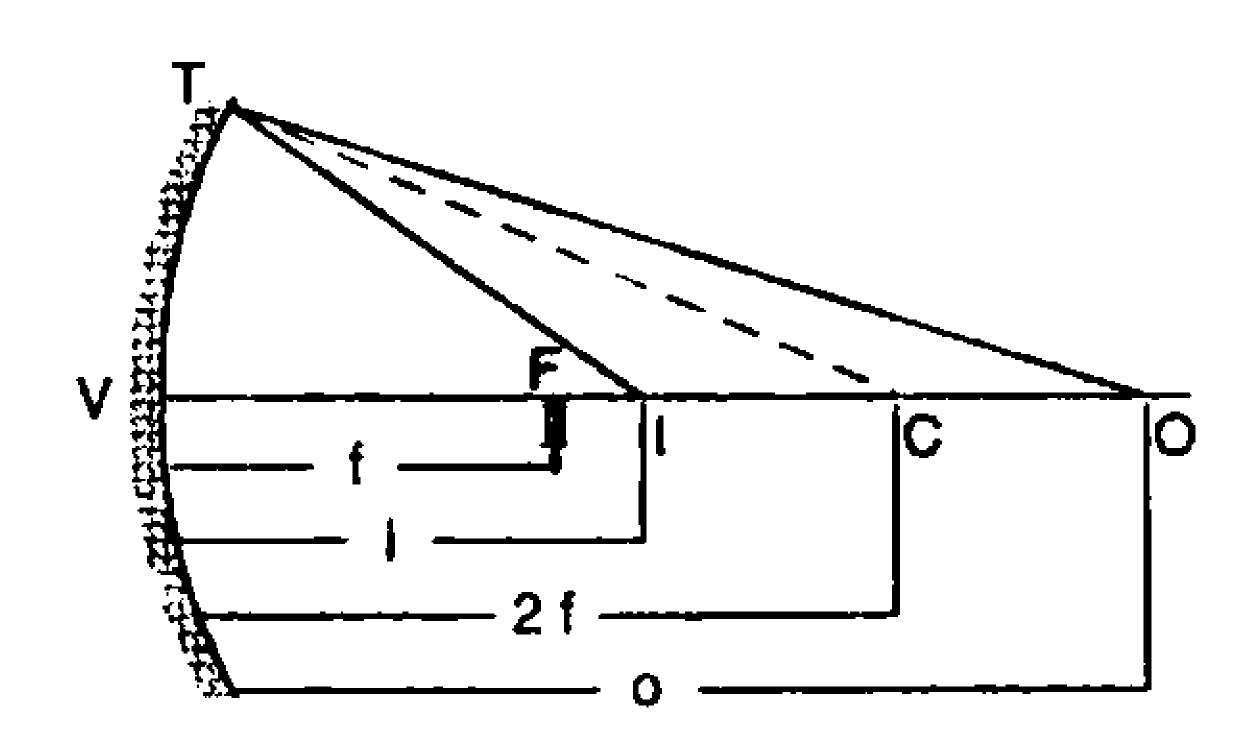
Imagen { Virtual; Derecha; Más chica que el objeto

POSICIÓN DE LA IMAGEN FÓRMULA DE DESCARTES

Cuando el objeto se acerca al espejo la imagen se aleja, y viceversa; a esta condición se llega observando todos los casos anteriores.

Sea el objeto "O" alejado, e "Ï" su imagen, basado en el trazado de la reflexión de un punto luminoso.

El rayo luminoso de "O" incide en el espejo "T", y se refleja formando ángulos iguales con la normal, TC = radio.



Se tiene:

En el triángulo ITO, TC es la bisectriz luego:

$$\frac{TI}{TO} = \frac{IC}{CO} \qquad (A)$$

Como sólo se consideran espejo de muy pequeña abertura, es decir casi planos, se tiene que, aproximadamente:

$$TI = i \quad ; \quad TO = o$$

Además:

$$IC = 2f - i \quad ; \quad CO = o - 2f$$

en (A) : $\frac{i}{o} = \frac{2f - i}{o - 2f}$

Multiplicando medio y extremo:

$$io - 2if = 2of - io$$

$$2io = 2of + 2if$$

Dividiendo cada uno entre 2iof:

$$\frac{2io}{2iof} = \frac{2of}{2iof} + \frac{2if}{2iof}$$

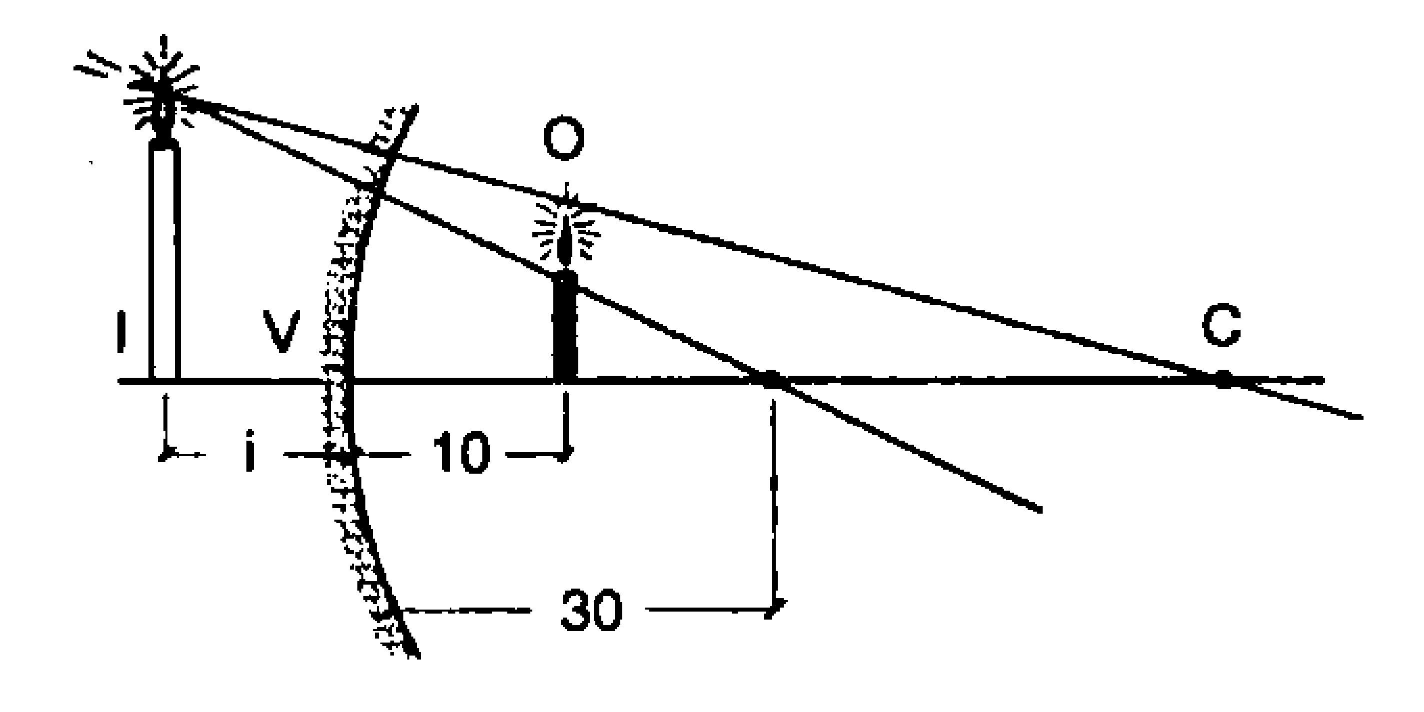
Finalmente:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}}$$

NOTA : Esta es la fórmula de Descartes.

1) Esta fórmula es válida para espejos cóncavos y convexos.
2) Signos de las imágenes:
   Imagen real : + i
   Imagen virtual : - i
3) Signos de las magnitudes:
   Para espejo cóncavo "R" y "F" es (+)
   Para espejo convexo "R" y "F" es (-)

EJEMPLO : Ubicar el lugar donde formará imagen un objeto colocado a 10 cm de un espejo cóncavo con 30 cm de distancia focal.



RESOLUCIÓN : o = 10 cm

i = ? f = 30 cm

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$ De donde:

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o}$$

$$-\frac{1}{i} = \frac{1}{30} - \frac{1}{10}$$

http://librosysolucionarios.net

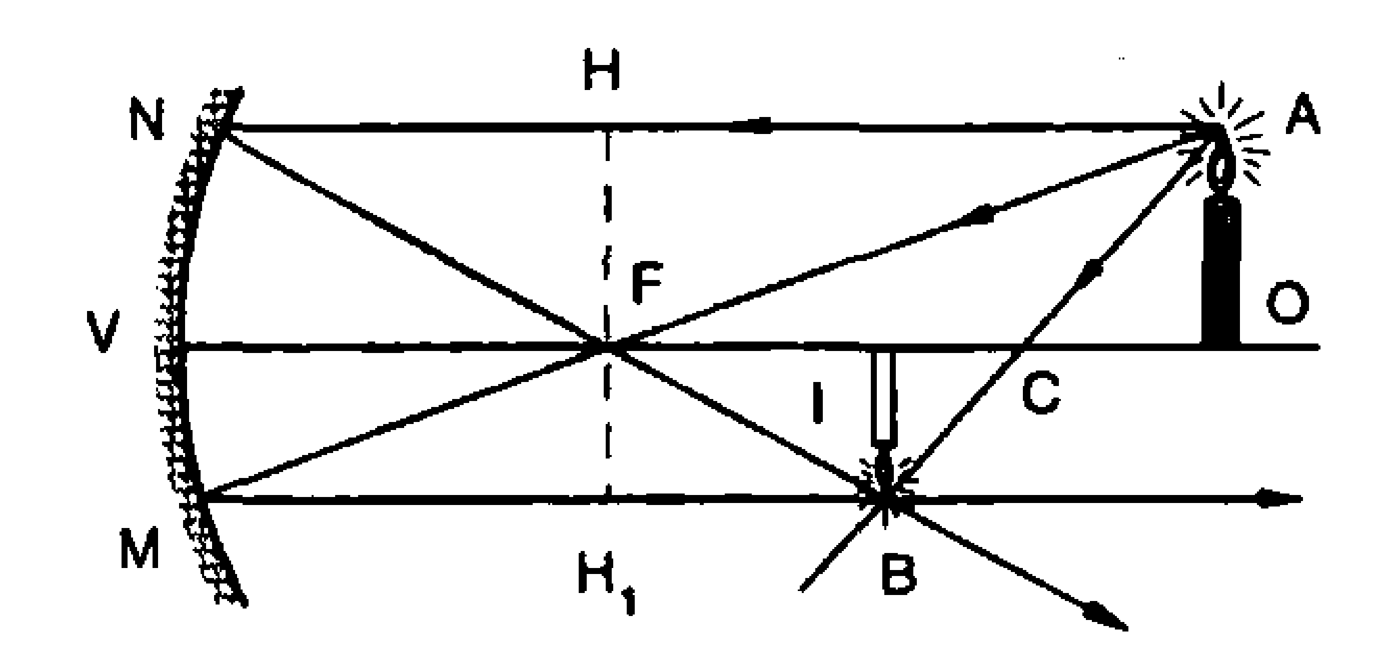
$$i = -15\ cm$$

El signo negativo quiere decir que la imagen es virtual, está a la izquierda del espejo.

TAMAÑO DE LA IMAGEN

Sean los triángulos semejantes AFN y BFM de la figura

$$\frac{FH_1}{MB} = \frac{FH}{NA} \qquad (a)$$



Pero: $FH_1 = -I \qquad MB = i$

$FH = 0 \qquad NA = o$

En (a): $\frac{-I}{i} = \frac{0}{o}$

de donde: $I = -0 \cdot \frac{i}{o}$

Se define como aumento la relación:

$$A = \frac{I}{O} = -\frac{i}{o}$$

I : Tamaño de la imagen
O : Tamaño del objeto
i : Distancia del espejo a la imagen
o : distancia del espejo al objeto

PROBLEMAS RESUELTOS

PROBLEMA 1. Un objeto pequeño de 3 cm de altura se coloca a 50 cm del vértice de un espejo cóncavo de 80 cm de radio. Calcular:

a) La ubicación de la imagen.
b) El tamaño de la imagen.

RESOLUCIÓN:

a) $$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

de donde $$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{40} - \frac{1}{50} = \frac{10}{2\ 000}$$

$$\therefore \quad i = 200\ cm \quad \text{(imagen real)}$$

b) $$I = -O \cdot \frac{i}{o} = -3\ cm \cdot \frac{200\ cm}{50\ cm}$$

$$I = -12\ cm \quad \text{(Invertida)}$$

PROBLEMA 2. Un espejo cóncavo tiene una distancia focal de 25 cm. ¿Dónde debe colocarse el objeto para que la imagen real sea el triple del tamaño del objeto?

RESOLUCIÓN: $\quad f = 25\ cm$

$o = ? \qquad I = 30\ cm$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

$$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} \qquad (1)$$

Por otro lado $\quad I = -O \cdot \frac{i}{o} \qquad (a)$

Según el enunciado: $I = -3 \,.\, O \quad (b)$

(a) = (b): $\quad -3 \cdot O = -O \cdot \frac{i}{o}$

De donde: $\quad i = 3 \,.\, o$

En (1): $$\frac{1}{o} = \frac{1}{f} - \frac{1}{3 \cdot o}$$

$$\therefore \quad o = \frac{4f}{3} = \frac{4 \cdot 25\ cm}{3}$$

$$o = 33\ cm$$

PROBLEMA 3. Un objeto de 6 cm de altura se encuentra delante de un espejo cóncavo de 4 m de radio de curvatura. Calcular el tamaño de la imagen si la distancia del objeto al espejo es 1 m.

RESOLUCIÓN : $O = 6\text{ m}$

$o = 1\text{m}$ $R = 4\text{ m}$

Sabiendo: $I = -O \cdot \frac{i}{o}$ (1)

También: $\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$

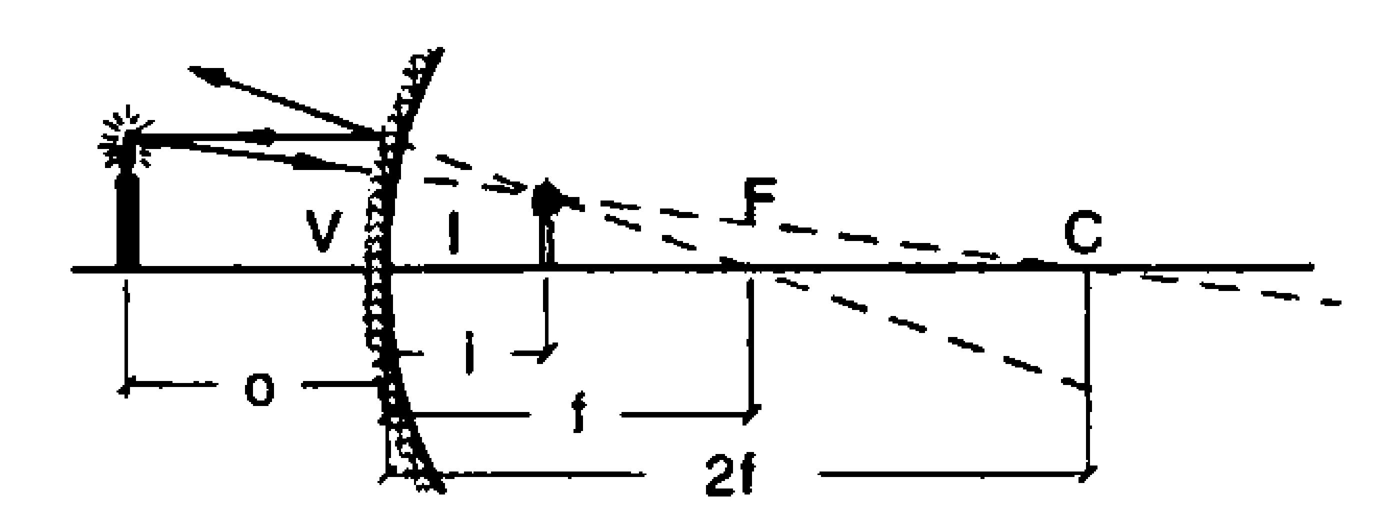
$\therefore \frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{2} - \frac{1}{1} = -\frac{1}{2}$

$i = -2$ (Imagen virtual)

En (1): $I = -6\text{ cm} \times \frac{-2\text{ m}}{1\text{ m}}$

$I = 12\text{ cm}$ (derecha)

PROBLEMA 4. Un objeto de 2 cm de altura está a 20 cm de un espejo convexo de 40 cm de radio de curvatura. Calcular el tamaño de la imagen.



RESOLUCIÓN: $O = 2\text{ m}$

$R = 40\text{ cm}$ $o = 20\text{ cm}$

$I = -O\frac{i}{o}$ (1)

Cálculo de i: $\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$

$\frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{o} = \frac{1}{-20} - \frac{1}{20}$

Como el espejo es cóncavo $f = -20$

$i = -10\text{ cm}$ (Imagen virtual)

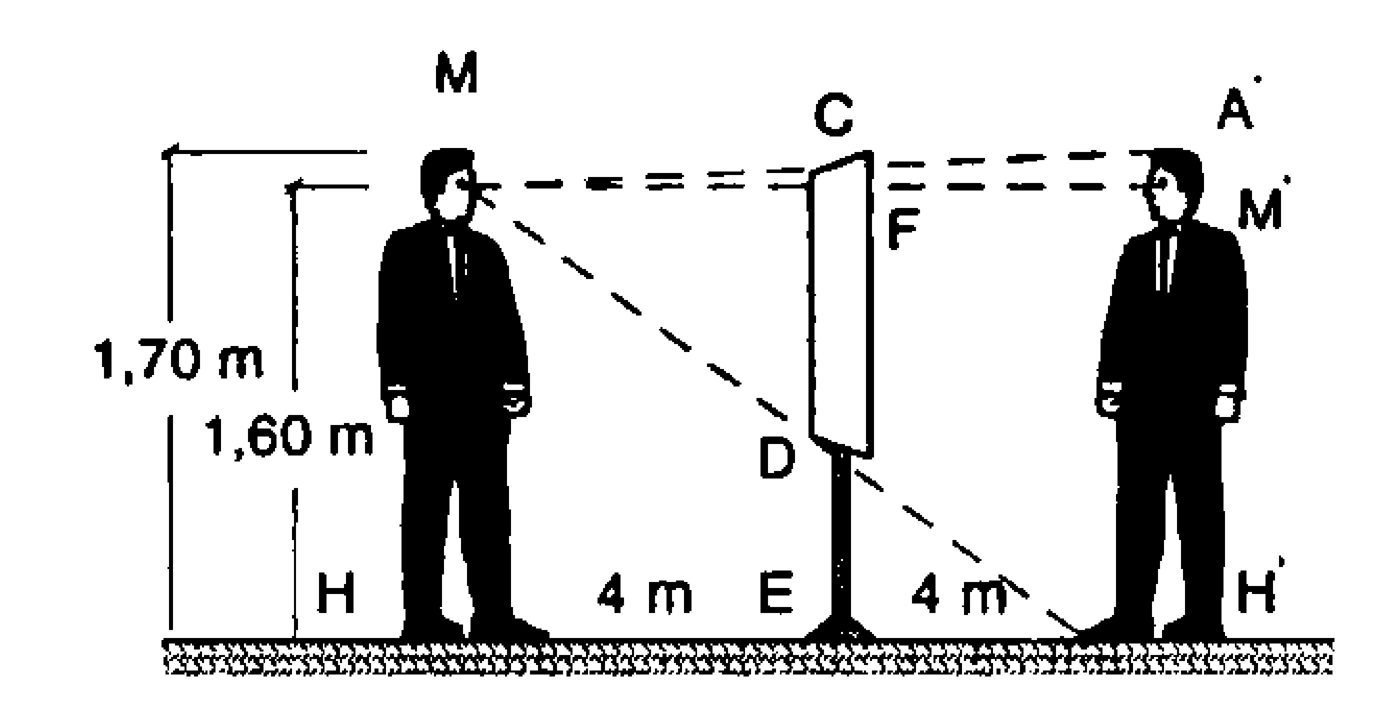
Sustituyendo en (1):

En (1): $I = -2\text{ cm} \times \frac{-10\text{ cm}}{20\text{ cm}}$

$I = -10\text{ cm}$ (imagen derecha)

PROBLEMA 5. ¿Qué tamaño debe tener y a qué altura del suelo debe estar un espejo para reproducir la imagen completa de un hombre de 1,70 m que está a 4 m del espejo? Los ojos del hombre están a 1,60 m del suelo.

RESOLUCIÓN : Sea E la posición del espejo y CD su tamaño.



El triángulo A'MH' semejante al triángulo CMD, luego:

$\frac{A'H'}{CD} = \frac{MM'}{MF}$; de donde:

$CD = A'H' \frac{MF}{MM'} = 1{,}70\text{ m} \frac{4\text{ m}}{8\text{ m}}$

$CD = 0{,}85\text{ m}$

Sea DE la altura a la que debe estar sobre el suelo.

El triángulo MH'H es semejante al triángulo DH'E, luego:

$\frac{MH}{DE} = \frac{HH'}{EH'} \Rightarrow$

$DE = MH \frac{EH'}{HH'} = 1{,}60\text{ m} \frac{4\text{ m}}{8\text{ m}}$

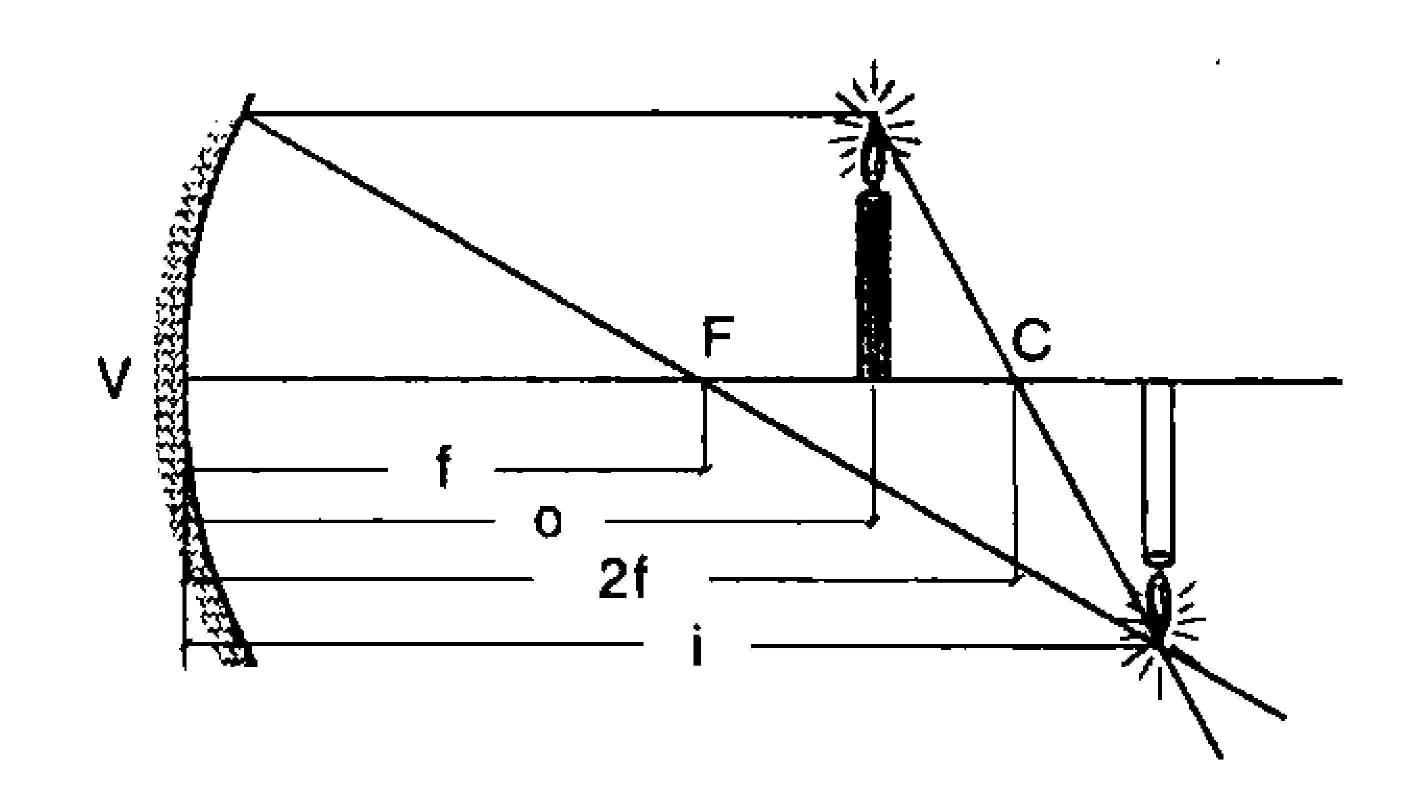
$DE = 0{,}8\text{ m}$

PROBLEMA 6. Un espejo cóncavo esférico tiene un radio de 2 m. Calcular el tamaño de la imagen de un objeto de 15 cm situado a 1,20 m del espejo.

RESOLUCIÓN : $O = 15\text{ cm}$

$r = 2\text{ m}$ $o = 1{,}20\text{ m}$

http://librosysolucionarios.net



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o}$$

$$\frac{1}{1\,m} = \frac{1}{i} + \frac{1}{1{,}20\,m}$$

De donde: $i = 6\,m$

Tamaño de la imagen:

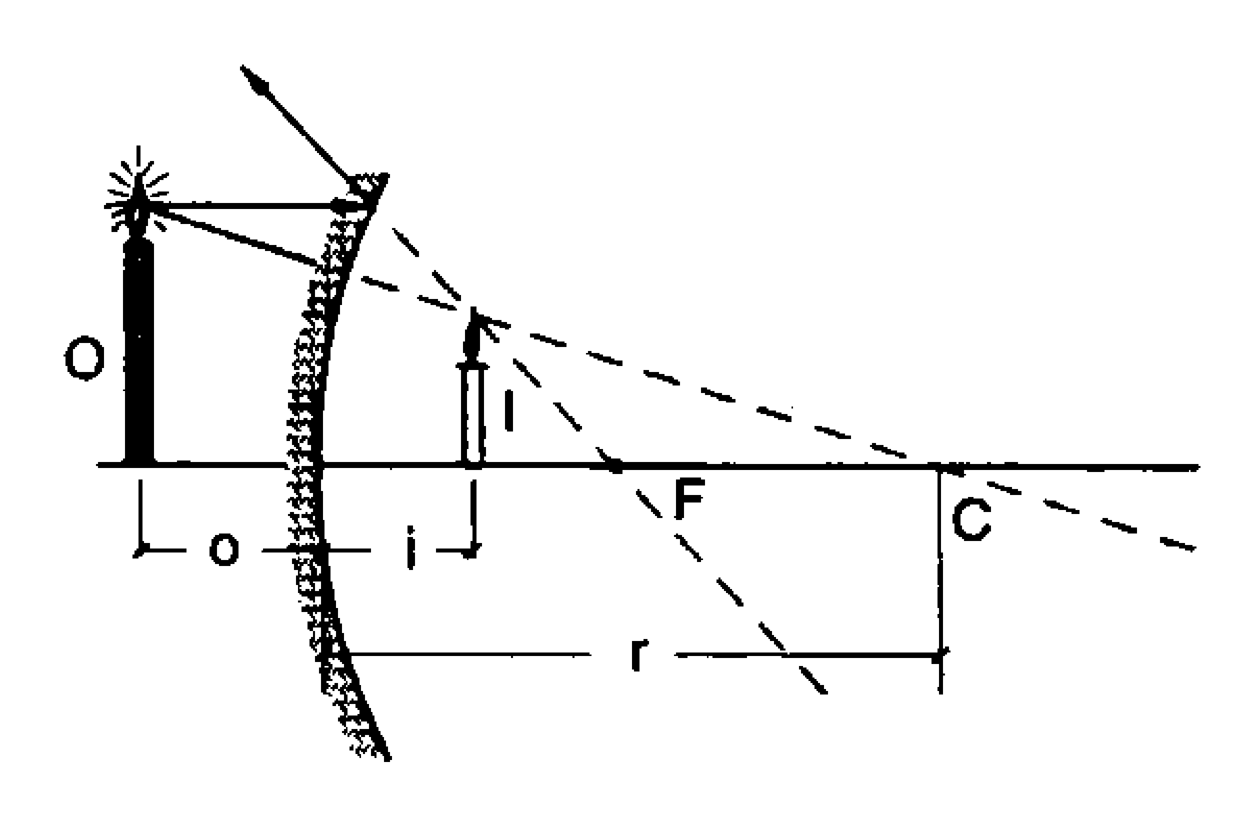
$$\frac{-I}{O} = \frac{i}{o} \quad ; \quad I = -O \cdot \frac{i}{o}$$

$$I = -15\,cm \times \frac{6\,m}{1{,}20\,m}$$

Rpta.: $I = -75$ cm. (invertida)

PROBLEMA 7. Calcular el radio y el tipo de espejo esférico, si colocado a 50 cm de un objeto da una imagen derecha y 4 veces menor que el objeto.

RESOLUCIÓN : La imagen es derecha en un espejo esférico cuando éste es convexo.



$$\frac{2}{r} = \frac{1}{i} + \frac{1}{o} \qquad (1)$$

Una imagen derecha de un espejo esférico es virtual, por lo tanto:

$$\frac{I}{i} = \frac{O}{o} \quad ; \quad i = -o \cdot \frac{I}{O} \; ;$$

pero: $O = 4 \cdot I$, luego sust. valores:

$$i = -50\,cm \cdot \frac{I}{4 \cdot I} = -12{,}5\,cm$$

En (1): $\frac{2}{r} = \frac{1}{-12{,}5} + \frac{1}{50}$

Rpta.: $r = -33{,}33$ cm (espejo convexo)

PROBLEMA 8. Calcular el radio de curvatura de un espejo cóncavo para que dé imágenes derechas y triples que el objeto, cuando éste se halle colocado a 30 cm de distancia del espejo.

RESOLUCIÓN :

Por datos se deduce que el objeto está entre el vértice y el foco.

Fórmula: $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$ (1)

$R = 2f$ (2)

Por datos:

$A = \frac{i}{o} = -\frac{i}{o} = 3$, pero: $i = -3.o$ (3)

y: $o = 30$ cm (4)

Sustituyendo (4) en (3):

$i = -90$ cm (5)

(5) y (4) en (1):

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{30} - \frac{1}{90} \qquad \frac{1}{f} = \frac{2}{90}$$

$\therefore \; f = 45$ cm

Reemplazando en (2): $R = 90$ cm

PROBLEMA 9. Un clavo de 4 cm de longitud se coloca a 2 cm de un espejo cóncavo cuyo radio es 10 cm. Si el clavo está colocado en forma perpendicular al eje principal, indicar si la imagen es virtual, real, derecha, invertida, etc. El tamaño y además la distancia de la imagen al espejo.

RESOLUCIÓN : $O = 4$ cm

$R = 10$ cm $\qquad o = 2$ cm

I) $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$ (1)

$$f = \frac{R}{2} = 5\text{ cm} \qquad (2)$$

Reemplazando valores en (1):

$$\frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{i} \qquad \frac{1}{i} = \frac{1}{5} - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{i} = -\frac{3}{10}$$

$$\therefore \qquad i = -3{,}33\text{ cm}$$

II) $A = \frac{I}{O} = -\frac{i}{o} \Rightarrow I = -\frac{i}{o}O \quad (3)$

Reemplazando valores en (3):

$$\therefore \qquad I = -6{,}66\text{ cm} \qquad (4)$$

* Para i (-): Imagen { Virtual, Derecha, Detrás del espejo

PROBLEMA 10. Dada la distancia focal "f" de un espejo esférico y el aumento "M", demostrar que las posiciones del objeto y de la imagen son:

$$o = \frac{f(M-1)}{M} \quad y \quad i = -f(M-1)$$

RESOLUCIÓN : Sabemos por dato que:

$$A = -\frac{i}{o} = M \quad \therefore \quad i = -Mo \qquad (1)$$

Por otra parte: $\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \qquad (2)$

Reemp. (1) en (2) y despejando o:

$$o = \frac{f(M-1)}{M}$$

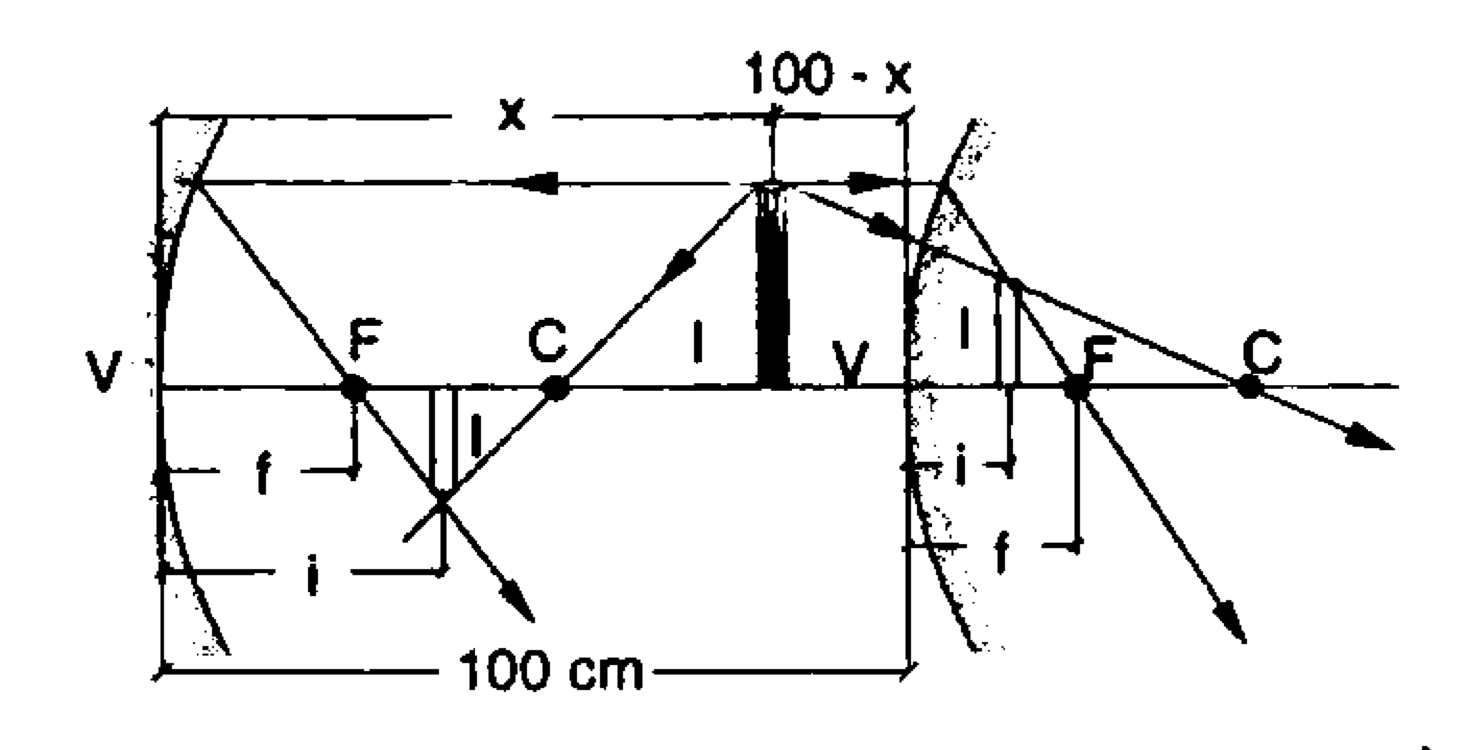
Sustituyendo en (1):

$$i = -f(M-1) \qquad \text{L.q.q.d.}$$

PROBLEMA 11. Un espejo convexo y otro cóncavo de igual distancia focal f = 36 cm, están uno frente al otro, de tal manera que coincidan sus ejes, y la distancia entre los espejos es d = 100 cm. ¿A qué distancia "x" del espejo cóncavo habrá que colocar un espejo de altura "h" para que ambas imágenes tengan igual tamaño?

RESOLUCIÓN :

De la figura se tiene:



En el espejo cóncavo:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \qquad \text{(fórmula)}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{x} + \frac{1}{i} \Rightarrow \frac{1}{i} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x}$$

$$\therefore \qquad i = \frac{f.x}{(x-f)} \qquad (1)$$

Aumento: $A = -\frac{i}{o}$ (fórmula)

$$A = -\frac{i}{x} \qquad (2)$$

En el espejo convexo:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \qquad \text{(fórmula)}$$

$$\frac{1}{-f} = \frac{1}{100-x} + \frac{1}{i'} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{i'} = -\frac{1}{f} - \frac{1}{100-x}$$

$$i' = \frac{f(100-x)}{(x-100-f)} \qquad (3)$$

Aumento: $A = \frac{i'}{o'}$ (fórmula)

$$A = \frac{i'}{100-x} \qquad (4)$$

Por enunciado (2) = (4) $\therefore$

$$-\frac{i}{x} = \frac{i'}{100-x} \Rightarrow -\frac{1}{i'} = \frac{x}{100-x} \qquad (5)$$

Dividiendo (1) entre (3):

http://librosysolucionarios.net

$$\frac{i}{i'} = \frac{x(x - 100 - f)}{(x - f)(100 - x)} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) entre (5):

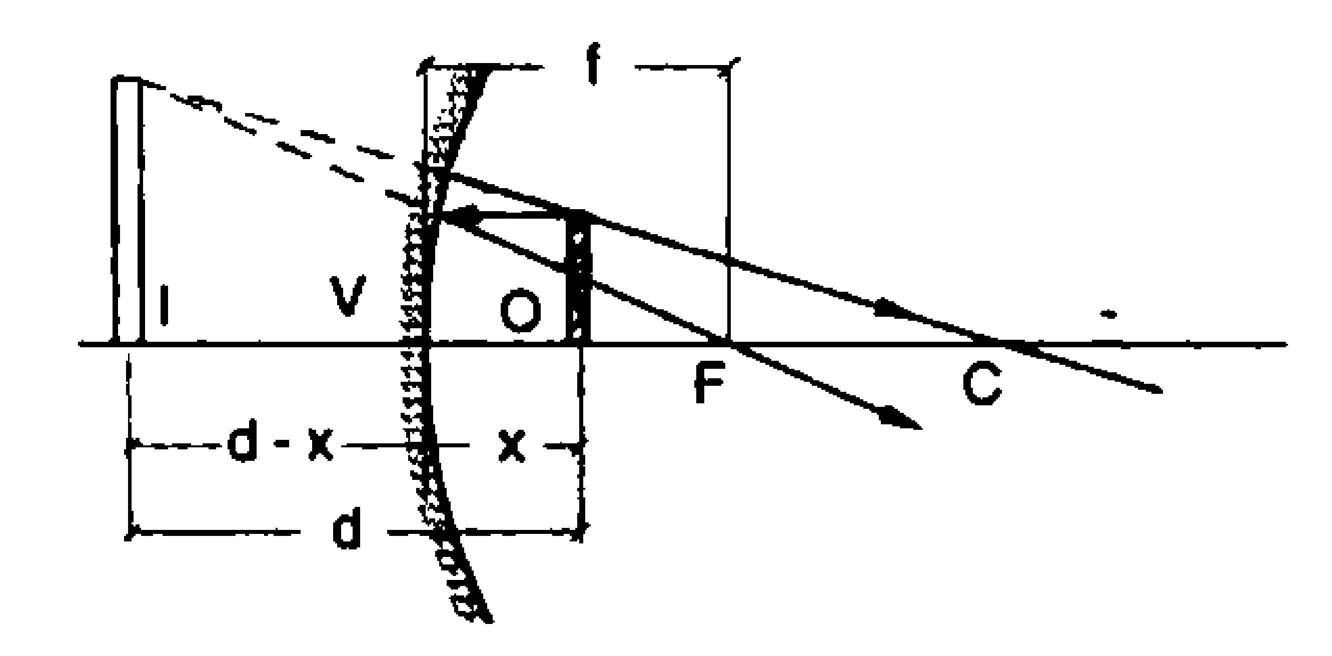
$$-\frac{x(x - 100 - f)}{(x - f)(100 - x)} = \frac{x}{(100 - x)}$$

$$-x + 100 + f = x - f \qquad 2x = 100 + 2f$$

$$x = 50 + f \quad ; \quad \text{Por dato: } f = 3C$$

$$\therefore \qquad x = 86 \text{ cm}$$

PROBLEMA 12. Un espejo cóncavo para afeitarse, tiene una distancia focal de 15 cm. Hallar la distancia óptica de una persona al espejo si la distancia de visión nítida es de 25 cm. ¿Cuál es el aumento?



RESOLUCIÓN: $d = 25$ cm

$i = -(25 - x) \quad o = x$

Por fórmula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \quad \text{o sea:} \quad \frac{1}{15} = \frac{1}{x} - \frac{1}{25 - x}$$

Efectuando y simplificando:

$$x(25 - x) = 15(25 - x) - 15$$

$$x^2 - 55x + 375 = 0$$

De donde:

$$x_1 = 47{,}02 \text{ cm} ; \quad x_2 = 7{,}97 \text{ cm}$$

Como "x" debe ser menor que 25, se acepta el valor de x_2 de tal manera que la distancia óptica es:

$$x = 7{,}97 \text{ cm}$$

El aumento está dado por:

$$A = -\frac{i}{o} \quad ; \text{ sustituyendo los datos:}$$

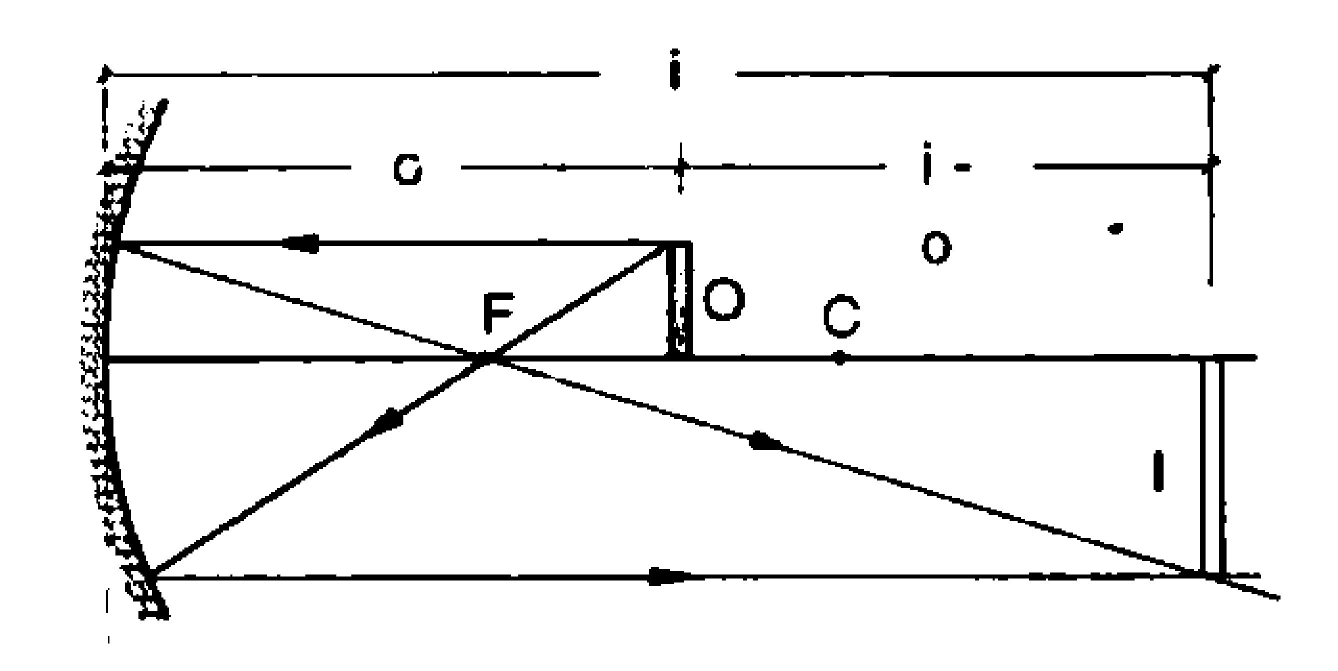
$$A = -\frac{-(d - x)}{x} = \frac{d - x}{x} = \frac{17{,}03}{7{,}97}$$

$$A = 2{,}1$$

PROBLEMA 13. Un espejo cóncavo produce una imagen real invertida tres veces mayor que el objeto y a una distancia de 28 cm del objeto. Hallar la distancia focal del espejo.

RESOLUCIÓN : Por ser la imagen real e invertida de acuerdo al problema:

$$A = -3 \qquad (1)$$



Por fórmula: $\quad A = -\frac{i}{o} \qquad (2)$

(1) = (2): $\quad i = 3.o \qquad (3)$

Por datos: $\quad i - o = 28 \qquad (4)$

Reemplazando (3) en (4) se tiene:

$o = 14$ cm ; sustituyendo en (4):

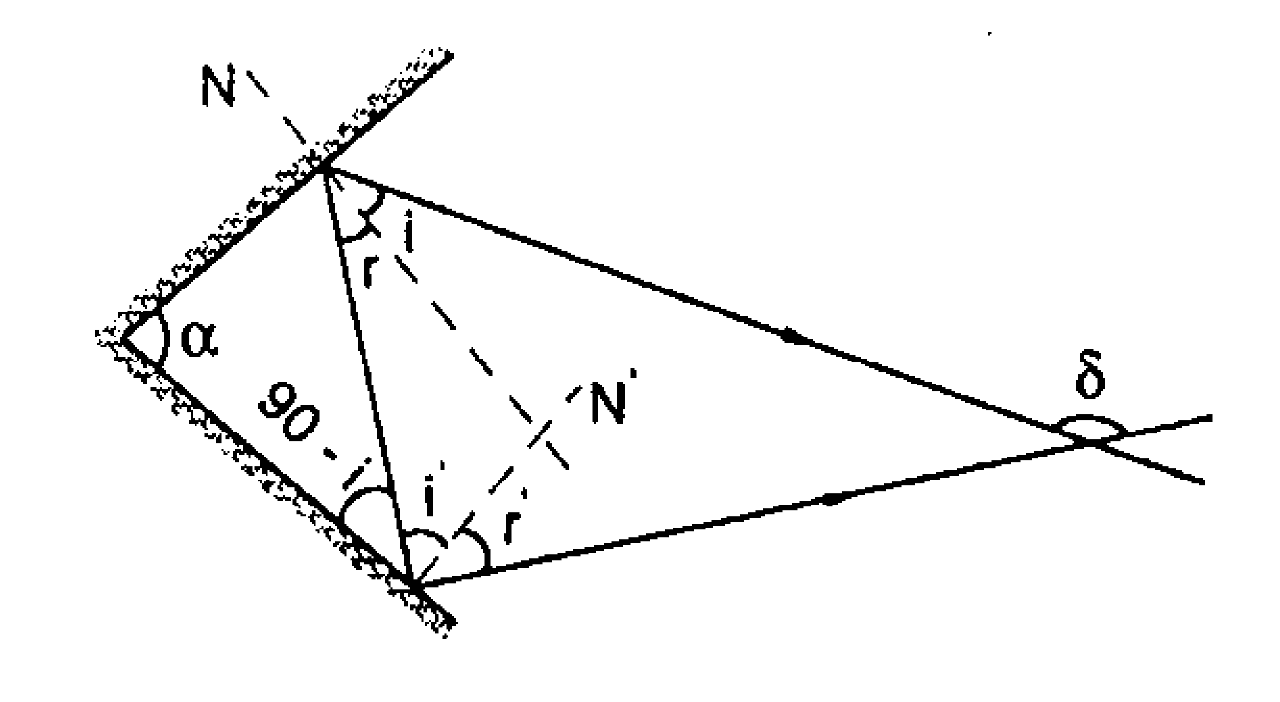
$i = 42$ cm

Por fórmula: $\quad \frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{14} + \frac{1}{42} = \frac{3}{42} + \frac{1}{42}$$

$$\therefore \quad f = 10{,}5 \text{ cm}$$

PROBLEMA 14. Probar que si dos espejos planos forman un ángulo "α", un rayo incidente es desviado un ángulo "2 α" después de reflejarse en ambos espejos.



I) $i = r \; ; \quad i' = r$

II) De la figura:

$$\delta = i + r + i' + r'$$

$$\delta = 2i + 2i' = 2(i + i')$$

$$\delta = 2(i + i') \qquad (1)$$

III) De la figura:

$$90° - r + 90° - i' + r' + \alpha = 180°$$

$$\alpha = i' + r = i' + i$$

$$\alpha = i + i' \qquad (2)$$

(2) en (1): $\delta = 2\alpha$ L.q.q.d.

PROBLEMA 15. Un espejo gira con una velocidad ángular "ω". ¿Cuál es la velocidad angular del rayo reflejado?

RESOLUCIÓN : En el problema anterior se demostró que el ángulo que se desvía el rayo reflejado es el doble del espejo ($\delta = 2\alpha$)

Por fórmula: $\omega = \dfrac{\theta}{t}$

ω_e (velocidad angular del espejo)
ω_r (velocidad angular del rayo reflejado)

$$\omega_e = \omega = \frac{\alpha}{t} \qquad (1)$$

$$\omega_r = \frac{2\alpha}{t} \qquad (2)$$

(1) en (2): $\omega_r = 2\omega_e$

PROBLEMA 16. ¿Cuántas imágenes pueden observarse en dos espejos angulares cuando el ángulo entre ellas es 24°?

RESOLUCIÓN : Sabiendo que:

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1 \; ; \text{ cuando } \frac{360°}{\alpha} \text{ par} \quad (1)$$

$$n = \frac{360°}{\alpha} \; ; \text{ cuando } \frac{360°}{\alpha} \text{ impar} \quad (2)$$

Si se divide 360° entre 24°, el número es impar, por consiguiente se utiliza la fórmula (2) :

$$n = \frac{360°}{\alpha} = \frac{360°}{24°} = 15$$

$\therefore \quad n = 15$ imágenes

PROBLEMA 17. En dos espejos angulares se observan 9 imágenes. ¿Cuáles son los valores posibles del ángulo entre los espejos?

RESOLUCIÓN: Del problema anterior:

a) Por fórmula (1) :

$$n = \frac{360°}{\alpha} - 1 \; ; \quad 9 = \frac{360°}{\alpha} - 1$$

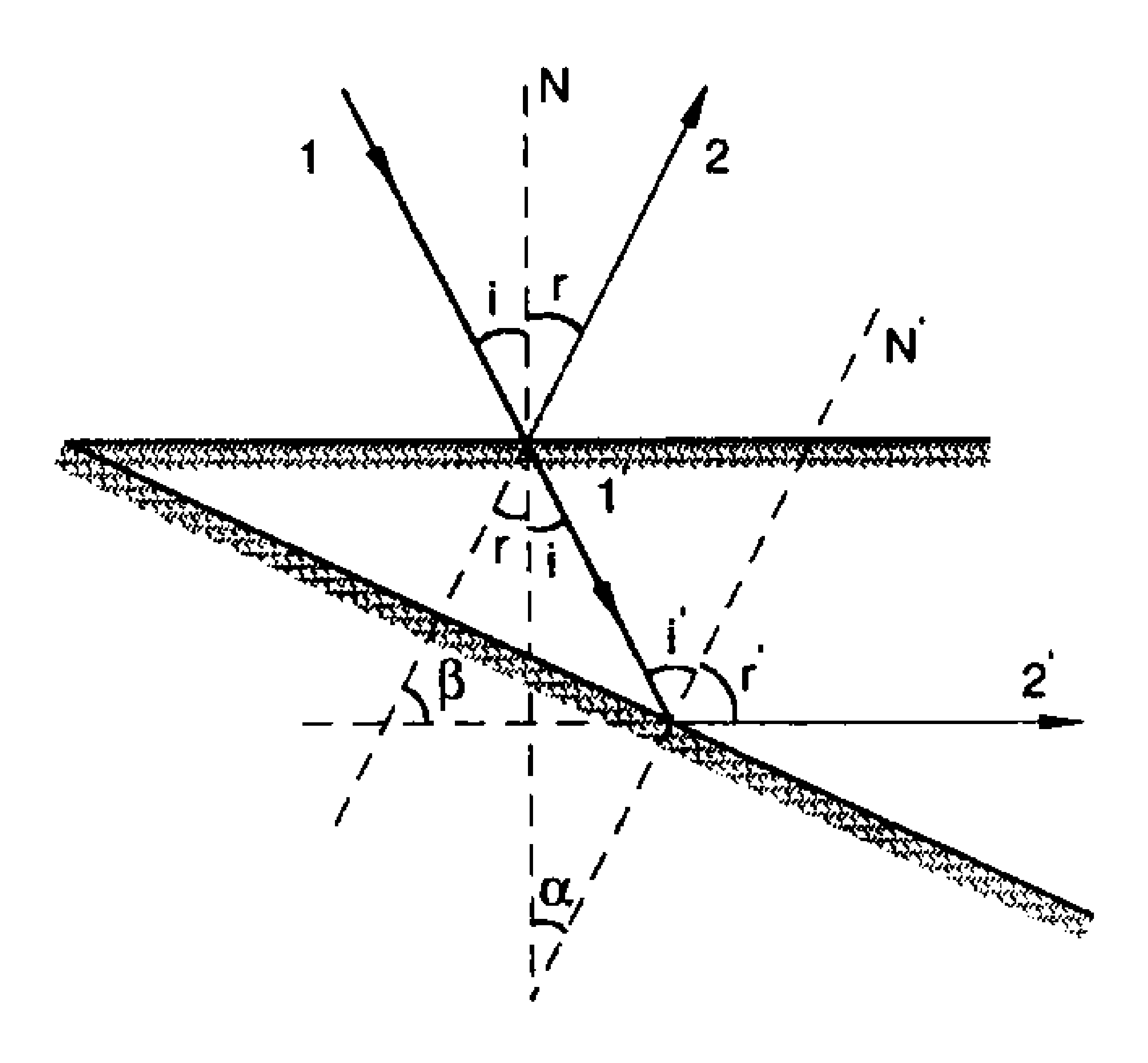
$\therefore \quad \alpha = 36°$

a) Por fórmula (2) :

$$n = \frac{360°}{\alpha'} \; ; \quad 9 = \frac{360°}{\alpha'}$$

$\therefore \quad \alpha' = 40°$

PROBLEMA 18. Demostrar que cuando se rota un espejo plano en un ángulo (α), el rayo reflejado rota un ángulo doble, es decir $\beta = 2\alpha$



RESOLUCIÓN : Si el espejo gira un ángulo "α" la normal también. Ver figura

I) $i = r \; ; \; i' = r'$

II) De la figura. (En un triángulo la suma de los ángulo interiores no adyacentes es igual exterior).

$$\beta + r + i = i' + r'$$

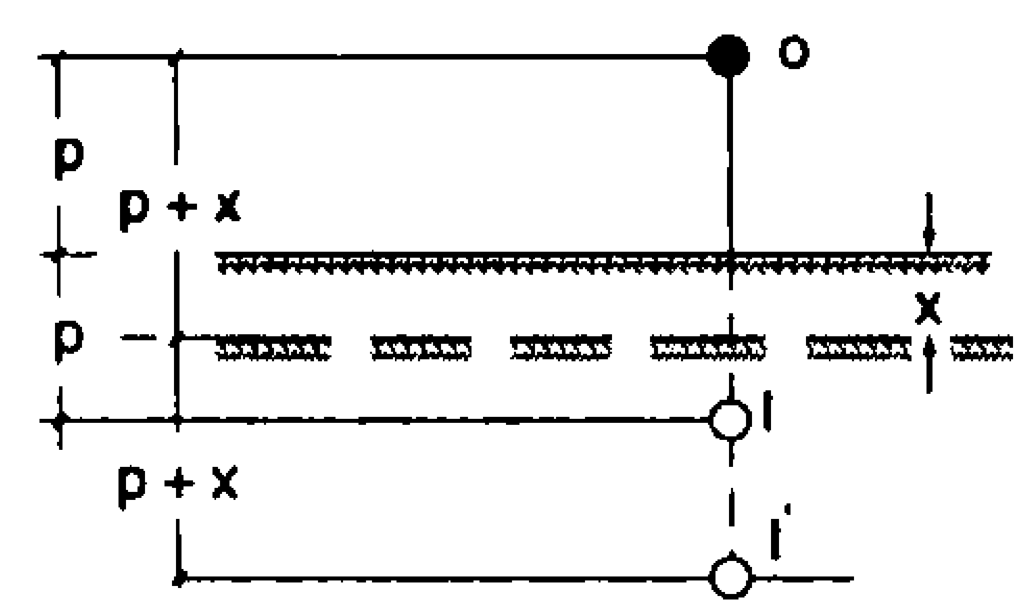
$$\beta = 2(i' - i) \qquad (1)$$

III) De la figura: $\alpha + i = i'$

$$\therefore \qquad \alpha = i' - i \qquad (2)$$

(2) en (1): $\beta = 2\alpha$ L.q.q.d.

PROBLEMA 19. Demostrar que si se desplaza un espejo plano a sí mismo una distancia "x" según la normal, la imagen se mueve una distancia "2 x".



RESOLUCIÓN : i) De la figura:

$$O I = 2p$$

$$O I' = 2p + 2x$$

$$O I' - O I = 2p + 2x - 2p$$

$$\therefore \quad O I' - O I = 2x$$

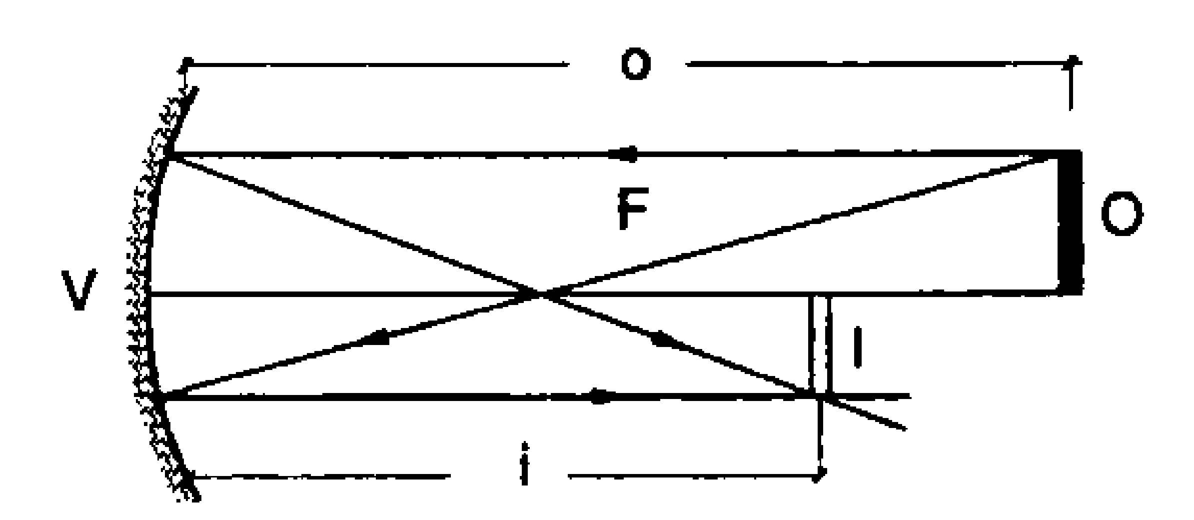
* O I' - O I: Desplazamiento de la imagen. L.q.q.d.

PROBLEMA 20. Si x_1 y x_2 son las distancias del objeto y su imagen, medidas desde el foco de un espejo esférico, demostrar que:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \qquad \text{da:}$$

$$x_1 . x_2 = f^2$$

Esto se denomina la Ecuación de Newton. ¿Puede Ud. concluir entonces que el objeto y su imagen están siempre del mismo lado del foco?



RESOLUCIÓN : Por datos:

$$o - f = x_1 \qquad \therefore \qquad o = f + x_1$$

$$i - f = x_2 \qquad \therefore \qquad i = f + x_2$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{o} + \frac{1}{i} \; ; \quad \text{sust. datos:}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f + x_1} + \frac{1}{f + x_2}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{2f + x_1 + x_2}{f^2 + f(x_1 + x_2) + x_2 x_1}$$

$$f_2^2 + f(x_1 + x_2) + x_2 x_1 = 2f^2 + f(x_1 + x_2)$$

$$\therefore \qquad f^2 = x_2 . x_1$$

Que es lo que queríamos demostrar.

Como el producto $x_1 . x_2$ siempre es positivo, tanto el objeto como su imagen deben estar ubicados ya sea hacia la derecha o izquierda del foco.

Si se grafica las diversas posiciones del objeto frente a un espejo esférico cóncavo o convexo, se nota que objeto e imagen están ubicados a la derecha e izquierda del foco y si se miden las distancias a la derecha: x_1 y x_2 son positivos y a la izquierda x_1 y x_2 negativos obteniéndose siempre positivo el producto de: x_1 con x_2

PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un objeto se ubica a 80 cm del vértice de espejo cóncavo de 60 cm de radio. Calcular la distancia imagen.

Rpta.: 48 cm

2. Un objeto se coloca a 30 cm de un espejo convexo cuya distancia focal es 20 cm. ¿A qué distancia del objeto se ubica la imagen?

Rpta.: 42 cm

http://librosysolucionarios.net

3. Se tiene un espejo cóncavo de 80 cm de radio de curvatura. ¿A qué distancia del espejo se debe colocar el objeto para que su imagen sea real y se ubique a 60 cm del espejo? El objeto tiene 40 cm de altura.

Rpta.: 42 cm

4. Un objeto es ubicado frente a un espejo esférico obteniéndose de esta manera una imagen virtual y de altura triple, si la distancia entre el objeto y la imagen es 40 cm. Calcular la distancia focal del espejo.

Rpta.: 15 cm

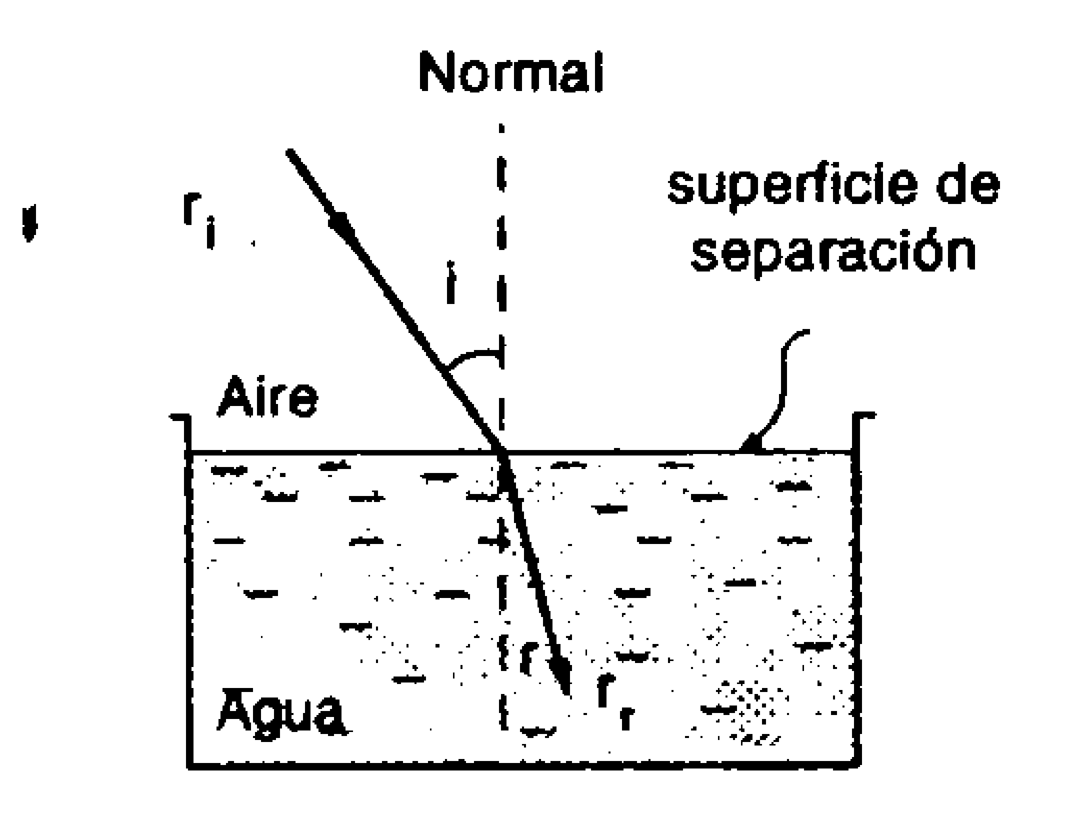
5. Construir y determinar las características de la imagen formada por un espejo cóncavo si el objeto se ubica a una distancia "d" del vértice del espejo. Siendo "f" la distancia focal, analice los siguientes casos:

a) $d > 2f$ d) $d = f$
b) $d = 2f$ e) $d < f$
c) $f < d < 2f$

REFRACCIÓN DE LA LUZ

Es el fenómeno físico que consiste en el cambio de dirección que experimenta un rayo luminoso al incidir en la superficie de separación, cuando pasa de un medio a otro de densidad distinta, debido a que el rayo luminoso cambia su velocidad.

La refracción se produce cuando un rayo luminoso incide en forma oblicua a la superficie de separación entre dos medios distintos.



r_i = rayo incidente

r_r = rayo reflejado

INDICE DE REFRACCIÓN ABSOLUTO

Es la relación entre la velocidad de la luz en el vacío y la velocidad de la luz en otro medio.

$$n = \frac{C}{V}$$

n : Indice de refracción
C : Velocidad de la luz en el vacío 300 000 km/s
V : Velocidad de la luz en el otro medio

PROBLEMA 1. Calcular la velocidad de la luz en el agua sabiendo que $n = 1{,}333$

RESOLUCIÓN: $n = \frac{C}{V}$ de donde:

$$V = \frac{C}{n} = \frac{300\,000 \text{ km/s}}{1{,}333}$$

Rpta.: $V = 225\,000$ km/s

INDICE DE REFRACCIÓN RELATIVO

Es la relación entre la velocidad de la luz en un medio y la velocidad de la luz en otro medio.

$$n_{A:B} = \frac{V_A}{V_B}$$

LEYES DE LA REFRACCIÓN

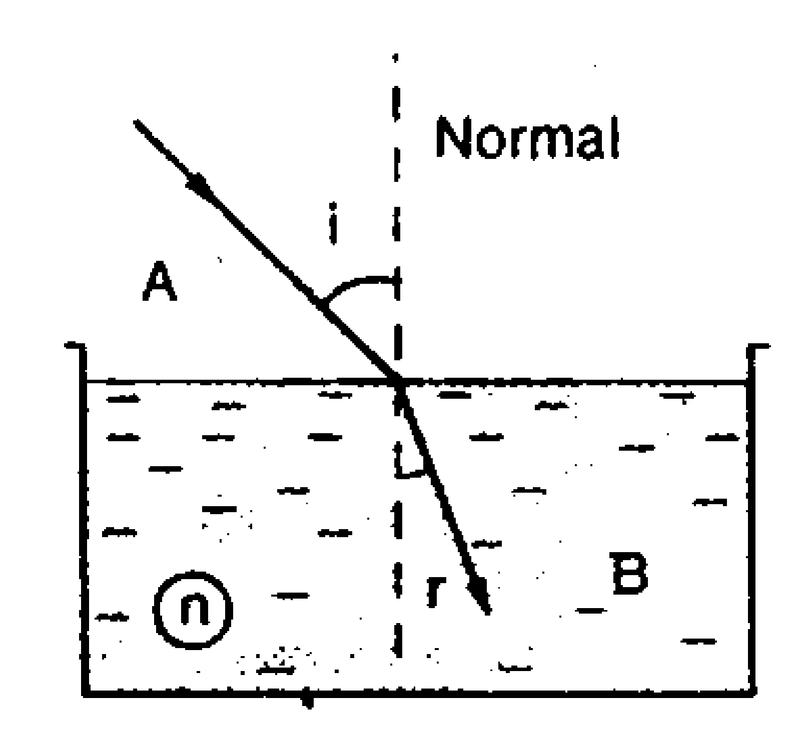
1ra. Ley (Ley cualitativa)

http://librosysolucionarios.net

El rayo incidente, la normal y el rayo refractado están en el mismo plano, llamado plano de incidencia.

2da. Ley o de Snell (Ley cuantitativa)

"La relación de' seno del ángulo de incidencia y el seno del ángulo de refracción es constante e igual al índice de refracción relativo".



$$\frac{\text{sen}\ \hat{i}}{\text{sen}\ \hat{r}} = \frac{n_B}{n_A} = n$$

Donde "n" es el índice de refracción del medio B con respecto al medio A.

NOTA : Cuando el rayo incidente pasa del vacío o el aire, a otro medio, el "índice de refracción" se llama "índice de refracción absoluto".

PROBLEMA 2. Un rayo de luz del ai-re incide sobre una superficie de vidrio, con un ángulo de 60°, para el cual el índice de refracción es 1,6. ¿Cuál es el ángulo de refracción de la luz en el vidrio?

RESOLUCIÓN: $\hat{i} = 60°$

$\hat{r} = ?$ $n = 1,6$

$$\frac{\text{sen}\ \hat{i}}{\text{sen}\ \hat{r}} = n \quad \text{De donde:}$$

$$\text{sen}\ \hat{r} = \frac{\text{sen}\ \hat{i}}{n} = \frac{\text{sen}\ 60°}{1,6}$$

$$\text{sen}\ \hat{r} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{1,6} = 0,54$$

$$\hat{r} = \text{arco sen}\ 0,54$$

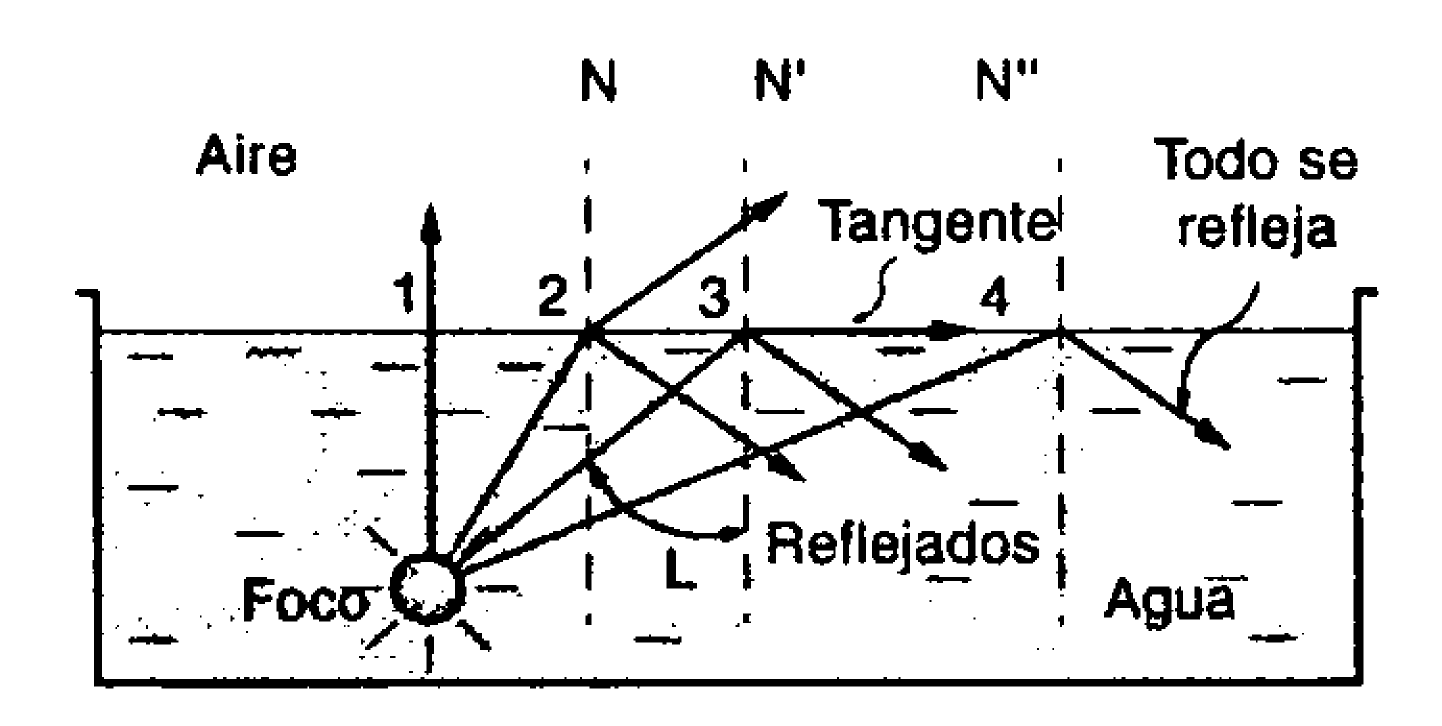
$$\hat{r} = 32°\ 41'\ 0,1''$$

ÁNGULO LIMITE Y REFLEXIÓN TOTAL

Cuando un rayo luminoso pasa de un medio más tenso a otro menos denso, parte de la luz se refleja y parte de la luz se refracta; a medida que el ángulo de incidencia va aumentando, el ángulo de refracción también va aumentando, hasta que llega un momento en que los rayos se refractan tangentes a la superficie de separación, haciendo un ángulo de 90° con la normal, en ese momento el ángulo de incidencia tiene un valor y se llama "ángulo limite".

Cualquier rayo que tenga un ángulo de incidencia mayor que el ángulo límite ya no se refracta, es decir ya no pasa al otro medio, todo se refleja, La figura adjunta muestra este fenómeno.

Sea que el rayo de luz sale del agua.



El rayo 1 pasa de frente, no se refracta ni se refleja.

El rayo 2 se refracta y se refleja.

El rayo 3 se refleja a 90° y se refracta.

El rayo 4 todo se refleja porque el ángulo de incidencia es mayor que el ángulo límite.

L, ángulo límite.

CÁLCULO DEL ÁNGULO LÍMITE

El rayo "3" tiene un ángulo límite "L" luego se refleja con 90°; "n" es el índice de refracción del líquido, luego por Snell:

http://librosysolucionarios.net

$$\frac{\text{sen } L}{\text{sen } 90°} = \frac{1}{n}\text{; pero el sen } 90° = 1:$$

$$\therefore \quad \boxed{\text{sen } L = \frac{1}{n}}$$

NOTA: Sólo se produce o presenta "reflexión total" cuando el rayo de luz incide desde un medio más denso a otro menos denso y cuando:

$$\text{ángulo } \hat{i} = \text{ángulo } \hat{L}$$

PROBLEMA 3. Calcular el ángulo límite para el medio vidrio - aire. El índice de refracción del vidrio es 1,414.

RESOLUCIÓN:

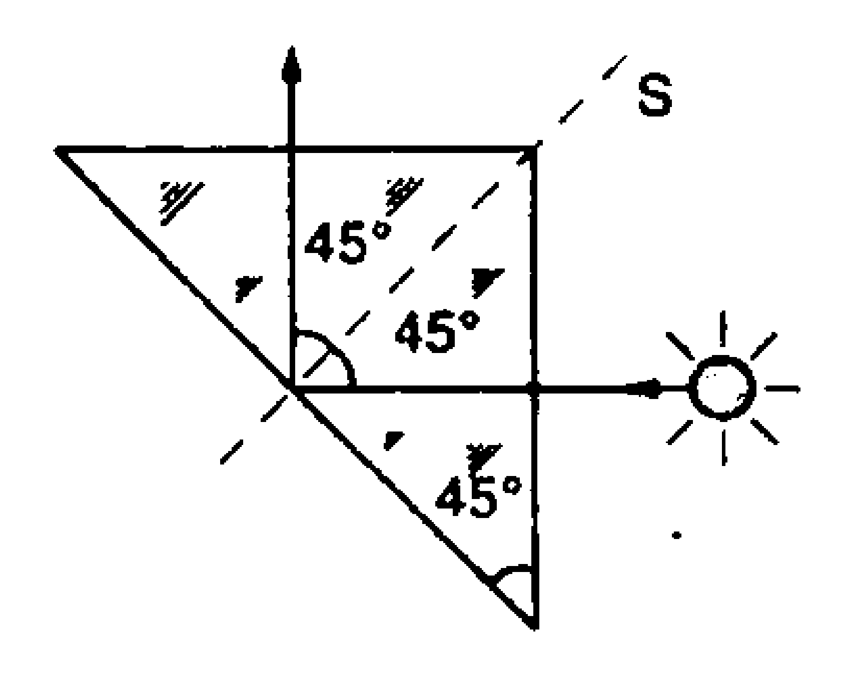
$$\text{sen } L = \frac{1}{n} = \frac{1}{1{,}414} = 0{,}7072$$

$$L = \text{arco sen } 0{,}7072 \Rightarrow L = 45°$$

PRISMA DE REFLEXIÓN TOTAL

Para todo valor superior al ángulo límite, el rayo se refleja totalmente, regresando al medio de origen, esto se llama "reflexión total".

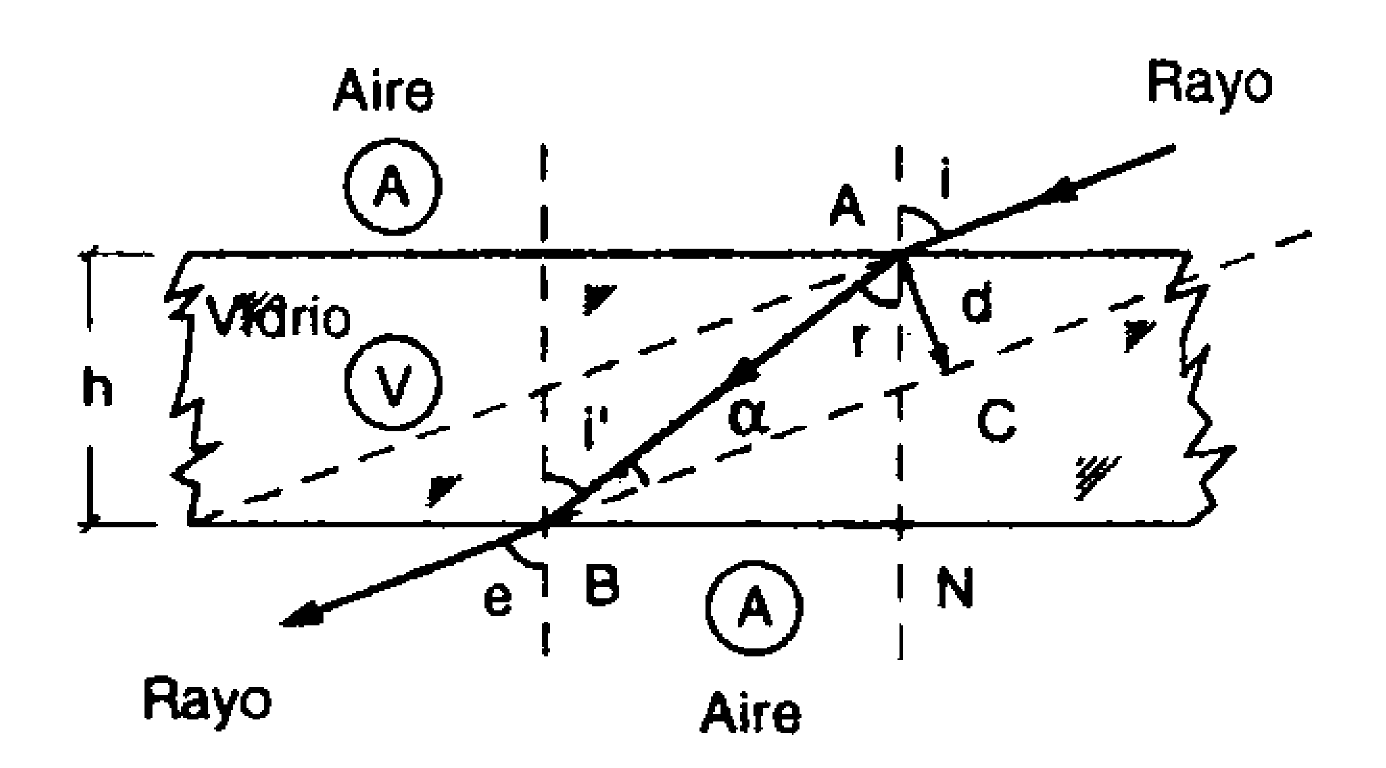
Para el medio vidrio - aire el ángulo límite vale 45°, de manera que, si en un triángulo de vidrio rectángulo, isósceles se hace incidir un rayo en uno de sus catetos en forma perpendicular, pasa de frente y llega a la hipotenusa con un ángulo de incidencia 45°, se refleja igualmente con un ángulo de 45°.



Esto es lo que se llama "prisma de reflexión total"

LÁMINA DE CARAS PARALELAS

Es, por ejemplo, el vidrio de una ventana. ¿Qué sucede con los rayos de luz que entran en la casa a través del vidrio?



Sea la figura mostrada un pedazo de vidrio de espesor "h", que es atravesado por un rayo luminoso que al atravesar al vidrio se desvía una distancia "d".

Primera refracción:

$$\text{1ra refracción: } \frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = n_{A/V} \quad (1)$$

$$\text{2da refracción: } \frac{\text{sen } \hat{i}'}{\text{sen } \hat{e}} = n_{V/A} \quad (2)$$

$$\text{pero: } n_{A/V} = \frac{1}{n_{V/A}}\text{, luego:}$$

$$\frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}} = \frac{\text{sen } \hat{e}}{\text{sen } \hat{i}'}$$

Pero en la figura: $\hat{r} = \hat{i}$, por alternos internos, luego sen $\hat{r}$ = sen $\hat{i}'$, quedando:

$$\text{sen } \hat{i} = \text{sen } \hat{e}$$

$$\text{en consecuencia: } \quad \hat{r} = \hat{e}$$

$\hat{r}$ = ángulo, de incidencia

$\hat{e}$ = ángulo de emergencia

Lo que quiere decir que un rayo incidente en una lámina de caras paralelas se desplaza paralelamente una distancia "d" y no cambia de dirección al cruzar la lámina.

http://librosysolucionarios.net

CÁLCULO DEL DESPLAZAMIENTO "d" DEL RAYO

En el triángulo rectángulo ABC:

$$d = AB \operatorname{sen} \alpha \quad (1)$$

En el triángulo rectángulo ANB:

$$AB = \frac{h}{\cos r}$$

observe que: $\alpha = \hat{i} - \hat{r}$; en (1):

$$\therefore \quad d = \frac{h}{\cos r} \operatorname{sen} (\hat{i} - \hat{r})$$

PROBLEMA 4. En una luna cuyo espesor es 0,1 cm se tiene:

$\hat{i} = 60°$, $\hat{r} = 30°$. ¿Cuánto se desvía el rayo luminoso?

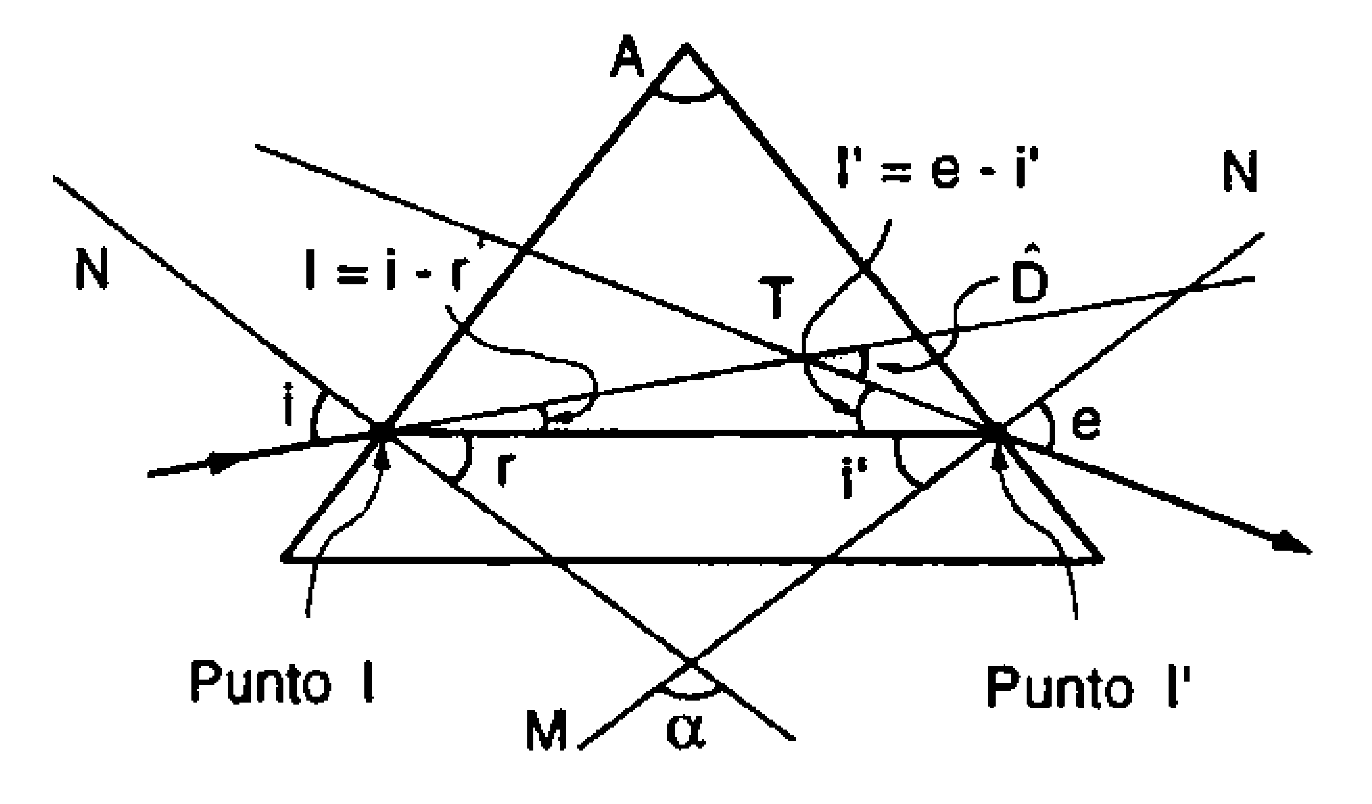
RESOLUCIÓN : $d = \frac{0{,}1}{\cos 30°} \operatorname{sen} (60° - 30°)$

$$d = 0{,}058 \text{ cm}$$

PRISMA ÓPTICO

Son dos láminas que se cortan, o es un cuerpo transparente limitado por dos caras que se cortan; estos constituye un "prisma óptico", no tiene que ser necesariamente un prisma geométrico. La arista "A" que forman las caras se llaman "arista refringente" y el ángulo diedro que forman las mismas caras se llaman "ángulo refringente" o "ángulo del prisma".

Se tiene que: $\frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = \frac{\operatorname{sen} \hat{e}}{\operatorname{sen} \hat{i}'} = n$



A = ángulo refringente

CÁLCULO DEL ÁNGULO DE DESVIACIÓN "D"

Los ángulos A y a son suplementarios por tener sus lados respectivamente perpendiculares, el ángulo A agudo y "α" obtuso, luego:

$$A + \alpha = 180° \qquad (I)$$

Por otro lado en el triángulo: I I' T :

$$I = \hat{i} - \hat{r} \quad ; \quad I' = \hat{e} - \hat{i}'$$

D, por ser un ángulo externo al triángulo I I'T, es igual a la suma de los interiores no adyacentes.

Es decir: $D = I + I'$ o sea:

$$D = (\hat{i} - \hat{r}) + (\hat{e} - \hat{i}') \quad ó:$$

$$D = \hat{i} + \hat{e} - (\hat{r} + \hat{i}') \qquad (II)$$

Pero en el triángulo I I' M:

$$(\hat{r} + \hat{i}') + \alpha = 180° \qquad (III)$$

Comparando (I) con (III) :

$$\hat{r} + \hat{i} = A \quad ; \quad \text{en (II)}$$

$$\boxed{D = \hat{i} + \hat{e} - A}$$

Fórmula que indica que la desviación que experimenta un rayo luminoso que atraviesa un prisma, depende del "ángulo de incidencia", del "ángulo de emergencia" y del "ángulo del prisma"

PROBLEMA 5. ¿Cuál será la desviación que experimenta un rayo luminoso que incide en un prisma con 35°, emerge con 40°, si el ángulo del prisma es de 60°?

RESOLUCIÓN :

$$D = \hat{i} + \hat{e} - A$$

$$D = 35° + 40° - 60° = 15°$$

http://librosysolucionarios.net

DESVIACIÓN MÍNIMA E ÍNDICE DE REFRACCIÓN DE UN PRISMA

Se a comprobado que la desviación es mínima cuando:

$$\hat{e} = \hat{i}$$

Luego la fórmula de desviación mínima, será:

$$\boxed{D_m = 2\hat{i} - A} \qquad (I)$$

$$\therefore \quad \boxed{\hat{i} = \frac{D_m + A}{2}} \qquad (1)$$

Además se cumple que $\hat{r} = \hat{i}$ lo que quiere decir que:

$$2\hat{r} = A \Rightarrow \hat{r} = \frac{A}{2} \qquad (2)$$

Por consiguiente con (1) y (2) recordando que:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = n$$

Se tiene:

$$\boxed{\frac{\text{sen}\,\frac{D_m + A}{2}}{\text{sen}\,\frac{A}{2}} = n} \qquad (II)$$

PROBLEMA 6. ¿Cuál será el ángulo de desviación mínima de un rayo de luz que incide en un prisma de vidrio de 60° y 1,5 de índice de refracción?

RESOLUCIÓN: $A = 60°$

$D_m = ?$ $\quad n = 1,5$

$$\frac{\text{sen}\,\frac{D_m + A}{2}}{\text{sen}\,\frac{A}{2}} = n$$

$$\Rightarrow \quad \text{sen}\,\frac{D_m + A}{2} = n\,\text{sen}\,\frac{A}{2}$$

Sustituyendo valores:

$$\text{sen}\,\frac{D_m + 60°}{2} = 1,5\,\text{sen}\,\frac{60°}{2}$$

$$\text{sen}\,\frac{D_m + 60°}{2} = 0,75$$

$$\frac{D_m + 60°}{2} = 48°\,36'$$

Rpta.: $D_m = 37°\,12'$

PROBLEMA 7. El índice de refracción de un vidrio con respecto al aire es 7/4 y el índice de refracción del agua con respecto al aire es 4/3. Calcular:

a) Índice de refracción de vidrio con respecto al agua.
b) Ángulo límite entre el vidrio y el agua

RESOLUCIÓN: $n_v = \frac{7}{4}$; $n_a = \frac{4}{3}$

a) $n_{v/a} = \frac{n_b}{n_a} = \frac{\frac{7}{4}}{\frac{4}{3}} = \frac{21}{16}$

Rpta.: $n_{v/a} = 1,31$

b) $\text{sen}\,L = \frac{1}{n_{v/a}} = \frac{1}{1,31} = 0,76$

Rpta.: $L = 49°\,45'\,40''$

PROBLEMA 8. El índice de refracción del diamante es 2,42. Calcular el ángulo límite de un rayo luminoso que pasa del diamante al aire

RESOLUCIÓN: $n = 2,42$; $L = ?$

$$\text{sen}\,L = \frac{1}{n} = \frac{1}{2,42} = 0,41$$

$$L = 24°\,24'\,27''$$

PROBLEMA 9. Un rayo luminoso incide

http://librosysolucionarios.net

sobre una supercie de un vidrio con un ángulo de incidencia de 40°. Calcular los ángulos de reflexión y refracción. El índice de refracción del vidrio es 1,5.

RESOLUCIÓN: $N_v = 1{,}5$; $\hat{i} = 40°$

a) Por la primera ley de reflexión:

$$\hat{i} = \hat{r} \quad ; \quad \text{luego:} \quad \hat{r}_1 = 40°$$

b) Cálculo del ángulo de refracción:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = n$$

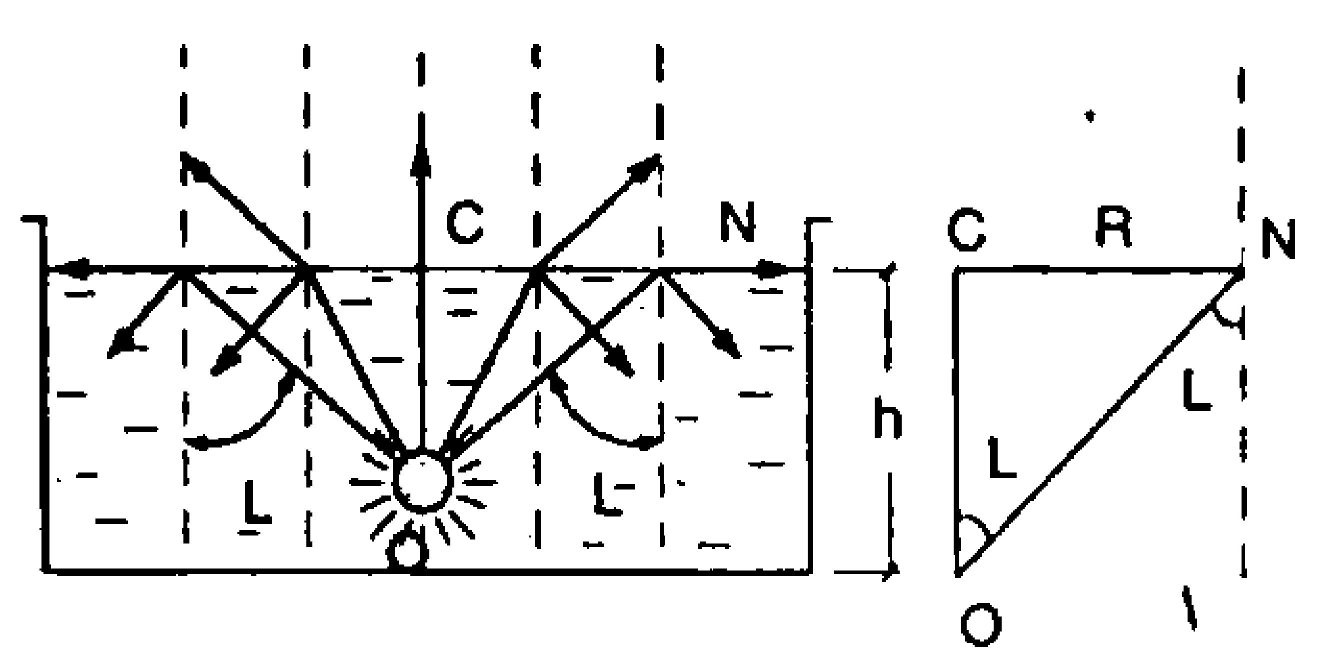
de donde: $\text{sen}\,\hat{r} = \dfrac{\text{sen}\,\hat{i}}{n}$

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{\text{sen}\,40°}{1{,}5} = \frac{0{,}64}{1{,}5} = 0{,}43$$

Rpta.: $\hat{r} = 25°\ 22'\ 26''$

PROBLEMA 10. Un punto luminoso está al fondo de un recipiente con agua, cuyo índice de refracción es 4/3, y a 50 cm de profundidad. Los rayos que se refractan forman en la superficie del agua un círculo luminoso fuera del cual los rayos se reflejan y regresan al agua. Calcular el área del círculo iluminado.

RESOLUCIÓN: $h = 50\text{ cm}$; $n = \dfrac{4}{3}$



Los rayos se reflejan y refractan hasta el momento en que el ángulo de incidencia del rayo es el ángulo límite, más allá de este ángulo todos los rayos se reflejan, regresan al agua y ya no pasan al otro medio, es decir, ya no se refractan.

Cálculo del ángulo límite:

$$\text{sen}\,L = \frac{1}{n} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\text{sen}\,L = 0{,}75$$

Cálculo del radio del círculo iluminado. En el triángulo CON:

$$CN = R = h\,.\,\text{tg}\,L \qquad (1)$$

pero: $\text{tg}\,L = \dfrac{\text{sen}\,L}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 L}}$

$$\text{tg}\,L = \frac{0{,}75}{\sqrt{1 - (0{,}75)^2}} = 1{,}134$$

Sustituyendo valores en (1):

$$R = 50\text{ cm}\,.\,1{,}134 = 56{,}70\text{ cm}$$

$$S = \pi R^2 = \pi (56{,}70)^2$$

Rpta.: $S = 10\,099{,}87\text{ cm}^2$

PROBLEMA 11. Un ángulo de desviación mínima en un prisma de 50° vale 45°, en el caso de la luz de un solo color (monocromática). Calcular el índice de refracción del prisma.

RESOLUCIÓN:

$$A = 50° \quad ; \quad D_m = 45°$$

$$n = \frac{\text{sen}\,\frac{D_m + A}{2}}{\text{sen}\,\frac{A}{2}} = \frac{\text{sen}\,\frac{45° + 50°}{2}}{\text{sen}\,\frac{50°}{2}}$$

$$n = \frac{\text{sen}\,47°\,30'}{\text{sen}\,25°} = \frac{0{,}737\,3}{0{,}422\,6}$$

Rpta.: $n = 1{,}745$

PROBLEMA 12. Un prisma tiene un ángulo refringente de 74° cuyo índice de refracción es 1,5. ¿Cuál debe ser el

ángulo de incidencia del rayo para que la desviación sea mínima?.

RESOLUCIÓN :

$A = 74°$ $\hat{i} = ?$

$n = 1{,}5$ $D_m = ?$

La desviación mínima en un prisma se produce cuando:

$$\hat{i} = \hat{e}$$

Luego: $D_m = 2\hat{i} - A$

$$D_m = 2\hat{i} - 74° \qquad (a)$$

Además: $n = \dfrac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}}$ (b)

Para que la desviación sea mínima: r = i'. lo que quiere decir que:

$$2r = A \quad \Rightarrow \quad r = \frac{A}{2}$$

En (b) : $n = \dfrac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \frac{A}{2}}$

$$1{,}5 = \frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \frac{74°}{2}}$$

$$\text{sen } \hat{i} = 1{,}5 \cdot \text{sen } 37° = 1{,}5 \cdot \frac{3}{5}$$

$$\therefore \quad \text{sen } \hat{i} = 0{,}9$$

Rpta.: $\hat{i}$ = arco sen 0,9 ó:

$\hat{i} = 64°\,09'$ (por tablas)

Usando la expresión (a)

$$D_m = 2\hat{i} - A$$

$$D_m = 2 \times 64°{,}09 - 74°$$

Rpta.: $D_m = 54°18'$

PROBLEMA 13. Con una calidad se vidrio se construye un prisma cuyo ángulo refringente A es 60°, produciendo un ángulo mínima de desviación de 30°. ¿Cuál es su índice de refracción?

RESOLUCIÓN : $A = 60°$; $D_m = 30°$

$$n = \frac{\text{sen } \frac{D_m + A}{2}}{\text{sen } \frac{A}{2}}$$

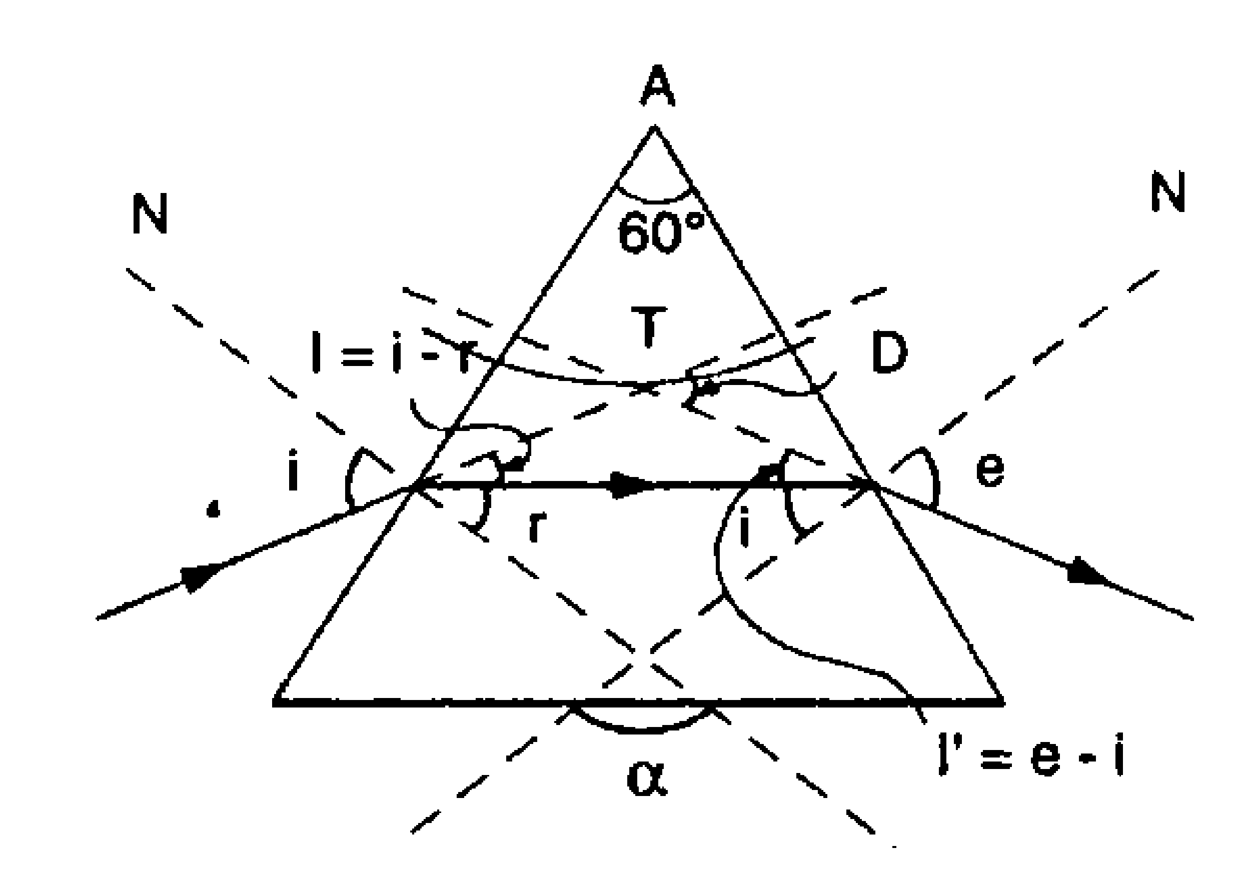
$$n = \frac{\text{sen } \frac{30° + 60°}{2}}{\text{sen } \frac{60°}{2}}$$

$$n = \frac{\text{sen } 45°}{\text{sen } 30°} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$$

Rpta.: $n = 1{,}41$

PROBLEMA 14. 24° es la desviación mínima de un rayo que incide en un prisma de 66° de ángulo refringente. Calcular:

a) ¿Cuál es el ángulo de incidencia; y
b) Cuál el índice de refracción?



RESOLUCIÓN : $D_m = 24°$ $\hat{i} = ?$

$A = 66°$ $n = ?$

a) Está probado que la desviación mínima sucede cuando $\hat{i} = \hat{e}$, de ahí:

$$D_m = 2\hat{i} - A$$

http://librosysolucionarios.net

de donde: $\hat{i} = \dfrac{D_m + A}{2} = \dfrac{24° + 66°}{2}$

Rpta.: $\hat{i} = 45°$

b) $n = \dfrac{\text{sen}\,\dfrac{D_m + A}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{A}{2}}$

$$n = \dfrac{\text{sen}\,\dfrac{24° + 66°}{2}}{\text{sen}\,\dfrac{66°}{2}} = \dfrac{\frac{\sqrt{2}}{2}}{0,54}$$

Rpta.: $n = 1,3$

PROBLEMA 15. Un rayo de luz incide sobre la superficie de separación de dos medios transparentes de índices de refracción $\sqrt{3}$ y 1 con un ángulo de 30°. Hallar el ángulo de refracción.

RESOLUCIÓN: $n_1 = \sqrt{3}$

$\hat{i} = 30°$ $\qquad n_2 = 1$

Ley de Snell: $n = \dfrac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \dfrac{n_1}{n_2}$,

$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,\hat{i} \cdot \frac{n_1}{n_2} \qquad (1)$$

$$\text{sen}\,\hat{r} = \text{sen}\,30° \cdot \frac{\sqrt{3}}{1}$$

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow r = 60°$$

IMÁGENES POR REFRACCIÓN

Considerando un objeto "O", situado en un medio de índice de refracción n_1, separado por una superficie plana de otro medio transparente, de índice de refracción n_2. Si sólo tenemos en cuenta los rayos luminosos procedentes del objeto que forman ángulos pequeños con la normal, podemos determinar distancias aparentes P_a y P_r.

De la figura (I) ó (II):

$$\text{tg}\,\hat{i} = \frac{\overline{AB}}{P_r} \quad \therefore \quad \overline{AB} = P_r . \text{tg}\,\hat{i} \qquad (1)$$

$$\text{tg}\,\hat{r} = \frac{\overline{AB}}{P_a} \quad \therefore \quad \overline{AB} = P_a . \text{tg}\,\hat{r} \qquad (2)$$

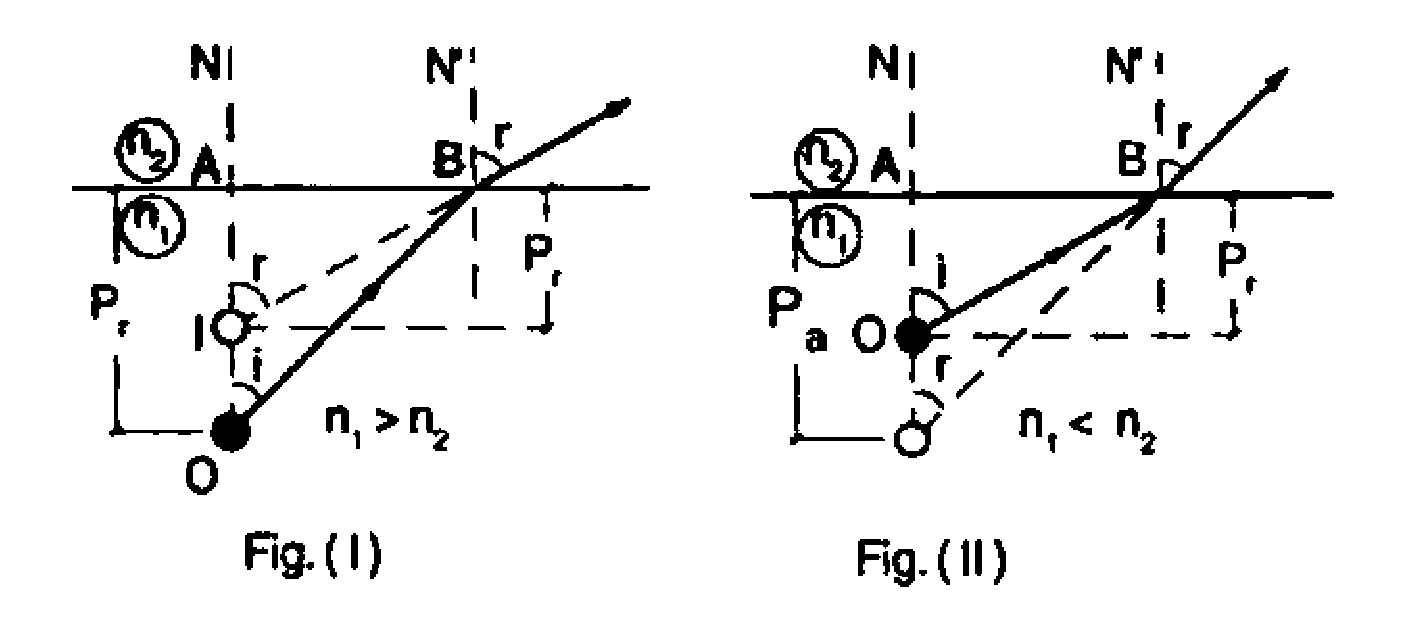


Fig. (I) Fig. (II)

Igualando (1) y (2):

$$P_r . \text{tg}\,\hat{i} = P_a . \text{tg}\,\hat{r}$$

$$\therefore \quad \frac{\text{tg}\,\hat{i}}{\text{tg}\,\hat{r}} = \frac{P_a}{P_r} \qquad (3)$$

Cuando los ángulos $\hat{i}$ y $\hat{r}$ son muy pequeños:

$$\text{sen}\,\hat{i} = \text{tg}\,\hat{i} \; ; \; \text{sen}\,\hat{r} = \text{tg}\,\hat{r}$$

Podemos expresar (3) de la siguiente forma:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{P_a}{P_r} \qquad (4)$$

Por la ley de Snell:

$$\frac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (5)$$

(4) = (5): $\boxed{\dfrac{P_a}{P_r} = \dfrac{n_2}{n_1}}$

Sí $n_1 > n_2$, la imagen está más cerca de la superficie que el objeto (Fig. I). Pero si $n_1 < n_2$, la imagen está más lejos de la superficie que el objeto (Fig. II). (P_a = profundidad aparente, P_r = profundidad real).

http://librosysolucionarios.net

PROBLEMA 16. Un pez está a una profundidad de 1,5 m ¿Cuál es su profundidad aparente? Para el agua salada $n_1 = 1{,}4$.

RESOLUCIÓN : Por fórmula:

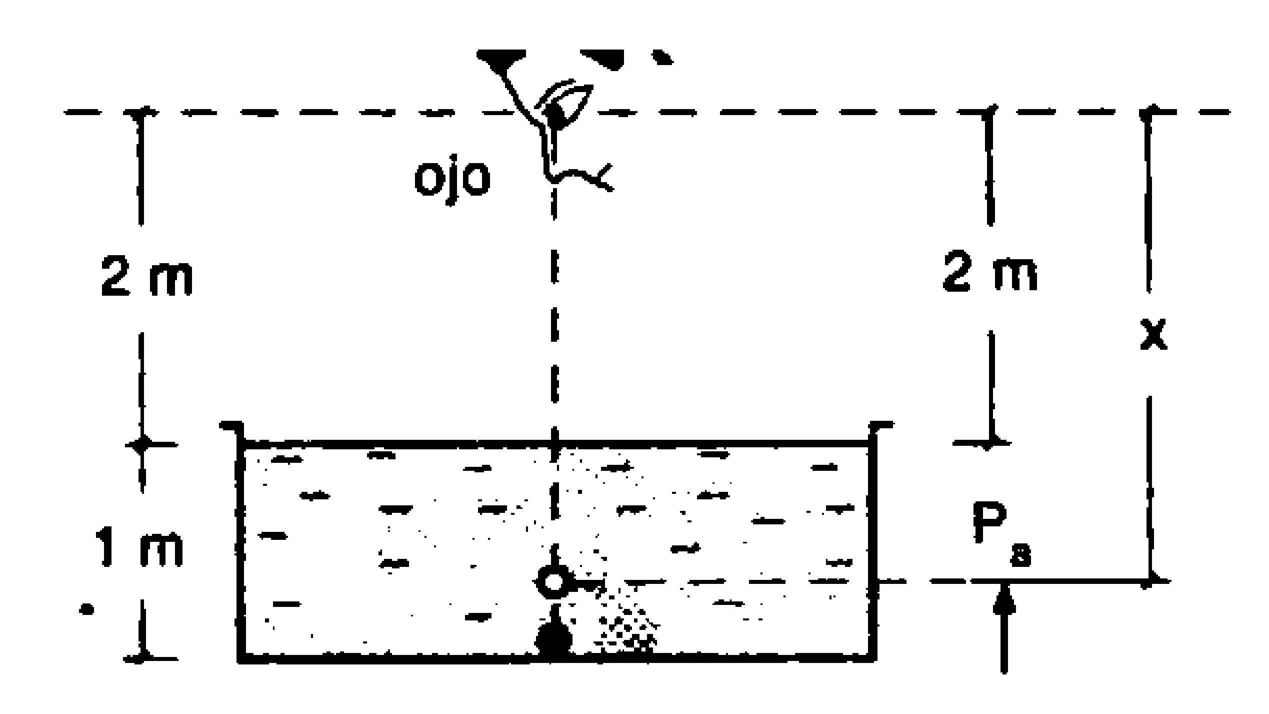
$$\frac{P_a}{P_r} = \frac{n_2}{n_1} \qquad (I)$$

$$n_1 = 1{,}4 \quad ; \quad n_2 = 1$$

$$P_r = 1{,}5\text{ m}$$

En (I): $P_a = 1{,}07\text{ m}$

PROBLEMA 17. Un observador que se encuentra en la misma vertical de la posición de una moneda ubicada en el fondo de un recipiente de 1 m de altura, completamente lleno de agua. La distancia entre el observador y el nivel de separación aire - agua es 2 m. Hallar la distancia aparente de la moneda para el observador.



RESOLUCIÓN:

$$n_1 = n_{agua} = \frac{4}{3} \quad y \quad n_2 = n_{aire} = 1$$

I) Para el observador:

$$x = 2 + P_a \qquad (1)$$

x = distancia aparente

II) $\dfrac{P_a}{P_r} = \dfrac{n_2}{n_1} \Rightarrow P_a = P_r \cdot \dfrac{n_2}{n_1}$

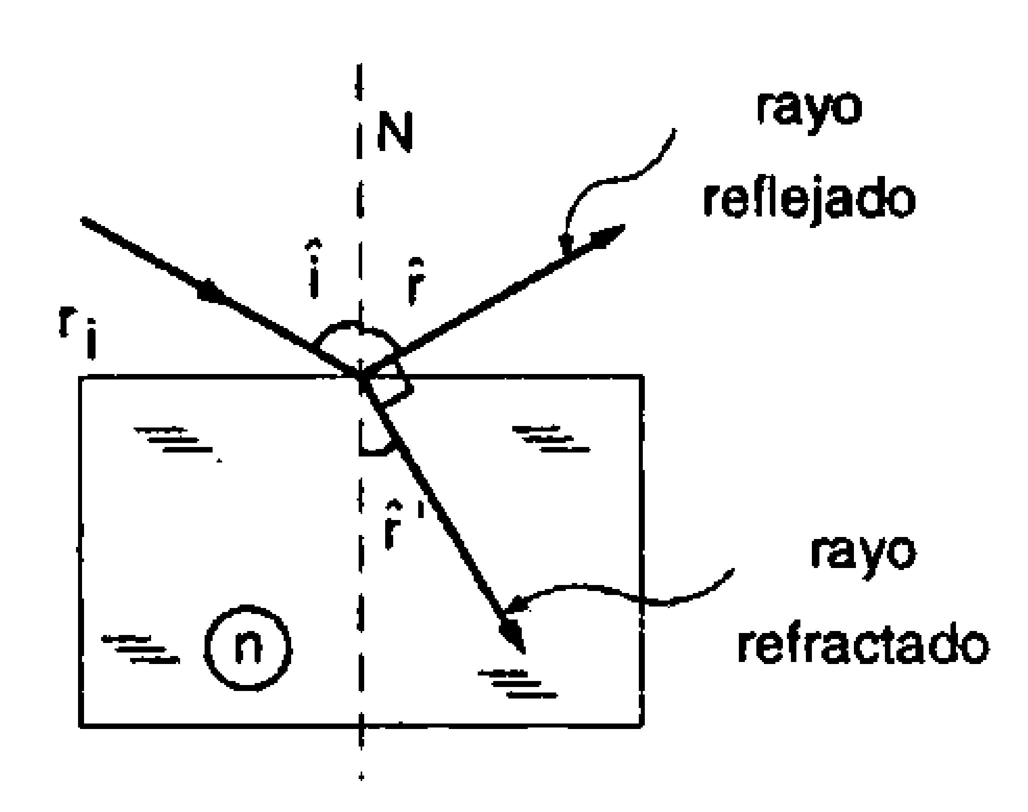
$$\therefore \quad P_a = 0{,}75\text{ m} \qquad (II)$$

(II) en (I): $x = 2{,}75\text{ m}$

PROBLEMA 18. Un rayo de luz incide en un medio cuyo índice de refracción es "n", formando un ángulo $\hat{i}$. ¿Qué relación deberá haber entre $\hat{i}$ y "n" para que el rayo reflejado sea perpendicular al refractado?

RESOLUCIÓN : Por la ley de Snell:

$$1 \text{ sen } \hat{i} = n \text{ sen } \hat{r}$$



$\hat{r}'$ = ángulo de refracción

$\hat{r}$ = ángulo de reflección

$$n = \frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } \hat{r}'} \qquad (1)$$

Por datos: $\hat{r} + \hat{r}' = 90°$; pero $\hat{i} = \hat{r}$

$$\therefore \quad \hat{i} + \hat{r}' = 90°$$

$$\hat{r}' = 90° - \hat{i} \qquad (2)$$

Reemplazando (2) en (1):

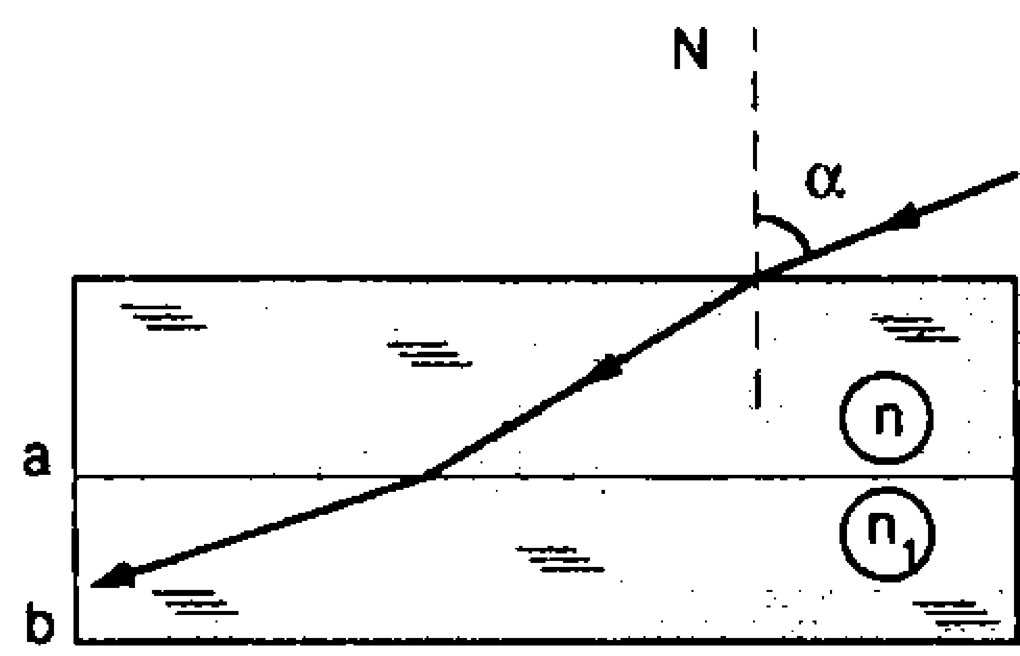
$$n = \frac{\text{sen } \hat{i}}{\text{sen } (90° - 1)} = \frac{\text{sen } \hat{i}}{\cos \hat{i}}$$

$$\therefore \quad n = \text{tg } \hat{i}$$

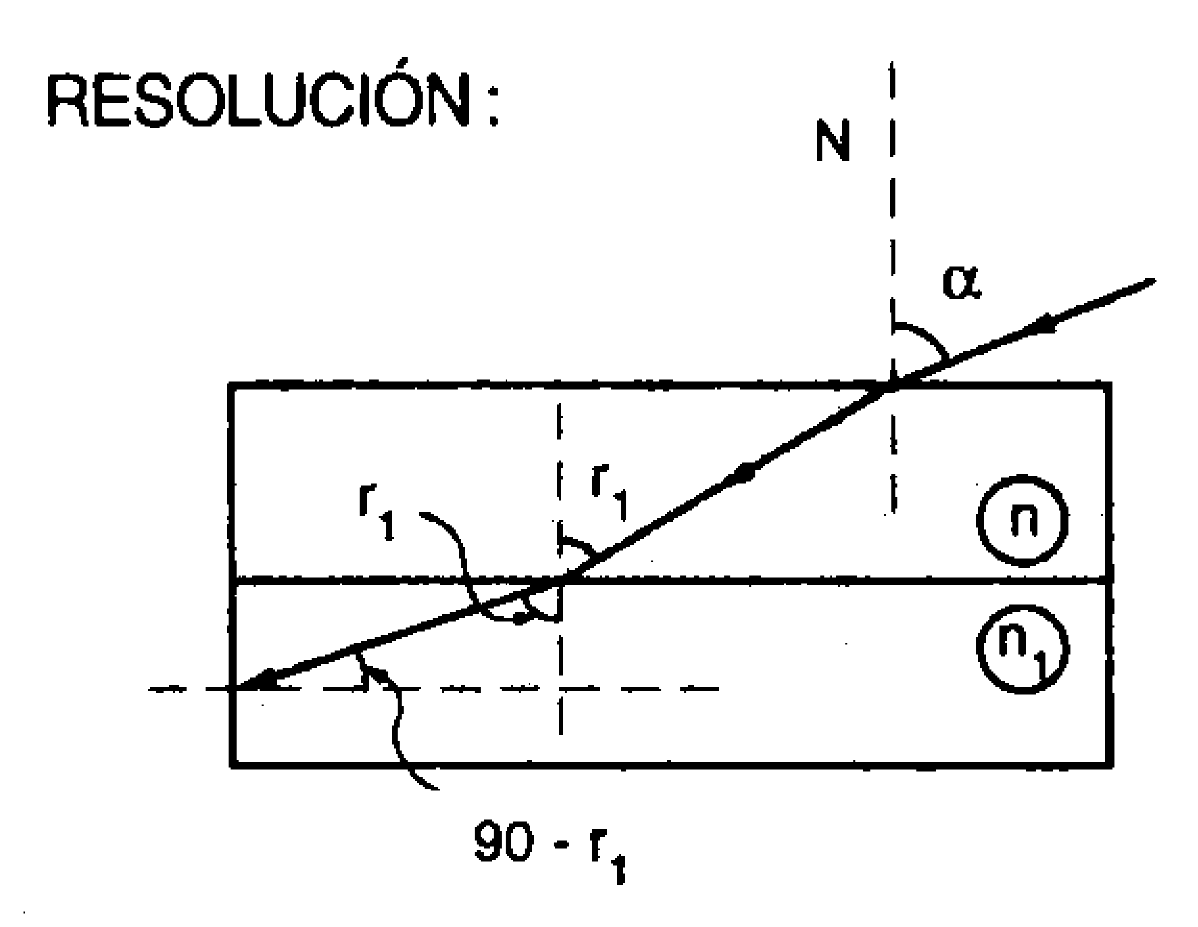
PROBLEMA 19. En la figura se muestra dos porciones de vidrio de índice de refracción "n" y "n_1". Si el rayo de luz incide con ángulo "α", igual al ángulo límite de la lámina de índice "n", siguiendo la trayec-

http://librosysolucionarios.net

toria mostrada para reflejarse totalmente sobre la cara vertical "ab", calcular el índice de "n_1" si n = 2.



RESOLUCIÓN :



Por datos:
$$n \operatorname{sen} \hat{L} = 1$$
$$n \operatorname{sen} \alpha = 1$$
$$2 \operatorname{sen} \alpha = 1$$
$$\operatorname{sen} \alpha = \frac{1}{2}$$

Medio aire - sustancia (n) :

$$n_{aire} \operatorname{sen} \alpha = n \operatorname{sen} \hat{r}$$

$$n \operatorname{sen} \hat{r} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

Sustancia (n) - sustancia (n_1) :

$$n \operatorname{sen} \hat{r} = n_1 \operatorname{sen} \hat{r}_1 \qquad (2)$$

$$(1) = (2): \quad n_1 \operatorname{sen} \hat{r}_1 = \frac{1}{2} \qquad (3)$$

Sustancia (n_1) - aire :

$$n_1 \operatorname{sen}(90° - \hat{r}_1) = 1$$

$$n_1 \cos \hat{r}_1 = 1 \qquad (4)$$

$$\frac{(3)}{(4)}: \qquad \operatorname{tg} \hat{r}_1 = \frac{1}{2}$$

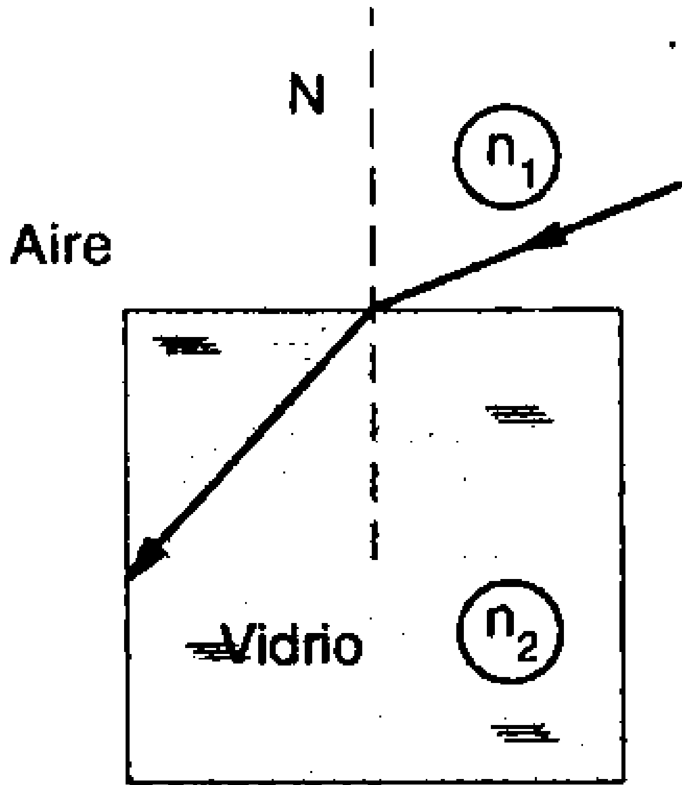
de donde, por cálculos con trigonometría:

$$\cos \hat{r}_1 = \frac{2}{\sqrt{5}} \qquad (5)$$

$$(5) \text{ en } (4): \quad n_1 \frac{2}{\sqrt{5}} = 1$$

Rpta.: $n_1 = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

PROBLEMA 20. La luz incide con un ángulo de 45° sobre la superficie superior de un cubo de vidrio como el de la figura mostrada. El índice del vidrio es 1,414. ¿Se refleja totalmente el rayo en la cara vertical?



RESOLUCIÓN :

I) Aplicando la Ley de Snell para el medio aire-vidrio:

$$\frac{\operatorname{sen} \hat{i}}{\operatorname{sen} \hat{r}} = \frac{n_2}{n_1}$$

$$\operatorname{sen} \hat{r} = \frac{n_2}{n_1} \cdot \operatorname{sen} \hat{i} \qquad (1)$$

http://librosysolucionarios.net

Reemplazando datos en (1) :

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{1}{2} \quad \therefore \quad \hat{r} = 30^\circ$$

II) Vidrio - aire :

Primero se calcula el ángulo límite. Si (90° - r) es menor que el ángulo límite el rayo se refracta; pero si es mayor se refleja.

III) Aplicando la Ley de Snell (ángulo límite).

$$\frac{\text{sen}\,\hat{L}}{\text{sen}\,90^\circ} = \frac{1}{n_v}$$

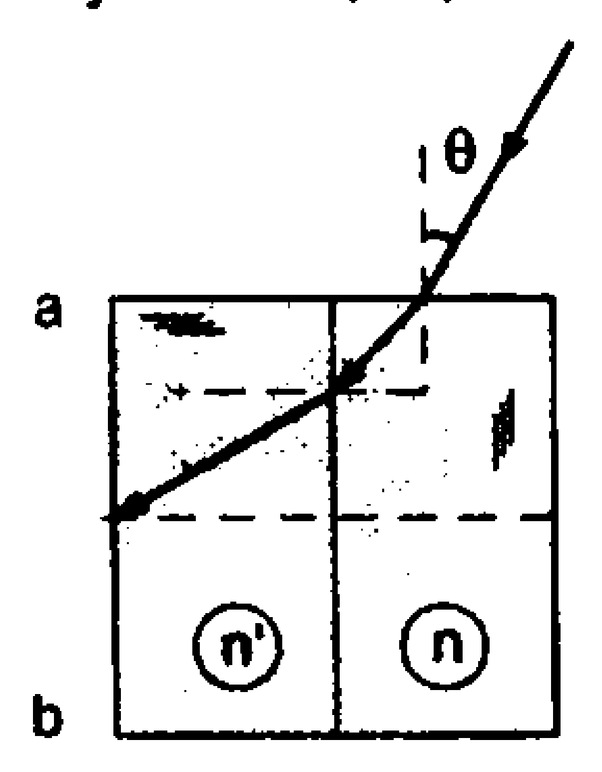
$$\text{sen}\,\hat{L} = \frac{\text{sen}\,90^\circ}{n_v} = \frac{1}{1{,}41}$$

$$\therefore \quad \hat{L} = 45^\circ$$

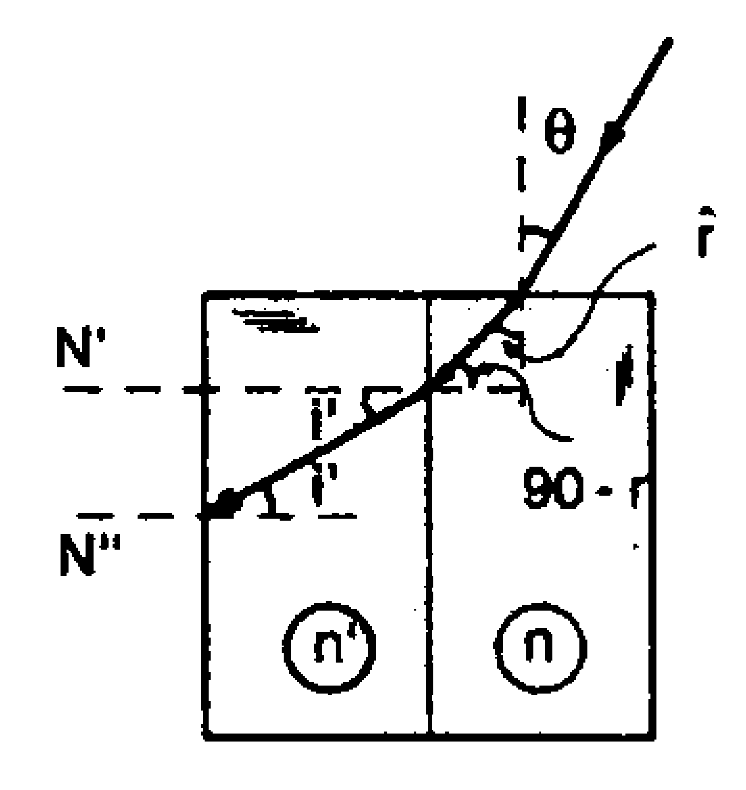
Conclusión: el rayo se refleja debido a que:

$$90^\circ - \hat{r} = 60^\circ > \hat{L} = 45^\circ$$

PROBLEMA 21. En la figura se muestra dos porciones de vidrio de índice de refracción n y n'. Si un rayo de luz incide con un ángulo "q" como se indica en la figura, siguiendo la trayectoria mostrada para reflejarse totalmente sobre la cara vertical "ab". Si q = 30° y n' = 1,25, calcular "n"



RESOLUCIÓN :



I) Aire - vidrio (n) :

Ley de Snell: $\dfrac{\text{sen}\,\hat{i}}{\text{sen}\,\hat{r}} = \dfrac{n_2}{n_1}$

$$\frac{\text{sen}\,30^\circ}{\text{sen}\,\hat{r}} = \frac{n}{1}$$

$$\text{sen}\,\hat{r} = \frac{\text{sen}\,30^\circ}{n} \qquad (1)$$

II) Vidrio (n) - aire (n') :

$$\frac{\text{sen}\,(90^\circ - \hat{r})}{\text{sen}\,\hat{i}'} = \frac{n'}{n}$$

pero: $\text{sen}\,(90^\circ - \hat{r}) = \cos\hat{r}$

$$\therefore \quad \frac{\cos\hat{r}}{\text{sen}\,\hat{i}'} = \frac{n'}{n} \qquad (2)$$

III) Vidrio (n') - aire : $\dfrac{\text{sen}\,\hat{i}'}{\text{sen}\,90^\circ} = \dfrac{1}{n'}$

$$\text{sen}\,\hat{i}' = \frac{1}{n'} \qquad (3)$$

(2) . (3) : $\cos\hat{r} = \dfrac{1}{n}$ (4)

ahora: $\cos\hat{r} = \sqrt{1 - \text{sen}^2\,\hat{r}}$ (5)

(4) = (5) : $\sqrt{1 - \text{sen}^2\,\hat{r}} = \dfrac{1}{n}$ (6)

(1) en (6) : $\sqrt{1 - \dfrac{\text{sen}^2\,30^\circ}{n^2}} = \dfrac{1}{n}$

Rpta.: $n = 1{,}12$

PROBLEMA 22. ¿Cuál es la desviación mínima que experimenta un rayo que incide sobre un prisma equilátero de índice igual a 1,73? ($\sqrt{3} = 1{,}73$)

RESOLUCIÓN : $$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\hat{D}_m + \hat{A}}{2}\right)}{\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}} \quad (1)$$

Por datos: $\hat{A} = 60°$ y $n = 1{,}73$

En (1) : $$1{,}73 = \frac{\text{sen}\left(\frac{\hat{D}_m + 60°}{2}\right)}{\text{sen}\,30°}$$

$$\text{sen}\left(\frac{\hat{D}_m + 60°}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2} = \text{sen}\,60°$$

$$\frac{\hat{D}_m + 60°}{2} = 60°$$

$$\therefore \quad \hat{D}_m = 60°$$

PROBLEMA 23. ¿Cuál es el índice de refracción de un prisma óptico rectángulo isósceles si se sabe que la desviación mínima es 1/3 del ángulo en el vértice?

RESOLUCIÓN : a) Por datos:

$$\hat{A} = 90° \quad ; \quad D_{min} = \frac{1}{3}\hat{A} = 30°$$

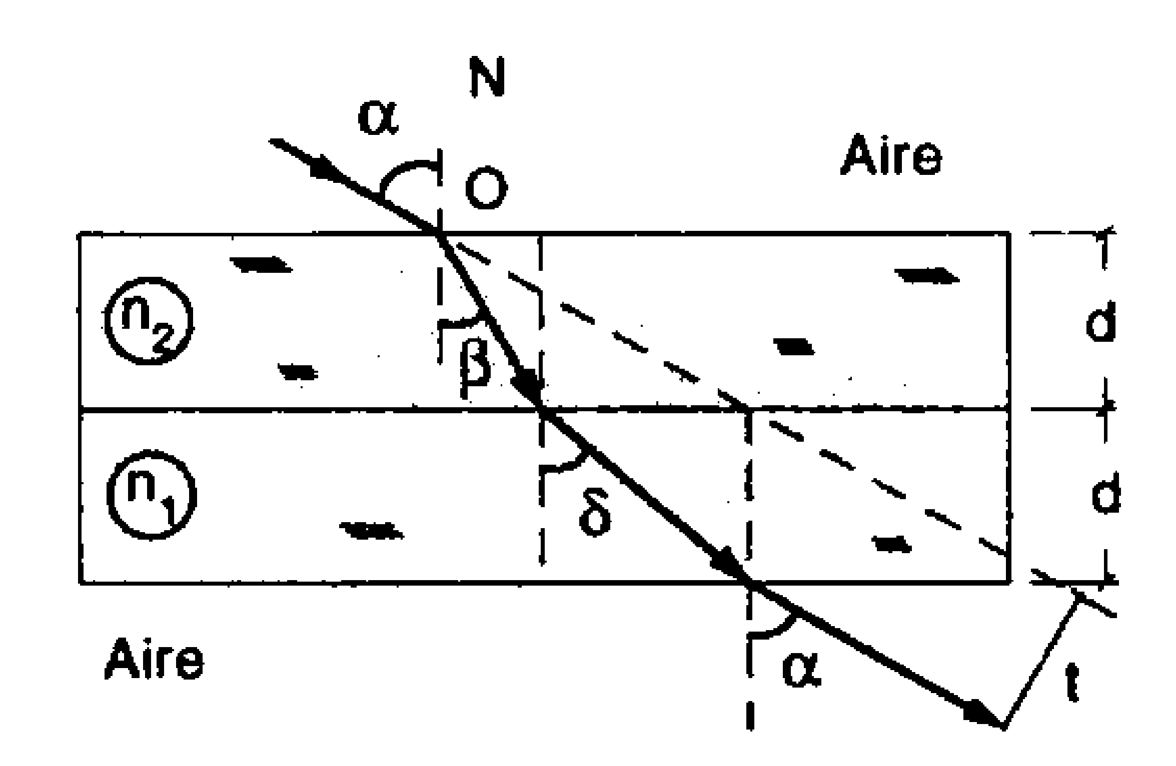
Por otra parte: $$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{\hat{D}_m + \hat{A}}{2}\right)}{\text{sen}\,\frac{\hat{A}}{2}}$$

$$n = \frac{\text{sen}\left(\frac{30° + 90°}{2}\right)}{\text{sen}\left(\frac{90°}{2}\right)}$$

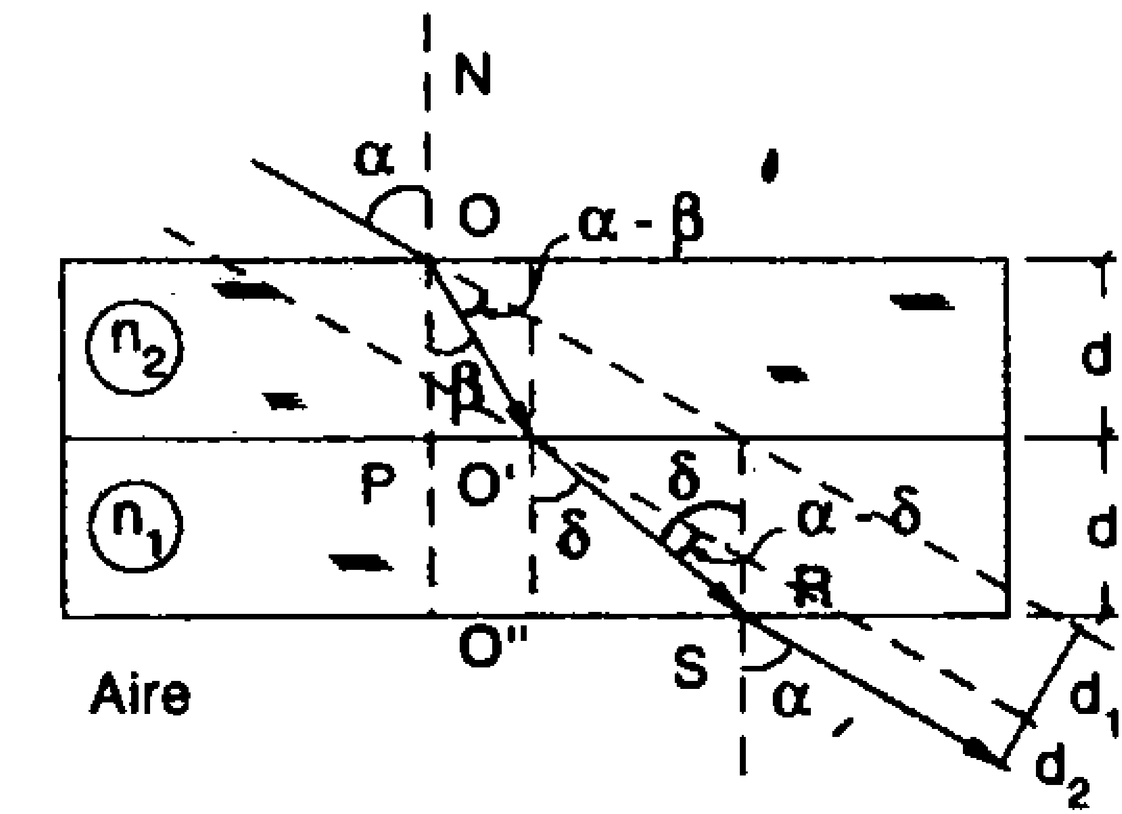
$$n = \frac{\text{sen}\,60°}{\text{sen}\,45°} = \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}}{2}}$$

Rpta.: $n = \frac{\sqrt{6}}{2}$

PROBLEMA 24. En la figura se muestran dos láminas de vidrio de espesor "d" y de índices de refracción "n_1" y "n_2". El ángulo de incidencia "α" es igual al ángulo límite de la lámina de índice "n_1". ¿Cuál será el desplazamiento "t" del rayo al pasar a través de las dos láminas?



RESOLUCIÓN :



Se tiene: $d_1 + d_2 = t \quad (1)$

I) Por enunciado:

$$\text{sen}\,\alpha = \frac{1}{n_1} \quad (2)$$

Medio (aire) - medio (n_1) :

$$\text{sen}\,\alpha - n_1\,\text{sen}\,\beta \quad (3)$$

Igualando (2) y (3) :

$$\text{sen}\,\beta = \frac{1}{n_1^2} \quad (4)$$

De la figura: $\operatorname{sen}(\alpha - \beta) = \dfrac{d_1}{\overline{OO'}}$

$$d_1 = \operatorname{sen}(\alpha - \beta) \cdot \overline{OO'} \qquad (5)$$

En el triángulo OPO' :

$$\overline{OO'} = \frac{d}{\cos\beta} \qquad (6)$$

Reemplazando (6) en (5) :

$$d_1 = d\,\frac{\operatorname{sen}\alpha . \cos\beta - \operatorname{sen}\beta . \cos\alpha}{\cos\beta}$$

$$d_1 = d\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\beta . \cos\alpha) \qquad (7)$$

De (2): $\cos\alpha = \dfrac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1}$ (2)'

De (4): $\operatorname{tg}\beta = \dfrac{1}{\sqrt{(n_1^2)^2 - 1}}$ (4)'

Reemplazando (2) , (2)' y (4)' en (7):

$$d_1 = d\left[\frac{1}{n_1} - \frac{1}{\sqrt{(n_1^2)^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1}\right]$$

$$\therefore \quad d_1 = d\left[\frac{1}{n_1} - \frac{1}{n_1\sqrt{n_1^2 + 1}}\right] \qquad (8)$$

II) Medio (n_2) - medio (aire) :

$$n_2 \operatorname{sen}\delta = \operatorname{sen}\alpha$$

$$n_2 \operatorname{sen}\delta = \frac{1}{n_1}$$

$$\operatorname{sen}\delta = \frac{1}{n_2 n_1}, \qquad \text{de aquí:}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{1}{\sqrt{(n_1 n_2)^2 - 1}}$$

Por otra parte en el triángulo O'RS :

$$d_2 = \overline{O'O''} \operatorname{sen}(\alpha - \delta)$$

Como: $\overline{O'O''} = \dfrac{d}{\cos\delta}$

entonces:

$$d_2 = \frac{d}{\cos\delta}(\operatorname{sen}\alpha . \cos\delta - \operatorname{sen}\delta . \cos\alpha)$$

$$d_2 = d\,(\operatorname{sen}\alpha - \operatorname{tg}\delta . \cos\alpha)$$

Reemplazando datos:

$$d_2 = d\left[\frac{1}{n_1} - \frac{1}{\sqrt{(n_1 n_2)^2 - 1}} \cdot \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1}\right] \qquad (9)$$

Reemplazando (8) y (9) en (1) :

$$t = \frac{d_1}{n_1}\left[2 - \frac{1}{\sqrt{n_1^2 + 1}} - \sqrt{\frac{n_1^2 - 1}{(n_1 n_2)^2 - 1}}\right]$$

LENTES

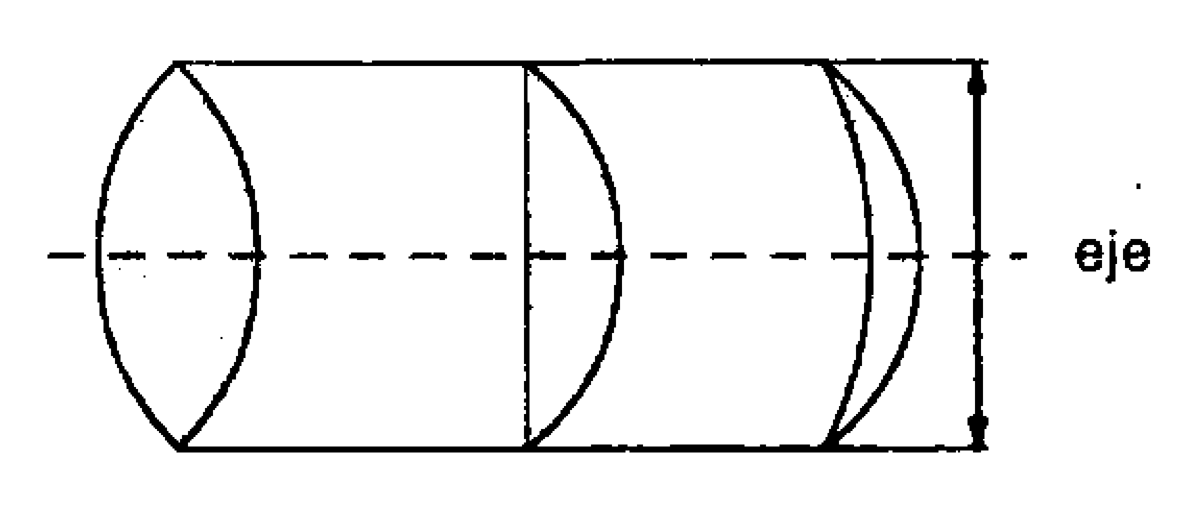
Una lente es un cuerpo refractante, refringente o transparente, limitado por dos superficies o caras, ambas esféricas o una esférica y la otra plana.

CLASES DE LENTES

Pueden ser convergentes o divergentes.

CONVERGENTES O POSITIVAS

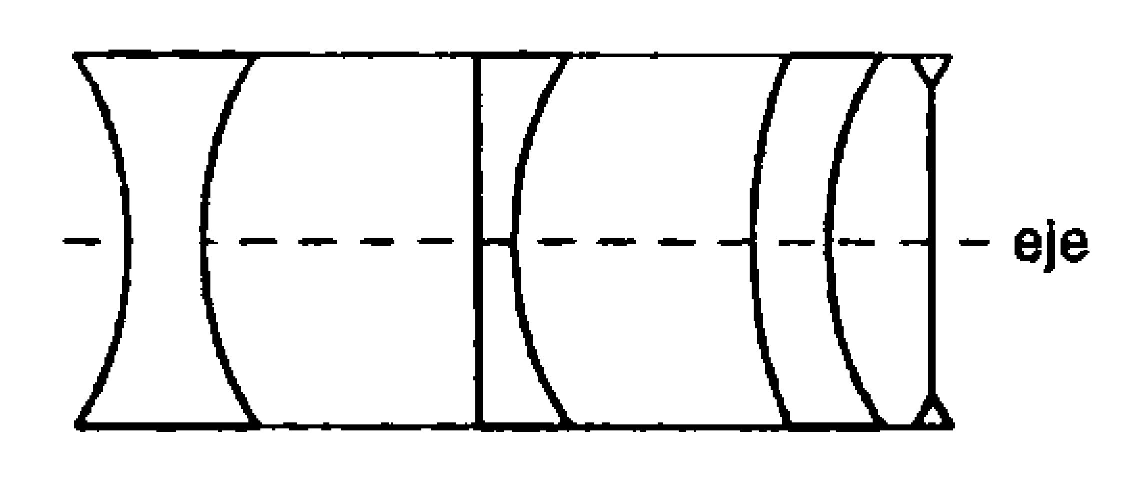
Cuando es más gruesa en el medio



Biconvexa — Plano convexa — Cóncavo convexa o menisco convergente

DIVERGENTES O NEGATIVAS

Cuando es más gruesa en los bordes

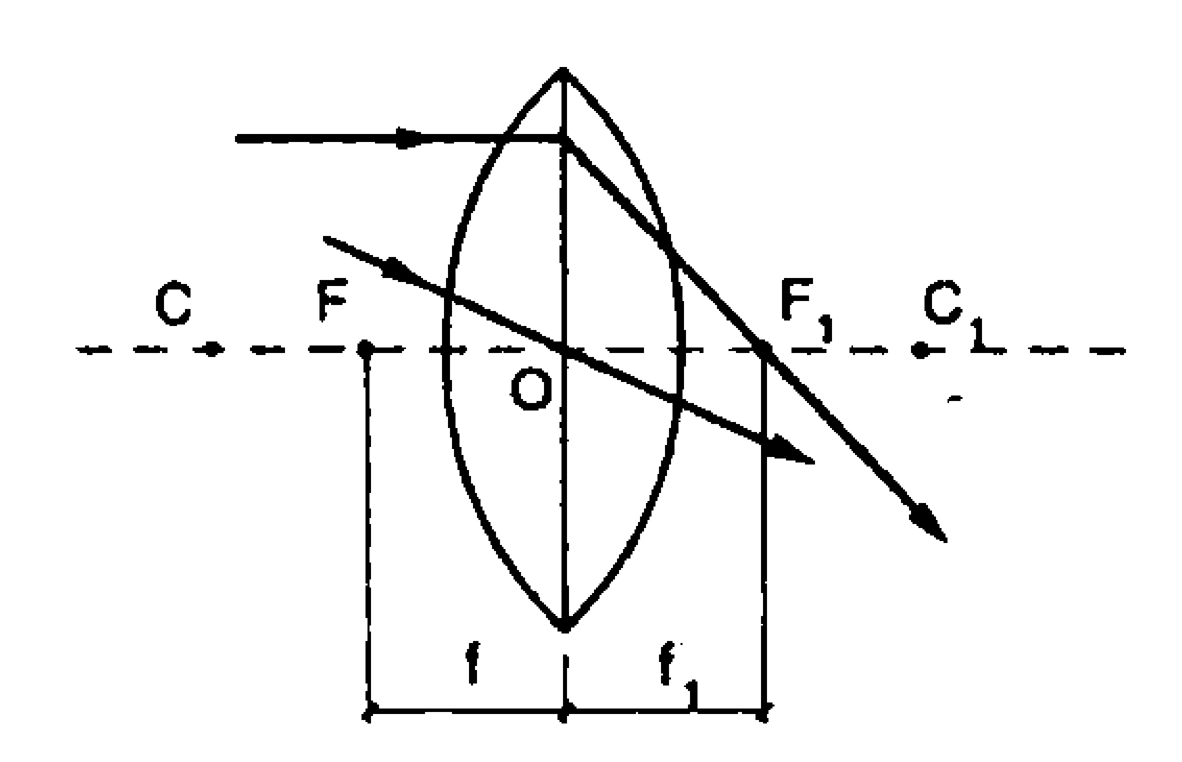


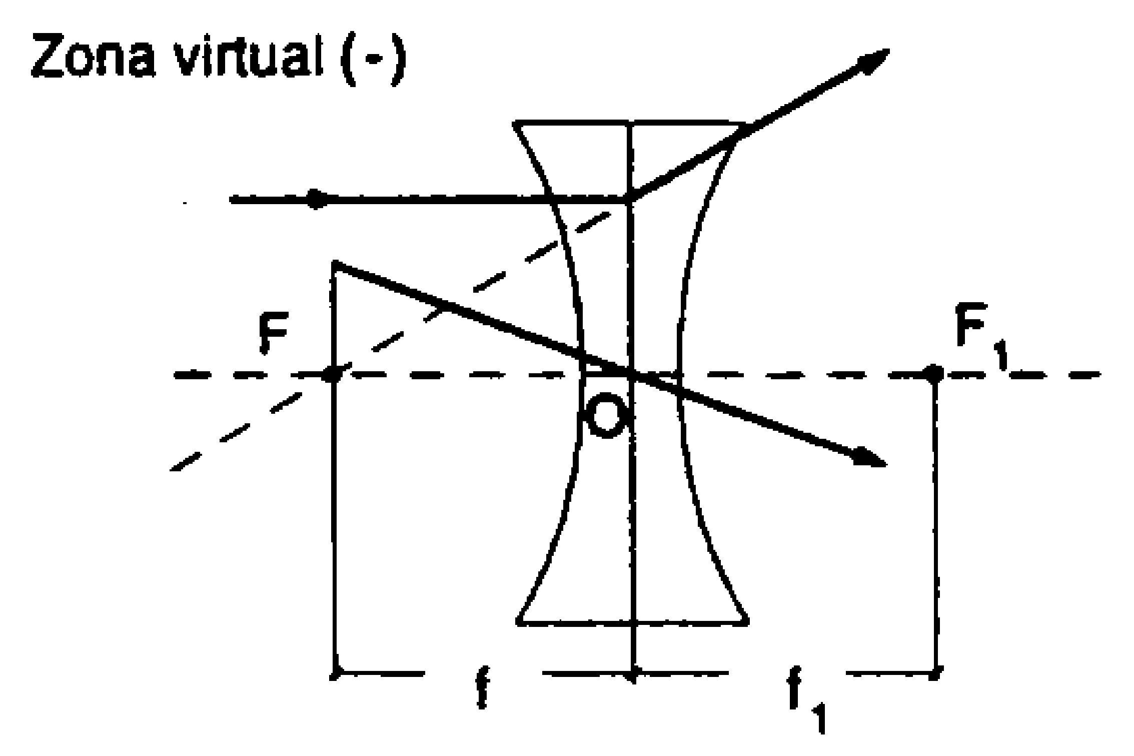
Bicóncava Plano cóncava Convexa cóncava o menisco divergente

ELEMENTOS DE LAS LENTES

1. Eje principal :
Recta que une los centros de curvatura de las caras esféricas de la lente (CC_1).

2. Centros de curvatura :
Puntos situados en el eje principal y que son centros de curvatura de las caras (C, C_1).





3. Centro óptico :
Es un punto centro de la lente; tiene la propiedad de que los rayos que pasan por este punto no se desvían (O).

4. Foco principal :
Punto del eje principal por donde pasan los rayos refractados que inciden a la lente paralelos al eje principal: (F).
Toda lente tiene dos focos: uno a la izquierda y otro a la derecha.

a) "Foco objeto" es el punto del eje principal tal que, todo rayo que pasa por él, al incidir sobre la lente, se refracta paralelo al eje principal.
b) "Foco imagen" es el punto del eje principal por donde pasan todos los rayos que del otro lado inciden en la lente paralelos al eje principal.

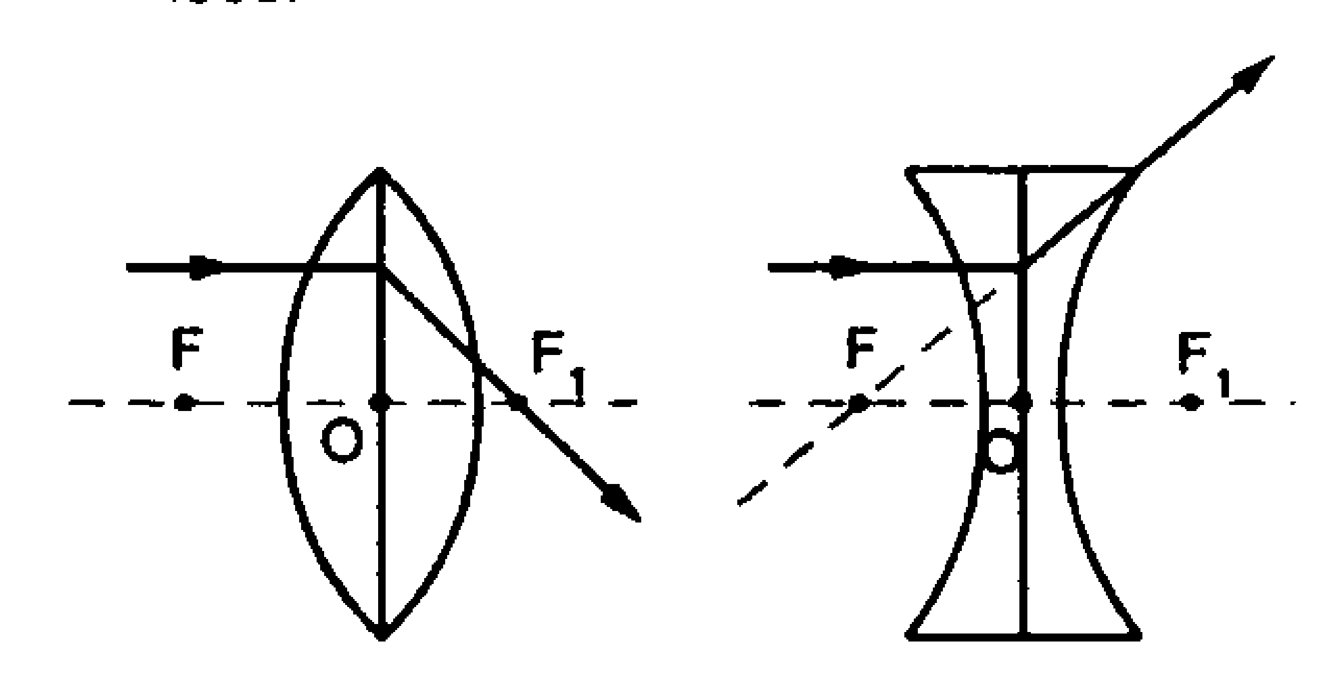
5. Distancia focal :
Distancia entre el centro óptico y el foco principal:

$$OF = f = \frac{R}{2}$$

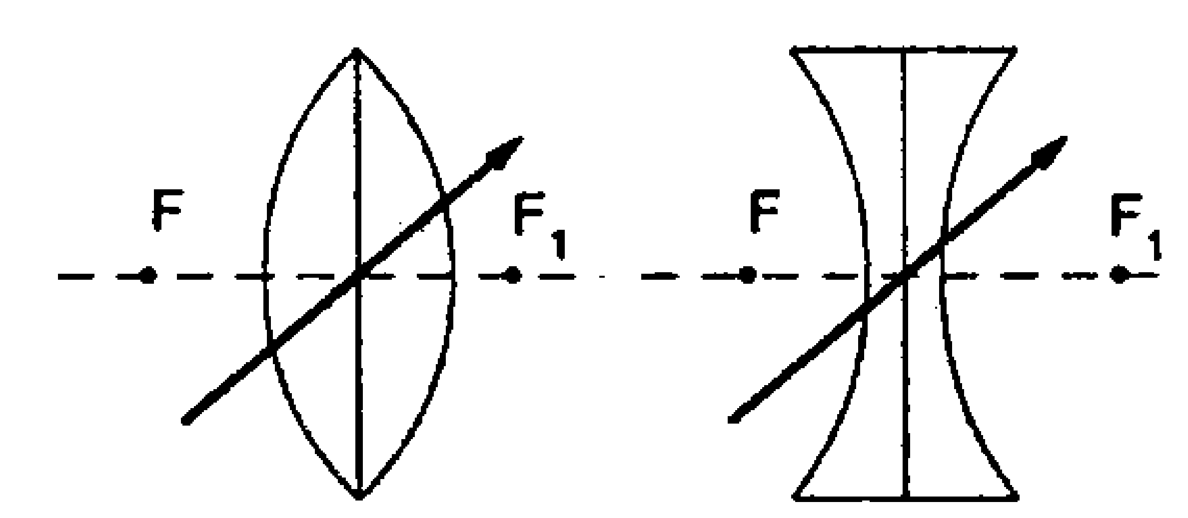
RAYOS PRINCIPALES EN LAS LENTES

Para lentes convergentes y divergentes:

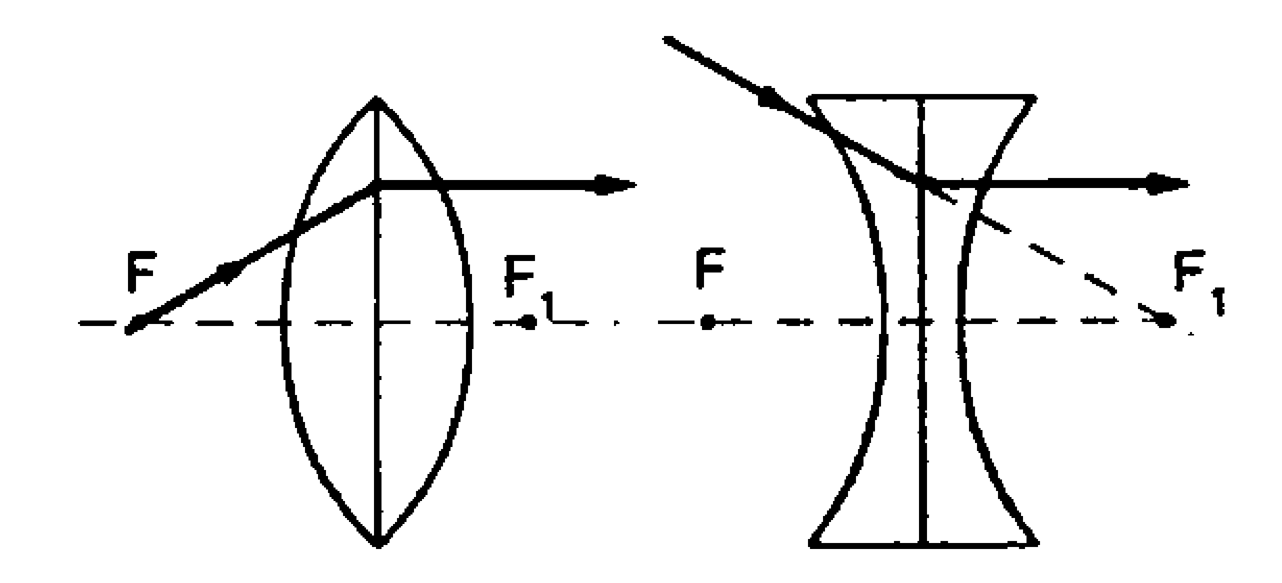
1. Todo rayo paralelo al eje principal, en una lente convergente, se refracta pasando por el foco.
   Si la lente es divergente, la prolongación del rayo refractado es la que pasa por el foco.



2. Todo rayo que pasa por el centro óptico no se desvía, sea la lente cóncava o convexa.



3. Todo rayo que pasa por el foco de una lente convergente, que incide en la lente, se refracta paralela al eje principal. Todo rayo que incide en una lente divergente, cuya prolongación pasa por el foco se refracta paralelo al eje principal.



CONSTRUCCIÓN Y POSICIÓN DE LA IMAGEN DE UNA LENTE CONVERGENTE

Bastará trazar, desde un punto del objeto, dos de los rayos principales, la intersección de éstos será la imagen del punto.

Si la imagen está al otro lado del objeto es "real", si está al mismo lado es "virtual".

Llamando: "p" distancia del objeto y "q" distancia de la imagen al centro óptico.

1. Imagen de un objeto más allá del centro de curvatura, es decir, $p > 2r$

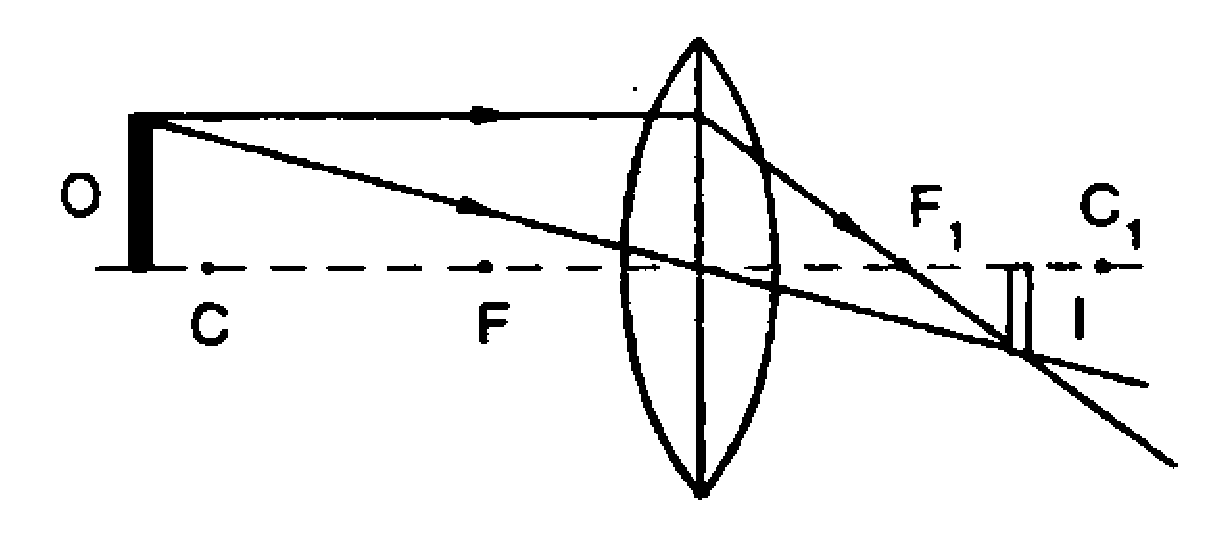


Imagen { Real
Invertida
Menor tamaño que el objeto

2. Imagen de un objeto en el centro de curvatura, es decir: $p = 2f$

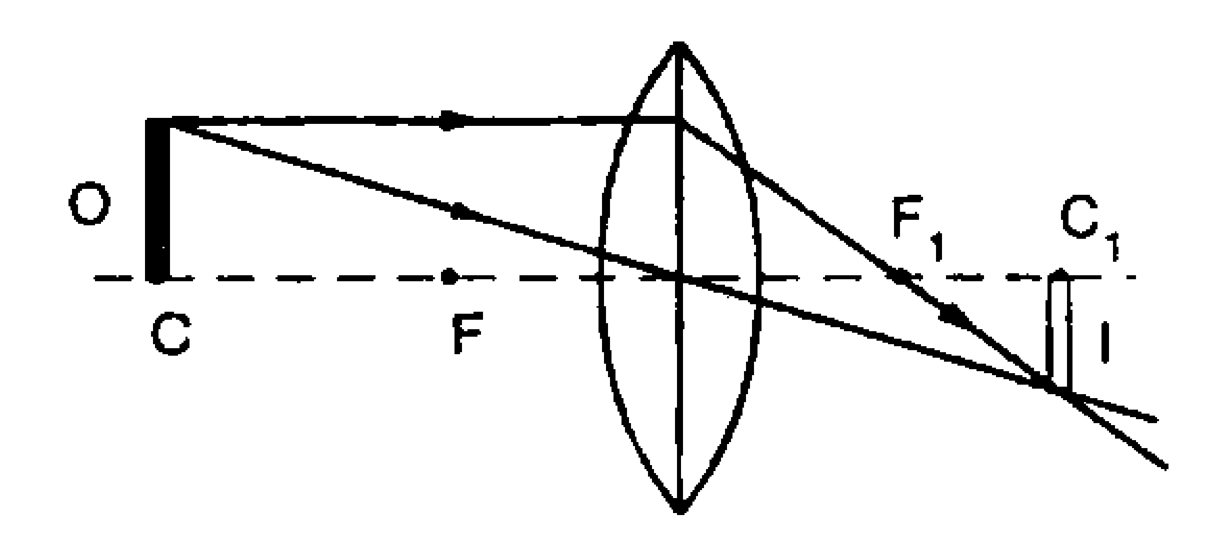


Imagen { Real
Invertida
Igual tamaño que el objeto

3. Imagen de un objeto entre el centro de curvatura y el foco: $2f > p > f$

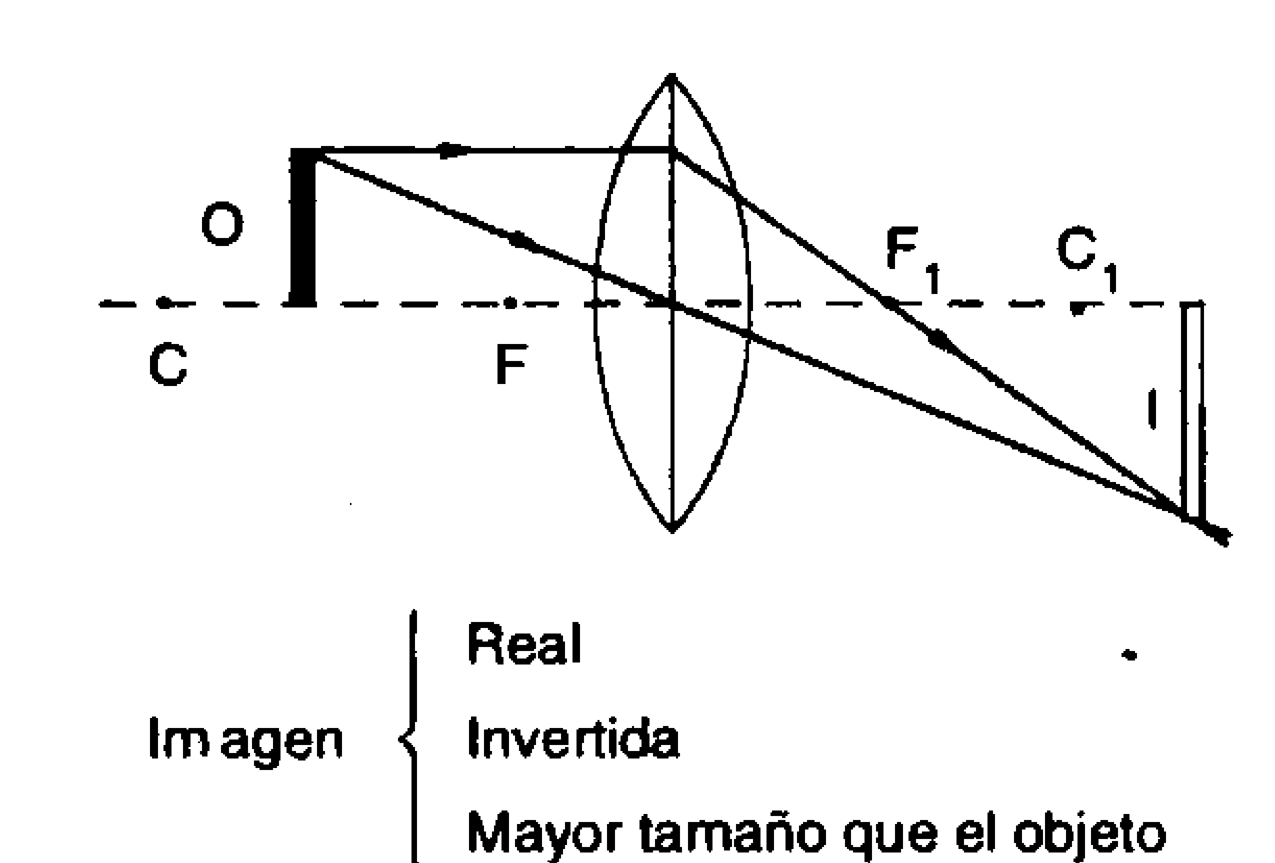


Imagen { Real
Invertida
Mayor tamaño que el objeto

4. Imagen de un objeto en el foco principal: $p = f$

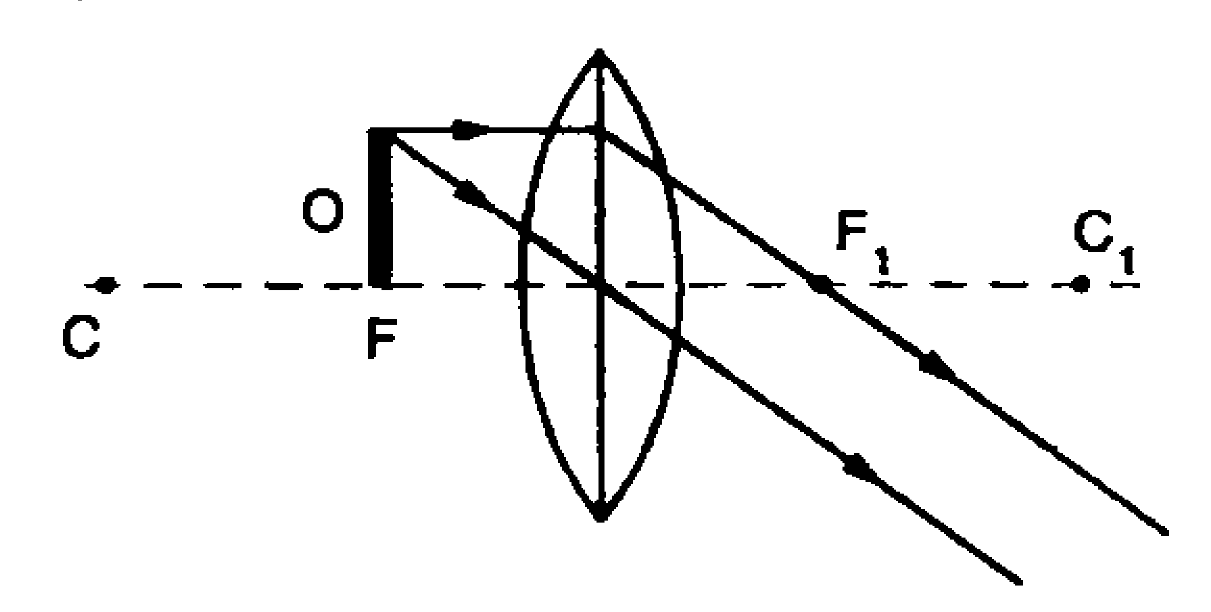


Imagen: No hay imagen o está en el infinito.

5. Imagen de un objeto entre el foco principal y el centro óptico $f > p$.

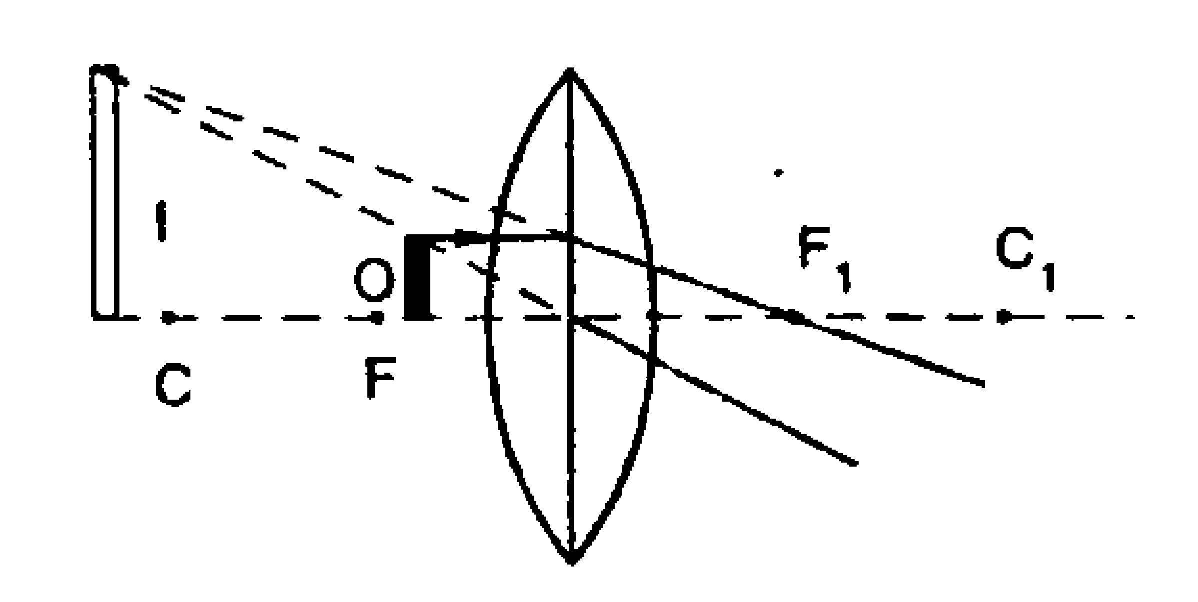


Imagen { Virtual
Derecha
Mayor tamaño que el objeto

La expresión algebraica o fórmula para calcular la posición de una imagen es similar a la de los espejos esféricos, así:

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}$$

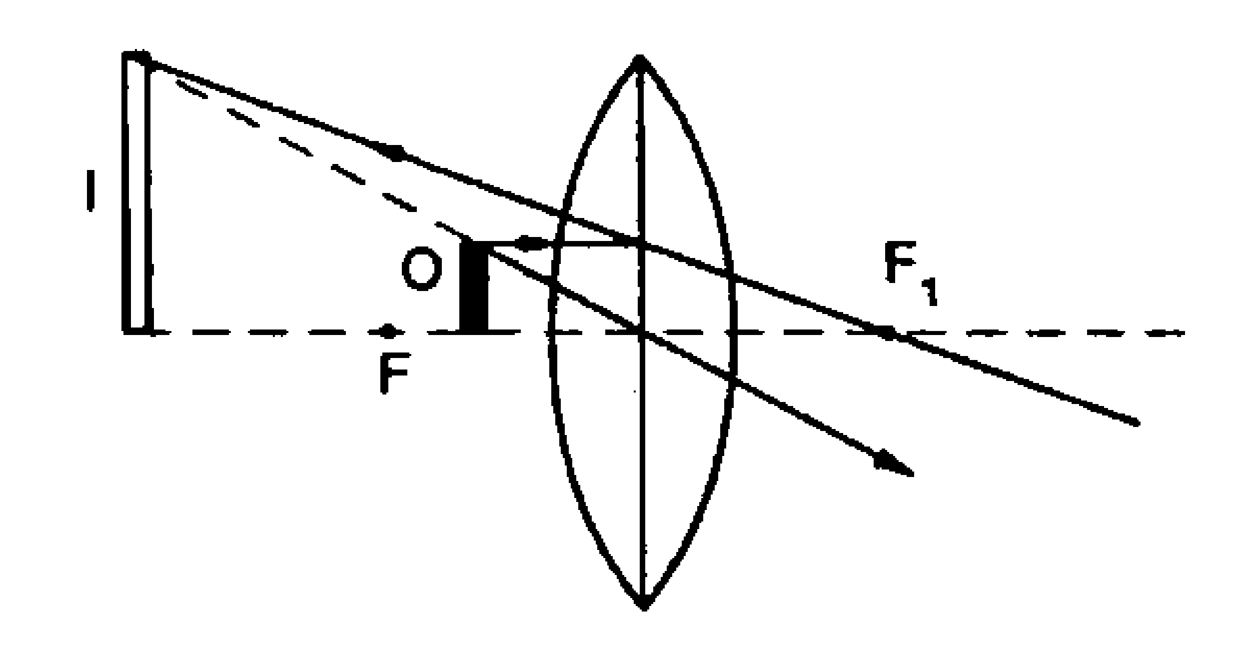
Fórmula de Descartes

p : Distancia del objeto a la lente.
q : Distancia de la imagen a la lente.
f : Distancia focal $= \frac{R}{2}$

Esta fórmula es válida cuando:

a) El objeto está a la izquierda de la lente, entonces:
b) Como el lente convergente f > 0, es decir f(+).
c) Cuando la imagen está a la derecha de la lente q > 0, es decir q(+), la imagen es real.
d) Cuando la imagen está a la izquierda de la lente q < 0, es decir q(-), la imagen es virtual.

PROBLEMA 1. Una lente convergente tiene una distancia focal de 60 cm. Calcular la ubicación de la imagen cuando el objeto está a 40 cm de la lente



RESOLUCIÓN: f = 60 cm
q = ? p = 40 cm

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$ de aquí:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p}$$ sust. datos:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{60} - \frac{1}{40} = -\frac{1}{120}$$

$\therefore$ q = -120 cm Imagen virtual

PROBLEMA 2. Se tiene una lente convergente de 80 cm de radio. Calcular la ubicación de la imagen cuando el objeto está a 60 cm de la lente.

RESOLUCIÓN:

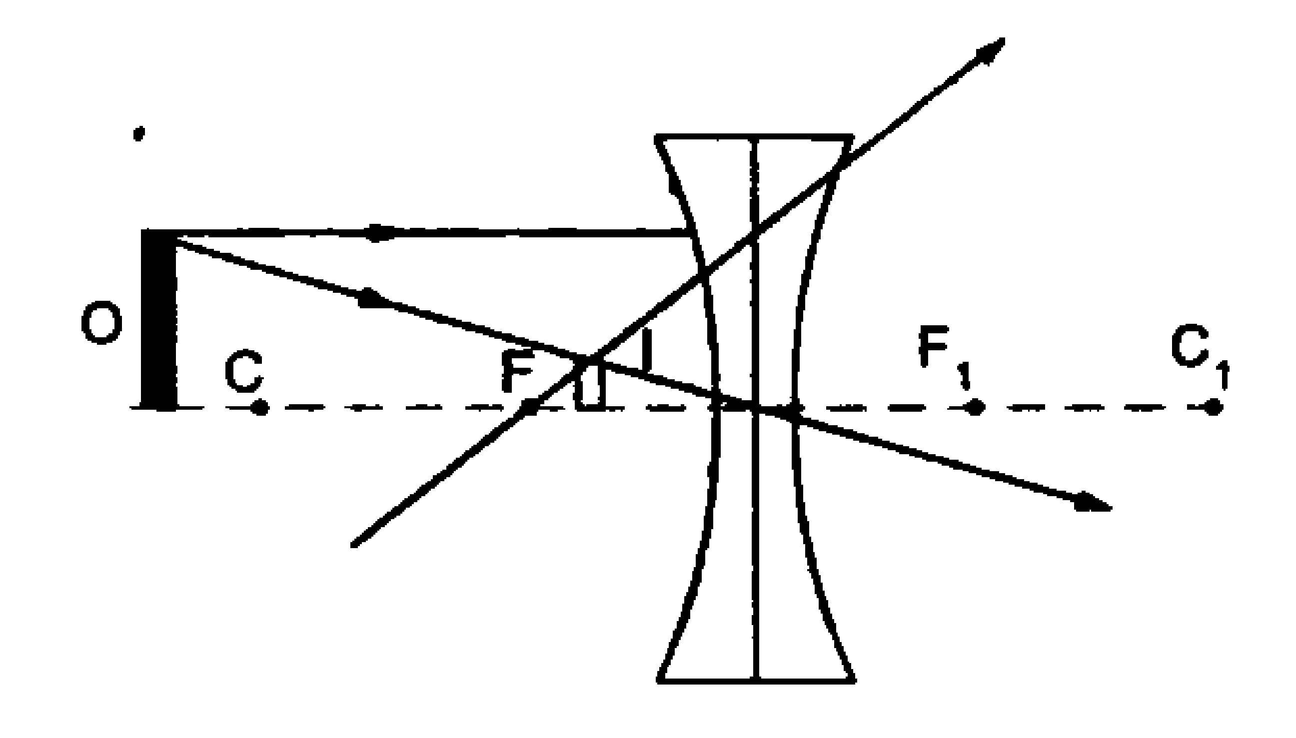
R = 80 cm $\Rightarrow$ f = 40 cm
p = 60 cm q = ?

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{40} - \frac{1}{60}$$

Rpta.: q = 120 cm Imagen real

CONSTRUCCIÓN Y UBICACIÓN DE LA IMAGEN DE UNA LENTE DIVERGENTE

Hay un solo caso. Cualquiera que sea la posición del objeto: la imagen es virtual, derecha y de menor tamaño que el objeto.



El cálculo algebraico de la posición de una imagen es igual que para las lentes convergentes.

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}}$$

Fórmula de Descartes

http://librosysolucionarios.net

NOTA: En el caso de las lentes divergentes, téngase presente que:

a) Siempre $f < 0$ es decir f (-).
b) La distancia "p" del objeto a la lente, siempre es de signo contrario al de la distancia "q" de la imagen.

PROBLEMA 3. La distancia focal de una lente divergente es -40 cm. ¿A qué distancia de la lente estará la imagen de un objeto que está a 30 cm del espejo?

RESOLUCIÓN : $f = -40$ cm

$q = ?$ $p = 30$ cm

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} \;; \quad \text{de aquí:}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{-40} - \frac{1}{30} = -\frac{7}{120}$$

$$q = -17{,}14 \text{ cm}$$

Como la lente es divergente, "q" es de signo contrario a "p".

PROBLEMA 4. Una lente divergente tiene una distancia focal de -1/100. La distancia de la imagen al centro de la lente está a 2/3 de distancia del objeto al centro de la misma. ¿A qué distancia está el objeto?

RESOLUCIÓN :

Por datos $|q| = \frac{2}{3}|p|$

luego: $-q = \frac{2}{3}p \Rightarrow q = -\frac{2}{3}p$

También: $\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$; de donde:

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{f} - \frac{1}{q} = -100 - \frac{1}{-\frac{2}{3}p}$$

De donde: $p = 0{,}005$

POTENCIA DE UNA LENTE

Está dada por la inversa de la distancia focal.

$$\boxed{P = \frac{1}{f}}$$

Donde:

P : Potencia de la lente, en dioptrías.
f : Distancia focal, en metros.

$$\boxed{1 \text{ dioptría} = \frac{1}{\text{metro}}}$$

PROBLEMA 5. ¿Cuál será la potencia de una lente de 2 m de distancia focal, y otra de 0,2 m?

RESOLUCIÓN : $f_1 = 2$ m

$P = ?$ $f_2 = 0{,}2$ m

a) Para $f_1 = 2$ m

$$P_1 = \frac{1}{f_1} = \frac{1}{2\text{ m}} = 0{,}5\,\frac{1}{\text{m}}$$

$P_1 = 0{,}5$ dioptrías

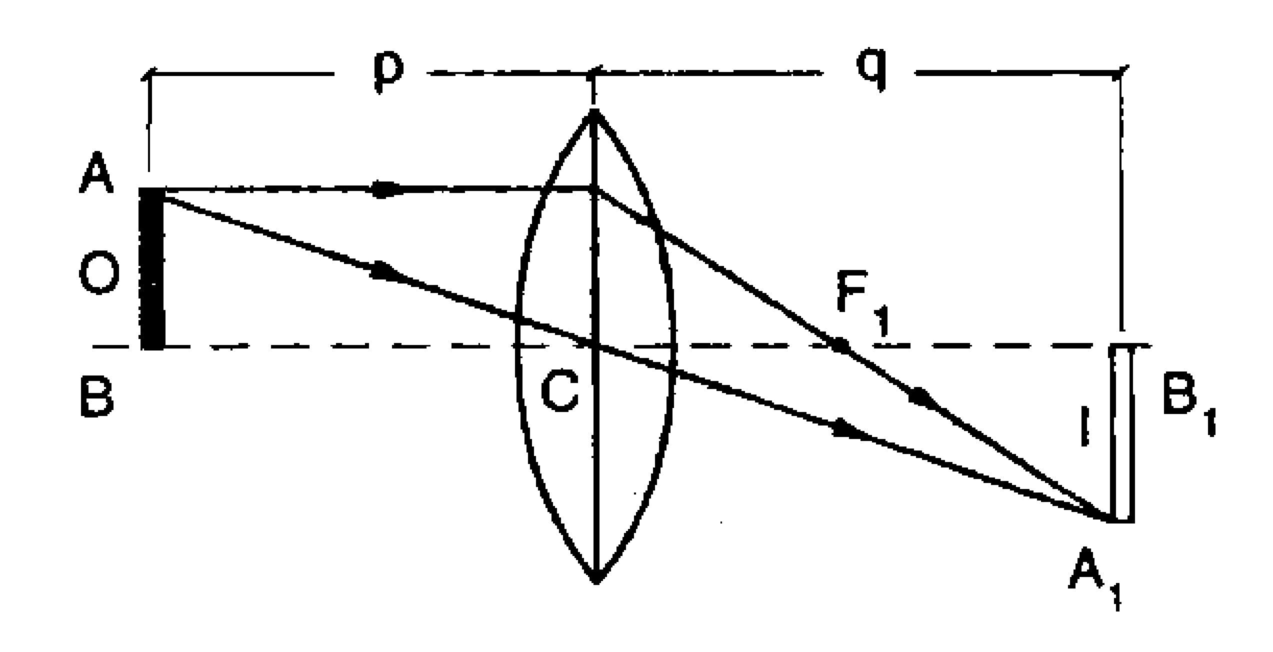
b) Para $f_2 = 0{,}2$ m

$$P_2 = \frac{1}{f_2} = \frac{1}{0{,}2\text{ m}} = 5\,\frac{1}{\text{m}}$$

$P_2 = 5$ dioptrías

AUMENTO DE LA LENTE

Es el factor que multiplicado por el tamaño del objeto reproduce el tamaño de la imagen.



Sea "O" el tamaño del objeto e "I", el tamaño de la imagen. Los triángulos ABC y A'B'C' son semejantes; luego:

$$\boxed{\frac{I}{O} = \frac{q}{p}}$$

Llamando a la relación $\frac{I}{O} = -A$, que quiere decir aumento pero con el signo negativo, por estar la imagen invertida, luego:

$$-A = \frac{q}{p}\ ; \qquad \text{de donde:}$$

$$\boxed{A = -\frac{q}{p}}$$

PROBLEMA 6. Una lente delgada convergente tiene una distancia focal de 30 cm. Un objeto está a 10 cm de la lente. Calcular la posición y el aumento de la imagen.

RESOLUCIÓN :

$f = 30$ cm $\qquad q = ?$

$p = 10$ cm $\qquad A = ?$

a) $$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

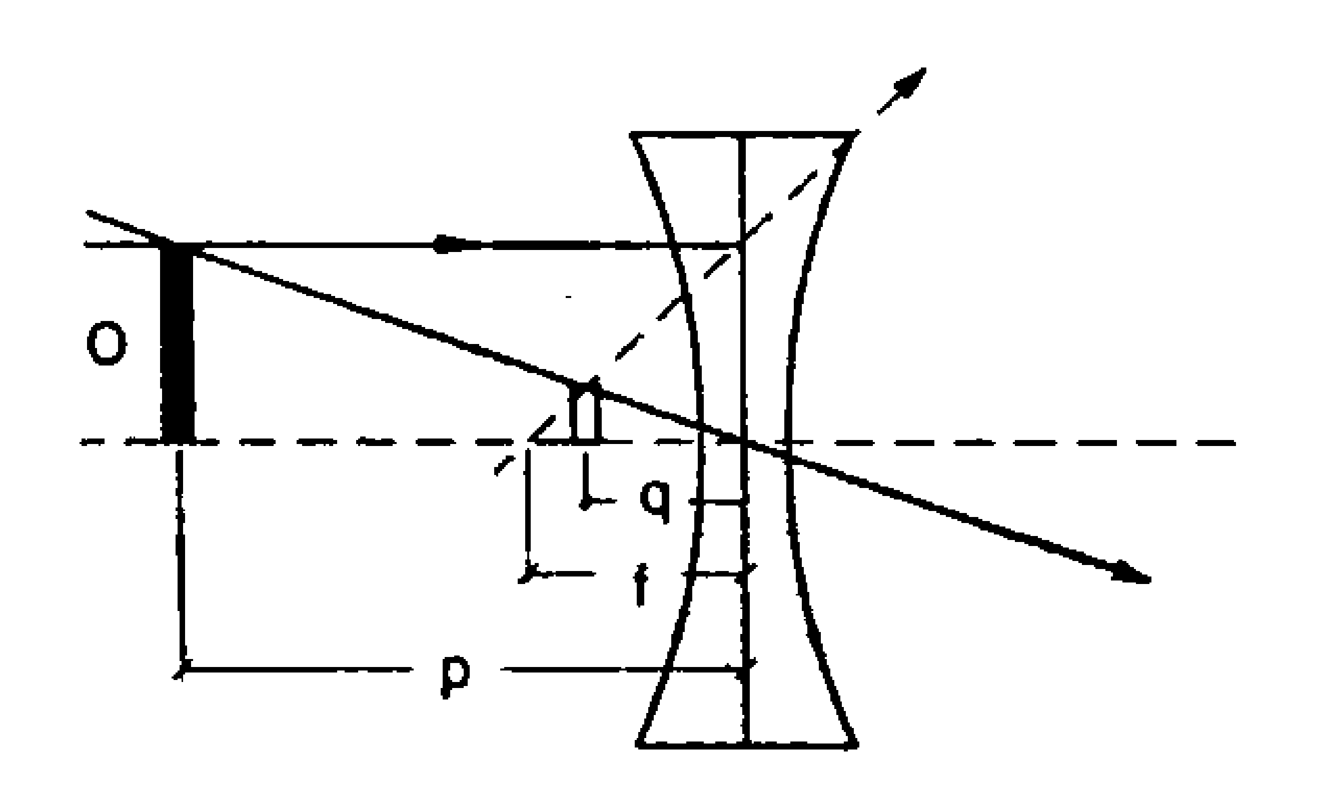
$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} + \frac{1}{p} = \frac{1}{30} - \frac{1}{10}$$

$q = -15$ cm (virtual)

b) $$A = -\frac{q}{p} = -\frac{-15\text{ cm}}{10\text{ cm}}$$

$$A = 1{,}5$$

PROBLEMA 7. Calcular gráfica y analíticamente el tamaño y la posición de la imagen de un objeto de 20 cm, situado a 30 cm de la lente divergente, cuya distancia focal es 25 cm.



RESOLUCIÓN :

$O = 20$ cm

$I = ? \qquad p = 30$ cm

$q = ? \qquad f = -25$ cm

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{f} - \frac{1}{p} = \frac{1}{-25} - \frac{1}{30} = -\frac{55}{750}$$

$\therefore\ q = -13{,}6$ cm (imagen virtual)

Cálculo del tamaño :

$$A = -\frac{q}{p} = -\frac{-13{,}6}{30} = 0{,}45$$

$$I = 0{,}45 \times O$$

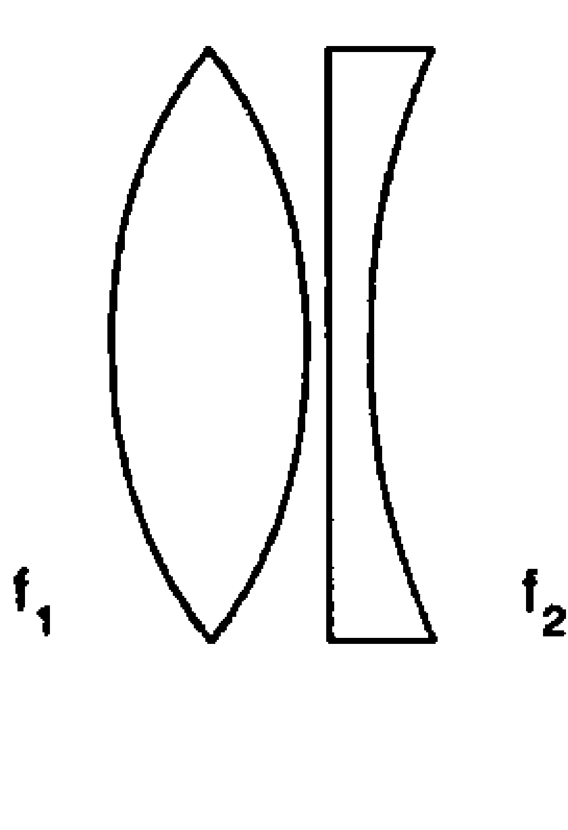
$$I = 0{,}45 \times 20\text{ cm} = 9\text{ cm}$$

LENTES EQUIVALENTES

Lente equivalente es una lente que reemplaza a un conjunto de 2 o más lentes que están una frente a la otra.

Hay dos casos: (f = distancia focal del conjunto).

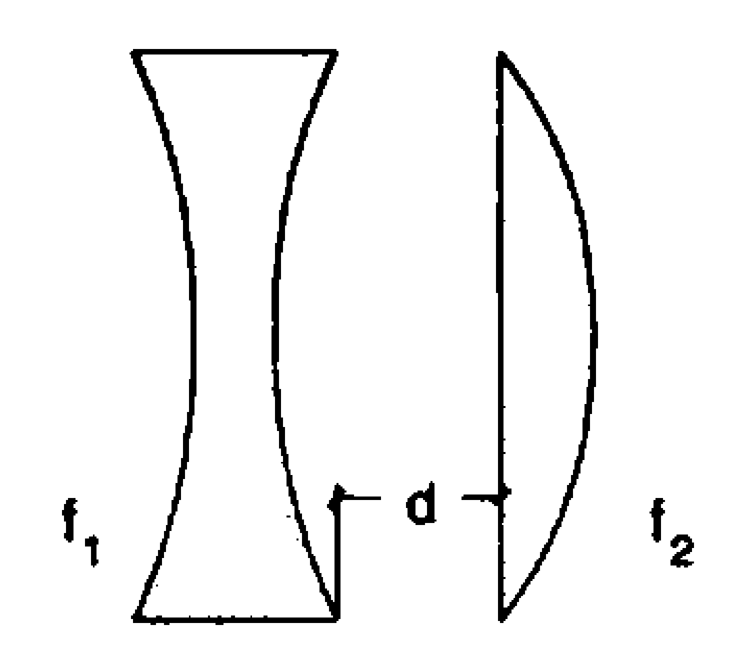
a) Lentes de contacto



$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}}$$

b) Lentes separados

http://librosysolucionarios.net



$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} - \frac{d}{f_1 f_2}$$

PROBLEMA 8. Se juntan dos lentes delgadas de -5 cm y -8 cm de distancia focales. ¿Cuál es la distancia focal del conjunto?

RESOLUCIÓN :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} = \frac{1}{-5} + \frac{1}{-8}$$

$$\frac{1}{f} = \frac{+(8+5)}{-40} \ ; \qquad \text{de donde:}$$

$$f = -3{,}1 \text{ cm} \qquad \text{(divergente)}$$

PROBLEMA 9. Se combinan dos lentes delgadas de +8 y -13 dioptrías. ¿Cuál será la potencia y la distancia focal de la combinación?

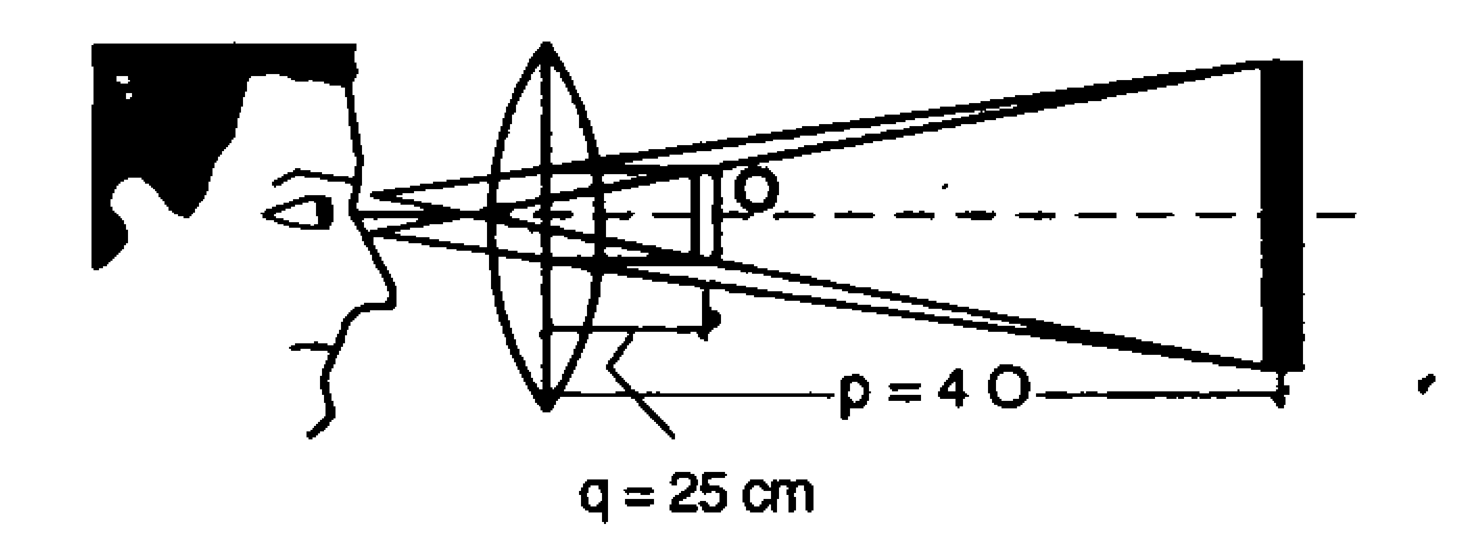
RESOLUCIÓN :

$$\text{Pot.} = +8 - 13 = -5 \text{ dioptrías}$$

Cálculo de f : Pot. $= \frac{1}{f}$; de donde:

$$f = \frac{1}{\text{Pot.}} = \frac{1}{-5 \text{ diopt.}} = -0{,}2\frac{1}{\text{diopt.}} = -0{,}2 \text{ m}$$

PROBLEMA 10. Un présbita se comprueba que no ve bien objetos a una distancia menor de 40 cm. Calcular la potencia de sus lentes para que vea con nitidez un cuerpo situado a 25 cm.



RESOLUCIÓN: La lente será convergente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

Sustituyendo los datos:

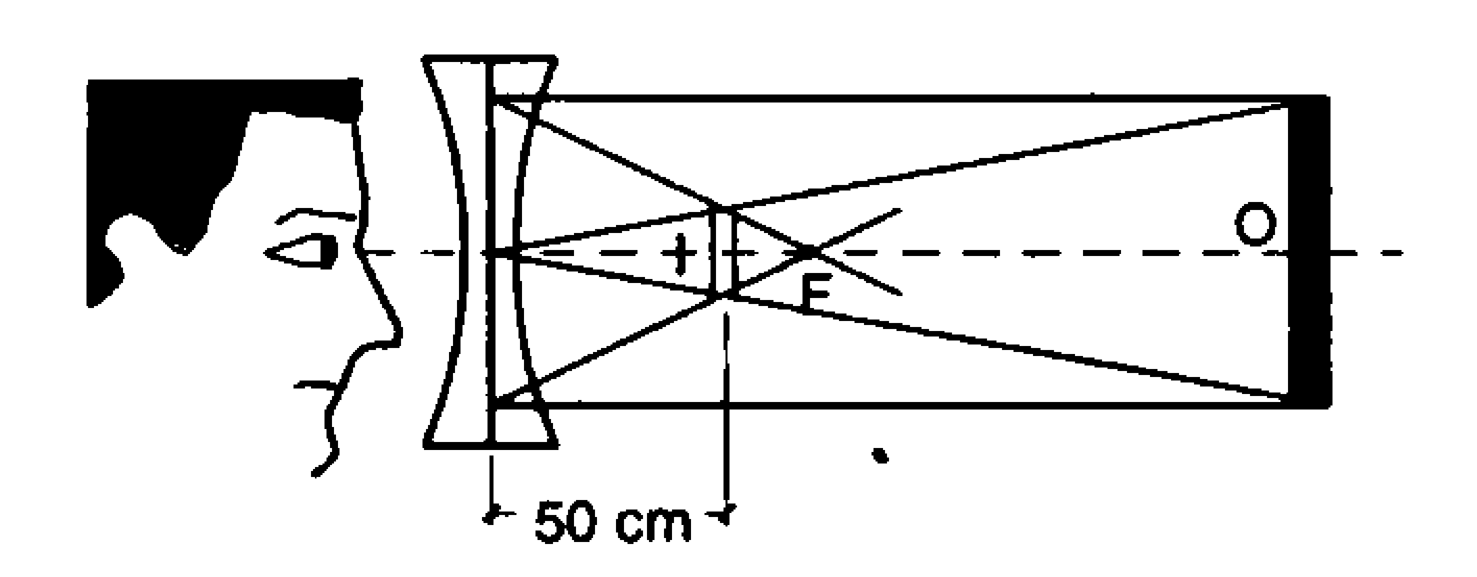
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{25} + \frac{1}{-40} = \frac{15}{1\,000}$$

Luego: $f = 66{,}6 \text{ cm} = 0{,}67 \text{ m}$

$$\text{Potencia} = \frac{1}{f} = \frac{1}{0{,}67 \text{ m}} = 1{,}5 . \frac{1}{m}$$

Rpta.: Potencia = 1,5 dioptrías.

PROBLEMA 11. Una persona miope no distingue con claridad objetos situados más allá de los 50 cm de sus ojos. ¿Cuál será la potencia de sus lentes para que vea con nitidez los objetos situados más allá de los 50 cm?



RESOLUCIÓN : La lente será divergente:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$$

Si el objeto está muy alejado o es grande, por consiguiente 1/p tiende a cero; entonces: $p = \infty$.

http://librosysolucionarios.net

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{-50\text{ cm}} + 0$$

$$f = -0{,}50\text{ m}$$

$$\text{Potencia} = \frac{1}{f} = \frac{1}{-0{,}5\text{ m}} = -2\,\frac{1}{m}$$

Rpta.: Potencia = -2 dioptrías

PROBLEMA 12. Una lente convergente que tiene una distancia focal de 5 cm está en contacto con una lente convergente que tiene una distancia focal de 10 cm de tal manera que sus ejes principales coinciden. Hallar la longitud focal del sistema.

RESOLUCIÓN :

a) $f_1 = 5\text{ cm}$ y $f_2 = 10\text{ cm}$ (1)

b) Por fórmula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2} \qquad (2)$$

Reemplazando (1) en (2):

$$f = 3{,}33\text{ cm}$$

PROBLEMA 13. Una lente convergente tiene una distancia focal de 40 cm. Hallar la posición de un objeto y la naturaleza de la imagen si el aumento es -0,6.

RESOLUCIÓN : Por datos:

a) $A = -\frac{q}{p}$; $-0{,}6 = -\frac{q}{p}$

$$q = 0{,}6\,p \qquad (1)$$

b) $f = +40\text{ cm}$ (2)

Por fórmula:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} \qquad (3)$$

Reemplazando (1) y (2) en (3) :

$$\frac{1}{40\text{ cm}} = \frac{1}{p} + \frac{1}{0{,}6\,p}$$

De donde: $p = 1{,}066\text{ m}$ (4)

Reemplazando (4) en (1) :

(4) en (1): $q = +0{,}639\,6\text{ cm}$

Para q (+) indica que la imagen se encuentra en el otro lado de la lente y por consiguiente su imagen es real.

PROBLEMA 14. Una lente convergente tiene una distancia focal de 60 cm. Hallar la posición de un objeto para producir una imagen real y tres veces mayor.

RESOLUCIÓN :

a) Como la imagen es real, el aumento debe ser negativo y por lo tanto:

$$A = -3 = -\frac{q}{p}$$

$$q = 3\,p \qquad (1)$$

b) Por fórmula: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (2)

Reemplazando (1) en (2) y considerando $f = 60\text{ cm}$:

$$p = 80\text{ cm}$$

PROBLEMA 15. ¿Dónde se debe colocar un objeto respecto a una lente convergente para que la imagen sea el doble de tamaño que el objeto? Exprese su respuesta en términos de f. ¿La imagen es real o virtual?

RESOLUCIÓN : Para una lente convergente, se tiene que, ubicando el objeto entre el centro de curvatura y el foco objeto, se puede obtener una imagen real mayor, y ubicándolo entre el foco objeto y el centro óptico se obtiene una imagen virtual mayor que el objeto.

I) Objeto entre "C" y "F" :

La imagen es real

$$\therefore \qquad A = -2 \qquad (1)$$

http://librosysolucionarios.net

Por otra parte: $A = -\frac{q}{p}$ (2)

(1) = (2) : $q = 2p$ (3)

II) Por fórmula: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (4)

(3) en (4) : $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p}$

$$p = 1{,}5\,f$$

III) Objeto entre "F" y "O" :

Como la imagen es virtual:

$A = 2$ (1)'

Por otra parte: $A = -\frac{q}{p}$ (2)'

(1)' = (2)' : $q = -2p$ (3)'

IV) Por fórmula: $\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{q}$ (4)'

Reemplazando (3)' en (4)' :

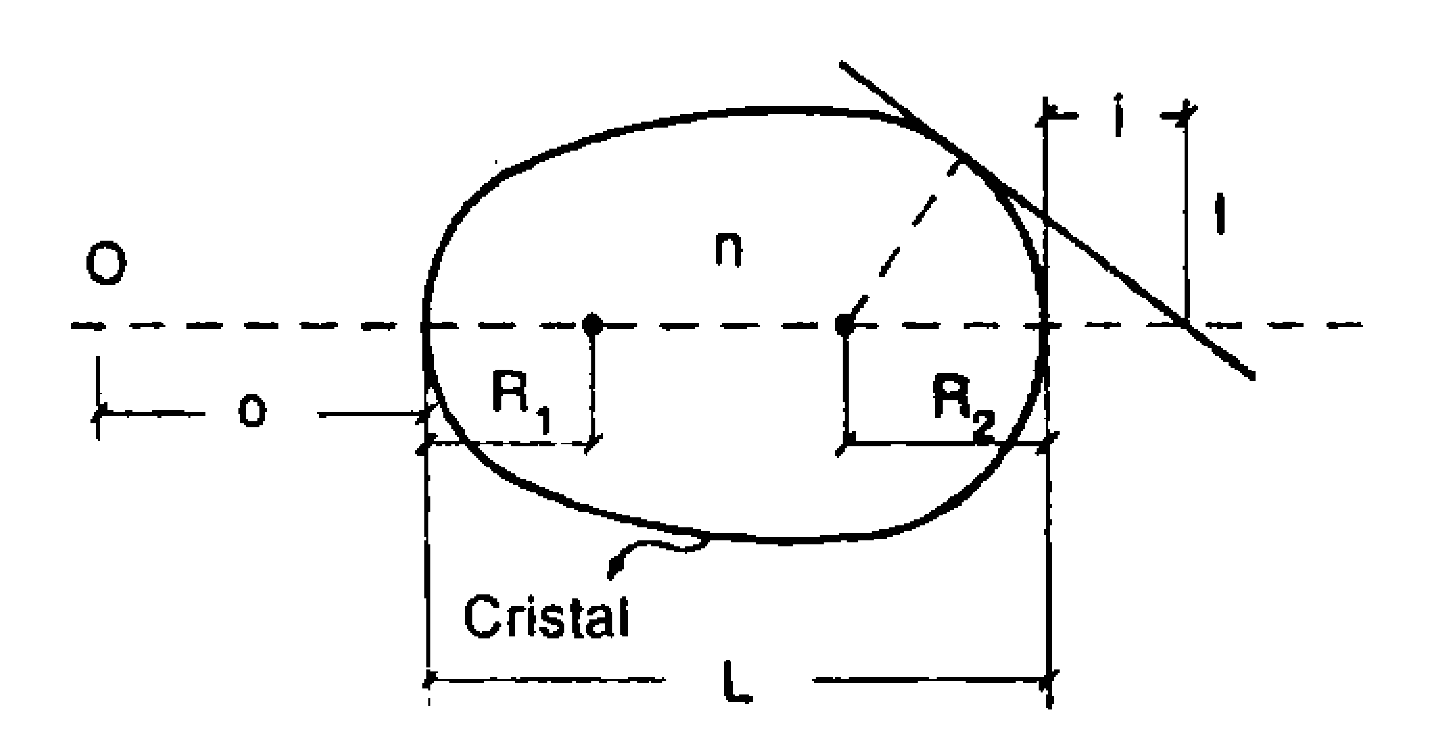
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{p} + \frac{1}{2p} \Rightarrow p = \frac{f}{2}$$

Para un aumento doble, el objeto se ubica en dos posiciones para una imagen real y virtual.

LENTES GRUESAS DE DOS CARAS DE CURVATURA

(COMBINACIÓN DE LENTES)

La figura muestra una lente gruesa de dos radios de curvatura.



La ecuación que a continuación se indica, sin deducción, es lo que se llama: "Ecuación del fabricante de lentes". Por claridad, se exagera el grosor "L" de la lente en la figura:

$$\boxed{\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)}$$

n: Índice de refracción de la lente con respecto al medio en que se encuentra.

f: Foco resultante de la combinación de lentes.

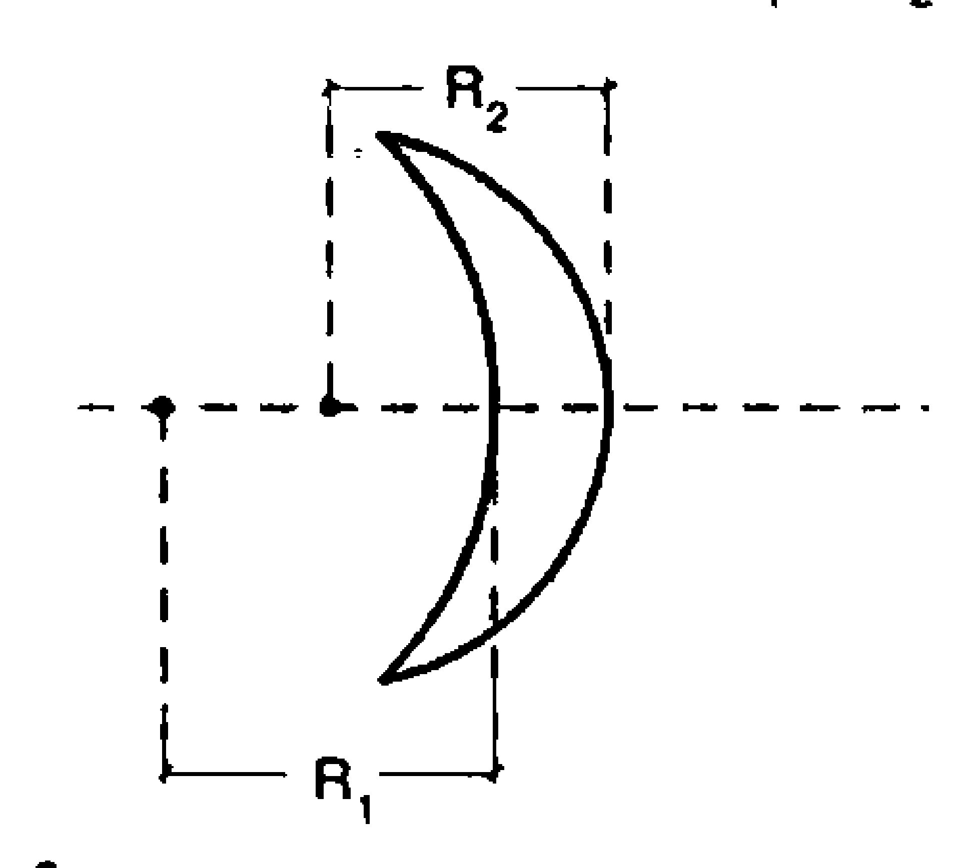
Si R_1 o R_2 son trazados desde la zona real, se considera (+) pero si son trazados desde la zona virtual, se considera (-).

POTENCIA DE LENTES DELGADAS DE CONTACTO

Lentes de contacto son dos lentes de radio de curvatura ligeramente diferentes, dependiendo la diferencias de radio de la potencia que quiera dársele.

La potencia de la lente es:

$$P = P_1 + P_2 \Rightarrow \frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$



Si una lente es muy gruesa, los rayos de luz que pasan cerca a los bordes se descomponen, formando imágenes coloreadas, conociéndose este efecto como **Aberración Cromática** de una lente.

PROBLEMA 1. Una lente está formada por una lente convexa de

30 cm de radio y otra cóncava de 60 cm de radio. El índice de refracción del cristal es 1,6. Hallar la distancia focal de la lente y decir si es convergente o divergente.

RESOLUCIÓN:

$R_1 = 30\text{ cm} \qquad f = ?$

$R_2 = 60\text{ cm}$

$n = 1,6$

convergente o divergente = ?

a) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$\frac{1}{f} = (1,6-1)\left(\frac{1}{30\text{ cm}} - \frac{1}{60\text{ cm}}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{0,6}{60\text{ cm}} \Rightarrow f = 100\text{ m}$$

b) Como f es positivo la lente es convergente.

PROBLEMA 2. Una lente biconvexa, tiene 20 y 25 cm de radio. Se coloca un objeto a 30 cm de distancia de la lente y se forma una imagen a 40 cm de la lente. Calcular:

a) La distancia focal.
b) Indice de refracción.

RESOLUCIÓN: $R_1 = 20\text{ cm}$

$p = 30\text{ cm} \qquad R_2 = 25\text{ cm}$

$q = 40\text{ cm}$

a) $\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p}$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{40\text{ cm}} + \frac{1}{30\text{ cm}} = \frac{1}{270\text{ cm}}$$

$\therefore \qquad f = +17,14\text{ cm}$

b) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$n-1 = \frac{\frac{1}{f}}{\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}} = \frac{R_1 \cdot R_2}{f(R_2 - R_1)}$$

$$n = \frac{R_1 \cdot R_2}{f(R_2 - R_1)} + 1\text{ ; su ..... dato:}$$

$n = 1,65$

PROBLEMA 3. Una lente biconvexa, tiene 25 cm de radio de curvatura de sus dos caras. El índice de re fracción del cristal es 1,54. Calcular:

a) La distancia focal de la lente
b) La distancia focal cuando se sumerge en el sulfuro de carbono $n = 1,65$

RESOLUCIÓN: $R_1 = R_2 = 25\text{ cm}$

$n_1 = 1,54 \quad ; \quad n_2 = 1,65$

a) $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$

$$= (1,54-1)\left(\frac{1}{25\text{ cm}} - \frac{1}{-25\text{ cm}}\right)$$

$$f_1 = 23,15\text{ cm}$$

b) Cuando se introduce en el sulfuro de carbono, como el cristal es menos refringente que el sulfuro de carbono (1,54 < 1,65), la lente en el medio de sulfuro de carbono se convierte en divergente, entonces su distancia focal se calculará sobre la base del índice de refracción relativo del cristal con respecto al sulfuro de carbono.

- Cálculo del índice de refracción relativo:

$$n_r = \frac{n_{cristal}}{n_{S_2C}} = \frac{1,54}{1,65} = 0,93$$

$$\frac{1}{f} = (n_r - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = (0,93-1)\left(\frac{1}{25\text{ cm}} - \frac{1}{-25\text{ cm}}\right)$$

$$f = -178,57\text{ cm}$$

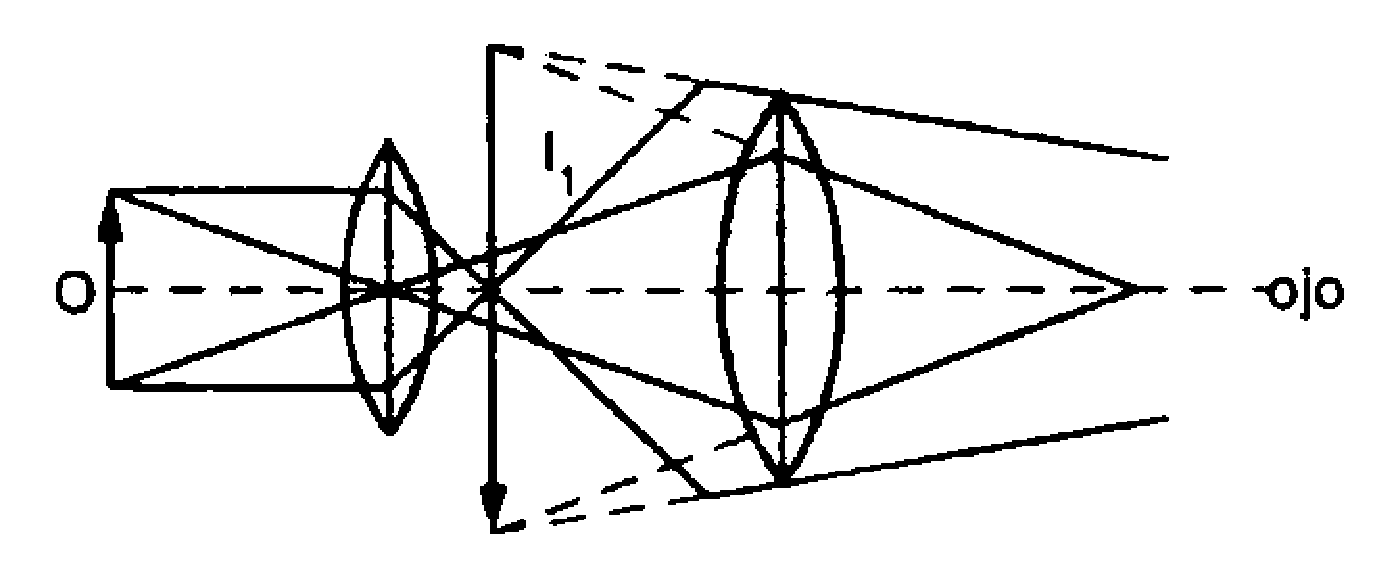
http://librosysolucionarios.net

APLICACIÓN DE LAS LENTES EN APARATOS ÓPTICOS

Los instrumentos que acercan los objetos alejados o que agrandan los objetos pequeños cercanos se llaman "Aparatos Ópticos". Ejem.: Telescopio, microscopio.

INSTRUMENTOS DE APROXIMACIÓN

Forma imágenes virtuales de objetos muy alejados, por ejem.:



Telescópio de Kepler

EL TELESCOPIO:

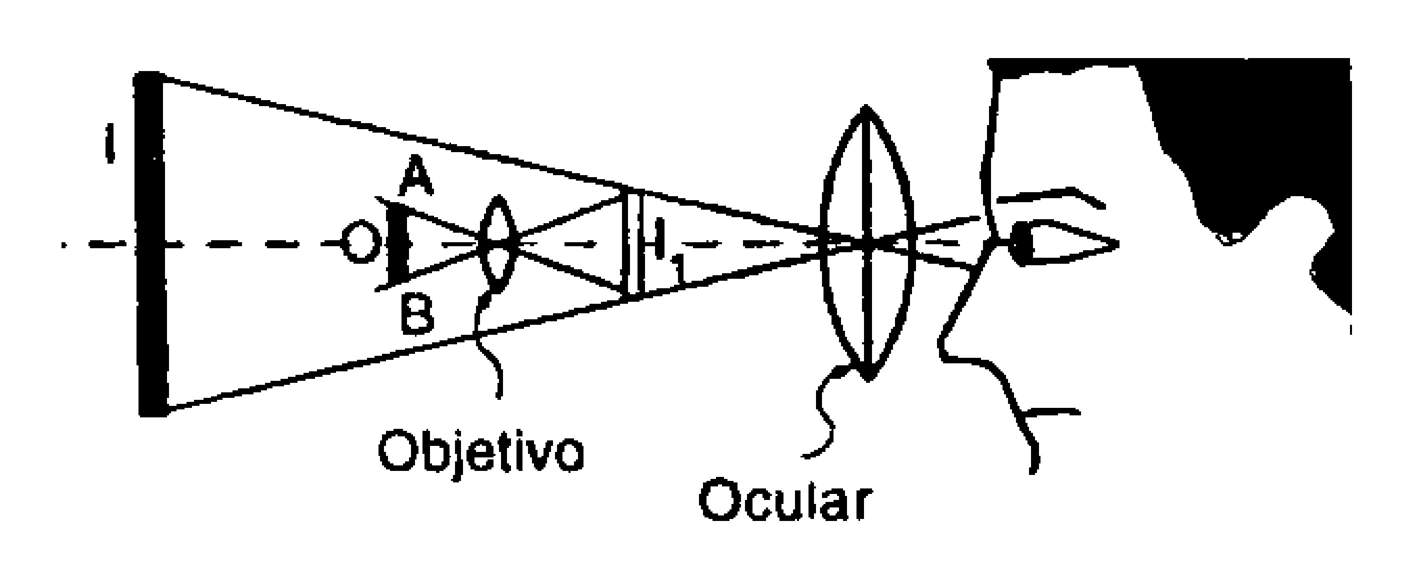
Es una aparato que tiene una lente que se llama "objetivo" porque sirve para captar los rayos procedentes del objeto y formar una imagen: I_1, esta imagen a su vez sirve de objeto a otra lente llamada "ocular" a través del cual se observa los ojos.

INSTRUMENTOS DE AMPLIACIÓN

Son instrumentos que forman imagen de tamaño aumentado y virtual de los objetos, por ejemplo:

EL MICROSCOPIO:

Está constituido por dos lentes convergentes, un "objetivo" que se coloca cerca del objeto con una distancia focal pequeña y un "ocular" de una distancia focal mayor.



PROBLEMA 4. Una lente bicóncava tiene 20 y 30 cm de radio. Se coloca un objeto a 40 cm y se forma una imagen real de 50 cm de la lente. Calcular el índice de refracción.

RESOLUCIÓN : $\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$ (I)

Cálculo de f :

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{q} + \frac{1}{p} = \frac{1}{50} + \frac{1}{40} = \frac{9}{200}$$

$$f = 22{,}2 \text{ cm}$$

En (I): $$\frac{1}{22{,}2} = (n-1)\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right)$$

$$\frac{1}{22{,}2} = (n-1)\left(\frac{1}{20} - \frac{1}{30}\right)$$

Rpta.: $n = 1{,}54$

PROBLEMA 5. Una lente convexo cóncava tiene 30 y 40 cm de radio, respectivamente, su índice de refracción es de 4/3. Calcular:

a) Distancia focal.
b) La lente es convergente y divergente?

RESOLUCIÓN :

$R_1 = 30$ cm $\quad n = \frac{4}{3} \quad R_2 = 40$ cm

$$\frac{1}{f} = (n-1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \left(\frac{4}{3} - 1\right)\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{40}\right)$$

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{3} \times \frac{1}{120} = \frac{7}{360}$$

Rpta.: $f = 51{,}4$ cm

b) Como la distancia focal es positiva, la lente es convergente.

CAPÍTULO 20

EL FENÓMENO ONDULATORIO

Gran parte de lo que se llama energía se transmite por movimientos ondulatorios: la luz, el sonido, la televisión, etc.

Cuando cae VERTICALMENTE una pequeña piedra en un pozo de aguas tranquilas se producen ondas al rededor del punto de caída como circunferencias concéntricas, unas tras otras, que van aumentando su radio, y a medida que van aumentando su radio se hacen cada vez más imperceptibles. Si en las inmediaciones del punto donde cayó la piedra hay un objeto flotando, el objeto no es "arrastrado" por las olas, pero sí adquiere un movimiento de sube y baja sobre la misma vertical, en otras palabras adquiere un movimiento oscilatorio o vibratorio.

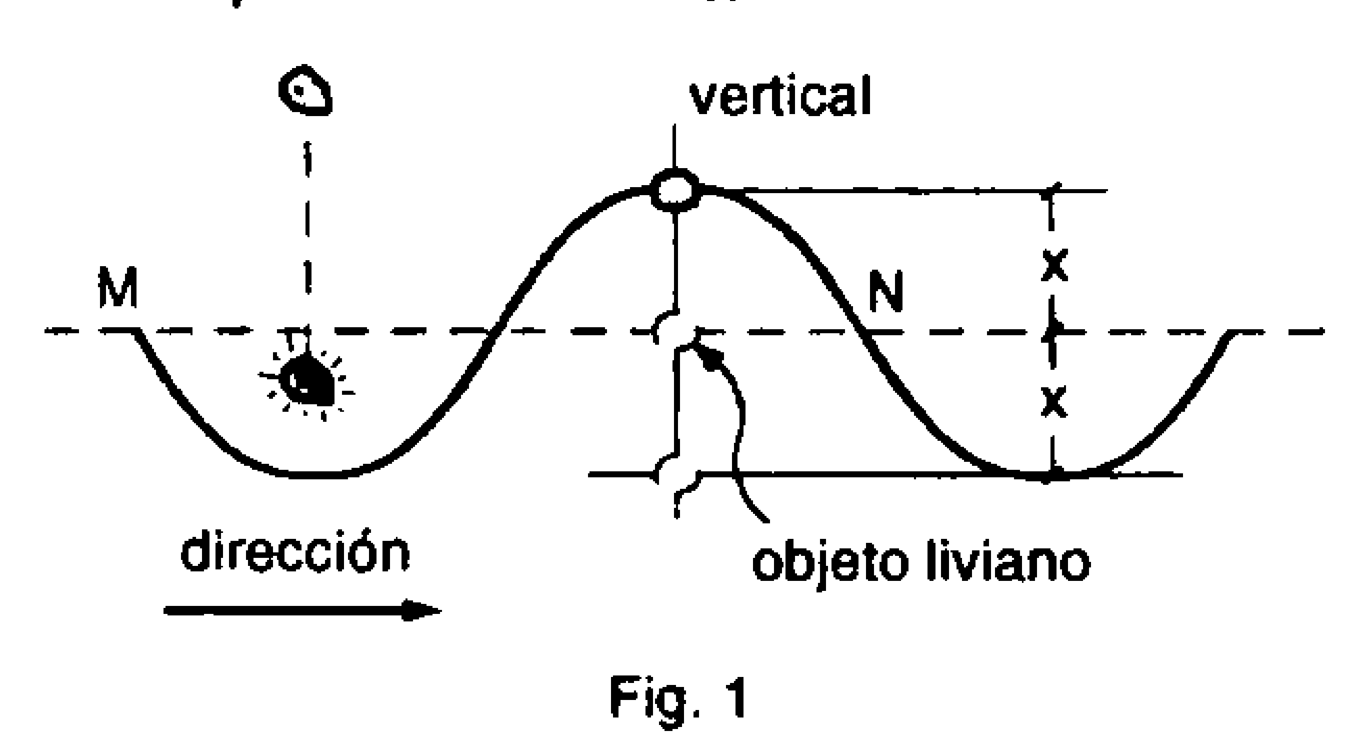


Fig. 1

PRINCIPIO DE HUYGENS PROPAGACIÓN DE UNA ONDA

Al ser golpeada una partícula del medio en que se propaga la energía ondulatoria, esta partícula empieza a vibrar armónicamente, este movimiento se transmite a otra partícula que está junto a ella, produciéndose también en ésta un movimiento vibratorio y así sucesivamente.

La transmisión del movimiento lo realiza cada partícula a la otra por la creación de una especie de "campo energético" que es el que transmite el movimiento vibratorio, transmitiéndose de esta manera la energía ondu-latoria. Christian Huygens descubrió este fenómeno y enuncio su principio:

"Todo punto perturbado por un movimiento ondulatorio se convierte en un centro productor de ondas".

Sean tres partículas que vibran (1) (2) (3), ó A, B y C.

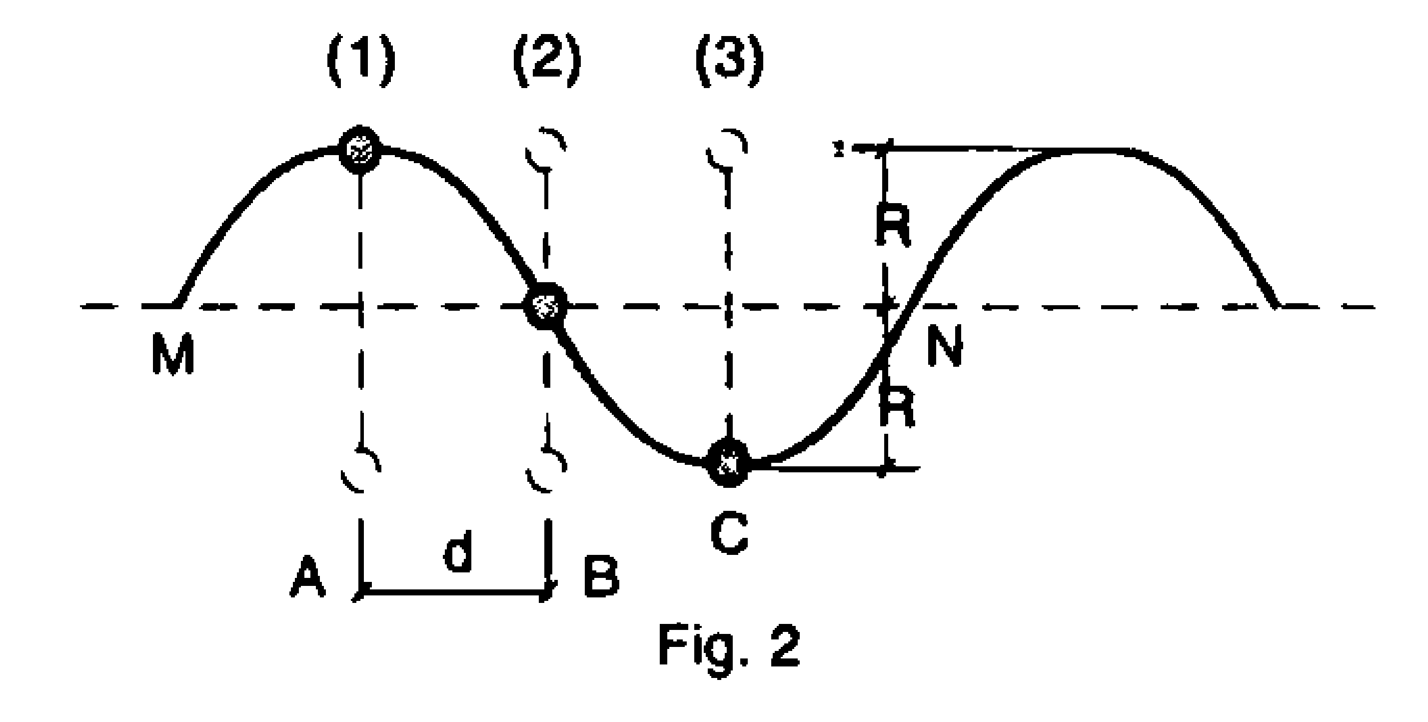


Fig. 2

Cada partícula vibra sobre una vertical con un movimiento armónico cuya elongación se calculará igual a la del movimiento armónico ya enunciado en su oportunidad.

$$x = R.\text{sen}\,\frac{2\pi.t}{T}$$

Si la onda se desplaza de izquierda a derecha, la partícula B empezará a vibrar un tiempo "t" después que em-pezó A, depende de la velocidad con que se propaga la onda.

$$\Delta t = \frac{d}{v}$$

Cuando la onda se está propagando ocurre los siguiente:

$$x_A = R.\text{sen}\,\frac{2\pi t}{T}$$

En ese mismo instante la elonga-ción de B será:

$$x_B = R.\text{sen}\,\frac{2\pi(t - \Delta t)}{T}$$

Según la dirección del movimiento ondulatorio y las partículas que las generan, las ondas pueden ser transversales y longitudinales:

ONDAS TRANSVERSALES

Son aquellas ondas que se desplazan tranversalmente a la dirección del movimiento de la partícula que genera
la energía ondulatoria.
Ejemplo: los mencionados anteriormente que sirvieron para explicar la propagación de la onda.

ONDAS LONGITUDINALES

Cuando el movimiento de la onda, sigue la dirección de la partícula que genera el movimiento ondulatorio. Ejemplo: una partícula de un resorte que oscila.

ELEMENTOS DE UNA ONDA

Ciclo :

Es el movimiento causado por una onda, comprendido entre dos puntos
consecutivos de posición semejante. MN en las figuras 1 y 2.

Período "T" :

Es el tiempo que demora un ciclo.

Velocidad :

Es la rapidez con que una onda se propaga en un medio homogéneo. Toda onda se propaga en línea recta y con velocidad constante.

$$v = \frac{d}{t} = \frac{\lambda}{T} \quad ó \quad v = \lambda f$$

Cresta :

Es el punto más elevado de una onda.

Valle :

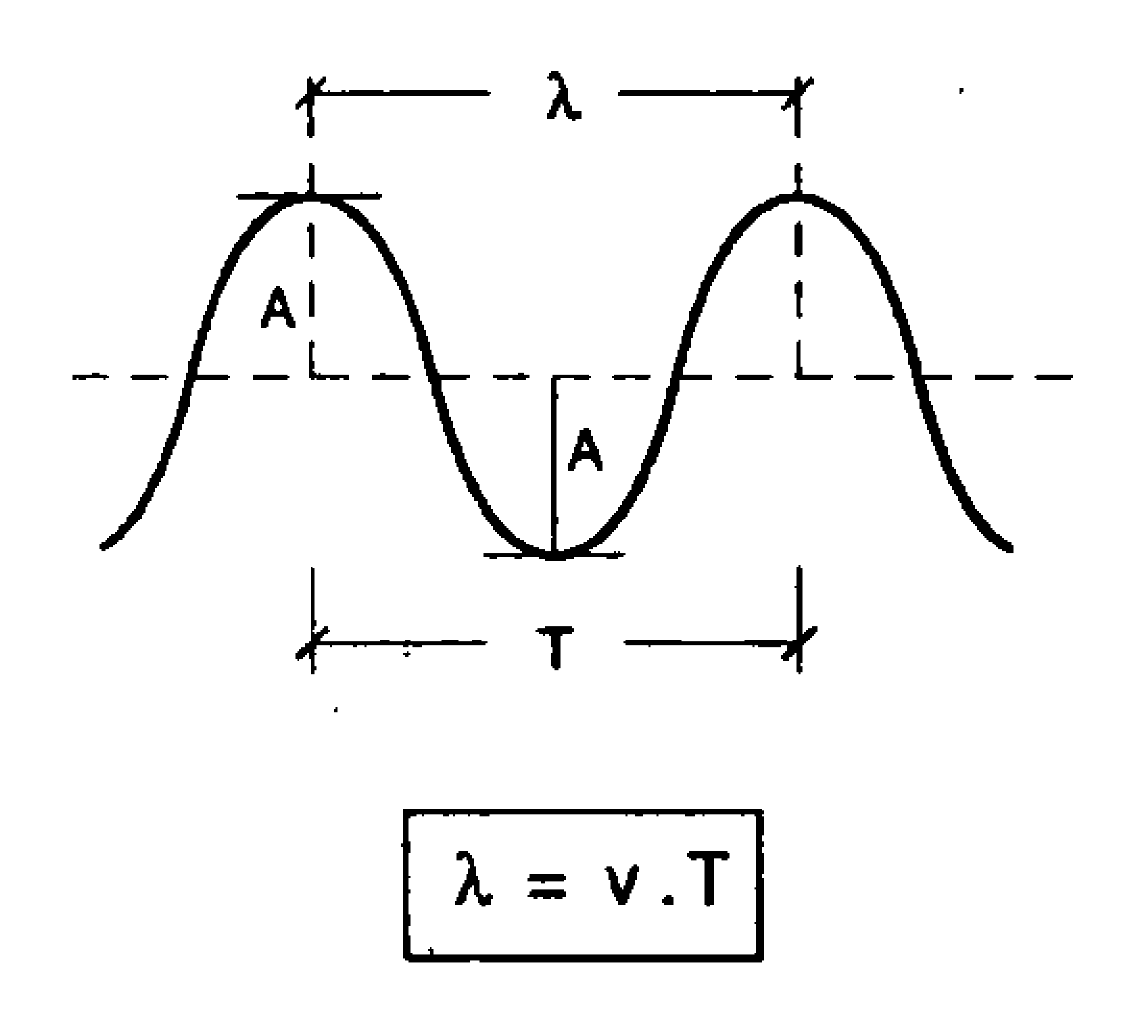
Es el punto más bajo de una onda.

Amplitud "A" :

Es la altura de una cresta o la profundidad de un valle.

Longitud de onda "λ" :

Es la distancia medida entre dos puntos consecutivos de posición semejante. Es la longitud de un ciclo.



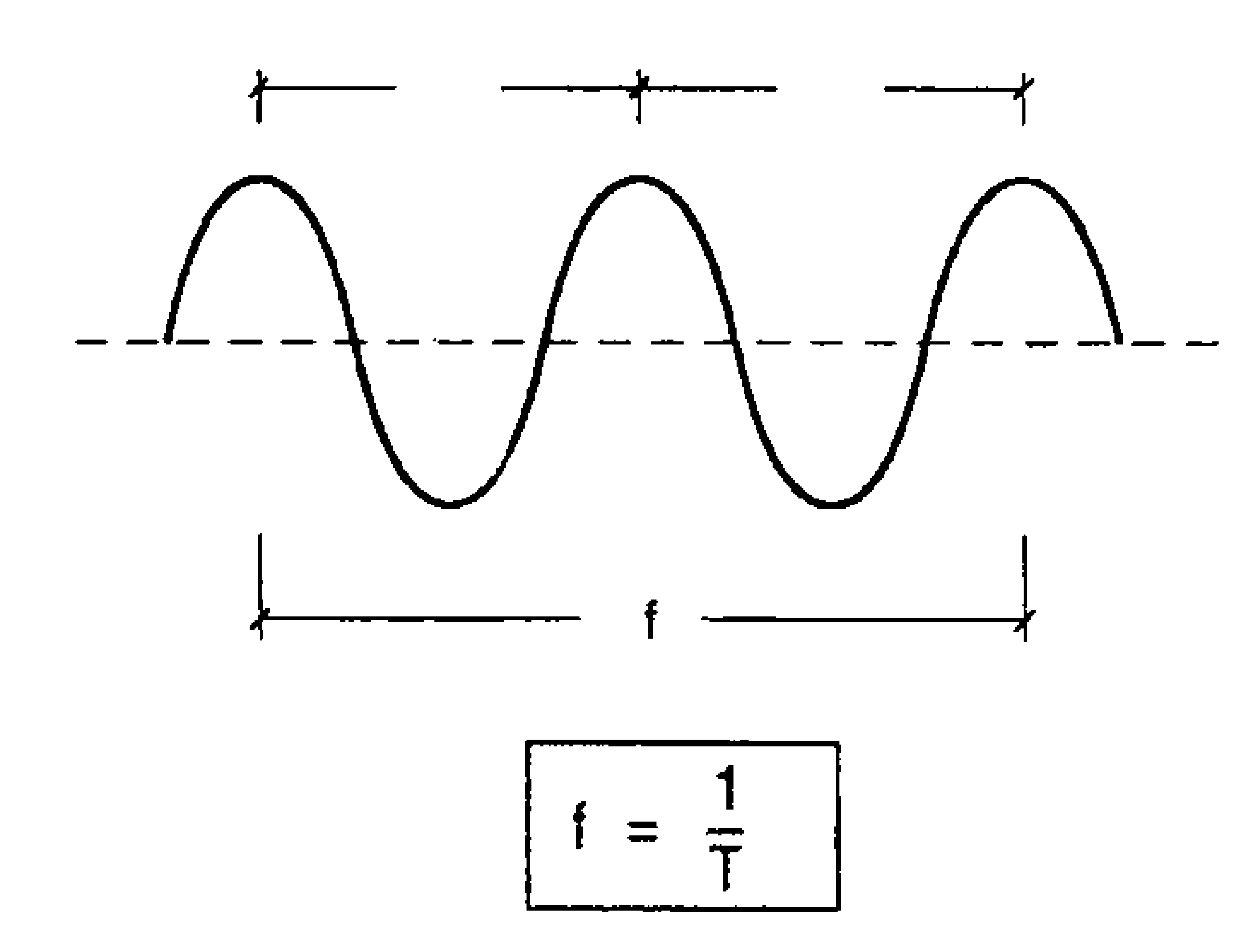
$$\boxed{\lambda = v.T}$$

Frecuencia de onda :

Es el número de veces que se repite la longitud de onda en la unidad de tiempo.

Matemáticamente es igual a la inversa del período.

http://librosysolucionarios.net



$$f = \frac{1}{T}$$

Ejemplo : En la figura anterior se producen dos longitudes de onda en 1 s, y si el período es de 0,5 s quiere decir que la frecuencia es de 2 ondas/s.

$$f = \frac{1 \text{ onda}}{0{,}5 \text{ s}} = 2 \frac{\text{ondas}}{\text{s}}$$

ECUACIÓN DE LA ONDA

La ecuación de elongación de un punto en una onda es:

$$x = A \cdot \text{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

Donde: A = Amplitud de onda

La ecuación de otro punto, que está en la misma onda pero más allá y en el mismo instante es:

$$x = A \cdot \text{sen} \frac{2\pi (t - \Delta t)}{T}$$

Pero: $\Delta t = \frac{d}{v}$, luego:

$$x = A \cdot \text{sen} \frac{2\pi \left(t - \frac{d}{v} \right)}{T} \quad \text{ó:}$$

$$x = A \cdot \text{sen}\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{vT} \right)$$

Pero: $vT = \lambda$, luego:

$$x = A \cdot \text{sen}\, 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right)$$

Que es la ecuación de la onda.

FASE DE UNA ONDA

Es el ángulo que hace la trayectoria de la onda con la horizontal en determinado instante. Su valor es el ángulo de la ecuación de la onda.

$$Q = 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{d}{\lambda} \right)$$

PROBLEMA 1. Una partícula "P" empieza a vibrar con movimiento oscilatorio de 1,2 cm de amplitud y de 0,6 s de período, propagán-dose a una velocidad de 10 cm/s. Si una partícula "N" está a 4 cm de "P" y a la derecha, calcular:

a) ¿Después de cuánto tiempo de iniciada la vibración de P empieza a vibrar N?

b) La elongación de P cuando la onda llega a N.

c) La elongación de P, después de 1,13 s de haber comenzado su vibración.

d) La elongación de N, después de 1,0 s de haber comenzado la vibración de P.

e) ¿Cuánto tiempo después de empezar su vibración, N tendrá la misma elongación que tenía P a los 1,1 s después de haber iniciado su vibración?

RESOLUCIÓN :

$$A = 1{,}2 \qquad d = 4{,}0 \text{ cm}$$
$$T = 0{,}06 \text{ s} \qquad v = 10 \text{ cm/s}$$

a) Cálculo del tiempo en que la onda llega de P a N:

$$\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{4{,}0 \text{ cm}}{10 \text{ cm/s}} = 0{,}4 \text{ s}$$

b) Cálculo de la elongación de P en el momento en que la onda llega a N:

$$x_P = A \cdot \text{sen} \frac{2\pi t}{T}$$

http://librosysolucionarios.net

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi \cdot 0{,}4\text{ s}}{0{,}06}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{40\pi}{3}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm}\,(-0{,}866)$$

$$x_P = -1{,}04$$

c) Elongación de P a los 1,13 s de iniciada la vibración:

$$x_P = A \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi t}{T}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi \cdot 1{,}13\text{ s}}{0{,}06}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{2{,}26\pi}{0{,}06}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm}\,(-0{,}866)$$

$$x_P = -1{,}04$$

d) Como el tiempo que demora para llegar la vibración de N hasta P es de 0,4 s, quiere decir que recién empieza a vibrar N, entonces mientras P está vibrando hace ya 1 s, N recién hace 0,6 s (1,0 - 0,4) que empezó a vibrar.

$$x_N = A \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi t}{T}$$

$$x_N = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi \cdot 0{,}6\text{ s}}{0{,}06}$$

$$x_N = 1{,}2\text{ cm} \,.\, \text{sen}\,20\pi$$

$$x_N = 1{,}2\text{ cm} \,.\, 0$$

$$x_N = 0$$

e) Cálculo de la elongación de P después de 1,1 s:

$$x_P = A \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi t}{T}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \cdot \text{sen}\,\frac{2\pi \cdot 1{,}1\text{ s}}{0{,}06\text{ s}}$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \,.\, \text{sen}\,36{,}67\pi$$

$$x_P = 1{,}2\text{ cm} \,.\, (-0{,}866)$$

$$x_P = -1{,}04\text{ cm}$$

Cálculo del tiempo que pasa desde el momento que empezó a vibrar N para que su elongación sea -1,04 cm.

$$x_N = R\,\text{sen}\,\frac{2\pi t}{T} \qquad \text{De donde:}$$

$$\text{De donde:} \quad \text{sen}\,\frac{2\pi t}{T} = \frac{x_B}{A}$$

$$\text{sen}\,\frac{2\pi t}{T} = \frac{1{,}04\text{ cm}}{1{,}2\text{ cm}} = 0{,}867\text{ cm}$$

$$\therefore \quad \frac{2\pi t}{T} = 1{,}047 \qquad \text{De donde:}$$

$$t = \frac{1{,}047\,T}{2\pi} = 0{,}01\text{ s}$$

Como para llegar la vibración a B tarda 0,4 s, quiere decir que la elongación de B será de 1,04 cm, pasando 0,4 s + 0,01 s, es decir:

$$t_T = 0{,}41\text{ s}$$

PROBLEMA 2. ¿Cuál será la fase de una onda de 0,5 s de período, a los 2 s, a una distancia de 7 cm de iniciado el movimiento ondulatorio, si la longitud de onda es 0,01 cm?

RESOLUCIÓN :

$$Q = 2\pi\left(\frac{2\text{ s}}{0{,}5\text{ s}} - \frac{7\text{ cm}}{0{,}01\text{ cm}}\right)$$

$$Q = 2\pi\,(-696) = -1\,392\,\pi$$

Como se trata de un número par de pi, quiere decir que el ángulo es 0°.

$$Q = 0\text{ radianes}$$

ONDAS SUPERPUESTAS

Son ondas que se pueden reforzar o se pueden interferir.
Sean dos ondas que llegan al punto A.

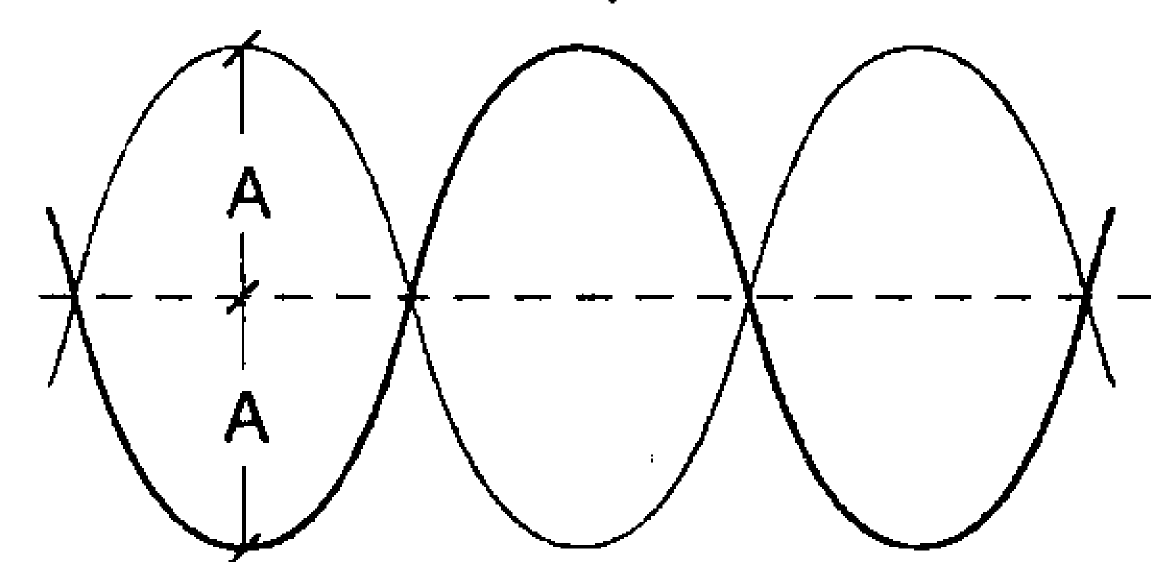
http://librosysolucionarios.net

1. Puede suceder que tengan la misma longitud de onda, el mismo período y LLEGAN EN FASE al punto A, entonces se REFUERZAN y la onda resultante continúa REFORZADA, es decir con mayor amplitud de onda.

Onda reforzada

A

2. Puede ser que teniendo la misma longitud de onda, el mismo período, pero que llegan al punto A en OPOSICIÓN DE FASE, entonces se INTERFIEREN o se anulan y desaparece el movimiento ondulatorio, DESAPARECE LA ONDA o la onda queda INTERFERIDA.



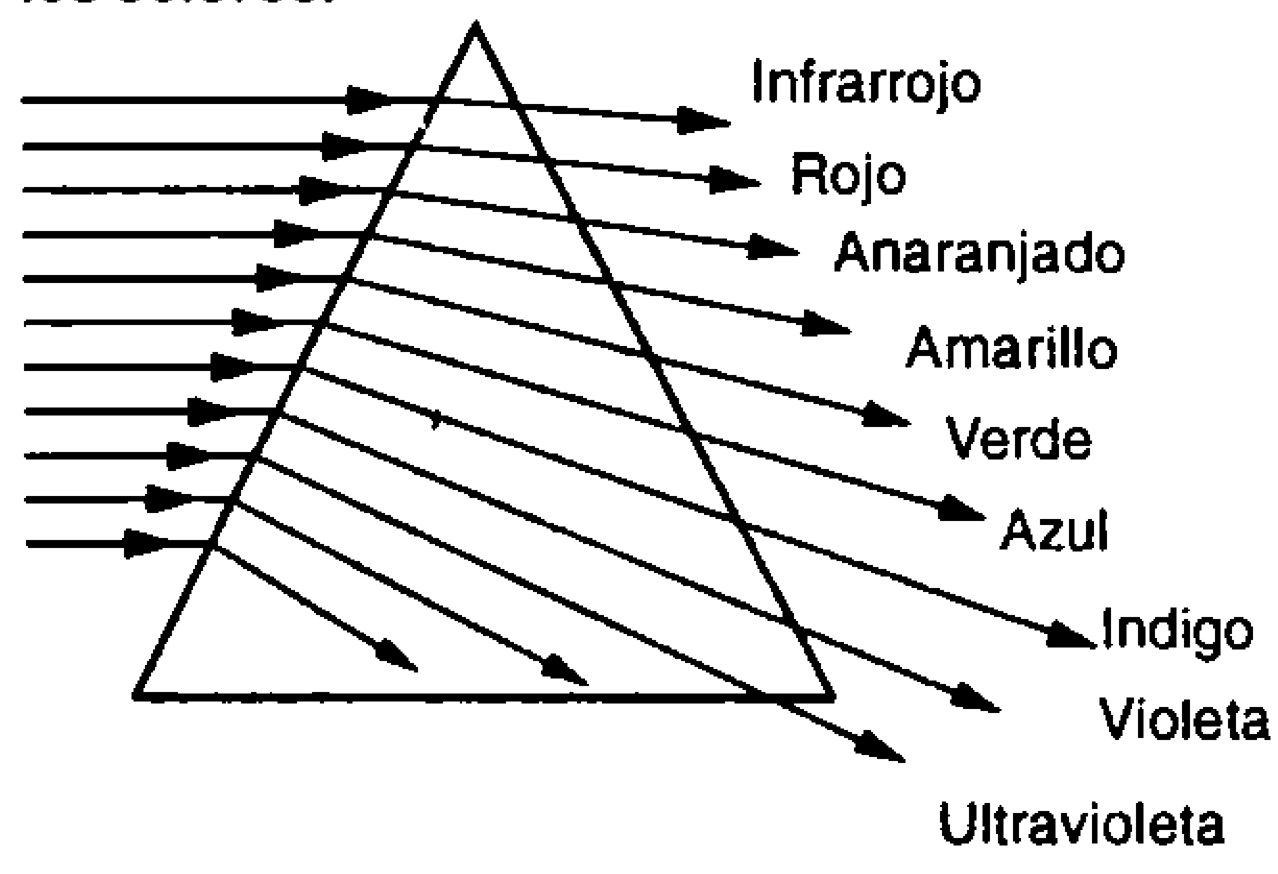
FENÓMENOS ONDULATORIOS DE LA LUZ

1. DISPERSIÓN

Es la descomposición de la luz blanca en sus colores componentes.

El primero que observó que la luz blanca se descomponía en sus colores componentes fué Isaac Newton, quien en un cuarto oscuro en un día de gran sol, hizo un hueco de 1 cm de diámetro en la puerta; a la luz del sol que entraba por ese hueco le interpuso un prisma de cristal y observó que en la pared de enfrente y en la parte alta se proyectaba los colores que contenía la luz blanca, a ese matiz de colores proyectado en forma de abanico se llama "espectro de la luz blanca".

La desviación que experimentan los diferentes colores de la luz solar se debe a las diferentes longitudes de onda de cada uno de los colores.



La luz monocromática tiene una sola longitud de onda: roja, verde, etc.

Hay colores invisibles al ojo humano como el "infrarrojo" cuya longitud de onda es alrededor de 30 000 A° y el ultravioleta cuya longitud de onda es alrededor de 3 000 A°.

VALORES DE LAS LONGITUDES DE ONDA DE COLORES VISIBLES	
Rojo	$6{,}5 \times 10^3$ A°
Anaranjado	$6{,}0 \times 10^3$ A°
Amarillo	$5{,}8 \times 10^3$ A°
Verde	$5{,}2 \times 10^3$ A°
Azul	$4{,}7 \times 10^3$ A°
Violeta	$4{,}1 \times 10^3$ A°

2. DIFRACCIÓN E INTERFERENCIA

La presencia de estos dos fenómenos en la luz prueba que ésta es una corriente ondulatoria porque una corriente corpuscular no origina estos fenómenos.

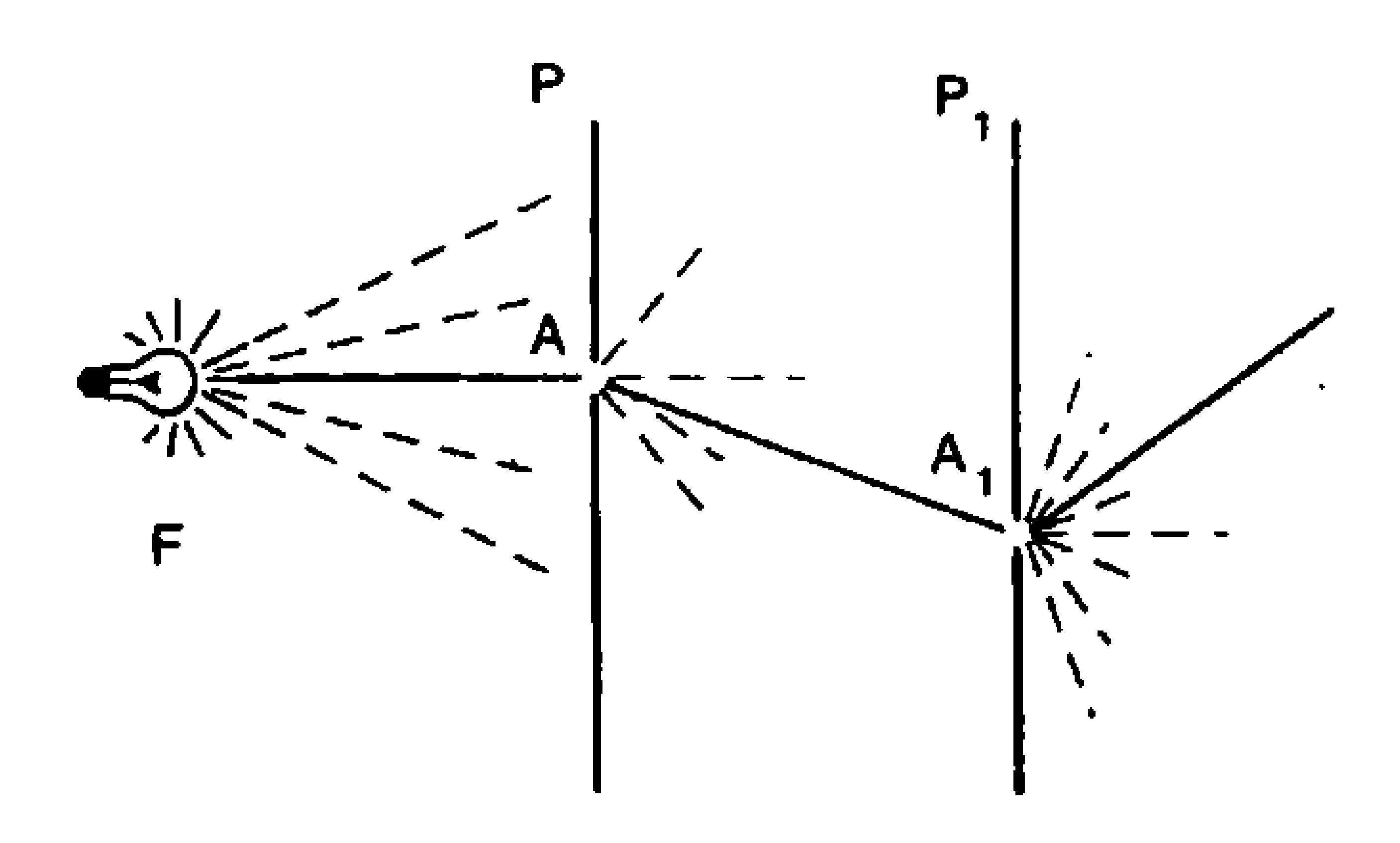
Difracción :

Es el fenómeno que consiste en la propaga-

http://librosysolucionarios.net

ción de la onda mediante pequeñas porciones de onda.

Sea por ejemplo un foco "F" que emite ondas luminosas que inciden en la pantalla "P", esta tiene una pequeñísima abertura "A" por donde pasa, a la derecha de la pantalla una pequeña porción de onda. De acuerdo al principio de Huygens, esta pequeña onda, es el origen de nuevas ondas que se propagan y se van alejando de la aber-tura "A" con la misma velocidad y con igual longitud de onda. Esta propiedad que tienen las ondas de propagarse por la presencia de pequeñas porciones de ondas se llama DIFRACCIÓN de las ondas.



Lo mismo ocurre con la pantalla P_1, con una pequeña abertura "A_1" tomando como foco luminoso "A", las ondas se propagarán por difracción a la derecha de la pantalla P_1

Interferencia :

Es el fenómeno luminoso que consiste en la interferencia de las ondas luminosas provenientes de dos focos para sumar su efecto luminoso o para anularse mutuamente.

Allá por el año 1 803, Tomás Young realizó un experimento que consiste en lo siguiente:

Sea un foco luminoso "F", figura 1, cuyos rayos (emisión de ondas), llegan a la pantalla "P" donde hay pequeñas aberturas "A_1" y "A_2" por donde pasa la luz, y de acuerdo al principio de Huygens, estas pequeñas porciones de ondas de luz se convierten en nuevos focos, los cuales emiten ondas de luz, ondas que al expandirse se interfieren.

Las ondas luminosas al interferirse pueden hacerlo en fase o desfasadas.

Las ondas que se interfieren en FASE, por ejemplo cresta con cresta o valle con valle, se refuerzan e iluminan cuando inciden en la pantalla "P_1"; pero las ondas que se interfieren DESFASADAS, por ejemplo valle con cresta, se atenúan y cuando llegan a la pantalla "P_1" no iluminan o iluminan muy poco. Este fenómeno se notará mejor en la figura 2, donde se muestra círculos iluminados por el impacto de las ondas en fase o reforzadas y círculos oscuros donde llegan ondas desfasadas o atenuadas o interferidas.

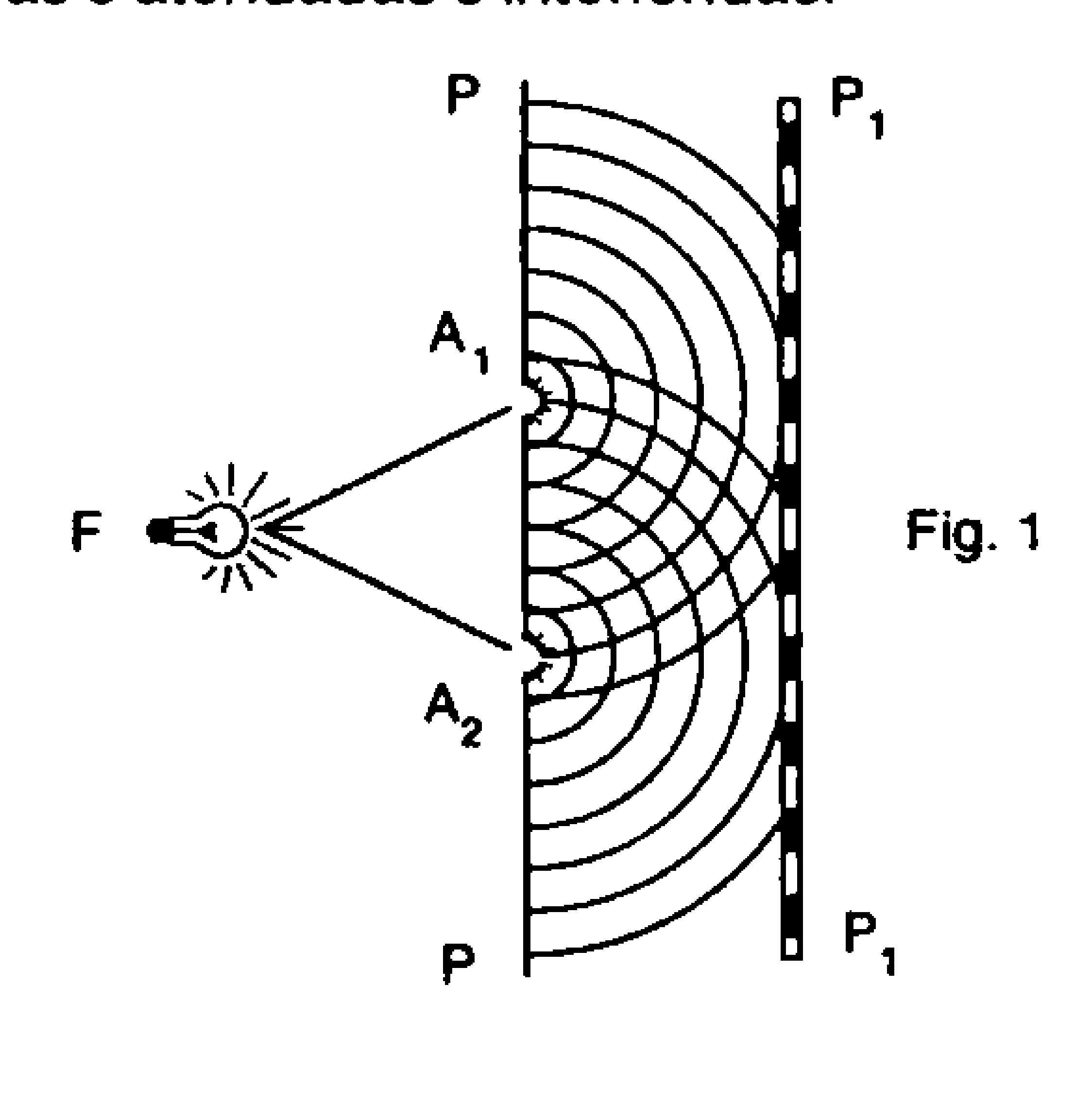


Fig. 1

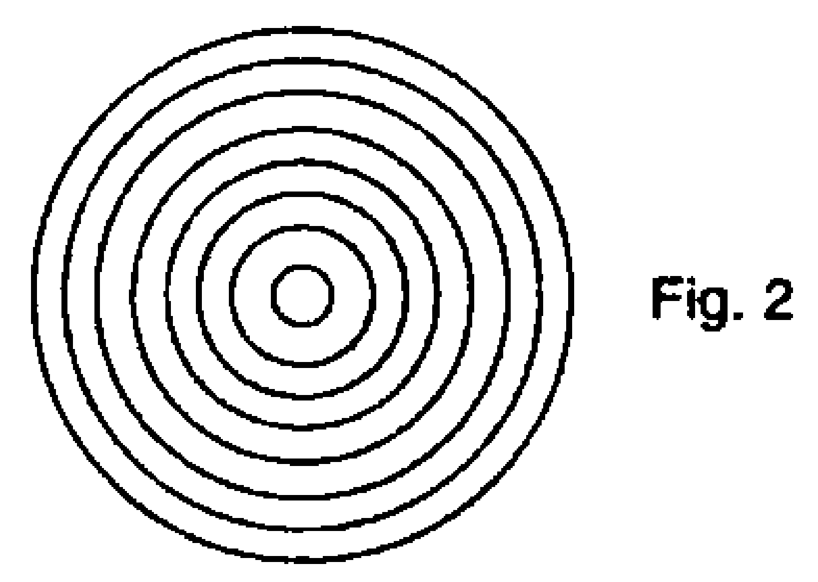


Fig. 2

Frente de la pantalla P_1

3. POLARIZACIÓN

Los rayos de la luz son como un eje al rededor del cual se realizan vibraciones en diferente dirección. En otras palabras son ondas que tienen diferentes planos de vibración, planos que se cortan en la línea que marca la dirección de las ondas, La polarización de la

http://librosysolucionarios.net

luz consiste en reducir todas estas vibraciones a una posición plana definida que puede ser vertical, horizontal o cualquier otra definida inclinación. Esta polarización plana es el tipo más sencillo de polarización. Se puede polarizar muy fácilmente un rayo de luz haciéndolo pasar a través de un cristal de turmalina.

Figura 1

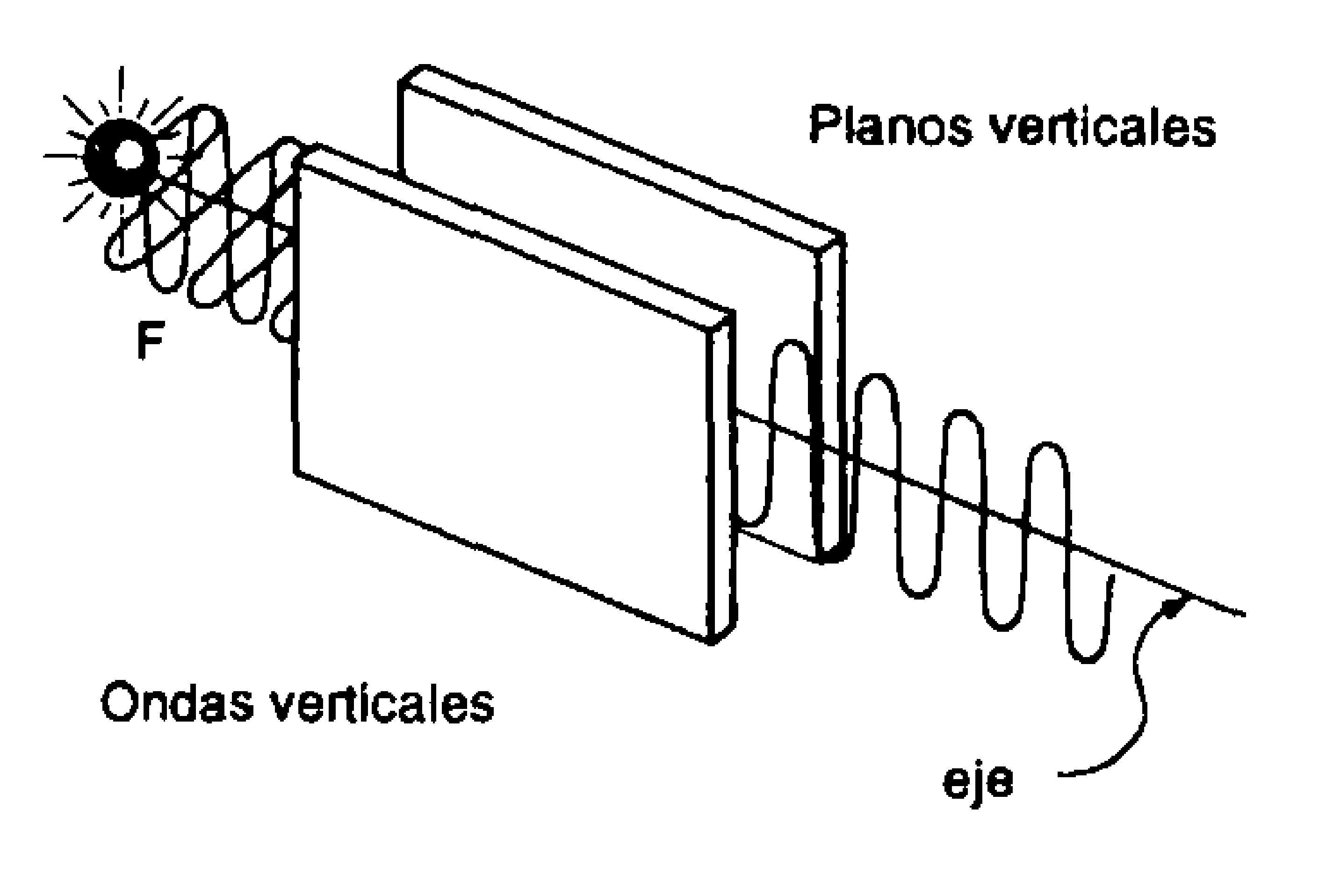
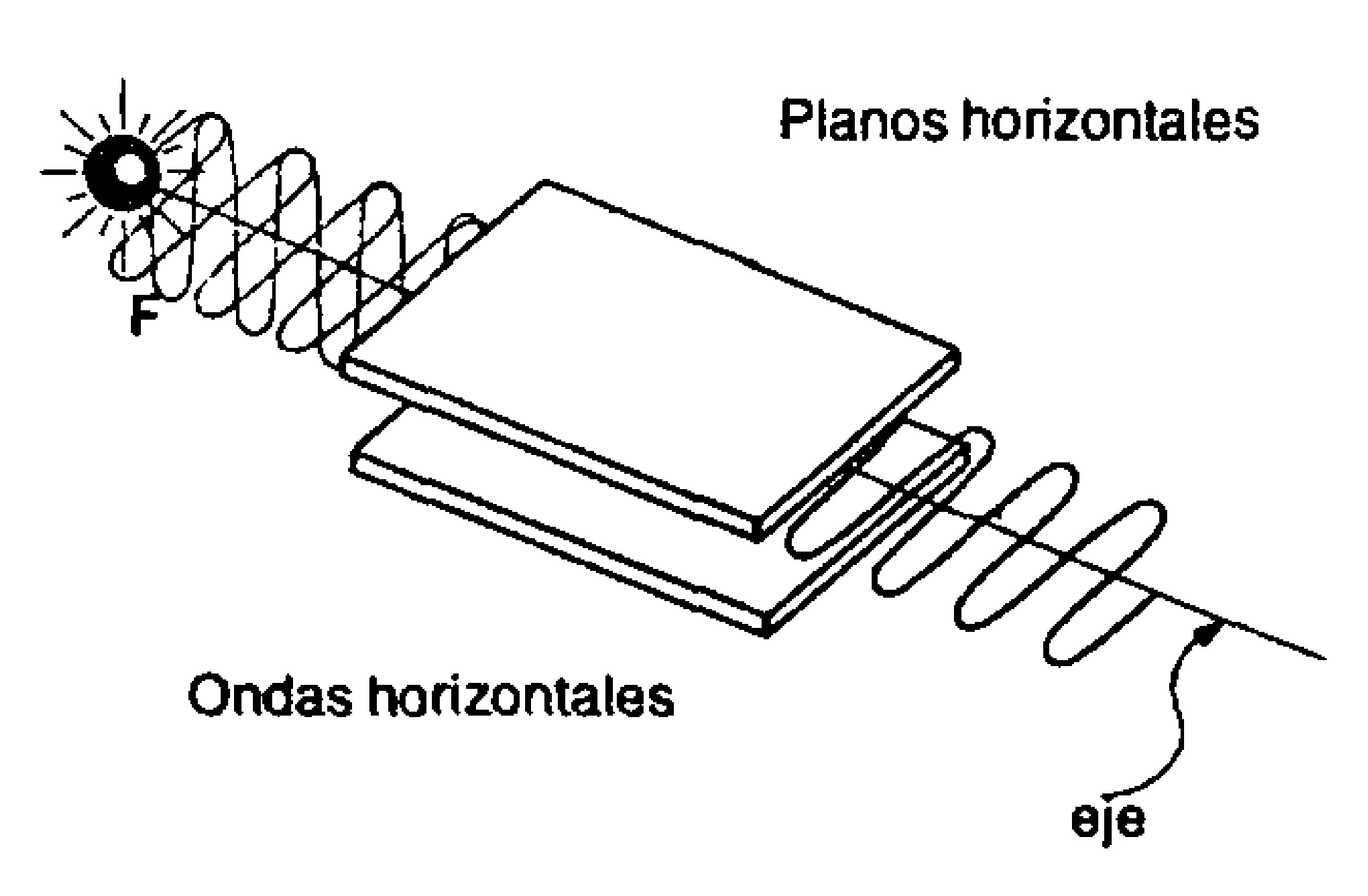


Figura 2



Sean "F" los focos en las figuras 1 y 2 , los rayos salen con vibraciones alrededor suyo en varias direcciones obligada.

En la figura 1 la onda que pasa queda obligada a oscilar verticalmente, ésta es una onda polarizada en un plano; en la figura 2 la onda que pasa queda obligada a oscilar horizontalmente, esta es también una onda polarizada en un plano.

http://librosysolucionarios.net

BIBLIOGRAFÍA

1. FÍSCA PARA ESTUDIANTES DE CIENCIAS E INGENIERÍA

   Robert Resnick - David Holliday, Editorial CECSA México

2. INTRODUCCIÓN A LA FÍSICA

   Marcelo Alonso y Virgilio Acosta, Ediciones Cultural. Colombia

3. FISICA PARA CIENCIAS E INGENIERÍA

   John P. Mc kelvey - Howard Grotch, Editorial HARLA. México

4. FÍSICA GENERAL

   Beatriz Alvarenga - Antonio Máximo, Editorial HARLA. México

5. CURSO DE FÍSICA GENERAL

   S. Frish - A. Timoreva, Editorial MIR. Moscú

6. FÍSICA GENERAL

   Maiztegui - Sábato, Editorial Kapeluz. Buenos Aires

7. FÍSICA FUNDAMENTAL

   Mario Velasco - Alejandro Estrada, Eitorial CECSA

8. CURSO DE FÍSICA

   Jorge Vidal, Editorial Stela. Buenos Aires

http://librosysolucionarios.net

OBRAS DE LA "COLECCION GOÑI" PUBLICADAS POR EDITORIAL INGENIERIA E.I.R.L. ESPECIAL PARA ESTUDIANTES DE SECUNDARIA, POSTULANTES A UNIVERSIDADES Y ESTUDIANTES DE INGENIERIA Y CIENCIAS

TEXTOS ESPECIALES DE CONSULTA

BASE MATEMATICA
ARITMETICA PRACTICA
ARITMETICA RAZONADA (curso nuevo)
ALGEBRA
GEOMETRIA
GEOMETRIA PRACTICA
TRIGONOMETRIA
TRIGONOMETRIA MODERNA
FISICA GENERAL
FISICA FUNDAMENTAL
QUIMICA GENERAL
TEORIA DE CONJUNTOS
FORMULARIO MATEMATICO
QUIMICA ORGANICA
NOMENCLATURA (Química Inorgánica)
HABILIDAD VERBAL (Letras)
APTITUD ACADEMICA
EL RAZ. MAT. en la modernización Educ.
RAZONAMIENTO MATEMATICO
EL ARTE DE RAZONAR
(Cálculo Diferencial Geometría Analítica)
PROBLEMAS SELECTOS
Aritmética, Algebra, Geometría,
Trigonometría, Física, Química
EXAMEN DE ADMISION (Solucinario):
Aritmética, Algebra, Geometría,
Trigonometría, Física, Química.

EDITORIAL INGENIERIA E.I.R.L.
Av. Angamos Este 310 - 2
MIRAFLORES
TEL/FAX (01) 446-9568
LIMA - PERU

http://librosysolucionarios.net